

LTMS.00.051 Analüütiline geomeetria (2. osa)

Praktikum 1. Reeperi teisendused.

Definitsioon 1. Reeper (tasandil) on kolmik $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kus O on fikseeritud tasandi punkt (alguspunkt) ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on baasivektorid, st kaks mittekol-lineaarset tasandi vektorit. Kui vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ on omavahel risti ja ühtlasi ühikvektorid, siis nimetatakse reeperit $\mathcal{R}$ **ristreeperiks**.

Olgu $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $\mathcal{R}' = \{O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ kaks reeperit. Avaldame uue reeperi baasivektorid vanade kaudu:

$$\vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2.$$

Siin $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ on mingid arvud.

Definitsioon 2. Maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

nimetatakse **üleminekumaatriksiks** baasilt $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ baasile $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$.

Meenutame, et teist järku ruutmaatriksi pöördmaatriksit saab leida järgmise valemi abil:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Võttes kasutusele üherealised maatriksid $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)$, $(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2)$ saame kirjutada üleminekuvalemid maatrikskuul kui

$$(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) A. \quad (1)$$

Olgu P suvaline tasandi punkt ning olgu selle punkti koordinaadid vanas reeperis x, y ja uues reeperis x', y' . Kui uue reeperi alguspunkti O' koordinaadid vanas reeperis on $O'(c_1, c_2)$, siis punkti P vanad koordinaadid avalduvad uute kaudu järgmiselt

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + c_1, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + c_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Maatrikskuul neid võrrandeid saab kirjutada järgmiselt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Olgu $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ortonormeeritud reeper.

Definitsioon 3. Reeperi teisendust, mille korral ortonormeeritud baas muutub ortonormeeritud baasiks, st algsest ristreeperist $\mathcal{R}$ saadud uus reeper $\mathcal{R}'$ on ka ristreeper, nimetatakse **ortogonaalteisenduseks**. Vastavat üleminekumaatriksit A nimetatakse **ortogonaalmaatriksiks**.

Ortogonaalteisenduse $\chi : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$ korral kehtib $\langle \chi(\vec{a}), \chi(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (definitsioon). Ortogonaalmaatriksi põhiomadus on $A^T A = I$ või $A^{-1} = A^T$. Ortogonaalmaatriksit A nimetatakse spetsiaalseks ortogonaalmaatriksiks kui $|A| = 1$.

Paralleellüke. Üleminekumaatriks on ühikmaatriks $A = I$, baasivektorid ei muutu. Alguspunkti lükatakse punkti $O'(c_1, c_2)$. Kasutades eelnevaid tähiseid saame, et koordinaatide teisenemisvalemid on

$$x = x' + c_1, \quad y = y' + c_2.$$

Pööre. Pöörame baasivektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ümber alguspunkti O kokkulepitud positiivses suunas (tasandi orientatsiooni mõttes) nurga φ võrra ning jätame alguspunkti O paigale. Koordinaadisüsteemi pööramise üleminekumaatriks on kujul

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Koordinaadisüsteemi pööramisel teisenevad punkti koordinaadid järgmise valemi järgi

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi x' - \sin \varphi y', \\ y &= \sin \varphi x' + \cos \varphi y'. \end{aligned} \quad (5)$$

Peegeldus. Olgu antud sirge $\mathcal{L}$, mis läbib alguspunkti O ning mille sihivektoriks on ühikvektor $\vec{s}$. Moodustame uue reeperi $\mathcal{R}' = \{O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, mille baasivektorid on baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ peegeldused sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Siis

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 2 \langle \vec{e}_1, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 &= 2 \langle \vec{e}_2, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Loengus on käsitletud peegeldus sirge $y = x$ suhtes (I ja III veerandi nurgapoolitaja). Teisendusmaatriks ja koordinaatide teisenemisvalemid on antud juhul

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = y', \quad y = x'.$$

Ülesanne 1. Olgu reeper $\mathcal{R}'$ saadud reeperist $\mathcal{R}$ alguspunkti paralleellüke abil. Leidke koordinaatide teisendusvalemid kui uue alguspunkti koodinaadid on

- a) $O'(3, 4)$, b) $O'(-2, 1)$, c) $O'(-3, 5)$.

