

Kordamisküsimusi Algebra II eksamiks

Kevad 2026

Eksam on kirjalik ja selleks on aega 2 tundi. Eksamitöö eest on võimalik koguda kuni 50 punkti. Eksamitöö punktidele liidetakse praktikumide punktid ja lisapunktid (kui neid on) ning vastavalt kogutud punktide arvule kujuneb hinne standardse hindamiskaala põhjal.

Eksami ajal on materjale (nii elektroonilisi kui paberil) lubatud kasutada kuni kolmel korral kokku kuni 15 minuti jooksul. Kasutatavad materjalid tuleb eelnevalt panna esimeses reas olevale lauale.

Eksamil küsitakse loengumaterjalides sisalduvaid tõestusi ja definitsioone. Peab oskama tuua ka näiteid. Allpool on antud loetelu tõestustest, mis eksamil võivad esineda. Nii lihtsamate kui ka keerulisemate tõestuste hulgast tuleb eksamil täpselt üks tõestus.

Keerulisemad küsimused:

1. Tõestada teoreem polünoomide jäägiga jagamise kohta. (Teoreem 3.25)
2. Olgu R nullitegureita kommutatiivne ring, mille iga nullist erinev mittepööratav element on esitatav taandumatute elementide korrutisena. Tõestada, et ring R on faktoriaalne parajasti siis, kui selles kehtib niinimetatud Eukleidese lemma. (Teoreem 3.32)
3. Tõestada, et iga Eukleidese ring on faktoriaalne. (Teoreem 3.33)
4. Jagatiste korpuse konstruktsioon. (Teoreem 3.37 ja sellele eelnev.)
5. Tõestada, et iga sümmeetriline polünoom on esitatav polünoomina sümmeetrilistest põhipolünoomidest. (Teoreem 5.16)
6. Tõestada, et kui K on korpus ja $p \in K[X]$ on vähemalt teise astme taandumatu polünoom, siis saab konstrueerida korpuse K laiendi, milles polünoomil p leidub juur. (Lause 6.3)
7. Tõestada, et igal reaalarvuliste kordajatega mittekonstantsel polünoomil leidub kompleksarvuline juur. (Lause 6.9)
8. Tõestada teoreem, mis kirjeldab seoseid alamruumide lõplike sisemiste otsesummade ja vektorruumide otsekorrutiste vahel. (Teoreem 7.14)
9. Tõestada dimensioonide abil tarvilik ja piisav tingimus selleks, et vektorruumi lõplikumõõtmeliste alamruumide summa oleks otsesumma. (Teoreem 7.21. Võib ilma tõestamata eeldada, et teoreemi väide kehtib $m = 2$ korral.)
10. Tõestada, et kui vektorruumi V lineaarteisendusel φ leidub selline annulleeriv polünoom, mis lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis on lineaarteisendusel φ olemas kanooniline baas. (Teoreem 8.32)
11. Tõestada Cayley-Hamiltoni teoreem. (Teoreem 8.43)
12. Tõestada, et vektorruumi ja tema teise kaasruumi vahel on loomulik isomorfism. (Teoreem 9.14)

Lihtsamad küsimused:

1. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kujutus kahe rühma vahel oleks rühmade homomorfism. (Lause 1.8)
2. Tõestada, et kui kahe homomorfismi korrutis on olemas, siis see korrutis on homomorfism. (Lause 1.14)
3. Tõestada, et isomorfsusseos on ekvivalentsiseos kõigi Ω -algebrate klassil. (Lause 1.19)
4. Tõestada, et kui $\varphi : B \rightarrow A$ on Ω -algebrate homomorfism, siis $\varphi(B)$ on A alamalgebra. (Lause 1.29)
5. Tõestada, et Ω -algebra alamalgebrate ühisosa on alamalgebra. (Lause 1.31)
6. Tõestada Cayley teoreem: iga rühm on isomorfne mingi substituutsioonirühma alamrühmaga. (Teoreem 2.1)
7. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma alamrühma kaks vasakpoolset kõrvalklassi oleksid võrdsed. (Lause 2.4)
8. Tõestada, et rühma alamrühma kõik vasakpoolsed kõrvalklassid on sama võimsusega. (Lause 2.6)
9. Tõestada Lagrange'i teoreem lõpliku rühma alamrühma kohta. (Teoreem 2.8)
10. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma alamrühm oleks normaalne. (Lause 2.11)
11. Faktorrühma konstruktsioon. (Lause 2.12)
12. Tõestada rühmade homomorfismiteoreem. (Teoreem 2.16)
13. Tõestada, et sama järku tsüklilised rühmad on isomorfsed. (Teoreem 2.31)
14. Tõestada, et kui G on n -ndat järku tsükliline rühm moodustajaga g , siis element g^k on rühma G moodustaja parajasti siis, kui $\text{SÜT}(k, n) = 1$. (Lause 2.38)
15. Tõestada, et nullist erinevad elemendid a ja b on assotsieeritud nullitegureita kommutatiivses ringis R parajasti siis, kui leidub pööratav element $u \in R$ nii, et $a = bu$. (Lause 3.6)
16. Olgu $a, b, c, d \in R$, kus R on nullitegureita kommutatiivne ring. Tõestada, et kui d on a ja b suurim ühistegur, siis ka c on a ja b suurim ühistegur.
17. Olgu $a, b, d, m \in R \setminus \{0\}$, kus R on nullitegureita kommutatiivne ring. Tõestada, et kui $m = \text{VÜK}(a, b)$ ja $ab = md$, siis $d = \text{SÜT}(a, b)$. (Teoreem 3.16)
18. Olgu $a, b, d, m \in R \setminus \{0\}$, kus R on nullitegureita kommutatiivne ring. Tõestada, et kui $m = \text{VÜK}(a, b)$ ja $d = \text{SÜT}(a, b)$, siis $ab \sim md$. (Järeldus 3.18)
19. Põhjendada, et Eukleidese algoritmi abil saab Eukleidese ringis leida kahe elemendi suurimat ühistegurit. (Lk. 26)

20. Tõestada, et kui p, q on mitteassotsieeritud taandumatud polünoomid üle korpuse K , siis nende suurim ühistegur on 1.
21. Tõestada, et iga nullist erinev ratsionaalmurd on üheselt esitatav polünoomi ja lihtmurru summana. (Lause 3.43)
22. Tõestada Bézout' teoreem. (Teoreem 4.4)
23. Olgu $0 \neq f(X) \in R[X]$, kus R on nullitegureita kommutatiivne ring. Olgu c_1, \dots, c_m polünoomi $f(X)$ vastavalt k_1, \dots, k_m -kordsed juured, mis on paarikaupa erinevad. Tõestada, et leidub selline polünoom $g(X) \in R[X]$, et
- $$f(X) = (X - c_1)^{k_1} \dots (X - c_m)^{k_m} g(X),$$
- kusjuures ükski elementidest c_1, \dots, c_m ei ole polünoomi $g(X)$ juur. (Lause 4.9)
24. Tõestada Lagrange'i interpolatsioonivalem. (Lause 4.13)
25. Tõestada, et kui taandumatu polünoom $p \in \mathbb{R}[X]$ on polünoomi $f \in \mathbb{R}[X]$ k -kordne tegur, siis on ta tuletise f' $(k - 1)$ -kordne tegur. (Teoreem 4.16)
26. Tõestada, et üksliikmete leksikograafiline järjestus on järjestusseos. (Lemma 5.4)
27. Tõestada, et üksliikmete leksikograafiline järjestus on kooskõlas korrutamiseega. (Lemma 5.5)
28. Tõestada, et kui f ja g on nullist erinevad n muutuja polünoomid üle nullitegureita ringi R , siis fg kõrgeim liige on f ja g kõrgeimate liikmete korrutis. (Lause 5.6)
29. Tõestada Viete'i valemid. (Teoreem 5.14)
30. Tõestada, et iga mittekonstantse polünoomi jaoks üle korpuse leidub lahutuskorpus. (Teoreem 6.4)
31. Tõestada, et igal paaritu arvulise astmega reaalarvuliste kordajatega polünoomil leidub reaalarvuline juur. (Lause 6.7)
32. Tõestada algebra põhiteoreem. (Teoreem 6.10)
33. Tõestada, et vektorruumi V alamruumide U_1, \dots, U_n summa on vektorruumi V vähim alamruum, mis alamruume U_1, \dots, U_n sisaldab. (lause 7.6)
34. Tõestada kaks tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et vektorruumi alamruumide summa oleks otsesumma. (Teoreem 7.10)
35. Tõestada väide selle kohta, kuidas saab leida vektorruumi kahe lõplikumõõtmelise alamruumi summa baasi. (Lause 7.17)
36. Tõestada, et lõplikumõõtmelise vektorruumi baasi tükeldus tekitab selle vektorruumi lahutuse otsesummaks. (Lause 7.22)
37. Tõestada, et kui lõplikumõõtmeline vektorruum V on oma alamruumide otsesumma, siis nende alamruumide baaside ühend on V baas. (Lause 7.23)

