Maatriksi Jordani normaalkuju

Vaatleme ruutmaatrikseid üle korpuse K ning eeldame, et kõik vaadeldavad vektorruumid on lõplikumõõtmelised. Elemendile $k \in K$ vastavaks m-ndat järku *Jordani kastiks* nimetatakse m-ndat järku ruutmaatriksit kujul

$$J_m(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & & & 0 \\ & k & 1 & & \\ & & k & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & k \end{pmatrix}.$$

(Siin ja edaspidi: kui mõned maatriksi elemendid on jäetud kirjutamata, siis see tähendab seda, et need elemendid on nullid.) *Jordani maatriks* on blokk-diagonaalne maatriks kujul

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_s)} \end{pmatrix}.$$

Vektorruumi V (üle korpuse K) lineaarteisenduse φ *annulleerivaks polünoomiks* nimetatakse nullist erinevat polünoomi $g(X) \in K[X]$, mille korral $g(\varphi)$ on nullteisendus, $g(\varphi) = 0$. Cayley-Hamiltoni teoreemi põhjal on lineaarteisenduse karakteristlik polünoom selle teisenduse annulleeriv polünoom. Kehtib järgmine väide (teoreem VIII.5.5, kõik viited on M. Kilbi raamatule „Algebra I“).

Teoreem 1 *Kui vektorruumi V (üle korpuse K) lineaarteisendusel φ leidub selline annulleeriv polünoom, mis lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis on teisendusel φ olemas kanooniline baas, s.t. baas, mille suhtes selle teisenduse maatriks on Jordani maatriks.*

Eriti oluline on selle teoreemi järgmine järeldus.

Järeldus 1 *Olgu V vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$. Siis igal lineaarteisendusel $\varphi \in End(V)$ on olemas kanooniline baas.*

Teiste sõnadega: iga maatriksi $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ korral leidub Jordani maatriks $J(A) \in Mat_n(\mathbb{C})$ ja regulaarne maatriks $C \in Mat_n(\mathbb{C})$ nii, et

$$C^{-1}AC = J(A).$$

Kui seejuures A on lineaarteisenduse φ maatriks mingi baasi e suhtes, siis maatriksi C veergudeks on kanoonilise baasi (tähistame seda B) vektorite koordinaadid baasi e suhtes. Maatriksit $J(A)$ nimetatakse maatriksi A *Jordani normaalkujuks*. Seega maatriksi A Jordani normaalkuju on iga maatriksiga A sarnane Jordani maatriks.

Selgitame pisut, kuidas näeb välja maatriksi Jordani normaalkuju. Olgu $\varphi \in End(V)$ ning olgu A teisenduse φ maatriks mingi baasi suhtes. Oletame, et teisenduse φ karakteristlik polünoom esitub kujul

$$g(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_m)^{r_m},$$

kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ on paarikaupa erinevad. Teoreemi VIII.5.4 põhjal on

$$V = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 1_V)^{r_1} \dotplus \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_2 1_V)^{r_2} \dotplus \ldots \dotplus \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_m 1_V)^{r_m},$$

kus 1_V on vektorruumi V samasusteisendus. Lisaks sellele on iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral alamruum $U_i := \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i 1_V)^{r_i}$ φ-invariantne, s.t. $\varphi(U_i) \subseteq U_i$.

Kui U on vektorruumi V mingi φ-invariantne alamruum, siis võime vaadelda vektorruumi U lineaarteisendust $\varphi_U : U \to U$, mis on defineeritud võrdusega

$$\varphi_U(u) = \varphi(u) \in U$$

iga $u \in U$ korral. Kui U on φ-invariantne ja $k \in K$, siis on U ka $(\varphi - ke)$-invariantne, sest

$$(\varphi - k1_V)(u) = \varphi(u) - ku \in U$$

iga $u \in U$ korral.

Vaatleme alamruumi U_1 ja teisendust $(\varphi - \lambda_1 1_V)_{U_1} : U_1 \to U_1$. See teisendus on nilpotentne, sest

$$((\varphi - \lambda_1 1_V)_{U_1})^{r_1}(a) = (\varphi - \lambda_1 1_V)^{r_1}(a) = 0$$

iga $a \in U_1 = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 1_V)^{r_1}$ korral. Nilpotentse lineaarteisenduse jaoks saab leida kanoonilise baasi teoreemi VIII.4.3. kasutades. Olgu B_1 teisenduse $(\varphi - \lambda_1 1_V)_{U_1}$ kanooniline baas (vektorruumis U_1). Siis teisenduse $(\varphi - \lambda_1 1_V)_{U_1}$ maatriks baasi B_1 suhtes on Jordani maatriks, mille peadiagonaalil on nullid. Et $\varphi = (\varphi - \lambda_1 1_V) + \lambda_1 1_V$, siis ka $\varphi_{U_1} = (\varphi - \lambda_1 1_V)_{U_1} + (\lambda_1 1_V)_{U_1}$ ning

