F. NAGIBIN

HUVITAV MATEMAATIKA



KIRJASTUS «VALGUS» • TALLINN 1969

51
N 07

Originaali tiitel:

Ф. Ф. Нагибин

Математическая шкатулка

Издание третье
Издательство «Просвещение»
Москва 1964

Vene keelest tõlkinud O. Kärner

Kunstiliselt kujundanud D. Paalamäe

2—2—2
26—69

LOE LÄBI

M. Kalinin kõneles 1941. aastal Moskva linna Lenini rajooni keskkoolide kaheksandate, üheksandate ja kümnendate klasside õpilastele: «Missugust teadust te ka ei õpiks, missugusesse kõrgemasse õppeasutusse te ka ei astuks, millisel alal te ka ei töötaks, aga kui te tahate seal jätta mingisugust jälge, siis on selleks igal pool vaja matemaatika tundmist. Aga kes teist praegu ei unista saada meremeheks, lenduriks, suurtükiväelaseks, kvalifitseeritud tööliseks meie tööstuse mitmesugustes harudes, ehitajaks, metallurgiks, lukksepaks, treialiks jne., vilunud põllumajanduse eriteadlaseks, loomakasvatuse eriteadlaseks, aianduse eriteadlaseks jne., teedeinseneriks, vedurijuhiks, kaubandusala töötajaks jne.? Kuid kõik need elukutsed nõuavad head matemaatika tundmist. Ja sellepärast, kui te tahate osa võtta suurest elust, siis täitke oma pea matemaatikaga, kuni selleks on võimalust. See on teile hiljem kogu teie töös väga suureks abiks.» [1]

Iga nõukogude õpilane peab M. Kalinini suurepäraseid sõnu hästi meeles pidama. Kuid nende meelespidamisest üksi on vähe. On vaja neist ka juhinduda. Aga juhinduda neist — see tähendab püsivalt ja visalt omandada matemaatika-alaseid teadmisi ja oskusi, õppida rakendama neid praktikas. Ilma selleta pole võimalik valmistuda aktiivseks osavõtuks kommunismi ehitamisest.

Asi pole mitte ainult selles, et matemaatika-alased teadmised on suuremal või vähemal määral hädavajalikud paljude, eriti tehniliste erialade jaoks. Nõukogude Liidule, kommunismiehitajale, on tarvis tuhandeid kõrgema haridusega matemaatikuid, arvutusmatemaatikuid ja matemaatikuid-teadlasi. Seepärast osutataksegi meie maal sir-

[1] M. Kalinin. Kommunistlikust kasvatusest, RK «Poliitiline Kirjandus», Tallinn, 1947, lk. 101—102.

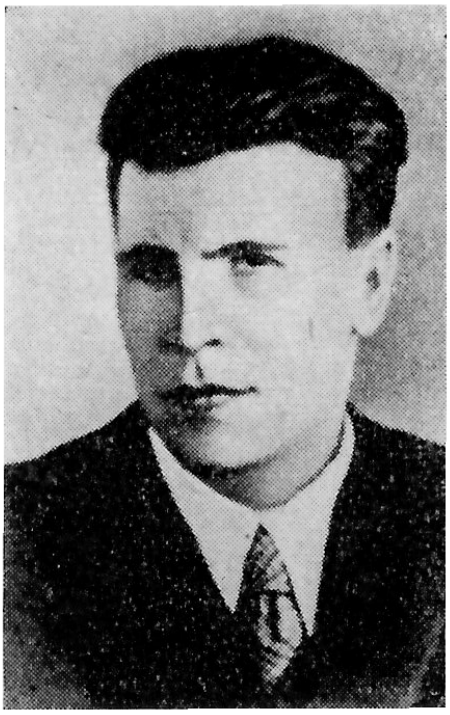
guva põlvkonna matemaatika-alasele haridusele suurt tähelepanu.

Matemaatikat õpetatakse keskkooli kõikides klassides. Matemaatika tunde on igas klassis palju. Õpetajad annavad koduseid ülesandeid. Võib-olla on see küllaldane? Tõepoolest, iga õpilane peab hästi omandama kõik selle, mida matemaatika õpetaja tundides seletab, hoolikalt täitma kõik ülesanded. Kuid sellele, kes tahab saada inseneriks või matemaatikuks, on seda ikkagi vähe. Paratamatult on veel vajalik iseseisev loominguline töö matemaatika alal.

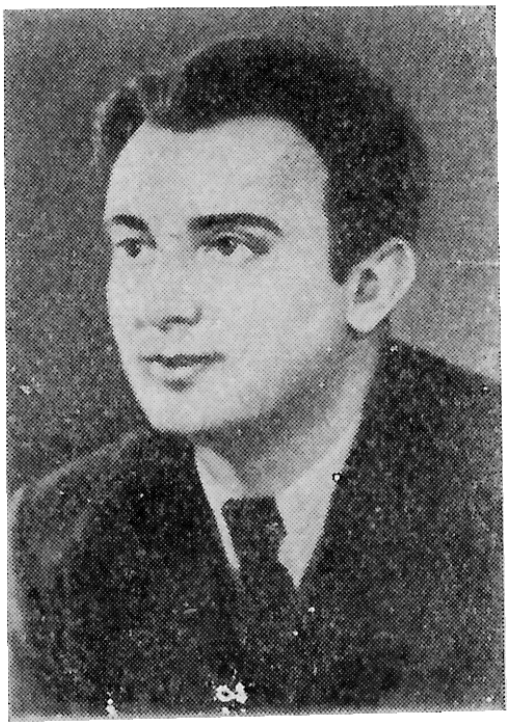
Oleks väär mõelda, et matemaatika on tardunud, lõplik teadus, et on piisav omandada juba tuntud valemid, reeglid ja teoreemid. Tegelikult matemaatika, nagu teisedki teadused, pidevalt kasvab, areneb, rikastub uute teooriatega, korraldub ümber vastavalt elu uutele nõuetele. Matemaatikas pole raskem kui teistes teadustes jõuda uue avastamise võimaluseni. Andekad matemaatikud alustavad iseseisvaid uurimisi reeglipäraselt üsna vara. Paljud nõukogude matemaatikud hakkasid tegema tõsist teaduslikku tööd 18—20-aastaselt, enne seda aga uurisid matemaatikat sihikindlalt. Toon mõned näited.

Üks talendikamaid nõukogude matemaatikuid L. Pontrjagin on sündinud 1908. a. Neljateistkümneaastaselt kaotas ta õnnetusjuhtumi tagajärjel nägemise, kuid see ei summutanud tema teaduslikke püüdlusi. 1925. a. lõpetas L. Pontrjagin kuueteistkümneaastaselt keskkooli. Kooliaastail ta mitte ainult õppis hästi matemaatika koolikursust, vaid uuris ka põhjalikult paljusid kõrgema matemaatika peatükke. Pärast keskkooli lõpetamist astus Pontrjagin ülikooli ja juba kahe aasta pärast tegi oma esimese teadusliku töö, mis oli pühendatud matemaatika noorele harule — topoloogiale, veel kaks aastat hiljem aga lõpetas pime matemaatik hiilgavalt Moskva Ülikooli, astus siis selle juures aspirantuuri ja näitas end varsti väljapaistva õpetlasena. Kahekümne kahe aastaselt esitas ta oma avastusi üleliidulisel matemaatikute kongressil. 1939. a. valiti L. Pontrjagin NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks, 1941. a. aga määrati talle riiklik preemia silmapaistvate avastuste eest.

Üks nooremaid nõukogude matemaatikuid S. Mergeljan, sündinud 1928. a., hakkas püsivalt tegelema matemaatikaga juba keskkooli nooremates klassides. Kahek-



L. Pontrjagin



S. Mergeljan

sanda klassi õpilasena võttis ta osa kümnendate klasside matemaatika olümpiaadist ja lahendas antud ülesanded esimesena. Ta oli siis ainult neljateistkümneaastane (1943. a.). 1944. a. sooritas ta üheksanda ja kümnenda klassi eksamid ning astus peatselt Jerevani Ülikooli. Mergeljan lõpetas ülikooli viieaastase kursuse kolme aastaga, kuid järgneva kolmeaastase aspirantuurikursuse NSVL Teaduste Akadeemia juures poolteise aastaga. Oma esimese teadusliku töö avaldas Mergeljan juba ülikooliaastail, silmapaistva teadusliku töö eest matemaatika alal omistati talle aga 1949. a. algul kohe füüsika-matemaatikateaduste doktori kraad. Kahekümneaastaselt sai ta professoriks samas ülikoolis, kus ta alles hiljuti õppis. Sergei Mergeljan valiti 1953. a. NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks. Avastuste eest autasustati teda riikliku preemiaga.

Väljapaistva nõukogude matemaatiku L. Šnirelmani (1905—1938) matemaatika-alased anded avaldusid juba kaheteistkümnendal eluaastal ja selles vanuses hakkas ta iseseisvalt uurima algebralisi võrrandeid. 16-aastaselt astus ta Moskva Ülikooli ning lõpetas selle edukalt kahe ja poole aastaga. 1929. a. lõpetas Šnirelman aspirantuuri ja alustas tööd professorina, 1933. a. aga valiti ta NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks.

Varakult hakkas matemaatikat õppima S. Sobolev.



L. Šnirelman



S. Sobolev

(sünd. 1908. a.). Kahekümne nelja aastaselt valiti ta NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks, 1939. a. aga tegevliikmeks. Väljapaistvate avastuste eest autasustati S. Sobolevi riikliku preemiaga.

Paljud teised meie andekad matemaatikud, samuti nagu Pontrjagin, Mergeljan, Šnirelman ja Sobolev, kiindusid juba kooli nooremates klassides matemaatikasse ning õppisid seda väga innukalt.

Meie maal on igal andekal inimesel kõik võimalused enda arendamiseks. Kodumaa kasvatab hoolikalt talente ja nad puhkevad toredasti õitsele. Hoopis teistsugune oli ja on ka praegu suhtumine andekatesse inimestesse kapitalistlikes maades. Toon mõned näited.

