

Ruutvormid

Ülesannete näisilahendusi

27. mai 2026. a.

Definitsioon 1 Öeldakse, et polünoom $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_iX_j$, kus $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in K$ ja K on korpus, on *ruutvorm* üle korpuse K muutujate X_1, \dots, X_n suhtes. Matriksit $A = (a_{ij})$ nimetame selle *ruutvormi matriksiks*.

Igale ruutfunktsionaalile n -mõõtmelisel vektorruumil üle K vastab ruutvorm n muutujast üle K , ja vastupidi (vt. [1, def. X.3.4]).

Definitsioon 2 Öeldakse, et

- ruutvorm üle K on *kanoonilisel kujul*, kui tal on kuju $\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2 + \dots + \lambda_rX_r^2$, kus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$;
- ruutvorm üle \mathbb{R} on *normaalkujul*, kui tal on kuju $X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_r^2$;
- ruutvorm üle \mathbb{C} on *normaalkujul*, kui tal on kuju $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_r^2$.

Ruutvormi viimine kanoonilisele kujule tähendab sellise regulaarse muutujate vahetuse leidmist, mille tagajärjel saame kanoonilisel kujul oleva ruutvormi (uutest muutujatest).

Matrikskujul võib ruutvormi esitada korrutisena

$$\bar{X}^T A \bar{X}, \text{ kus } \bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$$

on muutujate veerg ja A on vaadeldava ruutvormi matriks. Regulaarse muutujate vahetuse

$$\begin{cases} X_1 = c_{11}Y_1 + \dots + c_{1n}Y_n \\ \dots \\ X_n = c_{n1}Y_1 + \dots + c_{nn}Y_n \end{cases}$$

võib matrikskujul esitada võrdusena

$$\bar{X} = C\bar{Y}, \text{ kus } \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} \text{ on uute muutujate veerg, } C = (c_{ij}) \text{ ja } \det(C) \neq 0.$$

Sellise muutujate vahetuse tulemusena teiseneb ruutvorm $\bar{X}^T A \bar{X}$ ruutvormiks $(C\bar{Y})^T A (C\bar{Y}) = \bar{Y}^T (C^T A C) \bar{Y}$, seega pärast muutujate vahetuse tegemist tekkiva ruutvormi matriks on $C^T A C$.

Ülesanne 1 Viia ruutvorm $2x_1x_2 + 2x_2x_3$ kanoonilisele kujule.

Lahendus. Selle ruutvormi maatriks on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kanoonilisele kujule viimiseks kirjutame maatriksi A alla sama järku ühikmaatriksi ja teeme siis elementarteisendusi nii, et maatriksi A asemele tekiks diagonaalmaatriks. Kui oleme teinud mingi teisenduse ridadega, siis teeme kohe selle järel sama tüüpi teisenduse veergudega.

Niisiis teisendame maatrikseid järgnevalt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teisenused, mida tegime, olid järgmised: liitsime esimesele reale ja veerule teise, lahutasime teisest reast ja veerust $\frac{1}{2}$ -ga korrutatud esimese, lahutasime kolmandast reast ja veerust $\frac{1}{2}$ -ga korrutatud esimese ning lõpuks liitsime kolmandale reale ja veerule teise. Viimase maatriksi ülemisest poolest on näha, et ruutvormi kanooniline kuju on $2Y_1^2 - \frac{1}{2}Y_2^2$, viimase maatriksi alumine pool annab meile kanoonilisele kujule viiva muutujate vahetuse maatriksi C , see muutujate vahetus on

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 - Y_3 \\ X_2 = Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 \\ X_3 = Y_3 \end{cases}.$$

Kontroll:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 2 Viia järgmised ruutvormid normaalkujule a) üle \mathbb{R} , b) üle \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} F_1 &= X_1^2 + 4X_2^2 + X_3^2 + 4X_1X_2 - 2X_1X_3, \\ F_2 &= X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2 + 4X_1X_2 - 2X_1X_3 - 4X_2X_3, \\ F_3 &= -4X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - 4X_1X_2 + 4X_1X_3 + 18X_2X_3, \\ F_4 &= X_1^2 + 5X_2^2 - X_3^2 + 6X_1X_2 + 4X_2X_3. \end{aligned}$$

Millised nendest ruutvormidest on omavahel ekvivalentsed? (Kahte ruutvormi nimetatakse *ekvivalentseteks*, kui üks on teisest saadav mingi muutujate vahetuse teel.)

