

ALGEBRA II
praktikumiülesanded

Kevad 2026

Sisukord

1. Algebralised struktuurid, homomorfismid, isomorfismid	3
2. Alamalgebrad	4
3. Faktoralgebrad. Rühma elemendi järk	4
4. Jaguvus	7
5. Polünoomide jäägiga jagamine ja SÜT	8
6. Polünoomi juured	10
8. Mitme muutuja polünoomid	11
9. Polünoomi lahutuskorpus	13
10. Vektorruumi alamruumide otsesumma	13
11. Matriksi Jordani normaalkuju	14
12. Funktsionaalid ja vormid	16
13. Ruutvormid	17

1. Algebralised struktuurid, homomorfismid, isomorfismid

1. Näidata, et kujutus $\varphi \mapsto \cos \varphi + i \sin \varphi$ on homomorfism reaalarvude aditiivsest rühmast mooduliga üks kompleksarvude multiplikatiivsesse rühma. Leida selle homomorfismi tuum.

2. Tõestada, et ei leidu ühtegi surjektiivset homomorfismi rühmast $(\mathbb{Q}, +)$ rühma $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Olgu $\varphi : G \rightarrow G'$ rühmade homomorfism. Tõestada, et $\text{Im}(\varphi)$ on Abeli rühm parajasti siis, kui $xyx^{-1}y^{-1} \in \text{Ker}(\varphi)$ iga $x, y \in G$ korral.

4. Tõestada, et rühmade homomorfism on injektiivne parajasti siis, kui selle tuum on 1-elementiline.

5. Tõestada, et maatriksid kujul $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$, moodustavad korpuse, mis on isomorfne korpusega, mis koosneb reaalarvudest kujul $a + b\sqrt{3}$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$.

6. Olgu G ratsionaalarvude aditiivne rühm ja $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Tõestada, et

1. kujutus $\varphi : G \rightarrow G$, $\varphi(a) = qa$, on rühma G automorfism;

2. teistsuguseid automorfisme rühmal G ei ole.

7. Tõestada, et

1. reaalarvude aditiivne rühm on isomorfne positiivsete reaalarvude multiplikatiivse rühmaga;

2. ratsionaalarvude aditiivne rühm ei ole isomorfne positiivsete ratsionaalarvude multiplikatiivse rühmaga;

3. korrapärase kolmnurga sümmeetriateisenduste rühm on isomorfne substitutsioonirühmaga S_3

4. tetraeedri rühm on isomorfne rühmaga A_4 ;

5. kuubi ja oktaeedri pöörete rühmad on isomorfsed rühmaga S_4 .

8. Leida kompleksarvude korpuse kõik automorfismid, mis jätavad paigale kõik reaalarvud.

9. Tehke kindlaks, kas rühmad $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ ja $(\mathbb{Z}_4, +)$ on isomorfsed.

10. Tõestada, et kui $\varphi : R \rightarrow S$ on ringide isomorfism ja R on korpus, siis ka S on korpus.

11. Tõestada, et kui ring R on isomorfne nullitegureita ringiga S , siis ka R on nullitegureita.

12. Olgu X mittetühi hulk. Tõestada, et monoidid $(\mathcal{P}(X), \cup)$ ja $(\mathcal{P}(X), \cap)$ on isomorfsed.

13. Tõestada, et lõplikumõõtmelise vektorruumi iga sürjektiivne lineaarteisendus on automorfism. Kas sama väide kehtib ka lõpmatumõõtmelise vektorruumi korral?

14*. Kas ring, milles kehtib samasus $x^3 = x$, on kommutatiivne?

15*. Tõestada, et iga vähemalt kolmeelemendiline lõplik rühm omab automorfismi, mis ei ole samasusteisendus. Kas sama väide kehtib ka lõpmatute rühmade korral?

2. Alamalgebrad

16. Tõestada, et hulk $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ on rühma $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ normaalne alamrühm.

17. Leida rühma a) $(\mathbb{Z}_6, +)$, b) $(\mathbb{Z}_8, +)$, c) $(S_3, \circ)$ kõik alamrühmad.

18. Tõestada, et kahe alamrühma ühend on alamrühm parajasti siis, kui üks neist alamrühmadest sisaldub teises.

19. Olgu $(G, \cdot)$ Abeli rühm, olgu k fikseeritud täisarv ja $H = \{a^k \mid a \in G\}$. Tõestada, et

1. H on G alamrühm;

2. kujutus $\varphi : G \rightarrow H$, mis on defineeritud võrdusega $\varphi(a) = a^k$, on sürjektiivne homomorfism ning leida selle homomorfismi tuum.

20. Tõestada, et hulk $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ on ringi $\text{Mat}_2(\mathbb{Z})$ alamring.

21. Leida korpuse $\mathbb{C}$ vähim alamring ja alamkorpus, mis sisaldavad arvu 1) i , 2) $1 + i$, 3) $2i$.

22. Kas ring, mis ei ole korpus, võib sisaldada alamringi, mis on korpus?

3. Faktoralgebrad. Rühma elemendi järk

23. Leida rühma S_3 kõik vasakpoolsed ja parempoolsed kõrvalklassid alamrühma järgi, mis on tekitatud transpositsiooni $(1, 2)$ poolt. Kas see alamrühm on normaalne?