Üheks silmapaistvamaks matemaatikuks XIX sajandil oli norra teadlane Niels Henrik Abel. Abel sündis 1802. a. Kolmeteistkümneaastaselt pandi ta kooli. Juba kuueteistkümneaastasena ilmutas Abel väljapaistvaid võimeid matemaatika õppimisel. Selles eas hakkas matemaatika talle meeldima ning ta hakkas sellega ka agaralt tegelema. Pärast kooli lõpetamist 1821. a. astus Abel ülikooli ja pälvis kohe tähelepanu kui andekas matemaatik. Ülikooliaastail tegi ta oma silmapaistvaimad avastused kõrgema astme algebralistest võrranditest. Pärast ülikooli lõpetamist reisis Abel Berliini ja Pariisi. Neis linnades, kus elasid kõige tuntumad matemaatikud, jätkas ta pinge-



N. H. Abel



E. Galois

list tööd matemaatika alal ja tegi mitu uut tähtsat avastust. Oma lühikese elu jooksul (27 aastat) andis Abel matemaatika arengusse sellise panuse, mis annab õiguse lugeda teda üheks suurimaks matemaatikuks. Kuid Abeli avastusi ei mõistnud ega hinnanud tema kaasaegsed. 1824. a. saatis Abel oma töö üldkujulise viienda astme võrrandi radikaalides lahendamatusest kuulsale saksa matemaatikule Gaussile, kuid viimane ei vastanud talle üldse. Samuti suhtusid Abelisse prantsuse matemaatikud, kes ka ei osanud hinnata noore norra teadlase tohutut annet. Üks Abeli tähtsamaid töid seisis palju aastaid Pariisi Akadeemia arhiivides. Ei toonud Abelile tunnustust tema eluajal ka need tööd, mida tal õnnestus trükis avaldada. Nõnda, tunnustust leidmata, ilma elatusvahenditeta, pöördus Abel kodumaale tagasi. Seal tuli tal tegelda eratundide andmisega ja alles aasta enne surma sai ta tagasihoidliku ametikoha ülikoolis. Abel elas alatises rängas puuduses. Materiaalne viletsus mõjus hävitavalt tema tervisele ning 1829. a. suri ta tuberkuloosi. Kurb oli tema elukäik.[2]

Kuid veel kurvem ja lühem oli teise geniaalse matemaatiku — prantslase Évariste Galois' (1811—1832) elu.

[2] Loe Abeli kohta raamatut: O. Ope. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель, М., Физматгиз, 1961.

«Selle inimese isiksus», kirjutas temast kuulus nõukogude matemaatik N. Tšebotarjov, «kujutab endast täiesti erandlikku nähtust teaduse ajaloos.»[3] Kaks korda püüdis Galois astuda kuulsasse prantsuse Polütehnilisse Kooli, kuid kummalgi korral kukkus ta läbi sisseastumiseksameil. Galois, astunud Normaalkooli, heideti juba aasta hiljem sealt välja direktorile vastuhakkamise pärast. Nii ta ei saanudki spetsiaalset matemaatilist haridust, kuid erakordsed matemaatika-alased anded võimaldasid tal teha tähelepanuväärseid avastusi. Galois' matemaatikaalane talent avaldus väga vara. Oma teooria, mis on nimetatud tema nimega, põhilised resultaadid sai ta juba 16—18-aastaselt.

Oma väga lühikese elu jooksul (21 aastat) rajas Galois kaasaegse algebra alused. Tema poolt loodud kõrgema astme algebraliste võrrandite teooria avaldas väga suurt mõju mitte ainult algebra, vaid kogu matemaatika arengule. Galois' poolt esitatud ideid ja meetodeid on rakendatud loodusteaduses, mehhaanikas, kristallograafias ja teistes teadustes.

Galois ühendas teadusliku töö aktiivse osavõtuga tolleaegse Prantsusmaa tormilisest poliitilisest elust. Ta liitus ühinguga «Rahva Sõbrad». Avalike väljaastumiste eest kuningarežiimi vastu karistati Galois'd kui ägedat vabariiklast ja kuninga lepitamatut vaenlast korduvalt arestiga ning paigutati vanglasse.

«Kui selleks, et kutsuda rahvast ülestõusule, on tarvis laipa, siis ma ohverdan enese,» kõneles ta.[4]

Galois' matemaatika-alaseid avastusi tema eluajal ei tunnustatud. Kaks korda esitas Galois oma töid Pariisi Teaduste Akadeemiale, kuid isegi niisugused selle aja silmapaistvad matemaatikud, nagu Cauchy, Fourier ja Poisson ei suutnud mõista tema avastuste tähtsust. Pariisi Akadeemias Galois' tööd unustati või saadeti sealt tagasi märkusega «arusaamatu».

Galois' elu lõppes traagiliselt. Ta tapeti duellil, mis nähtavasti oli sepitsetud tema poliitiliste vaenlaste poolt, ja palgalisteks mõrvariteks olid kuninga agendid.

Galois' kõik matemaatika-alased tööd mõtestati lahti ja avaldati alles 14 aastat pärast tema surma. Neid on

---

[3] Н. Г. Чеботарев. Теория Галуа, М. ОНТИ, 1936, стр. 43.
[4] Эварист Галуа. Сочинения, М., ОНТИ, 1936, стр. 297.

kokku mõnikümmend lehekülge, kuid nende sisu sai kaasaegse matemaatika alusmüüri üheks nurgakiviks.[5]

Revolutsioonieelsel Venemaal said rahva seast võrsunud andekad inimesed samuti tagakiusamiste osalisteks. Masendav oli väljapaistva vene matemaatiku T. Ossipovski elukäik. Ta töötas kaua Harkovi Ülikooli professorina ja rektorina. Ossipovski vaated olid eesrindlikud. Ta ei varjanud oma veendumusi, selgitas neid järjekindlalt ja visalt, kartmata riivata kellegi enesearmastust ja rikkuda oma ametialast seisundit ning suhteid inimestega. Tsaarivalitsus ei võinud leppida Ossipovski vabameelsusega ning Harkovi Ülikooli õitsenguks palju teinud T. Ossipovski tagandati töölt ja jäeti ilma elatusvahenditest. Tema elu viimased aastad möödusid rasketes materiaalsetes tingimustes, puuduses ja viletsuses.

Kiusati taga ka Ossipovski õpilast, suurt vene matemaatikut M. Ostrogradskit. Nagu Ossipovskit nii süüdistati ka Ostrogradskit vabamõttelisuses, ateismis. Talle mitte ainult keelduti andmast teaduste kandidaadi kraadi, vaid talt võeti ära isegi Harkovi Ülikooli lõputunnistus. Peale nelja-aastast õppimist ülikoolis ei saanud Ostrogradski dokumenti lõpetamise kohta, kuigi ta sooritas kolmel korral edukalt kõik nõutavad eksamid.[6]

Taga kiusati ka geniaalset vene matemaatikut N. Lobatševskit. Juba üliõpilasaastail said Lobatševskile korduvalt osaks mitmesugused karistused tema veendumuste pärast. Ülikooli juhtkond valmistus Lobatševskit Kaasani Ülikoolist välja heitma ja soldatiks andma tema juures ilmnenud ateistlike vaadete tõttu. Ja ainult õpetajate-professorite otsustav kaitse päästis Lobatševski teda ähvardavast kohutavast saatusest. Isegi hiljem, kui Lobatševski tegi oma geniaalse avastuse, kui ta avaldas mitu tööd, mis olid pühendatud tema poolt avastatud uuele geomeetriale, ei hinnatud tema teadusalast kangelastegu. Lobatševski suurepäraseid ideid ei tunnustatud. Veelgi enam, Lobatševski avastus naerdi välja. Teda alandati ja solvati. Ja kui 1893. aastal, 37 aastat pärast Lobatševski surma, pöördus Kaasani Ülikool haridusministeeriumi poole palvega lubada tähistada Lobatševski sajandat

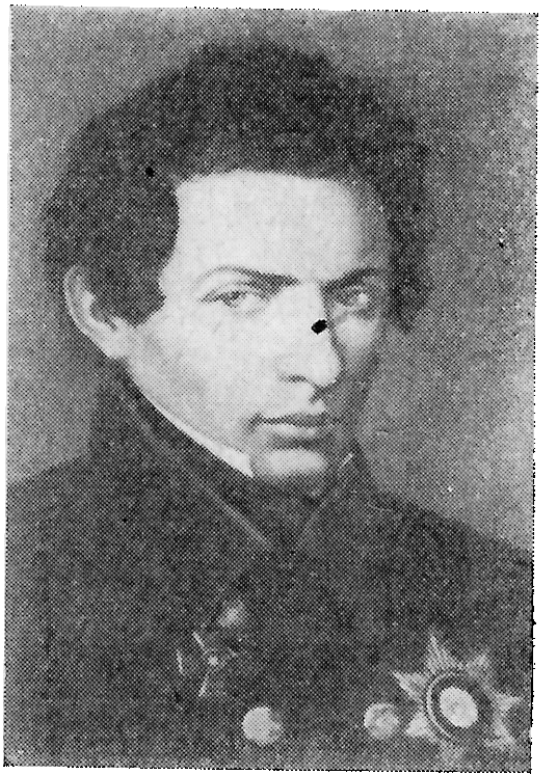
---

[5] Loe Galois' kohta raamatut: Леопольд Инфельд. Эварист Галуа, М., «Молодая гвардия», 1958.

[6] Б. В. Гнеденко. Михаил Васильевич Остроградский, М., Гостехиздат, 1952.



M. Ostrogradski



N. Lobatševski

sünniaastapäeva, küsis ministeerium ülikoolilt, kes see niisugune Lobatševski on ja milliseid teadusalaseid teeneid ta omab. Lobatševski tagakiusamine ei lakanud ka tema elu viimastel aastatel. Pärast kõike seda, mida ta oli teinud Kaasani Ülikooli, rahvahariduse, teaduse heaks, saadeti ta, veel tulvil jõudu, energiat ja uusi ideid, erru, nagu oleks ta olnud jõuetu vanake. Raskemat lööki ei saadud anda. Ta vallandati üheaegselt nii professori kui ka ülikooli rektori ametikohalt. See oli teeneka õpetlase solvav, jõhker tagandamine töölt sellest ülikoolist, mille heaks ta oli pühendanud kogu oma elu. Vägivaldne kõrvaldamine tegevusest ülikoolis ja sellest tingitud materiaalse olukorra halvenemine laostasid Lobatševski tervise. Ta jäi pimedaks ja suri varsti.