Lahendus. Viime ruutvormi F_1 kanoonilisele kujule:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Viime ruutvormi F_2 kanoonilisele kujule:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Viime ruutvormi F_3 kanoonilisele kujule:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 9 \\ 2 & 9 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Viime ruutvormi F_4 kanoonilisele kujule:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tulemused võtame kokku järgmise tabelina:

Ruutvorm	Kanooniline kuju	Normaalkuju üle \mathbb{R}	Normaalkuju üle \mathbb{C}
F_1	$Y_1^2 + 4Y_2^2 - Y_3^2$	$Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2$	$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$
F_2	$Y_1^2 - 2Y_2^2 - 2Y_3^2$	$Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2$	$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$
F_3	$-4Y_1^2 + 16Y_2^2 - 4Y_3^2$	$Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2$	$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$
F_4	$Y_1^2 - 4Y_2^2$	$Z_1^2 - Z_2^2$	$U_1^2 + U_2^2$

Teoreem 1 *Kaks ruutvormi on ekvivalentsed üle \mathbb{C} (üle \mathbb{R}) parajasti siis, kui neil on samad normaalkujud üle \mathbb{C} (üle \mathbb{R}).*

Siit on näha, et üle \mathbb{R} on ekvivalentsed F_2 ja F_3 ning üle \mathbb{C} on ekvivalentsed F_1, F_2 ja F_3 .

Definitsioon 3 Ruutvorm $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_iX_j$ üle \mathbb{R} on positiivselt (negatiivselt) määratud, kui $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}c_i c_j > 0$ ($\sum_{i,j=1}^n a_{ij}c_i c_j < 0$) iga vektori $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ korral.

Teoreem 2 ([1, teoreem X.4.4]) *Ruutvorm on positiivselt määratud siis ja ainult siis, kui tema matriksi peamiinorid on kõik positiivsed, ja negatiivselt määratud siis ja ainult siis, kui tema matriksi peamiinorid on vaheldumisi negatiivsed ja positiivsed.*

Ülesanne 3 Leida kõik parameetri a reaalarvulised väärtused, mille korral ruutvorm $2X_1^2 - X_2^2 + 4X_3^2 + (2a - 1)X_1X_2 + a^2X_2X_3$ on positiivselt määratud.

Lahendus. Vaadeldava ruutvormi matriks on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a - \frac{1}{2} & 0 \\ a - \frac{1}{2} & -1 & \frac{a^2}{2} \\ 0 & \frac{a^2}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Leiame selle matriksi peamiinorid. Esiteks, $M_1 = 2 > 0$. Teiseks,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & a - \frac{1}{2} \\ a - \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -2 - \left(a - \frac{1}{2}\right) \left(a - \frac{1}{2}\right) = -2 - a^2 + a - \frac{1}{4} = -a^2 + a - \frac{9}{4}.$$

Kuna võrratusel $-a^2 + a - \frac{9}{4} > 0$ ei ole reaalarvulisi lahendeid, siis vaadeldav ruutvorm ei ole positiivselt määratud ühegi a väärtuse korral.

Ülesanne 4 Leida kõik parameetri a reaalarvulised väärtused, mille korral ruutvorm $aX_1^2 + aX_2^2 + (a-3)X_3^2 + 2X_1X_2 + 2aX_1X_3 + 2X_2X_3$ on negatiivselt määratud.

Lahendus. Vaadeldava ruutvormi maatriks on

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-3 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi A peamiinorid on

$$\begin{aligned} M_1 &= a, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-3 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + a + a - a^3 - a + 3 - a = -3a^2 + 3. \end{aligned}$$

Lahendades võrratustesüsteemi

$$\begin{cases} a < 0 \\ a^2 - 1 > 0 \\ -3a^2 + 3 < 0 \end{cases}$$

saame, et ruutvorm on negatiivselt määratud, kui $-\infty < a < -1$.

Definitsioon 4 ([1, def. IX.3.2]) Eukleidilise ruumi E lineaarteisendust φ nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui iga $a, b \in E$ korral

$$\langle \varphi(a), b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle,$$

kus $\langle x, y \rangle$ tähistab vektorite $x, y \in E$ skalaarkorrutist.

Sümmeetrilise teisenduse maatriks ortonormeeritud baasi suhtes on sümmeetriline maatriks. Kui eukleidilise ruumi lineaarteisenduse maatriks ortonormeeritud baasi suhtes on sümmeetriline, siis see teisendus on sümmeetriline ([1, teoreem IX.3.3]).