Ülesanne 2. Reeperi alguspunkt on paralleellükkega kantud punkti $O'(3, -4)$. Uues reeperis on antud punktid koordinaatidega

- a) $A(1, 3)$, b) $B(-3, 0)$, c) $C(-1, 4)$.

Mis on nende punktide koordinaadid vanas reeperis?

Ülesanne 3. Reeper $\mathcal{R}'$ on saadud reeperist $\mathcal{R}$ alguspunkti paralleellükke teel. Uue alguspunkti koordinaadid vanas reeperis on $O'(3, 4)$. Leidke punktide A ja B vaheline kaugus, kui on teada, et punkti A koordinaadid **vanas** reeperis on $(1, 2)$ ja punkti B koordinaadid **uues** reeperis on $(1, 2)$.

Ülesanne 4. Koostage üleminekumatriks ja koordinaatide teisendusvalemid, kui ristreeperit pööratakse nurga φ võrra ja

- a) $\varphi = 60^\circ$, c) $\varphi = 225^\circ$, e) $\varphi = 45^\circ$,
b) $\varphi = -90^\circ$, d) $\varphi = -30^\circ$, f) $\varphi = -180^\circ$.

Ülesanne 5. Veenduge, et pöördematriks (4) on suvalise nurga φ korral spetsiaalne ortogonaalmatriks.

Ülesanne 6. Leidke punkti $P(2, 5)$ koordinaadid uues reeperis kui algset ristreeperit on pööratud nurga φ võrra positiivses suunas ja alguspunkt O on paralleellükkega nihutatud punkti O' .

1. $\varphi = 180^\circ$, $O'(0, 2)$;
2. $\varphi = 60^\circ$, $O'(-3, -3)$;
3. $\varphi = -90^\circ$, $O'(-3, 1)$.

Ülesanne 7. Vaatleme kolmnurka OAB . Olgu O' selle kolmnurga külje AB keskpunkt. Kirjutage välja koordinaatide teisendusvalemid üleminekul reeperilt $\{O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\}$ reeperile $\{O'; \overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'B}\}$.

Ülesanne 8. Veenduge, et vektorruumi peegeldusteisendus $\chi: \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$,

$$\chi(\vec{a}) = 2 \langle \vec{a}, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{a}, \quad \vec{s} \in \mathcal{V}^n$$

on ortogonaalteisendus.

Ülesanne 9. Kasutades valemid (6) koostage üleminekumaatriks ja suvalise punkti koordinaatide teisenemise valemid kui ortonormeeritud reeper $\mathcal{R}'$ on saadud ortonormeeritud reeperist $\mathcal{R}$ peegeldusel

1. x -telje suhtes,
2. y -telje suhtes,
3. II ja IV veerandi nurgapoolitaja suhtes.

Ülesanne 10. Järgmiste teisenduste jaoks koostage üleminekumaatriks ja suvalise punkti koordinaatide teisenemisvalemid:

1. peegeldus x -telje suhtes ja siis paralleellüke punkti $O'(-5, 4)$,
2. peegeldus y -telje suhtes ja siis pööre 30° võrra positiivses suunas,
3. peegeldus I ja III veerandi nurgapoolitaja suhtes, siis pööre 180° võrra positiivses suunas ja paralleellüke punkti $O'(3, -2)$.

Ülesanne 11. Kirjutage välja üleminekumaatriks ja koordinaatide teisendusvalemid, kui reeperi $\mathcal{R}$ alguspunkt ja baasvektorite suunad jäävad samadeks, aga esimene baasivektor pikendatakse kaks korda ja teine baasivektor lühendatakse kaks korda, st

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$