

ALGEBRAINE TOPOLOGIA

Tähistused

- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathcal{P}(A) = \{U \subseteq A\} = \{\text{hulga } A \text{ alamhulga}\}$

1 Simpleksne homoloogia

Tuletame meelde, et *graafiks* nimetatakse hulka E koos mingi hulga E kahe-elementiliste alamhulkade hulgaga $V \subseteq \mathcal{P}(V)$. Vaadame graafi mõiste üldistust, kus V võib sisaldada ka suurema võimsusega alamhulki.

Definitsioon 1.1. (Lõplikuks) **simpleksseks kompleksiks** nimetatakse paari $\mathcal{K} = (V, E)$, kus V on lõplik hulk ning $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ koosneb hulga V alamhulkadest, kusjuures on nõutud järgnevate tingimuste kehtimist:

1. kui $\sigma \in E$ ja $\sigma' \subseteq \sigma$, siis $\sigma' \in E$,
2. kui $x \in V$, siis $\{x\} \in E$.

Simpleksses kompleksis $\mathcal{K} = (V, E)$ kutsutakse hulga V elemente **tippudeks** ning hulga E elemente **simpleksiteks**. Täpsemalt, kui σ sisaldab $n + 1$ elementi, siis öeldakse, et σ on n -simpleks.

Tähistus 1.2. Kui $\mathcal{K} = (V, E)$ on simpleksne kompleks ning $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ on mingi selle kompleksi n -simpleks, siis E sisaldab ka iga $i \in \{0, \dots, n\}$ korral $(n - 1)$ -simpleksit

$$\sigma \setminus \{v_i\} \in E,$$

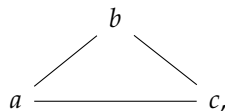
kusjuureid neid $(n - 1)$ -simplekseid kutsutakse simpleksi σ **tahkudeks**. Kokku omab n -simpleks täpselt $n + 1$ erinevat tahku.

Kuigi eelnevas definitsioonis on meil tippude tähistuseks $v_0, \dots, v_n$, on σ siiski kõigest hulk ning mingist kanoonilist järjestust selle elementidel ei ole.

Näide 1.3. Kui $a, b, c \in V$ on simpleksse kompleksi (V, E) erinevad tipud, siis 2-simpleksi $\sigma = \{a, b, c\}$ tahkudeks on 1-simpleksid

$$\{b, c\}, \{a, c\} \text{ ning } \{a, b\}.$$

Seda olukorda illustreerida diagrammiga



kust näeme, et piltlikult on $\{a, c\}$ tipu b vastastahk.

Eelneva näite kontekstis ei ole meil võimalik anda kanoonilist vastust küsimustele nagu *mis on σ esimene tahk* või *mis on σ teine tipp*. Samas, järnevas oleks konstruktsioonide sõnastamise eesmärgil kasulik kanoonilise järjestuse olemasolu, et saaks rääkida simpleksi i -ndast tahust. Seega, konstruktsioonide kontekstis töötaksime pigem järgmiste struktuuridega.

Mõnikord nõutakse, et E koosneb mitte-tühjadest alamhulkadest.

Sel juhul peaks definitsiooni esimest tingimust kohandama järgmiselt:

1. kui $\sigma \in E$ ja $\emptyset \neq \sigma' \subseteq \sigma$, siis $\sigma' \in E$.

Definitsioon 1.4. Orienteeritud simpleksseks kompleksiks kutsutakse kolmikut $(V, E, \leq)$, kus (V, E) on simpleksne kompleks ning $\leq$ on lineaarne järjestus tippude hulgal V .

Kui simpleksse kompleksi $\mathcal{K}$ tippudel fikseerida suvaline lineaarne järjestus, ongi tulemuseks orienteeritud simpleksne kompleks. Võib näidata, et meie konstruktsioonide lõpptulemus (homoloogia) järjestuse valikust ei sõltu.

Tähistus 1.5. Kui $(V, E, \leq)$ on orienteeritud simpleksne kompleks, siis selle simpleksi $\sigma \in E$ korral tähendab kirjutis

$$\sigma = [v_0, \dots, v_n]$$

et $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ ning lisaks $v_0 < v_1 < \dots < v_n$. Sama asjaolu võib väljendada ka kirjutades

$$\sigma = \{v_0 < v_1 < \dots < v_n\}.$$

Sellest tähistusest on muuhulgas näha, et σ on n -simpleks.