24. Olgu K rühma G mittetühi alamhulk, kusjuures iga $a, b, c \in K$ korral $ab^{-1}c \in K$. Tõestada, et K on rühma G paremoolne kõrvalklass mingi alamrühma H järgi.

25. Olgu G nullist erinevate kompleksarvude multiplikatiivne rühm ja H kõigi selliste nullist erinevate kompleksarvude hulk, mis asuvad kas reaalsel või imaginaarsel teljel.

1. Tõestada, et H on rühma G alamrühm.
2. Leida rühma G kõrvalklassid alamrühma H järgi. Kuidas võiks neid kujutada kompleksstasandil?
3. Tõestada, et faktorrühm G/H on isomorfne rühmaga $(U, \cdot)$, kus $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

26. Vaatleme järgmisi multiplikatiivseid maatriksrühmi:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\},$$

$$H = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \{1, -1\}\},$$

$$K = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\},$$

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

$$L = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid |\det(A)| = 1\},$$

$$M = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \in \mathbb{R}^+\}.$$

Tõestada, et

1. $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$;
2. $GL_n(\mathbb{R})/H \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$;
3. $GL_n(\mathbb{R})/K \cong (\mathbb{Z}_2, +)$;
4. $GL_n(\mathbb{C})/L \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$;
5. $GL_n(\mathbb{C})/M \cong (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$.

27. Kas alamhulk I on ringi R ideaal, kui

1. $I = \mathbb{Z}$ ja $R = \mathbb{Z}[X]$;
2. $I = n\mathbb{Z}[X]$ — täisarvuliste kordajatega polünoomide hulk, mille kõik kordajad jaguvad naturaalarvuga $n > 1$, ja $R = \mathbb{Z}[X]$;
3. $I = \mathbb{N}$ ja $R = \mathbb{Z}$;
4. $I = \mathbb{Z}$ ja $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ (Gaussi täisarvude ring);
5. $I = \{a + bi \mid a, b \in 3\mathbb{Z}\}$ ja $R = \mathbb{Z}[i]$;
6. $I = \mathbb{Z}[X]$ ja $R = \mathbb{Q}[X]$;
7. $I = \{f(X) \in \mathbb{Z}[X] \mid \text{polünoomi } f(X) \text{ vabaliige on paarisarv}\}$ ja $R = \mathbb{Z}[X]$;
8. $I = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$ ja $R = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
9. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ ja $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;

$$10. I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ja } R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

28. Tõestada, et ringi $\mathbb{R}[X]$ faktoring peaideaali $(X^2 + 1)\mathbb{R}[X]$ järgi on isomorfne kompleksarvude korpusega.

29. Olgu R kõigi funktsioonide $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ring, kus tehted on defineeritud punktivii-siliselt, ning olgu $c \in \mathbb{R}$. Tõestada, et

1. kujutus $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$, mis on defineeritud vördusega $\varphi(f) = f(c)$ on ringide homomorfism;
2. $\text{Ker}\varphi = \{f \in R \mid f(c) = 0\}$;
3. faktoring $R/\text{Ker}\varphi$ on isomorfne korpusega $\mathbb{R}$.

30. Olgu $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ Gaussi täisarvude ring ja $I = \{a + bi \mid a, b \text{ on paarisarvud}\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

1. Näidata, et I on ringi R ideaal.
2. Leida ringi R kõrvalklassid ideaali I järgi.
3. Leida faktoringis R/I mõned nullitegurid, näidates sellega, et R/I ei ole korpus.

31. Leida ringi $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ kõik kahepoolsed ideaalid.

32. Olgu $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Tõestada, et kujutus $f : R \rightarrow \mathbb{Z}$, mis on defineeritud vördusega $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a - b$, on ringide homomorfism. Leida selle homomorfismi tuum ja faktoring $R/\ker f$.

33. Tõestada, et kommutatiivse ringi faktoring on kommutatiivne ring.

34. Rühmas $(GL_2(\mathbb{C}), \cdot)$ leida järgmiste elementide järgud:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

35. Leida rühmas S_3 kõigi elementide järgud. Kas see rühm on tsükliline?

36. Leida järgmiste elementide järgud vastavas rühmas:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5;$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6;$$

$$3. \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*;$$

$$4. \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \in \mathbb{C}^*;$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R});$$

$$6. \bar{7} \in \mathbb{Z}_{15};$$

$$7. \bar{7} \in U(\mathbb{Z}_{15});$$

$$8. \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_{99}).$$

37. Tõestada, et kui G on rühm ja $a, b \in G$, siis

$$1. \text{ord}(a) = \text{ord}(a^{-1}); \quad 2. \text{ord}(a) = \text{ord}(b^{-1}ab); \quad 3. \text{ord}(ab) = \text{ord}(ba).$$

