

Praktikum 2. Teist järku joone võrrandi uurimine.

Definitsioon 1. Kahe muutuja x, y teise astme polünoomiks nimetatakse algebralist avaldist/ kahe muutuja funktsiooni

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

kus A, B, C, D, E, F on reaalarvulised kordajad ning kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev.

Definitsioon 2. Teist järku joone võrrandiks tasandil nimetatakse võrrandit $F(x, y) = 0$, st

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

Võrrandi (1) lahendite hulka nimetatakse **teist järku jooneks**.

Definitsioon 3. Maatrikseid

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

nimetatakse vastavalt **teist järku joone põhimaatriksiks** ja **teist järku joone laiendatud maatriksiks**.

Lause 1. Leidub koordinaadisüsteemi pööre nii, et uutes koordinaatides $\tilde{x}, \tilde{y}$ ei esine teist järku joone võrrandis korrutist $\tilde{x}\tilde{y}$, st $B' = 0$.

Tänu sellele lausele saime eeskirja, kuidas võrrandit (1) viia kujule

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2 + 2\tilde{D}\tilde{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + \tilde{F} = 0. \quad (2)$$

Nimelt valime pöördenuurka järgmise eeskirja järgi (lause tõestuse põhiosa):

- Kui $A = C$, siis valime nurka $\varphi = 45^\circ$,
- Kui $A \neq C$, valime nurka $\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2B}{A-C}$.

Seejärel rakendame reeperi pööret vastava nurga võrra (koostame koordinaatide teisendusvalemid ja asendame need võrrandisse).

Eeskirjast on näha, et nurka leidmine üldjuhul võib olla keeruline (arkustangentsi väärtust ei saa alati täpselt välja arvutada), seega jätkame teist järku joone võrrandi uurimist üldkujul

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Tähistame $\delta := \det M$.

Definitsioon 4. Kui teist järku joone võrrandi põhimaatriksi determinant on nullist erinev, $\delta \neq 0$, siis nimetatakse teist järku joont **tsentraalseks** ning punkti koordinaatidega (u, v) , mis rahuldavad süsteemi

$$\begin{aligned} Au + Bv + D &= 0, \\ Bu + Cv + E &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

nimetatakse selle joone **keskpunktiks**.

Lisaks tähistame

$$\delta_u := \begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}, \quad \delta_v := \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}.$$

Lineaaralgebrast on teada, et:

- kui $\delta \neq 0$, siis süsteemil (3) on täpselt üks lahend,
- kui $\delta = \delta_u = \delta_v = 0$, siis süsteemil on lõpmata palju reaalseid lahendeid,
- kui $\delta = 0$, aga $\delta_u \neq 0$ või $\delta_v \neq 0$, siis süsteemil ei ole lahendeid

Kui tuua reeperi alguspunkt keskpunkti, siis uutes koordinaatides kirjutatud võrrand ei sisalda lineaarliikmeid, $D = E = 0$.

Kombineerides reeperi pööret ja paralleellüket saame teist järku joone võrrandit (1) viia kujule

$$A'x^2 + C'y^2 + F' = 0.$$

Teist järku joone kanoonilise võrrandi saamiseks tahame, et vabaliige seisaks võrrandi paremal poolel ning oleks võrdne ühega. Näiteks, ellipsi kanooniline võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja hüperbooli kanooniline võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parameetrite a, b geomeetrilist tähendust ja tähtsust selgitame tulevastes praktikumides.

Ülesanne 1. Milliseks teiseneb ringjoone $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 51 = 0$ võrrand, kui reeperi alguspunkt kanda ringjoone keskpunkti?

Ülesanne 2. Kontrollige, kas järgmised teist järku jooned on tsentraalsed. Kui joon on tsentraalne, siis leidke selle joone keskpunktid.

- a) $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 2x + 2y - 9 = 0$
- b) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$,
- c) $9x^2 - 30xy + 25y^2 + 6x - 10y + 8 = 0$
- d) $5x^2 - 10xy + y^2 + 40x - 8y + 7 = 0$,
- e) $4x^2 + 8x - y + 7 = 0$.

Ülesanne 3. Kirjutage välja koordinaatide teisendusvalemid, mida tuleb rakendada, et viia antud teist järku joone võrrand kanoonilisele kujule

- a) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$,
- b) $2x^2 + 8y^2 + x + y - 9 = 0$,
- c) $36x^2 + 25y^2 + 3x - 5y + 8 = 0$,
- d) $2\sqrt{3}x^2 + 6xy + 12x - 6y + 7 = 0$.

Ülesanne 4. Viige järgmised teist järku joonte võrrandid kujule $Ax^2 + Cy^2 = F$.

- a) $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$,
- b) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$,
- c) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$.

* Proovige viia kanoonilisele kujule nii, nagu on tehtud loengukonspektis.

Ülesanne 5. Milliste a ja b väärtuste korral antud teist järku joonel

- a) $ax^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$,
- b) $ax^2 + 12xy + 9y^2 + bx + 4y - 13 = 0$.

(I) ei leidu ühtegi keskpunkti, (II) leidub täpselt üks keskpunkt (III) on lõpmata palju keskpunkte?