$$\begin{aligned} A^{B_1}_{\varphi_{U_1}} &= A^{B_1}_{(\varphi - \lambda_1 1_V)_{U_1}} + A^{B_1}_{(\lambda_1 1_V)_{U_1}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ? & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & ? \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & ? \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

s.t. teisenduse φ_{U_1} maatriks baasi B_1 suhtes on Jordani maatriks, mille peadiagonaalil on kõikjal element λ_1.

Samamoodi saab leida kanoonilised baasid B_i kõigi teisenduste φ_{U_i} jaoks. Võtame $B := B_1 \cup \ldots \cup B_m$. Lause III.5.18 põhjal on B otsesumma $V = U_1 \dotplus U_2 \dotplus \ldots \dotplus U_m$ baas. Olgu $B_i = \{b_i^1, b_i^2, \ldots, b_i^{s_i}\}$, $i = 1, \ldots, m$. (Hiljem näeme, et $s_i = r_i$.) Siis maatriksi $A^{B_1}_{\varphi_{U_1}}$ kujust näeme, et iga $j \in \{1, \ldots, s_1\}$ korral

$$\varphi(b_1^j) = \varphi_{U_1}(b_1^j) = 0 \cdot b_1^1 + \ldots + \varepsilon b_1^{j-1} + \lambda_1 b_1^j + 0 \cdot b_1^{j+1} + \ldots + 0 \cdot b_1^{s_1} + 0 \cdot b_2^1 + \ldots + 0 \cdot b_m^{s_m},$$

kus ε on kas 0 või 1. Seega maatriksi A_φ^B s_1 esimest veergu, kuhu need koordinaadid kirjutatakse, on sellised, nagu veerud Jordani maatriksis olema peavad. Samamoodi on see ka ülejäänud veergudega. Järelikult A_φ^B on Jordani maatriks, B on φ kanooniline baas ja

$$J(A) = A_\varphi^B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\varphi_{U_1}}^{B_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{\varphi_{U_2}}^{B_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{\varphi_{U_m}}^{B_m}} \end{pmatrix}$$

Seega $J(A)$ näeb välja järgmiselt:

$$J(A) = \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} \end{matrix}}}_{r_1 \text{ veergu}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{matrix}}}_{r_m \text{ veergu}} \end{pmatrix}$$

Element $\lambda_i \in K$ peab peadiagonaalil esinema täpselt r_i korda (s.t. $s_i = r_i$) sellepärast, et maatriksid A ja $J(A)$ on sarnased ning sarnaste maatriksite karakteristlikud polünoomid on võrdsed (lause VIII.2.9).

1. ülesanne. Leida nilpotentse maatriksi

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}, \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Jordani normaalkuju.

Lahendus. a) Teame, et nilpotentse maatriksi ainus omaväärtus on 0. See tähendab, et maatriksi A Jordani normaalkuju $J(A)$ koosneb vaid kastidest $J_k(0)$:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Olgu s_k, $k = 1, 2, 3, 4$, Jordani kastide $J_k(0)$ arv maatriksis $J(A)$. Arvude s_1, s_2, s_3, s_4 leidmiseks lahendame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 & = & 4 - \operatorname{rank}(A) \\ s_2 + s_3 + s_4 & = & \operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(A^2) \\ s_3 + s_4 & = & \operatorname{rank}(A^2) - \operatorname{rank}(A^3) \\ s_4 & = & \operatorname{rank}(A^3) - \operatorname{rank}(A^4) \end{array} \right. . \tag{1}$$

Selleks leiame maatriksi A astaku:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seega $\operatorname{rank}(A) = 2$. Kuna $A^2 = A^3 = A^4 = \Theta$, siis $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A^3) = \operatorname{rank}(A^4) = 0$. See tähendab, et süsteem (1) on kujul

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 & = & 2 \\ s_2 + s_3 + s_4 & = & 2 \\ s_3 + s_4 & = & 0 \\ s_4 & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

ja selle lahendiks on $s_4 = s_3 = 0$, $s_2 = 2$, $s_1 = 0$. Sellega oleme saanud, et

$$J(A) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

2. ülesanne. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordani normaalkuju.