Ülesanne 5 Tõestada, et eukleidilise ruumi sümmeetrilise lineaarteisenduse erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.

Lahendus. Olgu $\varphi(a) = \lambda a$ ja $\varphi(b) = \mu b$, kus $\lambda \neq \mu$, $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Siis

$$\lambda \langle a, b \rangle = \langle \lambda a, b \rangle = \langle \varphi(a), b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle = \langle a, \mu b \rangle = \mu \langle a, b \rangle.$$

Seega $(\lambda - \mu)\langle a, b \rangle = 0$, millest järeldub, et $\langle a, b \rangle = 0$, s.t. a ja b on ortogonaalsed.

Teame, et ruutmaatriks üle korpuse K on sarnane diagonaalmaatriksiga parajasti siis, kui leidub selle maatriksi omavektoreist koosnev baas vektorruumis K^n . Õpiku [1] teoreemi IX.3.6 põhjal leidub iga sümmeetrilise maatriksi jaoks üle \mathbb{R} tema omavektoreist koosnev ortonormeeritud baas eukleidilises ruumis \mathbb{R}^n (standardse skalaarkorrutamise suhtes). Seega iga

sümmeetriline maatriks A üle \mathbb{R} on sarnane diagonaalmaatriksiga, $C^{-1}AC$ on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil on maatriksi A omaväärtused ning C veeruvektorid on A ortonormeeritud omavektorid. Kuna [1, lause IX.2.3] põhjal on C ortogonaalmaatriks, s.t. $C^{-1} = C^T$, siis C^TAC on diagonaalmaatriks. Järelikult kehtib järgmine tulemus.

Lause 1 Iga ruutvormi üle \mathbb{R} saab viia kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega, s.o. muutujate vahetusega, mille maatriks on ortogonaalmaatriks.

Ülesanne 6 Viia ruutvorm $2X_1^2 + 5X_2^2 + 5X_3^2 + 4X_1X_2 - 4X_1X_3 - 8X_2X_3$ kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega.

Lahendus. Ruutvormi maatriks on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi karakteristlik polünoom on

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & 9-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(18 - 11\lambda + \lambda^2 - 8) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10). \end{aligned}$$

Seega A omaväärtused ja nende kordsused on

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, & r_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= 10, & r_2 &= 1. \end{aligned}$$

Järelikult ruutvormi kanooniline kuju on $Y_1^2 + Y_2^2 + 10Y_3^2$. Muutujate vahetuse leidmiseks tuleb leida veel A omavektoreist koosnev ortonormeeritud baas.

Omaväärtusele 1 vastavate omavektorite leidmiseks lahendame lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(muutujate z_1, z_2, z_3 suhtes, et mitte segi ajada ruutvormis esinevate muutujatega). Siit saame, et $z_1 = -2z_2 + 2z_3$. Selle võrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteemiks (ja seega omaväärtusele 1 vastavaiks lineaarselt sõltumatuiks omavektoreiks) on näiteks

$$\begin{aligned} a_1 &= (-2, 1, 0), \\ a_2 &= (2, 0, 1). \end{aligned}$$

Omaväärtusele 10 vastavate omavektorite leidmiseks lahendame järgmise lineaarvõrrandisüsteemi:

$$A - 10E = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 \\ 2 & -5 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ehk $z_1 = -\frac{z_3}{2}$, $z_2 = -z_3$. Seega lahendite fundamentaalsüsteem koosneb näiteks vektorist

$$a_3 = (-1, -2, 2).$$

Omavektorite a_1, a_2, a_3 ortogonaliseerimiseks eukleidilises ruumis \mathbb{R}^3 võtame

$$b_1 = a_1 = (-2, 1, 0),$$

ja $b_2 = a_2 + k_{21}b_1$, kus $k_{21} = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\frac{-4}{5} = \frac{4}{5}$, s.t.

$$b_2 = a_2 + \frac{4}{5}b_1 = (2, 0, 1) + \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right).$$

On selge, et b_1 ja b_2 on omaväärtusele 1 vastavad omavektorid. Kuna a_3 ja b_1 on sümmeetrilise maatriksi A erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid, siis on nad ülesande 5 põhjal ortogonaalsed. Samal põhjusel on ortogonaalsed a_3 ja b_2 . Seega võime võtta

$$b_3 = a_3 = (-1, -2, 2).$$

Vektorid b_1, b_2, b_3 tuleb veel ortonormeerida. Selleks leiame nende pikkused $|b_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $|b_2| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $|b_3| = \sqrt{1+4+4} = 3$ ning vektorid