Selliseid näiteid võiks tuua palju. Nad räägivad sellest, et kapitalism lämmatab rahva hulgast võrsunud talente. Meie maal aga on andekaile avatud kõik teed ja rajad. Ja kuidas see meid rõõmustab! Ning kuidas mitte hoolitsusele vastata eduga teaduses ja töös kodumaa kuulsuseks! Just seepärast ei tohi meie õpilased, kes on huvitatud matemaatikast, kaotada aega. Matemaatikaga on vaja püsivalt tegelda noorematest klassidest alates. Ei tohi säästa selleks aega ja jõudu.

Sageli mõeldakse, et matemaatika õppimiseks on hädavajalikud erilised anded. Kas on see nii? Matemaatika õpetamise praktika keskkoolides näitab, et nii see ei ole. Tavalised keskpärased võimed on täiesti küllaldased selleks, et õpilane õige juhendamise korral teadlikult omandaks keskkoolis õpetatava matemaatikakursuse. Matemaatika-alased anded on vajalikud nendele, kes pühendavad matemaatikale kogu oma elu. Millised aga on need anded? Mõnikord mõeldakse, et edu matemaatikas põhineb suure arvu reeglite, valemite, teoreemide jne. lihtsal meelespidamisel. Muidugi, head mälu on matemaatika õppimisel vaja, kuid väga paljudel väljapaistvatel teadlastel-matemaatikutel pole olnud mingit erilist mälu ja nimelt matemaatikaga tegelemine aitas neil oma mälu arendada. Märksa tähtsam kui mälu on matemaatika õppimisel oskus leida edukaid teid täheliste avaldiste samasusteisendustes, võrrandite ning ülesannete lahendamisel jne. Samuti on väga tähtis osata kasutada geomeetrilist näitlikkust mitmesuguste matemaatikaküsimuste uurimisel, ülesannete lahendamisel (graafilised illustratsioonid, graafikud jne.). Kuid eriti hinnatav kõigil matemaatikaga tegelda soovijail on arenenud loogiline mõtlemine, oskus õigesti, põhjendatult ja järjekindlalt arutleda. Kõiki neid matemaatikuile hädavajalikke võimeid valmis kujul ei saa inimene kaasa sündides. Need arenevad ja tugevnevad matemaatika õppimise käigus. Seda teadust on vaja ainult armastada ja püsivalt uurida. Õigus on kuulsal nõukogude matemaatikul A. Hintšinil, kes kirjutas, et «matemaatikas (nagu nähtavasti ka igas teises teaduses) nõuab kõige tõeliselt väärtusliku ja tähtsa omandamine suuri jõupingutusi». Veel rohkem jõupingutusi nõuab l o o m i n g matemaatikas. Matemaatika spetsiaalseks õppimiseks on anded tarvilikud, kuid mitte piisavad. Matemaatika-alane talent — see on eelkõige pingeline, hästi organiseeritud töö. Pea seda meeles!

Sageli räägitakse, et matemaatika on igav. Nii mõtlevad hooletud õpilased ja matemaatikast kaugel seisvad inimesed. Küsi ükskõik kellelt matemaatikutest, kas matemaatika näib talle igavana. Sa saad vastuseks — ei! Matemaatika on kuiv ja igav ainult nendele, kes pole tema algmetest kaugemale jõudnud. Matemaatika kütkestab kõiki neid, kes selle õppimisel küllaldaselt edasi liiguvad. Asjatult ei kirjutanud väljapaistev vene naismatemaatik



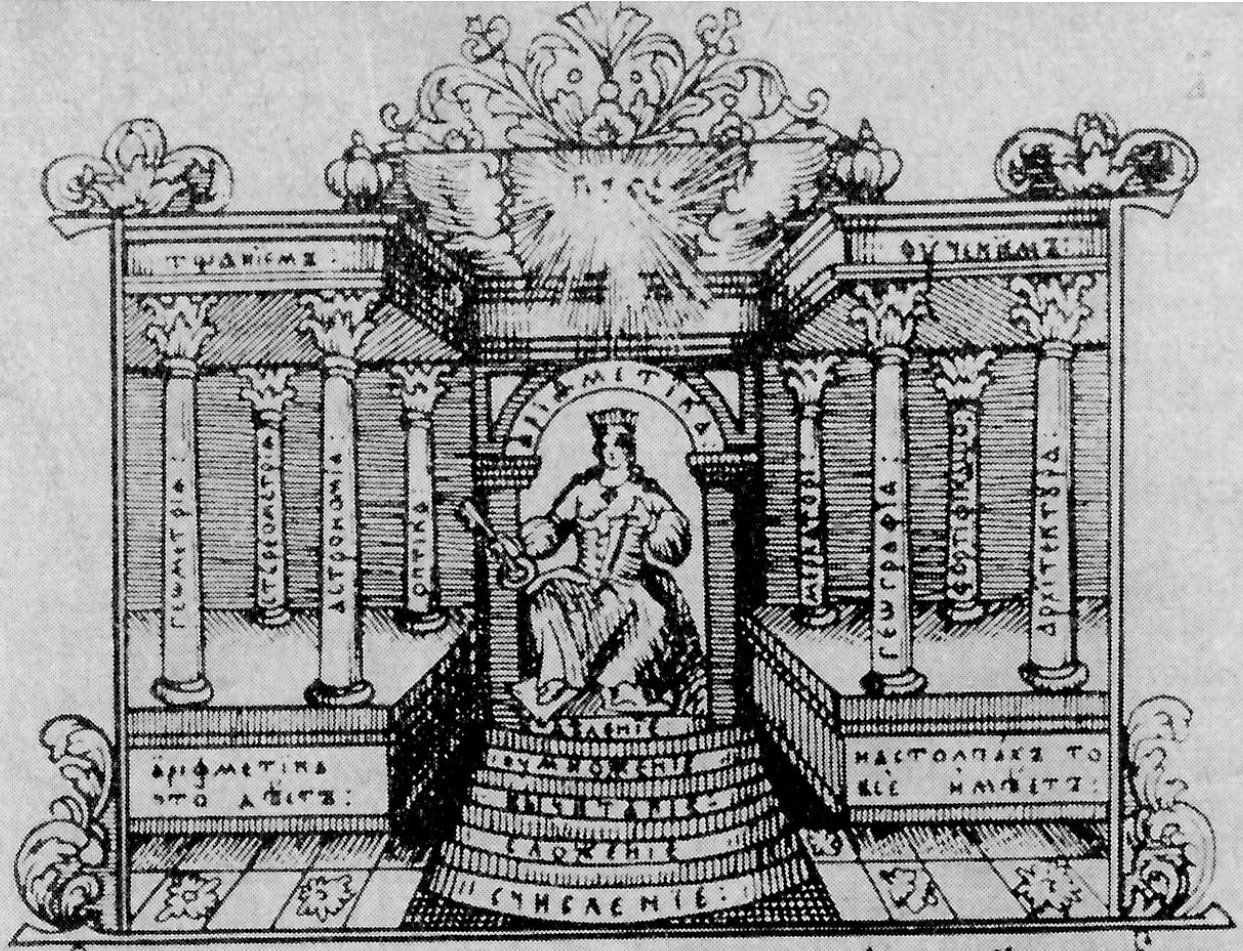
S. Kovalevskaja

S. Kovalevskaja[7]: «Paljud, kellel pole kunagi avanenud juhust rohkem teada saada matemaatikast, ajavad ta segi aritmeetikaga ja peavad teda kuivaks teaduseks. Oma olemuselt on ta aga teadus, mis nõuab kõige enam fantaasiat, ja üks meie aja esimesi matemaatikuid[8] ütleb täiesti õigesti, et ei ole olemas matemaatikut, kes ei oleks samal ajal oma hinges poeet.» Isegi aritmeetika kohta kirjutas kaks ja pool sajandit tagasi üks esimesi vene matemaatikuid L. Magnitski (1669—1739), et see on «auväärne kunst, helde ja kõigile kergesti arusaadav, väga kasulik ja väga kiiduväärne». Isegi kauges minevikus leidus meil küllalt inimesi — «arvuarmastajaid», kes harrastasid aritmeetiliste ja geomeetriliste ülesannete lahendamist. Sellest ajast alates on matemaatika väga palju muutunud, ta on puhkenud õitsele toreda õiena. Ja meie päevil võibolla ei leidu ühtki matemaatikast huvitatud õpilast, kes ei võiks nõustuda andeka nõukogude matemaatiku G. Tšebotarjovi sõnadega: «Matemaatikas etendab ilu hiiglasuurt osa.»

Sellesse raamatusse on kogutud mitmekesiseid üles-

[7] Loe S. Kovalevskaja kohta raamatut: Л. Воронцова. Софья Ковалевская, М., «Молодая гвардия», 1957.

[8] Peetakse silmas väljapaistvat saksa matemaatikut Karl Weierstrassi (1815—1897), kelle juures S. Kovalevskaja õppis.



АРІѲМЕТІКА, ПРАКТІКА

ИЛИ ДѢТЕЛНАЯ.

Что̀ є́сть а̑рїдмети́ка;

А̑рїдмети́ка ѝлѝ числи́тельница, є́сть ху́дожество чє́стное, незавѣ́стное, ѝ всѣ́мъ ѹ̀добополе́зное, многополе́зне́йшее, ѝ многоѹва́жне́йшее, ѿ дре́вне́йшихъ же ѝ но́вѣ́йшихъ, въ ра́зная времена̀ бывшихся ѝзра́дне́йшихъ а̑рїдмети́кивъ, ѝзобрѣ́тенное, ѝ ѝзложе́нное.

Колнкогу́ба є́сть а̑рїдмети́ка пра́ктїка;

Є́сть сугу́ба.

1 А̑рїдмети́ка поли́тїка, ѝлѝ гражда́нская.

2 А̑рїдмети́ка логи́стика, нѐ но̀ гражда́нствѣ то́кмо, но̀ ѝ ко̀ дви́женїю ви́димыхъ кругу̀ принадлежа́щая.

Іоqп. 1

andeid V—VIII klassi õpilastele. Paljud neist on omal ajal avaldatud mitmesugustes huvitava matemaatika raamatutes, aga ka ajalehtedes ja ajakirjades. Kuid käesolevas kogus on ka mõned uued ülesanded. Siin leidub küllalt huvitavaid ülesandeid ka vanemate klasside õpilastele. Selles on kergeid, aga ka raskeid, vigurlikke ülesandeid. Lühidalt öeldes — see raamat on omapärane matemaatiline laegas.

