

Polünoomide jagamine

Ülesannete näisilahendusi

8. aprill 2026. a.

(Kui pole öeldud teisiti, siis polünoomid on ringist $\mathbb{R}[x]$.)

Ülesanne 1 Jagada polünoom f jäägiga polünoomiga g , kui

a) $f = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 1$, $g = x^2 - 2x - 3$;

b) $f = 4x^3 - 2x + 25$, $g = x + 2$;

c) $f = 2x^2 - 3x + 1$, $g = x^3 + 4$.

Lahendus. a) Jagame:

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 1 \quad |x^2 - 2x - 3 \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 \quad \quad \quad |x^2 - 2x + 4 \\ \hline -2x^3 + 8x^2 + x - 1 \\ -2x^3 + 4x^2 + 6x \\ \hline 4x^2 - 5x - 1 \\ 4x^2 - 8x - 12 \\ \hline 3x + 11 \end{array} .$$

Seega

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 1 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 4) + (3x + 11).$$

Vastus: jagatis on $x^2 - 2x + 4$ ning jääk on $3x + 11$.

b), c) Need jätame iseseisvaks harjutamiseks.

Ülesanne 2 Jagada polünoom $2x^4 + x^2 + 2x$ jäägiga polünoomiga $x^2 - 2$ tõlgendades nende polünoomide kordajaid vastavate jäägiklassidena ringist \mathbb{Z}_3 .

Lahendus. Jagame:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + x^2 + 2x \quad |x^2 - 2 \\ 2x^4 - x^2 \quad \quad \quad |2x^2 + 2 \\ \hline 2x^2 + 2x \\ 2x^2 \quad \quad \quad - 1 \\ \hline 2x + 1 \end{array} .$$

Vastus: jääk on $2x + 1$ ning jagatis on $2x^2 + 2$.

Ülesanne 3 Milliste a, b ja c väärtuste korral jagub polünoom $x^4 + ax^2 + b$ polünoomiga $x^2 + cx + 1$ ringis $\mathbb{Q}[x]$?

Lahendus. Oletame, et $x^2 + cx + 1$ jagab polünoomi $x^4 + ax^2 + b$. Siis leidub selline polünoom g , millega esimest polünoomi korrutades saame teise. Kuna $\mathbb{Q}[x]$ on nullitegureita, siis polünoomide korrutamisel polünoomide astmed liituvad ja seega g peab olema teise astme polünoom, kusjuures x^2 kordaja peab olema 1. Olgu $g = x^2 + ux + v$. Siis

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + cx + 1)(x^2 + ux + v) = x^4 + (u + c)x^3 + (v + uc + 1)x^2 + (cv + u)x + v.$$

Seega saame, et arvud a, b, c, u, v peavad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} u + c = 0 \\ v + uc + 1 = a \\ cv + u = 0 \\ b = v. \end{cases}$$

Järelikult $u = -c$, $a = b - c^2 + 1$ ja $cb - c = 0$. Viimane võrdus annab, et $c(b - 1) = 0$. Selle võrduse kehtimiseks on kaks võimalust.

1) $c = 0$. Siis $u = 0$ ja $a = b + 1$. Seega saame kolmikud $(b + 1, b, 0)$, kus $b \in \mathbb{Q}[x]$. Kontrollime:

$$\begin{array}{r} x^4 + (b+1)x^2 + b \mid x^2 + 1 \\ x^4 + \quad \quad x^2 \quad \mid x^2 + b \\ \hline \quad \quad \quad bx^2 + b \\ \quad \quad \quad \underline{bx^2 + b} \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

2) $b = 1$. Siis $v = 1$ ja $a = -c^2 + 2$. Siit saame kolmikud $(-c^2 + 2, 1, c)$, kus $c \in \mathbb{Q}[x]$. Kontrollime:

$$\begin{array}{r} x^4 \quad \quad \quad + (-c^2 + 2)x^2 \quad \quad \quad + 1 \mid x^2 + cx + 1 \\ x^4 + \quad cx^3 + \quad \quad \quad x^2 \quad \quad \quad \mid x^2 - cx + 1 \\ \hline \quad \quad \quad -cx^3 + (-c^2 + 1)x^2 \quad \quad \quad + 1 \\ \quad \quad \quad \underline{-cx^3 - \quad \quad \quad c^2x^2 - cx} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x^2 + cx + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{x^2 + cx + 1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Vastus: sobivateks kolmikuteks $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ on kolmikud $(b + 1, b, 0)$, kus $b \in \mathbb{Q}$, ja kolmikud $(-c^2 + 2, 1, c)$, kus $c \in \mathbb{Q}$.