Lahendus. Leiame maatriksi A karakteristliku polünoomi:

$$\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3+\lambda & 0 & 1 \\ 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}(3-\lambda) \begin{vmatrix} -3+\lambda & 0 & 1 \\ -5 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(3-\lambda)^2(-1)^{3+3}(3-\lambda) \begin{vmatrix} -3+\lambda & 0 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(3-\lambda)^2(-3-\lambda)(-2-\lambda) = -(3-\lambda)^3(2+\lambda).
\end{aligned}$$

Selle polünoomi juured on $\lambda_1 = 3$ kordsusega $r_1 = 3$ ning $\lambda_2 = -2$ kordsusega $r_2 = 1$. Teooriast teame, et

$$J(B) = \begin{pmatrix} 3 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 3 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seega omaväärtusele -2 vastab üks esimest järku kast ning jääb leida vaid omaväärtusele 3 vastavate Jordani kastide arvud. Kuna selle omaväärtuse kordsus on 3, siis talle ei saa vastata 4. järku kaste, s.t. $s_4 = 0$. Niisiis tuleb s_1, s_2, s_3 leidmiseks lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 &= 3 - \operatorname{rank}(B-3E) \\ s_2 + s_3 &= \operatorname{rank}(B-3E) - \operatorname{rank}(B-3E)^2 \\ s_3 &= \operatorname{rank}(B-3E)^2 - \operatorname{rank}(B-3E)^3 \end{cases}.$$

Selleks leiame maatriksi $B - 3E$ astaku:

$$B - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seega $\operatorname{rank}(B-3E)=2$. Kuna

$$(B-3E)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -25 & 0 & 25 & 0\\ 25 & 0 & -25 & 0\end{pmatrix},\quad (B-3E)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 125 & 0 & -125 & 0\\ -125 & 0 & 125 & 0\end{pmatrix},$$

siis $\operatorname{rank}(B-3E)^2=\operatorname{rank}(B-3E)^3=1$. Süsteemi lahendamisel saame $s_1=1$, $s_2=1$ ja $s_3=0$. Sellega oleme saanud, et maatriksi B Jordani normaalkuju sisaldab ühte esimest ja ühte teist järku omaväärtusele 3 vastava kasti, s.t.

$$J(B)=\left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}} & & 0 & 0\\ & & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2}\end{array}\right).$$

3. ülesanne. Leida vektorruumi V (üle $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse φ kanooniline baas ja φ maatriks selle baasi suhtes, kui φ maatriks baasi e suhtes on

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7\\ 9 & -3 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix},\quad b)\ A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & -1\\ 6 & 1 & -1 & 1\\ -6 & -1 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 4 & -1 & 0\\ 3 & -6 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad d)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$e)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

a) Eespool nägime, et antud maatriksi ainus omaväärtus on 0 ja selle kordsus on 4. Seega $V=\operatorname{Ker}(\varphi-0\cdot 1_V)^4=\operatorname{Ker}\varphi^4$. Kuna $A^2=\Theta$, siis lineaarteisenduse φ nilpotentsuse indeks on 2 ja $\operatorname{Ker}\varphi^2=V$. Seega on meil V alamruumide jada

$$\{0\}=\operatorname{Ker}\varphi^0\subset\operatorname{Ker}\varphi^1\subset\operatorname{Ker}\varphi^2=V.$$

Leiame $\operatorname{Ker}\varphi$ mingi baasi. Kuna A on φ maatriks baasi e suhtes, siis φ tuuma kuuluvad sellised vektorid, mille koordinaatide vektorid baasi e suhtes ($\mathbb{R}^4$ elemendid) on sellise homogeense lineaarvõrrandisüsteemi lahendid, mille maatriks on A. $\operatorname{Ker}\varphi$ baasi leidmine on samaväärne selle võrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi leidmisega. Lahendame selle süsteemi Gaussi meetodil:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7\\ 9 & -3 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Valime sõltuvateks tundmatuteks x_2, x_3 ning avaldame need vabade tundmatute x_1, x_4 kaudu:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 - 5x_4, \\ x_3 &= 2x_4. \end{aligned}$$

Andes tundmatutele x_1, x_4 väärtused teist järku ühikmaatriksi ridadest saame lahendite fundamentaalsüsteemi vektoreiks (s.t. Kerφ baasiks)

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 3, 0, 0), \\ a_2 &= (0, -5, 2, 1). \end{aligned}$$

Täiendame nüüd Kerφ baasi a_1, a_2 vektorruumi V baasiks vektorite

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 0, 0, 0), \\ b_2 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

abil. Edasi leiame vektorid $\varphi(b_1)$ ja $\varphi(b_2)$ (täpsemalt öeldes nende koordinaatide vektorid baasi e suhtes). Korrutades maatriksit A paremalt veeruvektoritega b_1^T ja b_2^T saame, et