38. Tõestada, et kui φ on vektorruumi V lineaarteisendus, siis V ühemõõtmelised φ -invariantsed alamruumid on parajasti φ omavektorite lineaarsed katted. (Lause 8.10)
39. Tõestada, et vektorruumi $V \neq \{0\}$ nilpotentsel lineaarteisendusel on täpselt üks omaväärtus, milleks on 0. (Lause 8.15)
40. Tõestada teoreem, mille abil saab leida Jordani kastide arvud nilpotentse maatriksi Jordani normaalkujus. (Teoreem 8.23)
41. Tõestada tulemus lineaarteisenduse ja tema maatriksi annulleerivate polünoomide kohta. (Lause 3.27)
42. Tõestada, et igal ruutmaatriksil üle korpuse on olemas annulleeriv polünoom. (Lause 8.30)
43. Tõestada, et kui vektorruumi V lineaarteisenduse φ annulleeriv polünoom lahutub kahe ühistegurita polünoomi korrutiseks, siis V lahutub teatud φ -invariantsete alamruumide otsesummaks. (Lause 8.31)
44. Tõestada, et nullist erinev polünoom on lineaarteisenduse annulleeriv polünoom parajasti siis, kui ta jagub selle lineaarteisenduse minimaalse polünoomiga. (Lause 8.35)
45. Tõestada tulemus, mis kirjeldab Jordani kasti minimaalset polünoomi. (Lause 8.40)
46. Tõestada, et Jordani maatriksi minimaalne polünoom on tema kastide minimaalsete polünoomide vähim ühiskordne. (Lause 8.42)
47. Tõestada, et lineaarteisendusel leidub kanooniline baas parajasti siis, kui tema karakteristlik polünoom lahutub lineaarpolünoomide korrutiseks. (Teoreem 8.44)
48. Tõestada, et vektorruumi baasi fikseerimine tekitab üksühese vastavuse lineaarsete funktsionaalide ja lineaarvormide vahel. (Lause 9.7)
49. Tõestada tulemus, mis kirjeldab lineaarse funktsionaali maatriksi muutumist üleminekul ühelt baasilt teisele. (Lause 9.8)
50. Tõestada tulemus vektorruumi baasi kaasbaasi kohta. (Lause 9.10)
51. Tõestada bilineaarse funktsionaali maatriksi teisenemise reegel üleminekul ühelt baasilt teisele. (Lause 9.20)
52. Tõestada, et kui korpuse karakteristika ei ole 2, siis ruutfunktsionaali määrav sümmeetriline bilineaarne funktsionaal on üheselt määratud. (Lause 9.25)
53. Tõestada, et n -mõõtmelise vektorruumi ruutfunktsionaalide, n muutuja ruutvormide ja n -ndat järku sümmeetriliste ruutmaatriksite vahel on üksühene vastavus. (Lause 9.30)
54. Tõestada, et igal ruutfunktsionaalil on olemas kanooniline baas. (Teoreem 9.35)
55. Tõestada, et igal eukleidilise ruumi ruutfunktsionaalil on olemas ortonormeeritud kanooniline baas. (Teoreem 9.37)