«Huvitav matemaatika» on määratud eelkõige meie pioneeridele. Kellel siis, kui mitte neil, tuleb olla algatajaiks huvitavate matemaatikaülesannete levitamisel ja lahendamisel.

Kuidas siis kasutada «Huvitavat matemaatikat»? Kõigepealt püüa ise lahendada sulle meeldivaid ülesandeid. Mõtle nende üle, arutle, otsi võimalikult rohkem lihtsaid ja «ilusaid» lahendusi. Võib juhtuda nii, et ülesanne sulle ei alistu. Siis vaata vastuseid ja näpunäiteid, kuid ära neid kuritarvita. Kui ka näpunäited ei aita, pöördu abi saamiseks vanemate seltsimeeste, pioneerijuhi, aga veel parem — oma õpetaja poole. Kui sa ise ei suuda ülesannet lahendada, ära sellest väga kurvastu. Muidugi oleks parem olnud, kui sa oleksid ta ära lahendanud, kuid juba see on kasulik, et sa mõtlesid ülesande juures, proovisid mõnda teed tema lahendamiseks. Mõtisklused ülesannete kallal, lahenduste otsingud jätavad peas märgatavaid jälgi, arendavad taiplikkust, tõstavad matemaatikaalase ettevalmistuse taset. Minevikus oli küllalt palju ja on ka veel praegu matemaatikas ülesandeid, mis lahendamisel ei «anna alla». Sellisteks ülesanneteks olid näiteks kuulsad antiikaja ülesanded: a) jaotada sirkli ja joonlaua abil mistahes nurk kolmeks võrdseks osaks; b) kasutades sirklit ja joonlauda, ehitada ruut, mille pindala võrduks täpselt antud ringi pindalaga; c) ehitada sirkli ja joonlaua abil sellise kuubi serv, mille ruumala oleks kaks korda suurem antud kuubi ruumalast. Niisugune on ka näiteks nelja värvi ülesanne (vt. lk. 52). Teadlased, kes taolisi ülesandeid lahendasid, ei suutnud sageli lõpuni jõuda, kuid tegid teel tähelepanuväärseid avastusi. Kõik see muidugi ei tähenda, et sa, veidi mõelnud ülesande kallal, mis ei tule välja, võid ta kõrvale heita. Ei! Mõtle, mõtle ja veel kord mõtle! Otsi — ja sa leiad, aga kui sa siiski ise ei leia, aitavad sind teised.

Sellest on vähe, et sa ise lahendad ülesandeid.

Tõmba sellesse kaasa oma sõpru. Anna neile ülesandeid, aita leida lahendusi. Ülesanded, pärast aga ka nende lahendused võib paigutada seinalehtedesse, matemaatika-alastesse eribülletäänidesse, käsikirjalistesse ajakirjadesse. Selliseid ülesandeid on vaja eriti palju lahendada matemaatika ringis. Kasulik on läbi viia ülesannete lahendamise konkursse salgas, klassis või mitmes paralleelklassis, kuid ka ülekoolilisi konkursse. Palu pioneerijuhti ja õpetajat korraldada kooli matemaatika olümpiaad ning aita ise seda organiseerida. Ühesõnaga, tõmba kaasa huvitavate ülesannete lahendamisele oma kaaslasi, ärata nende huvi, veena neid selle suures kasulikkuses. Lähed sa turismimatkale, jalutad sõpradega, kavatsed minna metsa või jõe äärde, sõidad pioneerilaagrisse, siis valmista ette mõned huvitavad ülesanded mõtisklemiseks puhkeajal ning valides aja, õpi koos seltsimeestega neid lahendama.

Tuleta meelde, mis on matemaatikas kõige huvitavam — see on võib-olla ülesannete lahendamine. Ühtlasi on see ehk kõige raskem. Seepärast tulebki sul rohkem lahendada ülesandeid.[9] Aga raskusi ära karda! Ära unusta Karl Marxi suurepäraseid sõnu: «Teaduses ei ole laia maanteed, ja ainult see võib jõuda tema säravate tippudeni, kes rühib väsimust kartmata mööda tema kiviseid jalgradu.»

---

[9] Palju huvitavaid ülesandeid leiad laialt levinud raamatust: B. Kordemski. Matemaatilisi pähkleid, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1960.

I PEATÜKK

ARITMEETIKA

Õppige tundma teaduse algmeid, enne kui tahate tõusta tema tippudele. Kunagi ärge säästke end järgneva pärast, omandamata eelnevat.

I. Pavlov

SUURED ARVUD (MILJON, MILJARD JA TEISED)

1. Mitu korda on kilomeeter suurem millimeetrist?
2. Mitu ööpäeva on miljon minutit?
3. Mitu aastat on miljon tundi?
4. Millise vahemaa läbib inimene miljoni sammuga, kui tema sammu keskmine pikkus on $\frac{3}{4}$ m?
5. Mitu lööki teeb inimese süda 75 aastaga, kui ta lööb minutis keskmiselt 75 korda?
6. Kui palju kulub aega miljoni sule loendamiseks, kui minutis loendada 50 sulge ja töötada 8 tundi ööpäevas?
7. Mitu ööpäeva on vaja, et kirjutada ritta kõik arvud ühest kuni miljonini, kulutades iga numbri kirjutamiseks 1 sekundi ja kirjutada 8 tundi ööpäevas?
8. Mitu ruutmillimeetrit on ruutmeetris? hektaris?
9. Kui palju on kuupmeetris kuupsentimeetreid? kuupmillimeetreid?
10. Kui pikk tuleb rida, kui lõigata üks kuupmeeter kuupmillimeetriteks ja asetada need ühte ritta tihedasti üksteise kõrvale?

11. Kui pikk tuleb lõik, kui tükeldada kuupkilomeeter kuupmeetriteks ja laduda need ühele sirgele?

12. Tilk vett kaalub keskmiselt 0,08 G. Mitu tilka sisaldab 1 m^3 vett?

13. Kas inimene suudab üles tõsta ühe kuupmeetri korki (korgi erikaal on $0{,}2 \frac{G}{cm^3}$)?

14. 1 l merevett sisaldab keskmiselt 0,00001 mg kulda. Kui palju kulda sisaldab 1 km^3 merevett?

TEHETE KOMPONENTIDE JA RESULTAATIDE VAHELINE SÕLTUVUS

15. Leida x, kasutades sõltuvust tehete komponentide (antud arvude) ja resultaatide vahel:

1) $(64-10x):4+11=22$;

2) $(12+34x)\cdot 56-789=18\,923$;

3) $(10\,000-3333x)\cdot 10\,000-9999=1$;

4) $24\,960:3360-\frac{300\cdot(200\cdot 6x)}{115}=8$.

TEKSTÜLESANDED

Selles peatükis toodud tekstülesandeid võivad lahendada V ja VI klassi õpilased, kes pole veel õppinud tekstülesannete lahendamise algebralist meetodit (võrrandeid). Mõned neist tekstülesannetest on kergesti lahendatavad aritmeetiliselt, teised, näiteks 31, 32, 46, nõuavad kunstlikke võtteid. VII—VIII klassi õpilased (eriti VII) võivad nende ülesannete juurde tagasi pöörduda ja kasutada lahendamiseks võrrandeid. Seda on kasulik teha, sest tekstülesannete lahendamise põhimeetodiks on võrrandite meetod. See tekstülesannete lahendamise meetod ongi sul vaja eriti hästi omandada.

Samal ajal on VII ja VIII klassi õpilastel kasulik püüda lahendada neid ülesandeid ka võrrandeid kasutamata. Asi on selles, et aritmeetikat nimetatakse sageli inimvõimete «kõvasiks». Ja see on teatud määral õige.

16. Matkal mööda kodumaad kasutavad pioneerid kaarti kaardimõõdus 1 : 1 000 000. Kui palju aega kulub jalgratastega sõitmiseks ühest linnast teise kiirusega $12\frac{km}{h}$, kui nende linnade vaheline kaugus kaardil on 0,6 dm?

17. Pioneerid sõitsid autol laagrist linna. Kui nad olid sõitnud $\frac{3}{4}$ teest, peatati auto remontimiseks. Ülejäänud osa teest läbisid pioneerid jalgsi, kulutades selleks 4 korda rohkem aega kui autol sõitmiseks. Mitu korda said pioneerid autoga sõites kiiremini edasi kui jalgsi käies?

18. Jämedast raudtraadist võib töökojas valmistada keti, milles on 80 või 100 lüli. Kui ketis on 100 lüli, siis peaks iga lüli olema 5 G kergem kui 80 lüliga keti puhul. Kui palju kaalub traat?

19. 30 õpikut maksavad 3 rbl. rohkem kui 40 ülesannete kogu. Samad 30 õpikut maksavad 2 rbl. 10 kop. rohkem kui 50 sellist ülesannete kogu. Kui palju maksab üks õpik ja üks ülesannete kogu?

20. Kolme lattu toodi kaupa. Esimesse ja teise lattu toodi 400 t, teise ja kolmandasse 300 t, esimesse ja kolmandasse aga 440 t. Mitu tonni kaupa toodi igasse lattu eraldi?

21. Kaks venda vestlesid sellest, kui palju nad on säästnud raha. Vanem ütles nooremale: «Anna mulle 80 kop., siis on mul 2 korda rohkem raha kui sinul.» Noorem, mõelnud, vastas: «Ei, sul on niigi rohkem raha kui mul. Parem anna sina mulle 80 kop., siis on meil raha ühepalju.» Kui palju raha oli säästnud kumbki vend?

22. Kahel põõsal istus 16 varblast. Varsti lendas teiselt põõsalt 2 varblast ära, aga seejärel lendas esimeselt põõsalt teisele 5 varblast. Pärast seda oli kummalgi põõsal ühepalju varblasi. Kui palju varblasi oli algul kummalgi põõsal?

23. Jalgrattur peab jõudma teatud kohta määratud ajaks. On teada, et kui ta sõidab kiirusega 15 $\frac{km}{h}$, siis saabub ta kohale tund varem, kui kiirus on aga

$10\frac{km}{h}$, siis hilineb ta 1 tunni. Millise kiirusega peab sõitma jalgrattur, et jõuda kohale õigeaegselt?