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= (3, 9, 0, 0), \\ \varphi(b_2) &= (-7, -1, -8, -4). \end{aligned}$$

Kuna vektorid $\varphi(b_1), \varphi(b_2) \in \mathrm{Ker}\varphi$ on lineaarselt sõltumatud ja $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = 2$, siis $\varphi(b_1), \varphi(b_2)$ on Kerφ baas. Seega φ kanooniline baas on

$$B = \{\varphi(b_1), b_1, \varphi(b_2), b_2\}.$$

Lisaks teame, et $J(A) = C^{-1}AC$, kus

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

on üleminekumaatriks esialgselt baasilt e kanoonilisele baasile B. Saadud vastuse kontrollimiseks võime võrduse $J(A) = C^{-1}AC$ asemel kontrollida samaväärset võrdust $CJ(A) = AC$, siis ei pea pöördmaatriksit leidma.

c) Leiame maatriksi A karakteristliku polünoomi:

$$\begin{aligned} |A - XE| &= \begin{vmatrix} -2-X & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1-X & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2-X & 4 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1-X & 0 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= (-4 + X^2 + 4)(1+X)^2 = X^2(1+X)^2. \end{aligned}$$

Selle polünoomi juured on $\lambda_1 = 0$ kordsusega $r_1 = 2$ ning $\lambda_2 = -1$ kordsusega $r_2 = 2$. Järelikult

$$V = \mathrm{Ker}(\varphi - 0 \cdot 1_V)^2 \dotplus \mathrm{Ker}(\varphi + 1 \cdot 1_V)^2 = \mathrm{Ker}(\varphi^2) \dotplus \mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)^2 = U_1 \dotplus U_2,$$

kus $U_1 = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ ja $U_2 = \mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)^2$. Seejuures $\dim(U_1) = 2 = \dim(U_2)$, U_1 ja U_2 on φ-invariantsed alamruumid ning $\psi_1 := \varphi_{U_1}$ ja $\psi_2 := (\varphi + 1_V)_{U_2}$ on nilpotentsed lineaarteisendused vastavalt vektorruumidel U_1 ja U_2. Leiame kanoonilise baasi nii ψ_1 kui ψ_2 jaoks.

Alustame teisendusest ψ_1. Teame, et

$$\{0\} = \mathrm{Ker}(\psi_1^0) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_1^1) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_1^2) = U_1.$$

Leiame $\mathrm{Ker}(\psi_1^1) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ baasi. Selleks lahendame homogeense lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga A:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Võttes vabaks tundmatuks x_2 saame lahendite fundamentaalsüsteemi ($\mathrm{Ker}(\psi_1)$ baasi), mis koosneb ühest vektorist $a_1 = (2, 1, 0, 0)$. Et $\dim(\mathrm{Ker}(\psi_1)) = 1 < \dim(U_1)$, siis tuleb leida veel ka $\mathrm{Ker}(\psi_1^2) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ baas. Teisenduse φ^2 maatriks baasi e suhtes on

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Võtame vastava homogeense lineaarvõrrandisüsteemi vabadeks tundmatuteks x_1, x_2. Siis

$$\begin{aligned} x_3 &= -2x_1 + 4x_2, \\ x_4 &= 3x_1 - 6x_2. \end{aligned}$$

Seega $\mathrm{Ker}(\psi_1^2)$ baasiks sobivad näiteks vektorid

$$\begin{aligned} a_2 &= (1, 0, -2, 3), \\ a_3 &= (0, 1, 4, -6). \end{aligned}$$

Kuna a_1 ja a_2 on lineaarselt sõltumatud, siis täiendab vektor a_2 alamruumi $\mathrm{Ker}(\psi_1)$ baasi ruumi U_1 baasiks. Et $\mathrm{Ker}(\psi_1)$ on ühemõõtmeline vektorruum, siis $\psi_1(a_2)$ on $\mathrm{Ker}(\psi_1)$ baas ja $\{\psi_1(a_2), a_2\}$ on ψ_1 kanooniline baas, kusjuures

$$\psi_1(a_2) = \varphi(a_2) = A(\overline{a_2})_e = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Leiame nüüd kanoonilise baasi ψ_2 jaoks. Selleks leiame $\mathrm{Ker}(\psi_2) = \mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasi. Selleks lahendame homogeense lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga $A + E$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Võttes vabadeks tundmatuteks x_3 ja x_4 saame Ker(ψ_2) baasiks