56. Tõestada tulemus kompleksarvuliste kordajatega ruutvormi kanoonilise kuju kohta. (Lause 9.39)
57. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus kompleksarvuliste kordajatega ruutvormide ekvivalentsuseks. (Teoreem 9.41)
58. Tõestada, et reaalarvuliste kordajatega ruutvormi positiivsete kordajate arv tema kanoonilises kujus ei sõltu kanoonilisest baasist. (Teoreem 9.42)
59. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus reaalarvuliste kordajatega ruutvormide ekvivalentsuseks. (Teoreem 9.43)
60. Tõestada, et reaalarvuliste kordajatega ruutvorm on positiivselt määratud parajasti siis, kui tema maatriksi kõik peamiinorid on positiivsed. (Teoreem 9.48)

Mõisted, mida tuleb tunda: n -aarne algebraline tehe, tüüp, Ω -algebra, monoid, rühm, ring, korpus, vektorruum, homomorfism, endomorfism, isomorfism, automorfism, alamalgebra, alamhulga poolt tekitatud alamalgebra.

Alamrühma kõrvalklass, rühma järk, normaalne alamrühm, faktorrühm, rühmade homomorfismi tuum, loomulik projektsioon faktorrühmale, ringi ideaal, faktoring, vektorruumi faktorruum, tsükliline rühm, tsüklilise rühma tekitaja, rühma elemendi järk.

Jaguvus, assotsieeritud elemendid, suurim ühistegur, vähim ühiskordne, Eukleidese ring, jäägiga jagamine, polünoom, unitaarne polünoom, polünoomi aste, taandumatu element, taandumatu polünoom, faktoriaalne ring, ratsionaalmurd, ratsionaalmurru aste, lihtmurd, algmurd.

Polünoomi väärtus mingil kohal, polünoomi juur, polünoomi juure kordsus, lahutuv polünoom, polünoomi k -kordne tegur, polünoomi tuletis.

n -muutuja polünoom, üksliige, sarnased üksliikmed, polünoomi liige, üksliikme aste, polünoomi aste, üksliikmete leksikograafiline järjestus, homogeenne polünoom, sümmeetriline polünoom, sümmeetrilised põhipolünoomid.

Alamkorpus, korpuse laiend, korpuste isomorfism, polünoomi lahutuskorpus, algebraiselt kinnine korpus.

Vektorruumi alamruumide summa, alamruumide sisemine otsesumma.

Jordani kast, Jordani maatriks, blokk-diagonaalne maatriks, lineaarteisenduse kanooniline baas, maatriksi Jordani normaalkuju, φ -invariantne alamruum, ringi nilpotentne element ja tema nilpotentsuse indeks, lineaarteisenduse ja maatriksi annulleeriv polünoom, minimaalne polünoom.

Lineaarne funktsionaal, vektorruumi kaasruum, vorm, lineaarvorm, ruutvorm, lineaarse funktsionaali maatriks, üleminekumaatriks ühelt baasilt teisele, kaasbaas, teine kaasruum, bilineaarne funktsionaal, bilineaarse funktsionaali maatriks, bilineaarvorm, sümmeetriline bilineaarne funktsionaal, ruutfunktsionaal, korpuse karakteristika, ruutfunktsionaali maatriks, ruutvormi maatriks, ruutvormi kanooniline kuju, ruutfunktsionaali kanooniline baas, ekvivalentseid ruutvormid, ruutvormi normaalkuju (üle kompleksarvude ja reaalarvude), positiivselt (negatiivselt) määratud ruutvorm, ruutmaatriksi peamiinor.