38. Tõestada, et kui lõplik rühm G kujutub homomorfselt rühmale G' , kusjuures element $a \in G$ kujutub elemendiks $a' \in G'$, siis

$$1. a \text{ järk jagub } a' \text{ järguga}; \quad 2. G \text{ järk jagub } G' \text{ järguga}.$$

39. Olgu $G = \langle a \rangle$ n -ndat järku tsükliline rühm ja $b = a^k$. Tõestada, et

$$1. \text{elemendi } b \text{ järk on } \frac{n}{d}, \text{ kus } d = \text{SÜT}(n, k);$$

$$2. \text{element } b \text{ on rühma } G \text{ moodustaja siis ja ainult siis, kui } n \text{ ja } k \text{ on ühistegurita}.$$

40. Rühmas $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ leida järgmiste elementide järgud: $z_k = \cos \frac{2k\pi}{150} + i \sin \frac{2k\pi}{150}$, kus $k = 25, 20, 13$.

41. Olgu a rühma G p -ndat järku element (p on algarv). Tõestada, et iga täisarvu m korral kas $a^m = 1$ või a^m järk on p .

42. Leida n -ndat järku tsüklilise rühma $\langle a \rangle$ kõik moodustajad, kui n on a) 5, b) 10, c) 12.

43*. Oletame, et mingis mittetriviaalses rühmas on kõik ühikelemendist erinevad elemendid p -ndat järku. Tõestada, et p on algarv.

4. Jaguvus

44. Olgu R nullitegureita kommutatiivne ring. Tõestada, et mistahes $a, b, c \in R$ korral

$$1. a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c; \quad 2. a \mid b \Rightarrow a \mid bc.$$

45. Olgu R nullitegureita kommutatiivne ring. Tõestada, et mistahes $a, b, c, u \in R$ korral

1. u on pööratav $\Rightarrow \text{SÜT}(au, b) = \text{SÜT}(a, b)$;

2. $\text{SÜT}(a + bc, b) = \text{SÜT}(a, b)$.

46. Leida arvude a) 975 ja 645, b) 231 ja 178 suurim ühistegur ringis $\mathbb{Z}$.

47. Tõestada, et ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ ei ole faktoriaalne.

48. Kas ring $\mathbb{Z}_8[x]$ on faktoriaalne? Põhjendada!

49. Teha kindlaks, kas elementidel a, b ringist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ on olemas suurim ühistegur ja vähim ühiskordne, kui 1) $a = 3, b = 1 + \sqrt{-5}$; 2) $a = 6, b = 3 + 3\sqrt{-5}$; 3) $a = 5, b = 1 + \sqrt{-5}$.

50. Tõestada, et

1. *Gaussi täisarvude ring* $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ on Eukleidese ring;

2. ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ei ole Eukleidese ring;

3. ring $\left\{ \frac{a+b\sqrt{-3}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ on sama paarsusega on Eukleidese ring.

5. Polünoomide jäägiga jagamine ja SÜT

51. Ringis $\mathbb{R}[X]$ leida jagatis $q(X)$ ja jääk $r(X)$, mis tekib polünoomi $f(X)$ jagamisel polünoomiga $g(X)$, kui

1. $f(X) = X^4 - 4X^3 + 5X^2 + X - 1, g(X) = X^2 - 2X - 3$;

2. $f(X) = 5X^4 - X^2 + 6, g(X) = X^2 + 3X + 2$;

3. $f(X) = 2X^2 - 3X + 1, g(X) = X^3 + 4$;

4. $f(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6, g(X) = X^2 - 3X + 1$.

52. Milliste a, b ja c väärtuste korral jagub polünoom $X^4 + aX^2 + b$ polünoomiga $X^2 + cX + 1$ ringis $\mathbb{Q}[X]$?

53. Milliste a ja b väärtuste korral jagub polünoom $X^4 + a$ polünoomiga $X^2 + bX + 1$ ringis $\mathbb{Q}[X]$?

54. Kas polünoom $2X + 1$ on pööratav a) ringis $\mathbb{Z}_4[X]$, b) ringis $\mathbb{Z}_5[X]$, c) ringis $\mathbb{Z}[X]$?

55. Leida kõik ülimalt teise astme taandumatud polünoomid üle korpuse $\mathbb{Z}_3$.

56. Tuua näiteid polünoomidest, mille ühine tegur on $X + 1$.

57. Tõestada, et kui K on kommutatiivne korpus, $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$ ja $f(X), g(X) \in K[X]$, siis $\text{SÜT}(f(X), g(X)) = \text{SÜT}(\alpha f(X), \beta g(X))$.

58. Leida ringis $\mathbb{R}[x]$ polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ suurim ühistegur, kui

1. $f(X) = x^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$, $g(X) = X^3 + X^2 - X - 1$;
2. $f(X) = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$, $g(X) = 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$;
3. $f(X) = X^4 + 2X^3 + 2X + 2$, $g(X) = X^3 + 3X + 2$.