Ülesanne 4 Kas polünoom $2x + 1$ on pööratav a) ringis $\mathbb{Z}_4[x]$, b) ringis $\mathbb{Z}_5[x]$, c) ringis $\mathbb{Z}[x]$?

Lahendus. a) On pööratav, sest

$$(2x + 1)(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1 = 1.$$

b), c) Ei ole pööratav, sest ringid \mathbb{Z}_5 ja \mathbb{Z} on nullitegureita.

Ülesanne 5 Tuua näiteid polünoomidest, mille ühine tegur on $x + 1$.

Lahendus. Näiteks polünoomid $(x + 1)(x - 1)$ ja $(x + 1)(x + 1)$.

Ülesanne 6 Kasutades Eukleidese algoritmi leida polünoomide f ja g jaoks sellised polünoomid u ja v , et $uf + vg = \text{SÜT}(f, g)$, kui

a) $f = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad g = x^3 + x^2 - x - 1;$

b) $f = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9, \quad g = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$

Lahendus. a) Jagame polünoomi f polünoomiga g :

$$\begin{array}{r|l} f = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 & |x^3 + x^2 - x - 1 = g \\ x^4 + x^3 - x^2 - x & |x = q_1 \\ \hline -2x^2 - 3x - 1 & =: r_1 \end{array}$$

Jagame polünoomi g polünoomiga r_1 korrutades vahetulemusi sobivate nullist erinevate konstantidega:

$$\begin{array}{r|l} g = x^3 + x^2 - x - 1 & | -2x^2 - 3x - 1 = r_1 \\ 2g = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 & | -x; 1 \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + x & \\ g_1 := & \frac{-x^2 - 3x - 2}{-2x^2 - 3x - 1} \\ 2g_1 = & \frac{-2x^2 - 6x - 4}{-2x^2 - 3x - 1} \\ r_2 := & \frac{-3x - 3}{-3x - 3} \end{array}$$

Jagame polünoomi r_1 polünoomiga $-\frac{1}{3}r_2$:

$$\begin{array}{r|l} r_1 = -2x^2 - 3x - 1 & |x + 1 = -\frac{1}{3}r_2 \\ -2x^2 - 2x & | -2x - 1 \\ \hline -x - 1 & \\ -x - 1 & \\ \hline r_3 := & 0 \end{array}$$

Seega f ja g suurim ühistegur on viimane nullist erinev jääk ehk $-3x - 3 = r_2$. Jagamistulemused võib kokku võtta järgmiste võrduste abil:

$$\begin{aligned} f &= xg + r_1, \\ 2g &= (-x)r_1 + g_1, \\ 2g_1 &= r_1 + r_2. \end{aligned}$$

Kasutades neid võrdusi saame r_2 avaldada f ja g kaudu:

$$\begin{aligned} \text{SÜT}(f, g) &= r_2 = 2g_1 - r_1 = 2(2g + xr_1) - r_1 = 4g + r_1(2x - 1) = 4g + (f - xg)(2x - 1) \\ &= f(2x - 1) + g(-2x^2 + x + 4). \end{aligned}$$

Nüüsi võime võtta $u = 2x - 1$ ja $v = -2x^2 + x + 4$.