24. Kümme ploomi kaaluvad sama palju kui kolm õuna ja üks pirn, aga kuus ploomi ja üks õun sama palju kui pirn. Kui palju tuleb võtta ploome, et nende kaal võrduks pirni kaaluga?

25. Kalur püüdis kala. Kui temalt küsiti, kui palju kaalub püütud kala, ütles ta: «Ma mõtlen, et tema saba kaalub 1 kG, pea kaalub nii palju kui saba ja pool keret, kere aga nii palju kui pea ja saba kokku.» Kui palju kaalub kala?

26. Külmumisel suureneb vee ruumala $\frac{1}{11}$ osa võrra. Millise osa võrra väheneb ruumala, kui jää muutub tagasi veeks?

27. Kui palju on praegu kell, kui ööpäeva lõpuni on jäänud $\frac{4}{5}$ sellest ajast, mis on juba möödunud ööpäeva algusest?

28. Tütar on praegu 8- ja ema 38-aastane. Mitme aasta pärast on ema tütrest kolm korda vanem?

29. Kui isa oli 37, oli poeg ainult 3 aastat vana, praegu on aga poeg isast kolm korda noorem. Kui vana on praegu kumbki?

30. Kaks poissi mängisid kabet. Esimese mängija seis hakkas halvenema. Seni, kui ta mõtles järjekordset käiku, vaatles teine mängija lauda, millel seisid kabendid. Osutus, et laual oli tühje ruute kolm korda rohkem kui kabenditega ruute ja et temal oli kaks kabendit rohkem kui esimesel mängijal. Mitu kabendit oli sel ajal laual kummalgi mängijal?

31. Õpilasele, kes töötas tisleritöötoas, anti laud pikkusega 3 m ja kästi see lõigata risti kaheks osaks nii, et meetrite arv suuremas osas võrduks detsimeetrite arvuga väiksemas. Kuidas peab õpilane lauda lõikama?

32. Küttepuude laos on kase- ja männipuid kokku 100 m^3 väärtusega 340 rbl. Kuupmeeter kasepuid maksab

4 rbl., m^3 männipuid aga 3 rbl. Kui palju kase- ja kui palju männipuid on laos?

33. Kaupluses olevad kartulid jaotati 24-ks pakiks 5 kG ja 3 kG kaupa. Kõigi 5-kG-ste pakkide kaal osutus võrdseks kõigi 3-kG-ste pakkide kaaluga. Kui palju oli kumbagi liiki pakke?

34. Kui ühele kaalukausile asetada tellis, siis tuleb teisele kausile panna tasakaalustamiseks vihid 1,5 kG ja pool tellist. Kui palju kaalub tellis?

35. Ühele kaalukausile pandi tükk seepi, teisele $\frac{3}{4}$ samasugusest tükist ja veel $\frac{3}{4}$ kG. Tekkis tasakaal. Kui palju kaalub tükk seepi?

36. Ühte ritta vahedega 5 m on istutatud 16 noort puud. Äärmise puu kõrval asetseb kaev. Kahe puu kastmiseks on vaja ämber vett. Kui pikk tee tuleb käia, et kasta kõiki puid, kasutades ainult üht ämbrit?

37. Koer hakkas jälitama rebast, kes oli temast 120 m kaugusel. Millal jõuab koer rebasele järele, kui rebane jookseb minutis 320 m, koer aga 350 m (keskmiselt)?

38. Mööda teed lähevad samas suunas kaks poissi. Algul on nende vahemaa 2 km, kuid et ees mineva poisi kiirus on 4 $\frac{km}{h}$, teise kiirus aga 5 $\frac{km}{h}$, siis jõuab teine esimesele järele. Teise poisi liikumise algusest kuni jõudmiseni esimese poisini jookseb nende vahel koer keskmise kiirusega 8 $\frac{km}{h}$. Tagapool käiva poisi juurest jookseb ta esimese juurde, kohale jõudnud, pöördub tagasi ja jookseb seni, kuni poisid pole veel kõrvuti. Kui pika tee jookseb koer kogu selle ajaga?

39. Jaša läheb kodust kooli 30 min., tema vend Petja aga 40 min. Petja väljus kodust 5 min. Jašast varem. Mitme minutiga jõuab Jaša Petjale järele?

40. Kaks veoautot väljusid samaaegselt punktist *A* punkti *B* suunas. Jõudnud punkti *B*, pöördusid mõlemad tagasi punkti *A*. Esimene auto liikus kogu tee ühesuguse kiirusega, teine aga punktist *A*

punktini *B* kiirusega, mis oli 2 korda väiksem kui esimesel, kuid see-eest tagasi punktist *B* punktini *A* oli tema kiirus 2 korda suurem kui esimesel autol. Kumb veoauto jõudis varem tagasi punkti *A*?

41. Koer hakkas taga ajama rebast, kes oli temast 30 m kaugusel. Koera hüpe on 2 m pikkune, rebase hüpe 1 m. Ajal, mil rebane teeb 3 hüpet, teeb koer 2 hüpet. Millise vahemaa peab koer jooksma, et rebasele järele jõuda?

42. Ema jättis hommikul oma kolmele pojale taldrikutäie ploome, ise aga läks tööle. Esimesena ärkas vanem poeg. Näinud laual ploome, sõi ta neist kolmandiku ja lahkus. Teisena ärkas keskmine poeg. Mõeldes, et tema vennad pole veel ploome söönud, sõi ta kolmandiku neist, mis olid alles, ja läks ära. Hiljem teistest tõusis üles noorem poeg. Nähes ploome arvas ta, et vennad ei ole neid veel saanud, ja sõi seepärast kolmandiku taldrikul olevaist ploomidest. Kui ema koju tuli, nägi ta taldrikul 8 ploomi. Mitu ploomi oli algul?

43. Kolm perenaist, kes elasid ühes korteris, leppisid kokku, et varuvad ühiselt köögiahju jaoks 6 m^3 küttepuid. Esimene neist tõi 2,5 m^3, teine 3,5 m^3, kolmas aga maksis oma osa eest 6 rbl. Kuidas peavad perenaised omavahel selle raha jaotama?

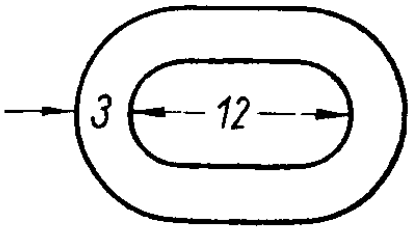
44. Kaks kütti otsustasid koos lõkkel putru keeta. Esimene andis 400 G tangu, teine aga 200 G. Nad alles keetsid putru, kui tuli juurde kolmas kütt. Ta maksis oma osa eest 10 kop. Kuidas peavad esimesed kaks kütti selle raha omavahel jaotama?

45. Viis õpilast läksid enne õppeaasta algust kauplusse vihikuid ostma. Esimesel oli 20 kop., teisel 15 kop., kolmandal 5 kop., neljandal 10 kop., viiendal aga 20 kop. Mitu vihikut ostsid õpilased kogu raha eest, kui esimene ja teine said oma raha eest kokku 21 vihikut?

46. Kaks kolhoosnikut tulid turult. Üks küsis teiselt: «Mida te müüsite?» Küsitav vastas: «Ma müüsin kanapoegi ja tuli välja nii, et esimesele ostjale müüsin poole kõigist tibudest ja veel pool tibu, teisele —

poole ülejäänud tibudest ja veel pool tibu. Kolmandale ostjale müüsin samuti poole tibudest, mis jäid üle teisest ostjast, ning veel pool tibu. Rohkem mulle tibusid ei jäänud.» Mitu kanapoega müüs see kolhoosnik?

47. Neljakümnest lülist moodustati kett. Iga lüli ava pikkus on 12 mm, lüli paksus aga 3 mm (joon. 2). Kui pikk on see kett?



Joon. 2

48. Rong ületab 450 m pikkuse silla 45 sekundiga, rööpaseadja majakesest möödub ta aga 15 sekundiga. Arvutada rongi pikkus ja kiirus.

MÕNED VANAAEGSED ÜLESANDED

49. Keegi ostis kolme sorti kalevit 106 arssinat; üht võttis 12 võrra rohkem kui teist, teist 9 võrra rohkem kui kolmandat, ja tahetakse teada, kui palju võeti iga sorti kalevit (L. Magnitski vanaaegsest raamatust «Aritmeetika», XVIII sajandi algus.)

50. Lendas parv hanesid, neile vastu aga lendas üks hani ja ütles: «Tere, sada hane!» — «Meid ei ole sada hane,» vastas talle parve juht, «kui meid oleks nii palju kui praegu ja veel nii palju ja pool sellest ja veerand sellest ja veel sina, hani, koos meiega, oleks meid sada hane.» Mitu hane oli parves? (Vanaaegne vene ülesanne.)

51. Räägitakse, et küsimusele, kui palju on tal õpilasi, vastanud vana-kreeka matemaatik Pythagoras nii: «Pool minu õpilastest õpib matemaatikat, veerand uurib loodust, seitsmendik veedab aega vaikivas mõtiskelus, ülejäänud osa aga moodustavad 3 neiut.» Mitu õpilast oli Pythagorasel?

52. Keegi inimene vastas küsimusele, kui palju tal on raha, järgmiselt: «Kui minule antakse raha juurde nii palju, kui mul on, ja pool sellest ja $\frac{3}{4}$ ja $\frac{2}{3}$ ja see väheneb 50 rubla võrra, siis on mul 100 rubla.» Ja tahetakse teada, kui palju sellel inimesel on raha. (Magnitski.)

53. Puuris on faasanid ja küülikud. Loomadel on kokku 35 pead ja 94 jalga. Mitu küülikut ja mitu faasanit on puuris?

54. Ühes veskis oli kolm veskikivi, ja üks kivi võib ööpäevas jahvatada 60 setverti, teine kivi aga sama ajaga 54 setverti, kolmas sama ajaga 48 setverti, ja keegi inimene tõi 81 setverti vilja, soovis seda kiiresti jahvatada, ja puistati see kõigi kolme kivi vahele, ja tahetakse teada, mitme tunniga vili jahvatati ja kui palju iga veskikivi vahele puistati. (Magnitski.)