59. Leida polünoomide $f(X)$ ja $g(X)$ jaoks ringis $\mathbb{Q}[X]$ sellised polünoomid $u(X)$ ja $v(X)$, et $\text{SÜT}(f(X), g(X)) = u(X)f(X) + v(X)g(X)$, kui

1. $f(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, $g(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$;
2. $f(X) = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g(X) = X^2 - X + 1$;
3. $f(X) = X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12$, $g(X) = X^3 - 5X^2 - 3X + 17$.

60. Olgu $d(X)$ n . astme polünoomi $f(X)$ ja m . astme polünoomi $g(X)$ suurim ühistegur, kusjuures $d(X)$ aste on k . Tõestada, et leiduvad (üheselt määratud) ülimalt $(m - k - 1)$. astme polünoom $u(X)$ ja ülimalt $(n - k - 1)$. astme polünoom $v(X)$ nii, et $u(X)f(X) + v(X)g(X) = d(X)$.

61. Määramata kordajate meetodil leida polünoomide $f(X)$ ja $g(X)$ jaoks ringis $\mathbb{Q}[X]$ sellised polünoomid $u(X)$ ja $v(X)$, et $u(X)f(X) + v(X)g(X) = 1$, kui

1. $f(X) = X^3$, $g(X) = (1 - X)^2$;
2. $f(X) = X^4$, $g(X) = X^3 - 3X^2 + 4$;
3. $f(X) = X^3 + 3X + 3$, $g(X) = X^2 - X - 2$;
4. $f(X) = X^4 - 4X^3 + 1$, $g(X) = X^3 - 3X^2 + 1$.

62. Leida ringis $\mathbb{Q}[X]$ vähima astmega polünoom, mis annab

1. polünoomiga $(X - 1)^2$ jagamisel jäägi 1 ja polünoomiga $(X + 1)^2$ jagamisel jäägi 5;
2. polünoomiga $(X - 1)^2$ jagamisel jäägi $2X$ ja polünoomiga $(X - 2)^3$ jagamisel jäägi $3X$.

63. Ringides $\mathbb{Z}_3[X]$, $\mathbb{Z}_5[X]$ ja $\mathbb{Q}[X]$ leida polünoomide $f(X)$ ja $g(X)$ suurim ühistegur ja vähim ühiskordne, kui

1. $f(X) = X^3 + X^2 + 2X + 2$, $g(X) = X^2 + X + 1$;
2. $f(X) = X^4 + X^3 - X^2 + 1$, $g(X) = X^3 - 2X - 1$;
3. $f(X) = X^4 - 2X^2 + 2X - 2$, $g(X) = X^3 - X^2 + 1$.

6. Polünoomi juured

64. Leida polünoomi $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ kordajate summa, kui

1. $f(X) = (2 - 5X + X^3)^{211}(3 - 7X + 9X^2 - 5X^3)^{135}$;

2. $f(X) = (7 - 3X - 3X^5)^{100}(5 - X^2 - 5X^7)^{1000}$.

65. Leida kolmanda astme polünoom, millel on ühekordne juur 2 ja kahekordne juur -1 .

66. Leida ringis $\mathbb{C}[X]$ jagatis $q(X)$ ja jääk $r(X)$, mis tekib polünoomi $f(X)$ jagamisel polünoomiga $g(X)$, kui

1. $f(X) = 2X^5 - 5X^3 - 8X$, $g(X) = X + 3$;

2. $f(X) = 4X^3 + X^2$, $g(X) = X + 1 + i$;

67. Kasutades Horneri skeemi leida polünoomi $f(X)$ juure c kordsus, kui

1. $f(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$, $c = 2$;

2. $f(X) = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$, $c = -2$;

3. $f(X) = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 6X + 9$, $c = 3$.

68. Polünoomi $f(X)$ jagamisel polünoomidega $X - 1$ ja $X - 2$ tekivad vastavalt jäägid 1 ja 2. Leida jääk, mis tekib $f(X)$ jagamisel polünoomiga $(X - 1)(X - 2)$.

69. Tõestada, et 1 on järgmiste polünoomide kolmekordne juur:

1. $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$, $n \geq 2$;

2. $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$, $n \geq 1$;

3. $(n-2m)X^n - nX^{n-m} + nX^m - (n-2m)$, $n \geq 3$ ja $n \geq m$.

70. Leida a , kui -1 on polünoomi $X^5 - aX^2 - aX + 1$ vähemalt kahekordne juur.

71. Leida tingimus, mille korral polünoomil $X^5 + 10aX^3 + 5bX + c$ leidub kolmekordne nullist erinev juur.

72. Milliste p, q ja r korral jagub polünoom $f(X)$ polünoomiga $(X - 1)^3$ ringis $\mathbb{R}[X]$, kui

1. $f(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$;

3. $f(X) = pX^4 + qX^2 + rX + 1$?

