

Algebra II esimese kontrolltöö näidis

kevad 2026

variant A

1. Leida korpuse \mathbb{C} vähim alamring, mis sisaldab kompleksarvu i .
2. Tõestada, et kui a on rühma G element, siis $\text{ord}(a) = \text{ord}(a^{-1})$.
3. Olgu R Eukleidese ring. Tõestada, et kui $a, b, u \in R$ ja u on pööratav, siis $\text{SÜT}(au, b) = \text{SÜT}(a, b)$.
4. Kasutades Lagrange'i interpolatsioonivalemit konstrueerida polünoom järgmise väärtuste tabeli põhjal:

c	0	1	2	3
$f(c)$	1	-1	-3	1

5. Eraldada polünoomi

$$f(X) = X^6 - 2X^5 - 9X^4 + 4X^3 + 31X^2 + 30X + 9 \in \mathbb{C}[X]$$

kordsed tegurid (s.t. leida polünoom $g(X)$, millel on samad taandumatud tegurid kui polünoomil $f(X)$, aga kordsusega 1) ja esitada polünoom $f(X)$ taandumatute tegurite korrutisena.

Algebra II esimese kontrolltöö näidis

kevad 2026

variant B

1. Näidata, et hulk

$$H = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \{1, -1\}\}$$

on multiplikatiivse rühma

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

normaalne alamrühm. Tõestada, et faktorrühm $GL_n(\mathbb{R})/H$ on isomorfne rühmaga (\mathbb{R}^+, \cdot) .

2. Tõestada, et kujutus

$$\varphi : \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

mis on defineeritud võrdusega

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \right) := a + b\sqrt{3}$$

on ringide homomorfism.

3. Teha kindlaks, kas ringis $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ leidub elementidel 3 ja $1 + \sqrt{-5}$ suurim ühistegur ja vähim ühiskordne.

4. Leida polünoomide

$$\begin{aligned} f(X) &= X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, \\ g(X) &= X^3 + X^2 - X - 1 \end{aligned}$$

suurim ühistegur $d(X)$ ringis $\mathbb{R}[X]$. Leida ka sellised polünoomid $u(X), v(X) \in \mathbb{R}[X]$, et $d(X) = u(X)f(X) + v(X)g(X)$.

5. Leida a nii, et -1 oleks polünoomi

$$f(X) = X^5 - aX^2 - aX + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

vähemalt kahekordne juur.