55. Ateena linnas oli veemahuti, millesse oli juhitud 3 toru. Üks toru võib mahuti täita ühe tunniga, teine, peenem, kahe tunniga, kolmas, veel peenem, kolme tunniga. Niisiis, uuri välja, millise osaga tunnist täidavad basseini kõik kolm toru koos. (Anania Širakist, armeenia matemaatik, VII sajand.)

56. 336-ämbrisesse veehoidlasse voolab iga 2 tunni jooksul ühe toru kaudu 70 ämbrit vett, teise toru kaudu aga voolab välja 42 ämbrit vett. Küsitakse, millise ajaga veehoidla täitub. (Vanaaegne Voitjahhovski aritmeetika ülesannete kogu.)

57. Üks mees joob joogitõrre tühjaks 14 päevaga, kuid koos naisega tühjendab ta sama tõrre 10 päevaga, ja on vaja teada, mitme päevaga tema naine üksinda selle tõrre tühjaks joob. (Magnitski.)

58. Lõvi sõi lamba ära ühe tunniga, aga hunt sõi lamba ära kahe tunniga, aga koer sõi lamba ära kolme tunniga. Kui kiiresti kõik kolm — lõvi, hunt ja koer — koos oleksid lamba ära söönud, arvuta! (Matemaatika-alased käsikirjad, XVII sajand.)

59. Neli puuseppa astusid kellegi võõra (kaupmehe) teenistusse maja ehitama. Esimene puusepp rääkis nii:

«Kui ma üksi seda maja ehitaksin, püstitaksin ma selle ühe aastaga.» Teine aga lausus: «Ma püstitaksin selle kahe aastaga.» Kolmas aga lausus: «Ma püstitaksin selle kolme aastaga.» Neljas aga ütles: «Ma püstitaksin selle 4 aastaga.» Kõik need neli puuseppa hakkasid koos seda maja ehitama. Kui kaua nad ehitasid, arvuta! (Matemaatika-alased käsikirjad, XVII sajand.)

60. Üks teekäija läheb linnast koju, käia tuleb tal 17 päeva, kuid teine rändur juhtub minema kodust linna sama teed, jõuab selle ära käia 20 päevaga, mõlemad inimesed hakkavad minema samal tunnil, ja on vaja teada, mitme päeva pärast nad kohtuvad. (Magnitski.)

61. Koer märkas 150 sülla kaugusel jänest, kes jookseb 2 minutiga 500 sülda, koer aga 5 minutiga 1300 sülda; küsitakse, millise ajaga jõuab koer jänesele järele. (Vanaaegne Voitjahhovski aritmeetika ülesannete kogu.)

62. Üht virgatsit kästi jõuda 12 päevaga määratud kohta, kuhu ta varem oli jõudnud 15 päevaga, sõites igas ööpäevas 228 versta. Küsitakse, mitu versta peab ta sõitma ööpäevas, et jõuda sellesse kohta määratud ajaks. (Voitjahhovski ülesannete kogu.)

63. Keegi noormees läks Moskvast Vologdasse ja käis iga päev 40 versta. Teine läks pärast teda järgmisel päeval, iga päev aga käis 45 versta. Mitme päeva pärast sai see noormees esimese kätte, arvuta! (Matemaatika-alased käsikirjad, XVII sajand.)

KAS SA TUNNED PROTSENTE

64. Ühe maleva pioneerid sooritasid turismimatka ja korraldasid ekskursiooni. Nad kõik võtsid osa kas matkast või ekskursioonist, kuid paljud neist käisid nii matkal kui ka ekskursioonil. Matkast võttis osa 89% kõigist pioneeridest, ekskursioonist aga 78%. Mitu protsenti pioneeridest võttis osa nii matkast kui ka ekskursioonist?

65. Kauplus müüs ühele ostjale 25% olemasolevast lõuenditükist, teisele 30% jäägist, kolmandale aga 40% uuest jäägist. Kui palju (protsentides) lõuendit jäi müümata?

66. Tööstus- ja toidukaupade hinnad alanesid 25% võrra. Mitme protsendi võrra tõusis reaalpalk?

67. Töölise rahaline töötasu tõusis 20% võrra ja üheaegselt sellega alanesid 20% võrra toiduainete ning muude kaupade hinnad. Mitme protsendi võrra suurenes reaalpalk?

68. Tööviljakus kasvas 40% võrra. Mitme protsendi võrra lühenes selle töö täitmiseks vajalik aeg?

69. Kauba hinda alandati 12% võrra, siis aga alandati uut hinda veel 5% võrra. Mitu protsenti esialgsest hinnast moodustab selle kauba lõplik hind peale kaht järjestikust alandamist ja mitme protsendi võrra üldkokkuvõttes alandati kauba hinda?

70. Kaks töölist väljusid üheaegselt samast majast ja läksid samasse tehasesse. Esimese samm oli 10% võrra lühem kui teisel, kuid see-eest ta astus 10% võrra rohkem samme kui teine. Kumb tööline jõuab varem tehasesse?

71. Mitme protsendi võrra kasvab ruudu pindala, kui tema ümbermõõtu suurendada 10% võrra?

72. Mitme protsendi võrra kasvab ristküliku pindala, kui tema pikkust suurendada 20% võrra, laiust aga 10% võrra?

73. Avaldada protsentides ristküliku pindala muutumine, kui pikkus suureneb 30% võrra, laius aga väheneb 30% võrra?

74. Mitme protsendi võrra kasvab risttahuka ruumala, kui pikkust suurendada 10% võrra, kõrgust aga vähendada 10% võrra?

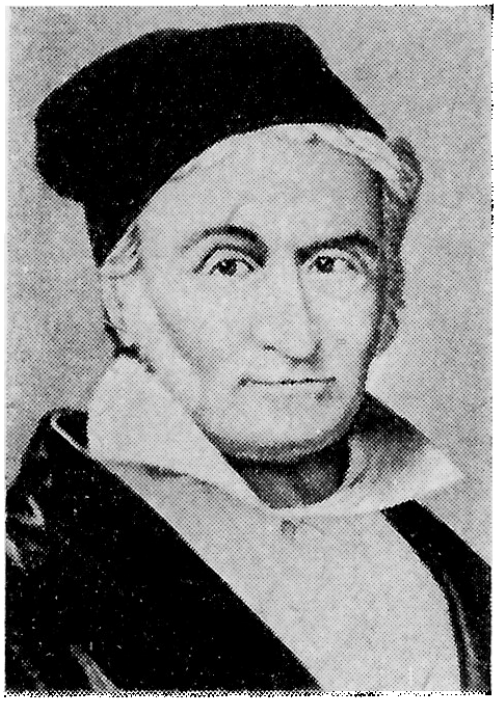
75. 735 grammist 16-protsendilisest joodilahusest piirituses on vaja saada 10-protsendilist joodilahust. Mitu grammi piiritust on vaja olemasolevale lahusele lisada?

76. Kolm venda kogusid kokku 9 rbl. Noorem kogus 1 rubla vähem, vanem aga 1 rubla rohkem kui keskmine. Mitu rubla kogus iga vend?

77. Kui Kolja ostaks 3 vihikut, siis jääks tal 5 kop. üle, kui ta aga tahaks osta 9 vihikut, tuleks tal 5 kop. puudu. Kui palju raha on Koljal?

78. 4 õuna ja 3 pirni maksavad 25 kop., 2 õuna ja 2 pirni aga 15 kop. Kui palju tuleb maksta: 1) 8 õuna ja 7 pirni eest? 2) 8 õuna ja 4 pirni eest?

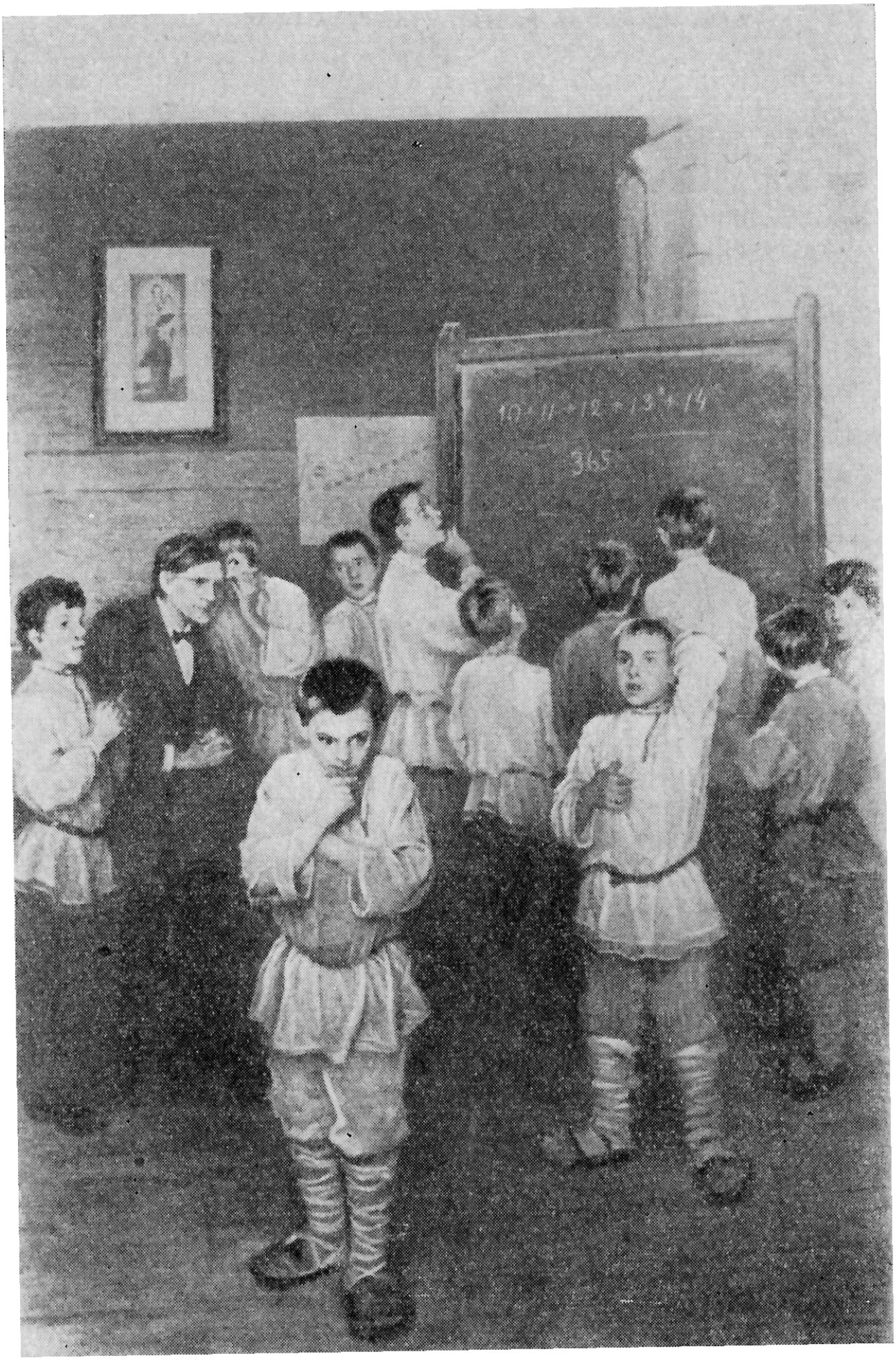
79. Mitu protsenti on see ja selle pool selle kolmveerandist?