2. $f(X) = X^4 + pX^3 + qX^2 + r$;

73. Milliste a väärtuste korral omab polünoom $f(X)$ kordset juurt 1 ning milline on selle juure kordsus, kui

$$1. f(X) = X^3 + aX^2 + 3X - 1; \quad 3. f(X) = 3X^4 - 6X^3 + aX^2 - 2X + 1?$$

$$2. f(X) = 2X^3 - X^2 + aX + 3;$$

74. Tõestada, et polünoomil $f(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ ei ole kordseid juuri.

75. Polünoomi $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + s$ kahe juure summa on võrdne kahe ülejäänud juure summaga. Kuidas on omavahel seotud selle polünoomi kordajad?

76. Kasutades Lagrange'i interpolatsioonivalemit konstrueerida polünoom järgmiste väärtuste tabelite põhjal:

$$1. \begin{array}{c|cccc} c & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(c) & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array};$$

$$3. \begin{array}{c|cccc} c & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(c) & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array};$$

$$2. \begin{array}{c|cccc} c & 1 & i & -1 & -i \\ \hline f(c) & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array};$$

$$4. \begin{array}{c|ccccc} c & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(c) & 13 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{array}.$$

77. Leida polünoom $g(X)$, millel on samad taandumatud tegurid, kui polünoomil $f(X)$, kuid kordsusega 1 (s.t. eraldada polünoomi $f(X)$ kordsed tegurid), ning lahutada polünoom lineaartegurite korrutiseks üle $\mathbb{C}$, kui

$$1. f(X) = X^6 - 2X^5 - 9X^4 + 4X^3 + 31X^2 + 30X + 9;$$

$$2. f(X) = X^6 - 2X^5 - X^4 + 4X^3 - X^2 - 2X + 1;$$

$$3. f(X) = X^6 - 4X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 7X^2 - 4X + 1;$$

$$4. f(X) = X^5 - 8X^4 + 25X^3 - 38X^2 + 28X - 8.$$

78* Algebraiseks täisarvuks nimetatakse kompleksarvu, mis on mingi unitaarse täisarvuliste kordjatega polünoomi juur. Tõestada, et algebraliste täisarvude summa ja korrutis on samuti algebralised täisarvud.

8. Mitme muutuja polünoomid

79. Avaldada järgmised sümmeetrilised polünoomid sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu:

$$1. f(X_1, X_2, X_3) = X_1^4 X_2 + X_1^4 X_3 + X_2^4 X_1 + X_2^4 X_3 + X_3^4 X_1 + X_3^4 X_2;$$

$$2. f(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 5X_1 + 5X_2 + 5X_3 - 2;$$

$$3. f(X_1, X_2, X_3) = (X_1^2 + X_2^2)(X_1^2 + X_3^2)(X_2^2 + X_3^2);$$

$$4. f(X_1, X_2, X_3) = X_1^5 X_2^4 + X_1^5 X_3^4 + X_1^4 X_2^5 + X_1^4 X_3^5 + X_2^5 X_3^4 + X_2^4 X_3^5;$$

5. $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^4 X_2^4 X_3 + X_1^4 X_2 X_3^4 + X_1 X_2^4 X_3^4 + X_2^4 X_3^4 X_4 + X_1^4 X_4^4 X_3 + X_1^4 X_4^4 X_2 + X_1^4 X_3^4 X_4 + X_1^4 X_2^4 X_4 + X_3^4 X_4^4 X_2 + X_3^4 X_4^4 X_1 + X_2^4 X_4^4 X_3 + X_2^4 X_4^4 X_1$;
6. $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^3 X_2 + X_1^3 X_3 + X_1^3 X_4 + X_1 X_2^3 + X_2^3 X_3 + X_2^3 X_4 + X_1 X_3^3 + X_2 X_3^3 + X_3^3 X_4 + X_4^3 X_1 + X_4^3 X_2 + X_4^3 X_3$.

80. Avaldada avaldis

1.

$$\frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_3} + \frac{X_3}{X_1} + \frac{X_2}{X_1} + \frac{X_3}{X_2} + \frac{X_1}{X_3};$$

2.

$$\frac{(X_1 - X_2)^2}{X_1 + X_2} + \frac{(X_2 - X_3)^2}{X_2 + X_3} + \frac{(X_3 - X_1)^2}{X_3 + X_1}$$

sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu.

81. Leida sümmeetrilise polünoomi

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_1^3(X_2 + X_3) + X_2^3(X_1 + X_3) + X_3^3(X_1 + X_2)$$

väärtus kohal (c_1, c_2, c_3) , kus c_1, c_2, c_3 on polünoomi

$$h(X) = X^3 - X^2 - 4X + 1$$

kompleksarvulised juured.

82. Leida selline 3-nda astme polünoom $g(X)$, mille juurteks on polünoomi $f(X) = X^3 + X^2 + 2$ juurte kuubid.

83. Leida selline 3-nda astme polünoom $g(X)$, mille juurteks on polünoomi $f(X) = X^3 + X + 1$ juurte pöördarvud.

84. Leida selline 3-nda astme polünoom $g(X)$, mille juurteks on polünoomi $f(X) = X^3 - X^2 + 2X - 1$ juurte paarikaupa korrutised.