$$\begin{aligned} b_1 &= (0,0,1,0), \\ b_2 &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Kuna $\dim(U_2) = 2$, siis Ker$(\psi_2) = U_2$ ja b_1, b_2 on kanooniline baas ψ_2 jaoks. Seega kanooniline baas φ jaoks on

$$B = \{\varphi(a_2), a_2, b_1, b_2\}.$$

Kuna

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(a_2)) &= \varphi^2(a_2) = 0, \\ \varphi(a_2) &= \varphi(a_2), \\ \varphi(b_1) &= (\psi_2 - 1_V)(b_1) = \psi_2(b_1) - 1_V(b_1) = -b_1, \\ \varphi(b_2) &= (\psi_2 - 1_V)(b_2) = \psi_2(b_2) - 1_V(b_2) = -b_2, \end{aligned}$$

siis

$$J(A) = A_\varphi^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kusjuures üleminekumaatriks baasilt e baasile B on

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Maatriksil A on üksainus omaväärtus 1 kordsusega 4. Seega $V = \mathrm{Ker}(\varphi - 1_V)^4$. Tähistame $\psi := \varphi - 1_V$. Siis ψ maatriks baasi e suhtes on

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ja $(A - E)^3 = \Theta$, siis

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}\psi \subset \mathrm{Ker}\psi^2 \subset \mathrm{Ker}\psi^3 = V.$$

Lahendades homogeensed lineaarvõrrandisüsteemid maatriksitega $A-E$ ja $(A-E)^2$ saame $\mathrm{Ker}\psi$ baasiks

$$\begin{aligned} a_1 &= (-2,-1,1,0), \\ a_2 &= (1,0,0,1) \end{aligned}$$

ja $\mathrm{Ker}\psi^2$ baasiks

$$\begin{aligned} b_1 &= (1,1,0,0), \\ b_2 &= (-1,0,1,0), \\ b_3 &= (1,0,0,1), \end{aligned}$$

Täiendame süsteemi b_1, b_2, b_3 vektorruumi V baasiks vektoriga

$$c = (0,0,0,1).$$

Siis $\psi(c) = (0,1,1,0) \in \mathrm{Ker}\psi^2$ ja $\mathrm{Ker}\psi^2 = \mathrm{Ker}\psi \dotplus \langle \psi(c) \rangle$. Nüüd $\psi^2(c) = (-2,-2,2,2) \in \mathrm{Ker}\psi$. Kuna $\dim(\mathrm{Ker}\psi) = 2$, siis tuleb vektor $\psi^2(c)$ täiendada alamruumi $\mathrm{Ker}\psi$ baasiks. Teeme seda vektori $a_2 = (1,0,0,1)$ abil. Seega φ kanooniline baas on

$$B = \{\psi^2(c), \psi(c), c, a_2\}$$

ja

$$J(A) = \mathrm{diag}(J_3(1), J_1(1)).$$

e) Maatriksi A karakteristlik polünoom on $-(1+X)^5$, mis tähendab, et ainus omaväärtus on $\lambda_1 = -1$ ja selle kordsus on $n_1 = 5$. Seega $V = \mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)^5 = U_1$. Tähistame $\psi := (\varphi + 1_V)_{U_1} = \varphi + 1_V$. Siis

$$A_\psi = A + E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lahendame homogeense lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga $A+E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Võttes vabadeks muutujateks x_1, x_3, x_5 saame üldlahendi

$$\begin{aligned} x_4 &= x_1, \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

ja $\mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasiks

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,1,0,1,0), \\ a_2 &= (0,0,1,0,0), \\ a_3 &= (0,0,0,0,1). \end{aligned}$$

Kuna $(A+E)^2 = 0$, siis $\mathrm{Ker}(\psi^2) = V$. Täiendame $\mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasi a_1, a_2, a_3 vektorruumi V baasiks vektoritega

$$\begin{aligned} b_1 &= (0,-1,0,0,0), \\ b_2 &= (0,0,0,-1,0). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \psi(b_1) &= (1,1,1,1,1), \\ \psi(b_2) &= (1,1,0,1,1). \end{aligned}$$

Kuna süsteem $\psi(b_1), \psi(b_2), a_3$ on lineaarselt sõltumatu, siis saame süsteemi $\psi(b_1), \psi(b_2)$ täiendada $\mathrm{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasiks vektori a_3 abil. Seega ψ kanooniline baas on

$$B = \{\psi(b_1), b_1, \psi(b_2), b_2, a_3\}$$

ja

$$A_\psi^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et $A_\psi^B = A_{\varphi+1_V}^B = A_\varphi^B + A_{1_V}^B = A_\varphi^B + E$, siis

$$A_\varphi^B = A_\psi^B - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$