C. Gauss

80. Räägitakse, et algkoolis, kus õppis tulevane kuulus matemaatik Carl Gauss, andnud õpetaja lastele selleks, et klassi pikemaks ajaks iseseisvale tööle rakendada, ülesande: arvutada kõigi naturaalarvude summa 1-st 100-ni. Kuid väike Gauss oli täitnud selle ülesande silmapilkselt. Proovi ka sina seda ülesannet kiiresti lahendada.

81. Meie korteris on seinakell, mis lööb täistunde ja ühe löögiga iga pooltundi. Mitu lööki lööb see kell ööpäevas?



Joon. 3

82. Kuulsal vene kunstnikul Bogdanov-Belskil on maal[10], mis kujutab peastarvutamist (joon. 3). Klassis tahvli kõrval istub õpetaja, tema juures seisavad õpilased. Õpilased lahendavad peast rasket ülesannet. Nad on keskendunud ja tööst haaratud. See ülesanne on kirjutatud klassitahvlile:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365};$$

lahenda ka sina see ülesanne peast!

83. Kuidas leida kiiresti summat $1+3+5+7+9+\ldots+997+999$? Millega võrdub see summa?

84. Leia lihtsaim arvutusvõte ja kasuta seda:

1) $99-97+95-93+91-89+\ldots+7-5+3-1$;

2) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}$;

3) $\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\frac{1}{13\cdot14}+\frac{1}{14\cdot15}+\ldots+\frac{1}{98\cdot99}+\frac{1}{99\cdot100}$.

85. 1) Leia kiiresti, milline jagatis ja milline jääk tekib arvu $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+1$ jagamisel 5-ga.

2) Arvuta peast:

$1\,000\,000-(1\,000\,000-\{1\,000\,000-[1\,000\,000-(1\,000\,000-999\,999)]\})$.

NUMBRILISED NUPUTAMISÜLESANDED

86. Jaotada kella numbrilaud kuueks osaks nii, et kõigil osadel olevate numbrite summad oleksid võrdsed.

87. Kirjutada, kasutades kolme viit ja tuntud tehtemärke: 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 5.

---

[10] Maalil «Peastarvutamine» kujutas kunstnik vana, ennerevolutsiooniaegse külakooli õpilasi. Õpetaja sellel pildil on tuntud vene pedagoog S. Ratšinski. Praegu asub see maal Tretjakovi galeriis Moskvas.

88. Kasutades viit kahte ja tehtemärke, kirjutada arv 28.

89. Kasutades nelja kahte ning tehtemärke, kirjutada arv 111.

90. Kirjutada arv 100, kasutades: 1) nelja üheksat, 2) kuut üheksat.

91. Kirjutada 31: 1) viie kolmega, 2) kuue kolmega, 3) viie viiega.

92. Kirjutada 100: 1) viie ühega, 2) viie kolmega, 3) viie viiega.

93. Kirjuta üheksa numbrit: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Muutmata nende numbrite järjestust aseta nende vahele plusse ja miinuseid, nii et tulemuseks oleks 100.

94. Nelja nelja ja sulle tuntud tehtemärkide abil kirjuta kõik naturaalarvud 1-st 10-ni.

95. Kumb on suurem: 10^{20} või 20^{10}?

96. Kumb on suurem: 100^{20} või 9000^{10}?

97. a) Millise kahe naturaalarvu summa võrdub nende korrutisega? b) Millise kahe naturaalarvu summa on suurem nende korrutisest?

98. Mõtle kaks niisugust arvu, mille summa, korrutis ja jagatis oleksid omavahel võrdsed [11].

99. Milline naturaalarv on 7 korda suurem tema numbri üheliste arvust?

100. Milline on suurim arv, mille võib kirjutada: 1) kolme ühe, 2) nelja ühe abil?

101. Kirjuta suurim võimalik arv, kasutades ainult kolme kahte.

102. Kasutades kahte numbrit ja tehtemärke, kirjuta väikseim võimalik arv.[11]

103. Kasutades kolme numbrit, kirjuta suurim võimalik arv.

104. Kauplusse toodi 6 vaati, milles oli 15, 16, 18, 19, 20 ja 31 dekaliitrit petrooli. Kaks kolhoosi ostsid samal päeval 5 vaati, üks neist kaks ja teine kolm

---

[11] Ülesannete 98 ja 102 lahendamisel kasuta negatiivseid arve.

vaati, kusjuures esimene ostis kaks korda vähem petrooli kui teine. Milline vaat jäi kauplusse?

105. Kas on võimalik jaotada 5 õuna 6 poisi vahel võrdselt nii, et poleks vaja lõigata ühtki õuna rohkem kui kolmeks tükiks?

106. Kuidas jaotada 7 suurt õuna võrdselt 12 poisi vahel, lõikamata ühtki õuna rohkem kui neljaks tükiks?

107. Leida väikseim arv, mis jagamisel 2-ga annab jäägi 1, jagamisel 3-ga jäägi 2, jagamisel 4-ga jäägi 3, jagamisel 5-ga jäägi 4 ja jagamisel 6-ga jäägi 5?

108. Kolhoosnik viis turule müügiks korvitäie mune. Ta müüs neid ühe ja sama hinnaga. Peale munade müümist tahtis kolhoosnik kontrollida, kas ta sai õige rahasumma. Kuid oh häda — ta oli unustanud, kui palju oli mune. Ta mäletas ainult, et, paigutanud neid 2-kaupa, jäi üle üks muna; üks muna jäi üle ka nende paigutamisel 3-, 4-, 5- ja 6-kaupa. Kui ta paigutas neid aga 7-kaupa, ei jäänud üle ühtki muna. Aita kolhoosnikule selgitada, kui palju oli mune!

109. Neljast tikust on koostatud arv VII (7).
1) Kuidas tuleks ümber paigutada kaks tikku, et saada arv 5?
2) Kuidas tuleks ümber paigutada üks tikk, et saada arv 1? [12]

110. Taasta tärnidega tähistatud puuduvad numbrid:

1) $\begin{array}{r} _\,6\,{*}5{*} \\ {*}\,8{*}4 \\ \hline 2856 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} {**},45 \\ +59{,}27 \\ \hline 78{,}{*}3 \\ \hline 182{,}1{*} \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} \times\ 27 \\ \hline {**} \\ 5{*} \\ {**} \\ \hline 8{**} \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} \times\ 6{*} \\ \hline {***} \\ {**} \\ {**} \\ {**} \\ \hline {***}6 \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} \times\ {*}2{*} \\ {*}7 \\ \hline 22{*}8 \\ {*}6{*}0 \\ \hline 1{*}46{*} \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} \times\ 56{*} \\ {*}4 \\ \hline {**}72 \\ {*}13{*} \\ \hline 1363{*} \end{array}$

7) $\begin{array}{r|l} {*}8{***} & {***} \\ 3{*}8 & \hline {***} \\ \hline 1058 & \\ {****} & \\ \hline {***} & \\ 504 & \\ \hline \end{array}$ 8) $\begin{array}{r|l} {***}5{*} & 325 \\ {***} & \hline 1{**} \\ \hline {****} & \\ {*}9{**} & \\ \hline {*}5{*} & \\ {*}5{*} & \\ \hline \end{array}$ 9) $\begin{array}{r|l} {*******} & {**} \\ {***} & \hline {**}8{**} \\ \hline {**} & \\ {**} & \\ \hline {***} & \\ {**} & \\ \hline 4 & \end{array}$

[12] Teine küsimus esitatakse VIII klassi õpilastele.

111. Mitme nulliga lõpeb arv, mis väljendab: 1) kümne; 2) kahekümne; 3) viiekümne; 4) saja järjestikuse naturaalarvu korrutist, alates 1-st?

ARVUDE MAAILMAS (ARVUSÜSTEEMID)

112. XVII sajandil loodi Venemaal harmooniline arvutussüsteem, mida nimetati «slaavi suureks arvuks». Sõna *tma* tähendas tuhat tuhandet, tma tmad nimetati *legioniks*, legion legione *leodriks,* leodr leodrit *voroniks.* Ühes selleaegses käsikirjas on viide ka suurema arvu kohta, mida nimetati *kolodaks* ja mis võrdus kümne voroniga. Temast räägib kroonik: «Sellest arvust pole suuremat.» Milline on siis see arv, ülekantuna kaasaegsesse arvutusse? Kirjuta ta kümne astmena! Kas on õige, et ei ole sellest suuremat arvu?

113. Näita, et mistahes naturaalarv on esitatav arvu 2 mitmesuguste astmete summana või summana, mis on sellest ühe võrra suurem.

114. Millises arvusüsteemis on $2 \cdot 2 = 10$?

115. Üks VI klassi õpilane kirjutas endast nii: «Sõrmi ja varbaid on mul 24, kummalgi käel 5, jalgadel aga 12.» Kuidas see nii võib olla?

116. Kui palju ja milliseid numbreid on vaja, et kirjutada mistahes naturaalarv: 1) kümnend-, 2) viiend-, 3) kaheksand-, 4) kolmend-, 5) kahendsüsteemis?