85. Leida polünoomide a) $3X^5 - X^3 + X + 2$, b) $X^n + aX^{n-1} + b$ ($n \geq 3$) kõigi kompleksarvuliste juurte korrutis ja ruutude summa.

86. Leida a , kui on teada, et polünoomi $X^3 - 7X + a$ üks juur on kaks korda suurem kui teine juur.

87. Leida a nii, et polünoomi $X^3 + 12X^2 + a$ kahe juure summa oleks võrdne kolmanda juurega.

88. Leida polünoomi $X^4 - 16X^3 + 86X^2 - 176X + 105$ kõik juured teades, et nad moodustavad aritmeetilise jada.

89. Olgu c_1 ja c_2 täisarvuliste kordajatega polünoomi $g(X) = X^2 + aX + b$ juured ja $f(X)$ suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõestada, et $f(c_1) + f(c_2)$ on täisarv.

90. Leida kõigi n -nda astme kompleksarvuliste ühejuurte summa ja korrutis, kui $n \geq 2$.

91. Lahendada üle kompleksarvude järgmised võrrandisüsteemid:

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24, \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3. \end{cases}$$

92*. Tõestada, et iga $k \in \{1, \dots, n\}$ ja $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ korral $\sqrt[k]{\sigma_k(x+y)} \geq \sqrt[k]{\sigma_k(x)} + \sqrt[k]{\sigma_k(y)}$.

9. Polünoomi lahutuskorpus

93. Teha kindlaks, kas polünoom $X^4 - 11X^2 + 18$ on lahutuv ringis $\mathbb{Q}[X]$.

94. Näidata, et polünoomidel $f(X) = (X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1)$ ja $g(X) = X^5 - 3X^3 + X^2 - 3$ üle korpuse $\mathbb{Q}$ on sama lahutuskorpus.

95. Teha kindlaks, kas korpus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ on polünoomi $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ lahutuskorpus.

96. Leida polünoomi $X^4 + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ lahutuskorpus. (Loeme teadaolevaks, et $X^4 + X^2 - 1$ on taandumatu ringis $\mathbb{Q}[X]$.)

97. Leida polünoomi $X^3 + \bar{2}X^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ lahutuskorpus.

98. Tõestada, et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on algebraline arv, konstrueerides 4-nda astme polünoomi üle $\mathbb{Q}$, mille juureks ta on.

99*. Tõestada, et polünoomi $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ (kus $n > 1$) lahutuskorpus on korpuse $\mathbb{Q}$ mingi $\varphi(n)$. järku laiend L (s.t. L on $\varphi(n)$ -mõõtmeline vektorruum üle $\mathbb{Q}$). Siin $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on Euleri funktsioon.

10. Vektorruumi alamruumide otsesumma

100. Tõestada, et vektorruum $\mathbb{R}^n$ on alamruumide

$$L_1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\},$$

$$L_2 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 = a_2 = \dots = a_n\}$$

otsesumma.

101. Näidata, et vektorruum $\mathbb{R}^4$ on alamruumide $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ja $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ otsesumma, kus $a_1 = (2, 3, 11, 5)$, $a_2 = (1, 1, 5, 2)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$ ja $b_1 = (2, 1, 3, 2)$, $b_2 = (1, 1, 3, 4)$, $b_3 = (5, 2, 6, 2)$. Esitada vektor $c = (2, 0, 0, 3)$ summana $c = a + b$, kus $a \in L_1$ ja $b \in L_2$.

102. Tõestada, et vektorruum $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on sümmeetriliste maatriksite alamruumi L_1 ja kaldsümmeetriliste maatriksite alamruumi L_2 otsesumma. Esitada maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

summana $A = B + C$, kus $B \in L_1$ ja $C \in L_2$.

103. Milliste mittetriviaalsete alamruumide otsesumma on tasandi kõigi vabavektorite vektorruum?

104. Tõestada, et kui vektorruum V esitub otsesummana $V = U \dot{+} W_1 = U \dot{+} W_2$ ja $W_2 \subseteq W_1$, siis $W_1 = W_2$.

105. Tõestada, et kui vektorruum V esitub otsesummana $V = U \dot{+} W$, siis $V/U \cong W$.

106. Tõestada, et n -mõõtmelise vektorruumi V iga alamruumi L_1 jaoks leidub täiend, s.t. selline alamruum L_2 , et $V = L_1 \dot{+} L_2$. Kas selline alamruum L_2 on üheselt määratud?

107. Leida ülimalt n -nda astme polünoomide vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ alamruumi $L_1 = \{f(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mid f(1) = 0\}$ täiend.

108. Tõestada, et n -mõõtmelise vektorruum V on ühemõõtmeliste alamruumide $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ otsesumma, kus $\{e_1, \dots, e_n\}$ on selle vektorruumi mistahes baas.