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}b_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \\ e_2 &= \frac{\sqrt{5}}{3}b_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right), \\ e_3 &= \frac{1}{3}b_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Niisiis oleme saanud omavektoreist koosneva ortonormeeritud baasi e_1, e_2, e_3 . Järelikult kanoonilisele kujule $Y_1^2 + Y_2^2 + 10Y_3^2$ viiva muutujavahetuse maatriks on

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Kontroll:

$$\begin{aligned} C^T A C &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} C \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{20}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Olgu F ja G ruutvormid üle \mathbb{R} muutujatest X_1, \dots, X_n matriksitega A ja B vastavalt ning olgu F positiivselt määratud. Öpiku [1] teoreemist X.4.5 jäeldub, et leidub selline muutujavahetus, mis viib F ja G korruga kanoonilisele kujule. Selgitame, kuidas seda teha.

Viies ruutvormi F kanoonilisele kujule saame leida regulaarse matriksi C nii, et

$$C^T AC = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

kus $a_i > 0$ iga $i = 1, \dots, n$ korral. Võttes

$$D := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{a_n}} \end{pmatrix}$$

saame, et $D^T(C^T AC)D = (CD)^T A(CD) = E$, s.t. saame F viia normaalkujule. Vaatleme ruutvormi matriksiga $(CD)^T B(CD)$. Viime selle kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega U :

$$(CDU)^T B(CDU) = U^T((CD)^T B(CD))U = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Siis $(CDU)^T A(CDU) = U^T(CD)^T A(CD)U = U^T E U = U^{-1}U = E$, s.t. muutujate vahetus matriksiga CDU viib kanoonilisele kujule nii F kui G .

Ülesanne 7 Leida muutujate vahetus, mis viib ruutvormid

$$\begin{aligned} F &= X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_3, \\ G &= 2X_1^2 + 8X_2^2 + 3X_3^2 + 8X_1X_2 + 2X_1X_3 + 4X_2X_3 \end{aligned}$$

korruga kanoonilisele kujule.

Lahendus. Uurime, kas üks ruutvormidest F ja G on positiivselt määratud. Ruutvormide F ja G matriksid on vastavalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kuna matriksi A korral

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 > 0, \\ M_2 &= 2 - 1 = 1 > 0, \\ M_3 &= 6 - 2 - 3 = 1 > 0, \end{aligned}$$

siis F on positiivselt määratud. Viime ruutvormi F kanoonilisele kujule:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seega $C^T AC = E$, kus

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuna saadud F kanooniline kuju osutus juba normaalkujuks, siis võtame $D = E$. Leiame nüüd

$$\begin{aligned} C^T BC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} C \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =: B'. \end{aligned}$$

Viime ruutvormi maatriksiga B' kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega. Selleks leiame maatriksi B' karakteristliku polünoomi:

$$\begin{aligned} |B' - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - 4\lambda + \lambda^2)(3 - \lambda) + 4 + \lambda - 2 + 4\lambda - 12 + \lambda - 2 \\ &= 12 - 4\lambda - 12\lambda + 4\lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 6\lambda = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 5). \end{aligned}$$

Seega maatriksil B' on ühekordsed omaväärtused 0, 2 ja 5. Leiame vastavad omavektorid:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z_3 = 0 \\ z_1 = -z_2 \end{cases} \rightarrow a_1 = (1, -1, 0), \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z_3 = -2z_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases} \rightarrow a_2 = (1, 1, -2), \\ \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z_1 = z_3 \\ z_2 = z_3 \end{cases} \rightarrow a_3 = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Kuna erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed, siis vektoreid a_1, a_2, a_3 ortogonaliseerida ei ole enam vaja. Nende ortonormeerimisel saame

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ e_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right), \\ e_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Seega ruutvormi, mille maatriks on B' , kanooniline kuju on $2Y_2^2 + 5Y_3^2$ ja sellele kujule viib muutujavahetus maatriksiga

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Kokkuvõttes, ruutvormid F ja G viib kanoonilisele kujule muutujavahetus maatriksiga

$$CU = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Viited

[1] M. Kilp, *Algebra I*, Tartu, 1998.