Kontroll:

$$\begin{aligned}fu + gv &= (x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1)(2x - 1) + (x^3 + x^2 - x - 1)(-2x^2 + x + 4) \\ &= 2x^5 - x^4 + 2x^4 - x^3 - 6x^3 + 3x^2 - 8x^2 + 4x - 2x + 1 \\ &\quad - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x^3 - x^2 - 4x + 2x^2 - x - 4 \\ &= -3x - 3.\end{aligned}$$

Ülesanne 7 Olgu $d = \text{SÜT}(f, g)$, $\deg(d) = k$, $\deg(f) = n$ ja $\deg(g) = m$ ($f, g, d \in K[x]$, kus K on korpus). Tõestada, et leiduvad sellised polünoomid u ja v , et $\deg(u) \leq m - k - 1$, $\deg(v) \leq n - k - 1$ ja

$$fu + gv = d.$$

Lahendus. Teame (vt. [1, lk. 206]), et leiduvad polünoomid u' ja v' nii, et $fu' + gv' = d$. Peame näitama, et leiduvad sobivate astmetega polünoomid u ja v nii, et $fu + gv = d$.

Suurima ühisteguri definitsiooni põhjal leiduvad sellised polünoomid g_1 ja f_1 , et $g = dg_1$ ja $f = df_1$. Jagades polünoomi u' jäägiga polünoomiga g_1 saame sellised polünoomid q ja r , et

$$u' = g_1q + r \text{ ja } \deg r < \deg g_1 = \deg g - \deg d = m - k.$$

Järelikult

$$d = fu' + gv' = f(g_1q + r) + gv' = fr + f_1dg_1q + gv' = fr + g(f_1q + v') = fu + gv,$$

kus oleme tähistanud $u := r$ ja $v := f_1q + v'$. On selge, et $\deg u = \deg r \leq m - k - 1$. Jääb veel näidata, et $\deg v \leq n - k - 1$.

Paneme tähele, et kuna $d \mid f$, siis $\deg d \leq \deg f$ ning seega $\deg gv = \deg(d - fu) = \deg fu$. Järelikult

$$m + \deg v = \deg g + \deg v = \deg gv = \deg fu = \deg f + \deg u < n + m - k.$$

Lahutades selle võrratuse mõlemast poolest m saame $\deg v < n - k$ ehk $\deg v \leq n - k - 1$, mida oligi vaja näidata.

Ülesanne 8 Leida määramata kordajate meetodil sellised polünoomid u ja v , et $uf + vg = \text{SÜT}(f, g)$, kui $f = x^3$ ja $g = (1 - x)^2$.

Lahendus. Kuna f ja g on erinevate taandumatute polünoomide (x ja $(1 - x)^2$) astmed, siis on nende suurim ühistegur 1. Kasutades eelmise ülesande tähistusi on meil hetkel $n = 3$, $m = 2$ ja $k = 0$. Seega otsime polünoome u, v , mille korral $\deg u \leq 2 - 0 - 1 = 1$ ja $\deg v \leq 3 - 0 - 1 = 2$. Olgu $u = Ax + B$ ja $v = Cx^2 + Dx + E$, siis

$$1 = x^3(Ax + B) + (1 - x)^2(Cx^2 + Dx + E).$$

Meil on vaja määrata A, B, C, D, E väärtused. Selleks anname tundmatule x erinevaid väärtusi. Võttes $x = 0$ näeme, et $1 = 0 + 1 \cdot E = E$, seega

$$1 = x^3(Ax + B) + (1 - x)^2(Cx^2 + Dx + 1).$$

Anname veel väärtusi:

$$x = 1 \implies 1 = A + B,$$

$$x = -1 \implies 1 = A - B + 4(C - D + 1) \implies A - B + 4C - 4D = -3,$$

$$x = 2 \implies 1 = 8(2A + B) + 4C + 2D + 1 \implies 16A + 8B + 4C + 2D = 0,$$

$$x = 3 \implies 1 = 27(3A + B) + 4(9C + 3D + 1) \implies 81A + 27B + 36C + 12D = -3.$$

Lahendades saadud lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B + 4C - 4D = -3 \\ 16A + 8B + 4C + 2D = 0 \\ 81A + 27B + 36C + 12D = -3 \end{cases}$$

saame, et $A = -3$, $B = 4$, $C = 3$ ja $D = 2$.

Vastus: $u = -3x + 4$ ja $v = 3x^2 + 2x + 1$.

Viited

[1] Kilp, M., Algebra I, Tartu, 1998.