109* Vektorruumi V lineaarteisendust $P : V \rightarrow V$ nimetatakse **projektoriks**, kui $P \circ P = P$. Olgu $P_1, \dots, P_n$ lõplikumõõtmelise vektorruumi V projektorid. Tõestada:

1. kui $P_i \circ P_j = 0$ iga $i \neq j$ korral, siis

$$V = \text{Im}(P_1) \dot{+} \dots \dot{+} \text{Im}(P_n) \dot{+} (\text{Ker}(P_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(P_n));$$

2. kui $P_1 + \dots + P_n = \text{id}_V$, siis $P_i \neq P_j = 0$ iga $i \neq j$ korral ja $V = \text{Im}(P_1) \dot{+} \dots \dot{+} \text{Im}(P_n)$.

11. Maatriksi Jordani normaalkuju

110. Tõestada, et mistahes ruutmaatriksite $A_1, \dots, A_m$ korral

- $\text{rank}(\text{diag}(A_1, \dots, A_m)) = \text{rank}(A_1) + \dots + \text{rank}(A_m)$;
- $(\text{diag}(A_1, \dots, A_m))^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_m^k)$.

111. Tõestada, et kui $k, m \in \mathbb{N}$, siis

$$\text{rank}((J_k(0))^m) = \begin{cases} k - m, & \text{kui } m < k; \\ 0, & \text{kui } m \geq k. \end{cases}$$

112. Leida nilpotentse matriksi

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Jordani normaalkuju.

113. Leida matriksi

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jordani normaalkuju.

114. Leida vektorruumi V (üle $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse φ kanooniline baas ja matriks selle baasi suhtes, kui selle lineaarteisenduse matriks mingi baasi e suhtes on

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

115. Kasutades matriksi Jordani normaalkuju arvutada

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}, \quad b) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}, \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 1 & -20 & -22 \\ -1 & 15 & 17 \end{pmatrix}^{2020}.$$

116. Milline on maatriksi A Jordani normaalkuju, kui on teada, et $A^2 = A$ (s.t. maatriks A on idempotentne)?

117. Tõestda, et maatriksi $A + kE$ Jordani normaalkuju on $J(A) + kE$, kus $J(A)$ on maatriksi A Jordani normaalkuju.

118. Ülimalt teise astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide (muutujate X ja Y suhtes) vektorruumis on antud kujutus $\varphi : f(X, Y) \mapsto f(X+1, Y+1)$. Veenduda, et φ on lineaarteisendus ning leida tema maatriksi Jordani normaalkuju.

119. Tuua näide kahest sama järku mittesarnasest ruutmaatriksist, mille karakteristikud ja minimaalsed polünoomid langevad kokku.

120. Kasutades Jordani normaalkuju ja eksponentfunktsiooni Taylори rida leida e^A , kus

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

121. Olgu K algebraliselt kinnine korpus. Tõestada, et kui maatriksi $A \in \text{Mat}_n(K)$ ainus omaväärtus on 0, siis A on nilpotentne maatriks.

122*. Tõestada, et kui K on lõpmatu korpus, L on tema laiend ja $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ on sarnased ringis $\text{Mat}_n(L)$, siis A ja B on sarnased juba ringis $\text{Mat}_n(K)$.

12. Funktsionaalid ja vormid

123. Teha kindlaks, kas φ on lineaarne funktsionaal vektorruumil V üle korpuse $\mathbb{R}$, kui

1. $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^n c_k x_k$, kus $V = \mathbb{R}^n$ ja $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ on fikseeritud;
2. $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$, kus $V = \mathbb{E}_3$ ja $\vec{a}$ on fikseeritud vektor
3. $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = 5x_2^3$, $V = \mathbb{R}^n$
4. $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = a$, kus $V = \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$ on fikseeritud;
5. $\varphi(f(x)) = \int_a^b g(x)f(x)dx$, kus $V = C_{[a,b]}$ ja $g(x) \in C_{[a,b]}$ on fikseeritud

124. Olgu V vektorruum üle korpuse K . Tõestada, et kui $f : V \times V \rightarrow K$ on bilineaarne funktsionaal, siis iga $a \in V$ korral on kujutus $f_a : V \rightarrow K, x \mapsto f(x, a)$, lineaarne funktsionaal.

125. Näidata, et kujutus $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ on (sümmeetriline) bilineaarne funktsionaal vektorruumil V , kui

1. $\varphi(x, y) = 0$, V on suvaline;
2. $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $V = \mathbb{E}_3$;
3. $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{a}\vec{x}\vec{y}$, $V = \mathbb{E}_3$ ja $\vec{a} \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud;
4. $\varphi(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, $V = C_{[a,b]}$;
5. $\varphi(f(x), g(x)) = f(x_0)g(x_0)$, kus $V = C_{[a,b]}$ ja x_0 on vahemiku (a, b) fikseeritud punkt;
6. $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, kus V on suvaline ja φ_1, φ_2 on fikseeritud lineaarsed funktsionaalid vektorruumil V .

