

Praktikum 3. Ellips

Teist järku joone võrrandi invariantid. Alustame teist järku joone üldvõrrandist

$$A x^2 + 2B xy + C y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

Eelnevalt oleme defineerinud teist järku joone võrrandi põhimaatriksit ja laiendatud maatriksit kui

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}.$$

Teist järku joone võrrandi **invariantid** on

$$\delta = |M|, \quad \Delta = |\overline{M}|, \quad \varsigma = \text{Tr } M = A + C.$$

Teist järku joone võrrandi invariantide abil saab kindlaks teha, mis teist järku joonega on tegemist:

- Kui $\delta > 0$, siis teist järku joont nimetatakse *elliptilist tüüpi jooneks*,
 - kui $\varsigma\Delta < 0$, siis tegemist on **ellipsiga**.
 - kui $\varsigma\Delta > 0$, siis tegemist on **imaginaarse ellipsiga**.
 - kui $\Delta = 0$, siis tegemist on **imaginaarsete sirgetega**.
- Kui $\delta < 0$, siis teist järku joont nimetatakse *hüperboolset tüüpi jooneks*,
 - kui $\Delta \neq 0$, siis tegemist on **hüperbooliga**.
 - kui $\Delta = 0$, siis tegemist on **lõikuvate sirgetega**.
- Kui $\delta = 0$, siis teist järku joont nimetatakse *paraboolset tüüpi jooneks*,
 - kui $\Delta \neq 0$, siis tegemist on **parabooliga**.
 - kui $\Delta = 0$, siis tegemist on kidunud joonega, mille võrrandit lihtsustame teisendustega.

Ellips. Ellipsi kanooniline võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0. \quad (2)$$

Ellipsi võrrand on sellisel kujul ainult ellipsi kanoonilise reeperi korral, kus alguspunkt O on ellipsi keskpunkt. Kanoonilises reeperis ellips on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes.

Milliseid geomeetrilisi andmeid saame otseselt ellipsi kanoonilisest võrrandist:

- Ellipsi **tipud** ehk lõikepunktid koordinaattelgedega on punktid koordinaatidega $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$ ja $D(0, -b)$,
- Lõiku AB ja selle pikkust $2a$ nimetatakse ellipsi **suuremaks teljeks**,
- Lõike OA ja OB ja nende pikkust a nimetatakse ellipsi **suuremaks poolteljeks**,
- Lõiku CD ja selle pikkust $2b$ nimetatakse ellipsi **väiksemaks teljeks**,
- Lõike OC ja OD ja nende pikkust b nimetatakse **väiksemaks poolteljeks**.

Kuna $a \geq b$ saame vaadelda reaalarvu $c := \sqrt{a^2 - b^2}$.

Definitsioon 1. Punkti $F_1(-c, 0)$ nimetatakse ellipsi **vasakpoolseks fookuseks** ning punkti $F_2(c, 0)$ nimetatakse ellipsi **parempoolseks fookuseks**.

Definitsioon 2. Arve

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

nimetatakse vastavalt ellipsi **ekstsentrilisuseks** ja **fokaalparameetriks**.

Otse definitsioonist järeldub, et ellipsi korral $0 \leq \varepsilon < 1$.

Olgu P suvaline ellipsi (2) punkt. Lõike F_1P ja F_2P ja nende pikkusi nimetatakse punkti P **fokaalraadiusteks** (vastavalt vasakpoolseks ja parempoolseks).

Lause 1. *Ellipsi (2) suvalise punkti $P(x, y)$ fokaalraadiused saab leida valemitega*

$$|F_1P| = a + \varepsilon x, \quad |F_2P| = a - \varepsilon x.$$

Teoreem 1. *Ellipsi (2) suvalise punkti P korral kehtib*

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a.$$

Loengus oli käsitletud viimane teoreem üldisemal kujul. Tänu sellele teoreemile antakse ellipsi geomeetriline definitsioon.

Definitsioon 3. **Ellipsiks** nimetatakse tasandi punktide hulka, mille kauguste summa kahest etteantud punktist (fookustest F_1, F_2) on sama konstant.

Definitsioon 4. Sirgeid

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

nimetatakse ellipsi (2) **juhtsirgeteks** (vastavalt vasakpoolseks ja parempoolseks).

Teoreem 2. *Olgu P suvaline tasandi punkt, d selle punkti kaugus ellipsi (2) vasakpoolsest (parempoolsest) juhtsirgest ning r punkti P kaugus vasakpoolsest fookusest F_1 (parempoolsest fookusest F_2). Punkt P on ellipsi (2) punkt parajasti siis kui kehtib võrdus*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Ülesanne 1. Vaatleme teist järku joonte võrrandeid, millega oleme kokku puutunud eelmises praktikumis (Praktikum 2. ülesanne 1.). Teist järku joone võrrandi invariantide abil määrake, mis joonega on tegemist.

a) $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 2x + 2y - 9 = 0$

b) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$,

c) $5x^2 - 10xy + y^2 + 40x - 8y + 7 = 0$,

d) $4x^2 + 8x - y + 7 = 0$.

Ülesanne 2. Viige järgmised teist järku joonte võrrandid kanoonilisele kujule. (Praktikum 2. ülesanne 4.)

a) $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$,

b) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$,

c) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$.

Ülesanne 3. Antud ellipsi jaoks leidke pooltelgede pikkused, fookuste koordinaadid, ekstsentrilisus ja fokaalparameeter. Koostage juhtsirgete võrrandid.

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$,

b) $9x^2 + y^2 = 36$,

c) $3x^2 + 4y^2 = 60$,

d) $4x^2 + 3y^2 = 12$.

Ülesanne 4. Koostage ellipsi kanooniline võrrand, kui on antud, et

a) ellipsi fookustevaheline kaugus on 8 ja suurem telg on 10,

b) ellipsi suurem pooltelg on 10 ja ekstsentrilisus on 0,8,

c) ellipsi fookustevaheline kaugus on $4\sqrt{5}$ ja pooltelgede summa on 10.

Ülesanne 5. On teada, et punktid $M(\sqrt{3}, -2)$ ja $N(-2\sqrt{3}, 1)$ asuvad ellipsil (koordinaadid on ellipsi kanoonilise reeperi suhtes). Koostage ellipsi võrrand.

Ülesanne 6. Koostage ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi juhtsirgete vaheline kaugus on 13 ja väike telg on 6.