

Praktikum 4. Hüperbool

Hüperbooli kanooniline võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \quad (1)$$

Hüperbooli võrrand on sellisel kujul ainult kanoonilise reeperi korral, kus alguspunkt O on hüperbooli keskpunkt. Kanoonilises reeperis hüperbool on sümmeetriline koordinaattelgedele suhtes.

Milliseid geomeetrilisi andmeid saame otseselt hüperbooli kanoonilisest võrrandist:

- Hüperbooli **reaaltipud** ehk löikepunktid abstsiss-teljega on punktid $A(-a, 0)$ ja $B(a, 0)$,
- Punkte $C(0, b)$ ja $D(0, -b)$ nimetatakse hüperbooli **imaginaartippudeks** või **ebatippudeks**,
- Lõiku AB ja selle pikkust $2a$ nimetatakse hüperbooli **reaalteljeks**,
- Lõike OA ja OB ja nende pikkust a nimetatakse hüperbooli **reaalpoolteljeks**,
- Lõiku CD ja selle pikkust $2b$ nimetatakse hüperbooli **imaginaarteljeks**,
- Lõike OC ja OD ja nende pikkust b nimetatakse **imaginaarpoolteljeks**.

Definitsioon 1. Sirgeid

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x$$

nimetatakse hüperbooli (1) **asümptootideks**.

Olgu $c := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definitsioon 2. Punkti $F_1(-c, 0)$ nimetatakse hüperbooli **vasakpoolseks fookuseks** ning punkti $F_2(c, 0)$ nimetatakse hüperbooli **parempoolseks fookuseks**.

Definitsioon 3. Arve

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

nimetatakse vastavalt hüperbooli **ekstsentrilisuseks** ja **fokaalparameetriks**.

Otse definitsioonist järeldub, et hüperbooli korral $\varepsilon > 1$.

Olgu P suvaline hüperbooli (1) punkt. Lõike F_1P ja F_2P ja nende pikkusi nimetatakse punkti P **fokaalraadiusteks** (vastavalt vasakpoolseks ja parempoolseks).

Lause 1. Hüperbooli (1) suvalise punkti $P(x, y)$ fokaalraadiused saab leida valemitega

$$|F_1P| = |\varepsilon x + a|, \quad |F_2P| = |\varepsilon x - a|.$$

Tähistame suvalise hüperbooli punkti P fokaalraadiused kui $r_1 := |F_1P|$ ja $r_2 := |F_2P|$.

Teoreem 1. Hüperbooli (1) suvalise punkti P korral kehtib

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Loengus oli käsitletud viimane teoreem üldisemal kujul. Tänu sellele teoreemile antakse hüperbooli geomeetriline definitsioon.

Definitsioon 4. Hüperbooliks nimetatakse tasandi punktide hulka, mille kauguste vahe absoluutväärtus kahest fikseeritud punktist (fookustest F_1, F_2) on sama konstant.

Definitsioon 5. Sirgeid

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

nimetatakse hüperbooli (1) **juhtsirgeteks** (vastavalt vasakpoolseks ja parempoolseks).

Teoreem 2. Olgu P suvaline tasandi punkt, d selle punkti kaugus hüperbooli (1) vasakpoolsest (parempoolsest) juhtsirgest ning r punkti P kaugus vasakpoolsest fookusest F_1 (parempoolsest fookusest F_2). Punkt P on hüperbooli (1) punkt parajasti siis kui kehtib võrdus

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Ülesanne 1. Leidke antud hüperbooli tipud, ebatipud, fookused, asümptoodid, ekstsentrilisus, fokaalparameeter ja juhtsirged.

a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1,$

b) $x^2 - 4y^2 = 36,$

c) $\frac{9x^2}{4} - \frac{4y^2}{9} = 36,$

d) $2x^2 - \frac{y^2}{8} = 2.$

Ülesanne 2. Koostage hüperbooli kanooniline võrrand, kui on teada, et

a) fookustevaheline kaugus on 10 ja tippude vaheline kaugus on 8,

b) ekstsentrilisus on $\sqrt{2}$ ja hüperboolil on punkt $H(-5, 3),$

c) selle asümptoodid on $y = \pm 4x$ ning ta läbib punkti $A(-2, 0),$

d) selle fookused on $F_1(-10, 0)$ ja $F_2(10, 0)$ ning ta läbib punkti $M(12, 3\sqrt{5}).$

Ülesanne 3. Koostage hüperbooli kanooniline võrrand, kui ta läbib punkte $A(8, -6)$ ja $B(6, -3).$

Ülesanne 4. Koostage hüperbooli kanooniline võrrand, kui on antud selle ekstsentrilisus $\varepsilon = 2$ ning hüperbooli fookused ühtivad ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ fookustega.

Ülesanne 5. Koostage hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookused ühtivad ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ fookustega ning hüperbooli ekstsentrilisus on ellipsi ekstsentrilisuse pöördarv.

Ülesanne 6. Leidke hüperbooli keskpunkt, poolteljed, asümptoodid, fookused, ekstsentrilisus ja fokaalparameeter, kui selle võrrand on

a) $x^2 - y^2 - 4x + 2y - 11 = 0,$

b) $4x^2 - y^2 + 8x + 2y - 1 = 0,$

c) $4y^2 = x^2 - 4x,$

d) $4x^2 = y^2 - 4y + 8.$

Ülesanne 7. Leidke hüperbooli ekstsentrilisus, kui on teada, et selle hüperbooli fookustevaheline kaugus on neli korda suurem, kui kaugus tema juhtsirgete vahel.

Ülesanne 8. Leidke hüperbooli $x^2 - y^2 = 1$ punkt, mille fokaalraadiused on omavahel risti.