126. Kas kujutus $\varphi(x, y) = x_1y_1^2$, kus x_1, y_1 on vektorite x, y esimesed koordinaadid mingi baasi suhtes, on n -mõõtmelise vektorruumi V bilineaarne funktsionaal?

127. Leida vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) bilineaarse funktsionaali φ maatriks, kui

1. $V = \mathbb{E}_3$, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ja baas on 1) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 2) $\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}, 2\vec{k}$;
2. $V = \mathbb{E}_3$, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{a}\vec{x}\vec{y}$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja baas on 1) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 2) $\vec{i} - \vec{j}, \vec{k}, \vec{j}$;
3. $V = \mathbb{C}$, $\varphi(a_1 + b_1i, a_2 + b_2i) = a_1a_2 + b_1b_2$ ja baas on 1) $1, i$, 2) $1 + i, 1 - i$.

128. Maatriksi $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ **jäljeks** (tähistus $\text{tr}(A)$) nimetatakse summat $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \in K$. Olgu $V = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Tõestada, et

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto n\text{tr}(AB) - \text{tr}(A)\text{tr}(B)$$

on bilineaarne funktsionaal vektorruumil V . Kas f on sümmeetriline? Kui jah, siis milline on talle vastav ruutfunktsionaal?

129. Olgu $V = K^2$, kus K on korpus. Näidata, et kujutus $f : V \times V \rightarrow K$, mis on defineeritud võrdusega

$$f((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

on bilineaarne funktsionaal. Leida selle funktsionaali maatriks baasi $\{(1, 0), (0, 1)\}$ suhtes.

13. Ruutvormid

130. Leida ruutvormi (üle $\mathbb{R}$) kanooniline kuju ja üks muutujavahetus, mis viib sellele kujule:

1. $2X_1^2 + 2X_2^2 - 5X_3^2 + 2X_1X_2$;
2. $X_1^2 + X_2X_3 + X_3X_4$;
3. $X_1^2 + X_2^2 + 5X_3^2 - 6X_1X_2 - 2X_1X_3 + 2X_2X_3$;
4. $-X_1^2 - 2X_2^2 - 3X_3^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 - 2X_2X_3$;
5. $4X_1^2 + 5X_2^2 + 6X_3^2 - 4X_1X_2 + 4X_2X_3$;
6. $5X_1^2 + 8X_2^2 + 5X_3^2 + 4X_1X_2 - 8X_1X_3 + 4X_2X_3$;
7. $X_1^2 + 5X_2^2 - X_3^2 + 6X_1X_2 + 4X_2X_3$;
8. $X_1X_4 + X_2X_3$;
9. $X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4$.

131. Teha kindlaks, millised ruutvormid on omavahel ekvivalentsed

1. $f_1 = X_1^2 - X_2X_3$, $f_2 = Y_1Y_2 - Y_3^2$, $f_3 = Z_1Z_2 + Z_3^2$;
2. $f_1 = X_1^2 + 4X_2^2 + X_3^2 + 4X_1X_2 - 2X_1X_3$, $f_2 = Y_1^2 + 2Y_2^2 - Y_3^2 + 4Y_1Y_2 - 2Y_1Y_3 - 4Y_2Y_3$,
 $f_3 = -4Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - 4Z_1Z_2 + 4Z_1Z_3 + 18Z_2Z_3$.

132. Kui palju on ruutvormide ekvivalentsiklasse n -mõõtmelisel vektorruumil 1) üle $\mathbb{C}$, 2) üle $\mathbb{R}$?

133. Viia ruutvorm

1. $2X_1^2 + 5X_2^2 + 5X_3^2 + 4X_1X_2 - 4X_1X_3 - 8X_2X_3$;
2. $8X_1^2 - 7X_2^2 + 8X_3^2 + 8X_1X_2 - 2X_1X_3 + 8X_2X_3$

kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega.

134. Leida kõik a väärtused, mille korral ruutvorm on positiivselt määratud:

1. $2X_1^2 - X_2^2 + 4X_3^2 + (2a - 1)X_1X_2 + a^2X_2X_3$;
2. $X_2^2 + X_3^2 + 4aX_1X_2 + a^2X_1X_3$.

135. Leida kõik a väärtused, mille korral ruutvorm on negatiivselt määratud:

1. $aX_1^2 + X_2^2 + 3X_3^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 4X_2X_3$;
2. $-2X_1^2 - 8X_2^2 - 3X_3^2 + 2aX_1X_2 + 4X_1X_3 - 2aX_2X_3$.

136*. Olgu $f(X_1, \dots, X_n)$ ja $g(X_1, \dots, X_n)$ ruutvormid üle $\mathbb{R}$, kusjuures g on positiivselt määratud. Tõestada, et kanooniline kuju $f = \lambda_1 Y_1^2 + \dots + \lambda_n Y_n^2$ on iga muutujate vahetuse korral, mis viib g normaalkujule, määratud üheselt liideta-vate järjekorra täpsuseni, kusjuures $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ on niinimetatud λ -võrrandi $\det(A - \lambda B) = 0$ lahendid, kus A ja B on vormide f ja g maatriksid.