Vaba vektorruum hulgal

Meie eesmärgiks on uurida simpleksset kompleksi $\mathcal{K}$ kasutades lineaaralgebra meetodeid. Selleks vaatame esmalt, kuidas saab hulgast vabalt vektorruumi konstrueerida.

Idee on see, et vektorruumi $\mathbb{K}\langle A \rangle$ elementideks on formaalsed lineaarsed kombinatsioonid hulga A elementidest, s.t. näiteks juhul $A = \{\text{🍌}, \text{🍌}, \text{🍌}\}$ sisaldab $\mathbb{K}\langle A \rangle$ elemente nagu

$$3\text{🍌} - \sqrt{2}\text{🍌} \quad \text{või} \quad -\pi\text{🍌} + 2\text{🍌} + 3\sqrt{2}\text{🍌}.$$

See on aga ainult meie soovi kirjeldus. Peaksime näitama, et selline vektorruum tegelikult leidub, andes sellele formaalse konstruktsiooni.

Konstruktsioon 1.6 (Vaba vektorruum lõplikul hulgal). Olgu A lõplik hulk. Kui $\mathbb{K}$ on korpus ja A on hulk, siis $\mathbb{K}\langle A \rangle$ tähistab vektorruumi

$$\mathbb{K}\langle A \rangle = \{(\lambda_j)_{j \in A} \mid \forall j \in A. \lambda_j \in \mathbb{K}\},$$

kus vektorruumi tehted on defineeritud komponentviisiliselt, ehk

$$(\lambda_j)_{j \in A} + (\lambda'_j)_{j \in A} := (\lambda_j + \lambda'_j)_{j \in A} \quad \text{ning} \quad \mu(\lambda_j)_{j \in A} := (\mu\lambda_j)_{j \in A}.$$

Iga $a \in A$ korral saame vaadata $\mathbb{K}\langle A \rangle$ elementi

$$\delta_a := (\delta_{a,j})_{j \in A} \in \mathbb{K}\langle A \rangle,$$

ehk δ_a on pere, milles komponent kohal $a \in A$ on korpuse element 1 ning kõik teised komponendid on nullid.

Seega saame vaadata funktsiooni

$$\delta: A \rightarrow \mathbb{K}\langle A \rangle, \quad a \mapsto \delta_a.$$

Linearseks järjestuseks hulgal A kutsutakse seost $\leq$ hulgal A , mis rahuldab järgnevaid tingimusi:

1. $\forall x \in A. x \leq x$,
2. $\forall x, y, z \in A. x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$,
3. $\forall x, y \in A. x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$,
4. kui $x, y \in A$, siis vähemalt üks väidetest $x \leq y$ ja $y \leq x$ on tõsi.

Kui tuua sisse tähistus $<$ tähenduses

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ ja } x \neq y),$$

siis saab tingimused 3. ja 4. kokku võtta ühe tingimuseks:

- 3*. iga $x, y \in A$ korral kehtib täpselt üks järgnevatest võimalustest:

- $x < y$,
- $y < x$,
- $x = y$.

Kroneckeri delta on funktsioon

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y; \\ 0, & \text{kui } x \neq y, \end{cases}$$

kus $x, y \in A$ ning 0, 1 on mingi korpuse või ringi nullelement ning ühikelement.

Kuna see funktsioon on injektiivne, siis on õigustatud, kui mugavuse mõttes samastame hulga A elemendid vastavate funktsiooni $\delta: A \rightarrow \mathbb{K}\langle A \rangle$ kujutise elementidega, ehk samastame elemendi $a \in A$ perega $\delta_a \in \mathbb{K}\langle A \rangle$. Sellega olemegi täitnud oma soovitud eesmärgi, kuna nüüd saame $A = \{\text{🍪}, \text{🔧}, \text{🍏}\}$ korral avaldist $3\text{🍪} - \sqrt{2}\text{🍏}$ rangelt tõlgendada $\mathbb{R}\langle A \rangle$ elemendina $3\delta_{\text{🍪}} - \sqrt{2}\delta_{\text{🍏}}$.