117. Kirjutada: 1) arv 2456 viiend-, 2) 321 kolmend-, 3) 64 kahendsüsteemis.[13]

118. Kirjutada kümnendsüsteemis järgmised arvud: 1) $100\,101_2$; 2) $120\,012_3$; 3) $403\,200_5$; 4) 5042_8.

119. Mitu korda suureneb arv 325_6, kui: 1) temast paremale kirjutada juurde üks null, 2) kolm nulli?

120. Kuidas muutub arvu $212\,000_3$ suurus, kui: 1) jätta tema lõpust ära üks null, 2) kolm nulli?

---

[13] Antud arvud selles ülesandes on kirjutatud kümnendsüsteemis.

121. Millises arvusüsteemis: 1) 23_{10} kirjutatakse nagu 212; 2) 33_{10} nagu 53; 3) 42_{10} nagu 52?

122. Teostada näidatud tehted: 1) 3240_5+4023_5; 2) $23\,265_8-4762_8$; 3) $322_5 \cdot 14_5$.

123. Millises arvusüsteemis on: 1) $2 \cdot 2=11$; 2) $4 \cdot 4=31$; 3) $3 \cdot 3=10$?

124. Määrata, millises arvusüsteemis on teostatud iga järgmine tehe: 1) $23+14=42$; 2) $71-36=33$; 3) $14 \cdot 2=30$; 4) $55:4=13$?

125. Kui $4 \cdot 4=20$, siis millega võrdub korrutis $5 \cdot 5$ (samas arvusüsteemis)?

126. Arv, mis on kirjutatud kümnendsüsteemis, lõpeb numbriga 5. Kas see arv on arvu 5 kordne, kui kirjutada ta kolmendsüsteemis?

127. Hästi on teada naturaalarvude jaguvuse tunnused 2-, 3-, 4-, 5-, 9-, 10-ga kümnendsüsteemis. Kas need tunnused on õiged ka muudes arvusüsteemides, näiteks alusel 3; 5?

128. Teostada tehted: 1) $1\,000\,000_2 : 1000_2$; 2) $11_2 : 100_2$; 3) $11_2 : 101_2$; 4) $12_3 : 100_3$; 5) $10_3 : 11_3$.

129. Nii nagu harilikke murde on võimalik väljendada kümnendmurdudena, nii väljenda murrud $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{4}{5}$ kahendmurdudena.

130. Kirjuta murrud $\frac{4}{27}$ ja $\frac{4}{5}$ kolmendmurdudena.

MITMESUGUSED KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

131. Millist nelja kaaluvihti on vaja, et nende abil kaaluda kausskaaludel mistahes täisarv kilogramme, mis ei ületa 40? (Lahenda see ülesanne proovimise teel. Küsimuse teoreetilise külje kohta loe § IX huvitavas raamatus: И. Я. Депман. Меры и метрическая система, М., Учпедгиз, 1954.)

132. Mitme arvu liitmisel tegi õpilane hooletuse tõttu järgmised vead: üheliste numbri 3 asemel võttis ta 9, sajaliste numbri 1 asemel 7, lõpuks — tuhande-

liste numbri 5 asendas ta 6-ga. Õpilane sai 63 587. Võib-olla saab teda aidata õige summa leidmisel? Kuidas seda teha?

133. Kui mõeldud kolmekohalisest arvust lahutada 7, siis jagub saadud arv 7-ga, kui lahutada 8, siis jagub tulemus 8-ga, kui aga lahutada 9, siis jagub resultaat 9-ga. Milline on mõeldud arv?

134. Arv 45 on vaja jaotada nelja ossa nii, et kui esimese osaga liita 2, teisest lahutada 2, kolmandat korrutada 2-ga, neljandat aga jagada 2-ga, siis on kõik tulemused võrdsed. Leida need osad.

135. Kirjuta väikseim kolmekohaline arvu 3 kordne arv, mille esimene number on 8 ja kõik numbrid on erinevad.

136. Kirjuta väikseim viiekohaline arvu 9 kordne arv, mille esimene number on 6 ja kõik numbrid on erinevad.

137. Kui arv 12 345 679 korrutada 9-ga, siis saadakse arv 111 111 111 (kontrolli). Millise arvuga tuleb korrutada arvu 12 345 679, et saada arv, mis kirjutatakse: 1) ainult viitega, 2) ainult üheksatega?

138. Kumb murdudest $\frac{22}{35}$ ja $\frac{110}{117}$ on suurem? Kuidas võrrelda neid murde lihtsamalt?

139. On antud murd $\frac{11}{41}$. Milline arv on vaja liita tema kummagi liikmega, et ta muutuks murruks $\frac{3}{8}$?

140. On antud murd $\frac{29}{64}$. Milline arv tuleb lahutada tema kummastki liikmest, et saada murd $\frac{2}{9}$?

141. On antud murd $\frac{37}{63}$. Milline arv on vaja lahutada tema lugejast ja liita nimetajaga, et saada pärast taandamist $\frac{3}{17}$?

142. Et nummerdada raamatu lehekülgi, oli vaja 1164 numbrit. Mitu lehekülge on selles raamatus?

143. Mitut numbrit kasutatakse 634-leheküljelise raamatu lehekülgede nummerdamiseks?

144. Kui palju jagajaid on arvul: 1) $2^{10} \cdot 3^2$; 2) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$?

145. Kõik naturaalarvud alates 1-st on kirjutatud nende kasvamise järjekorras: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 jne. Milline number seisab selles kirjutises sajandal kohal?

II PEATÜKK

ALGEBRA

Algebra ajalooline ülesanne seisneb selles, et ta oli ja on hälliks äsja tekkinud ideedele ning meetoditele, mis edaspidi levivad teistesse matemaatika harudesse ja hakkavad seal sageli etendama domineerivat osa.

N. Tšebotarjov

VÕRRANDITE ABIL

146. Mõned töölised otsustasid osta mootorpaadi. Kui igaüks neist maksab 70 rbl., siis tuleb 30 rbl. puudu, kui aga igaüks maksab 80 rbl., jääb 40 rbl. üle. Kui palju oli töölisi ja kui palju maksis mootorpaat?

147. Kooli poolt korraldatavaks ekskursiooniks oli vaja koguda teatud rahasumma. Kui iga ekskursioonist osavõtja maksab 7 rbl. 50 kop., siis tuleb kulutuste katmiseks puudu 44 rbl., kui aga igaüks maksab 8 rbl., siis jääb 44 rbl. üle. Mitu õpilast kavatses ekskursioonist osa võtta?

148. Poisil on õdesid ja vendi ühepalju, tema õel aga on õdesid kaks korda vähem kui vendi. Mitu venda ja õde on selles perekonnas?

149. Kaks venda said tuusiku pioneerilaagrisse, mis asus linnast 20 km kaugusel. Laagrisse jõudmiseks otsustasid nad kasutada oma jalgratast. Kuna aga kahekesi ei tohi jalgrattal sõita, siis leppisid vennad kokku, et nad asuvad teele üheaegselt — esimene jalgrattal, teine jalgsi. Sõitnud osa teest, jätab esi-

mene jalgratta maha, teine aga, jõudnud sinna, kuhu jäi jalgratas, sõidab sellega edasi ning jõuab laagri väravas esimesele järele. Kuhu peab esimene vend jätma jalgratta ja kui palju aega kulub teel, kui mõlemad vennad sõidavad jalgrattal kiirusega 10 $\frac{km}{h}$, jalgsi käivad aga 5 $\frac{km}{h}$?

150. Keegi mees palkas aastaks tööline ja lubas talle anda 12 rbl. ning kaftani. Kuid see, töötanud 7 kuud, tahtis ära minna ja palus väärilist tasu koos kaftaniga. Ta andiski talle teenitud palga 5 rbl. ja kaftani, ja on vaja teada, missuguse hinnaga see kaftan oli. (Magnitski.)

151. Üks karjane ütleb teisele: «Anna mulle üks oma lammastest ja mul on kaks korda rohkem lambaid kui sul.» Teine karjane vastab: «Ei, parem anna sa mulle üks oma lammastest, siis on meil lambaid ühepalju.» Mitu lammast oli kummalgi karjasel? (Vanaaegne ülesanne.)

152. Hakid lendavad, kepid lebavad. Kui igale kepile istub hakk, siis ühele hakile ei jätku keppi, kui aga igale kepile istub kaks hakki, siis üks kepp jääb hakita. Kui palju lebas keppe ja kui palju lendas hakke? (Vanaaegne ülesanne.)

153. Vana-kreeka matemaatiku Diophantose hauasambal on järgmise sisuga raidkiri: «Teekäija! Selle kivi all puhkab raugaeas surnud Diophantose põrm. Kuuendik Diophantose elust oli lapsepõlv, kaheteistkümnendik noormeheiga, seitsmendiku oma elust ja veel viis aastat oli ta abielus lastetuna, siis sündis tal poeg, kes, elanud poole isa eluea aastate arvust, suri. Pärast seda elas Diophantos veel 4 aastat. Mitu aastat elas Diophantos?»

154. Isa ütles pojale: «10 aasta eest olin sinust vanem 10 korda, 22 aasta pärast aga olen sinust vanem ainult 2 korda.» Kui vana on praegu isa ja kui vana on poeg?

155. Kella tunniosuti ja minutiosuti on kohakuti kell 12 päeval. Mitme minuti pärast on nad jälle kohakuti?

156. Mitu minutit pärast kella 4 jõuab minutiosuti tunniosutile järele?

157. Mulle anti viiekohaline arv. Selle arvuga tuli liita 200 000 ja summa korrutada 3-ga. Selle asemel ma kirjutasin antud arvule paremale lõppu numbri 2 ning sain õige tulemuse. Milline arv mulle anti?

158. Õpilane pidi mingi ülesande lahendamisel korrutama antud arvu 0,5-ga ja tulemusega liitma 3. Hajameelsuse tõttu jagas ta aga antud arvu 0,5-ga ning lahutas jagatisest 3. Tulemus tuli õnneks selline, nagu ta pidigi tulema. Määrata arv, mida õpilane pidi korrutama.

159. On mingi murd. Tema nimetajaga liideti 1.
1) Milline arv tuleb liita lugejaga, et saada antud murruga võrdne murd?
2) Millise arvuga tuleb korrutada lugejat, et saada antud murruga võrdset murdu?

160. Brigaadis oli kvalifitseeritud ja kvalifitseerimata töölisi. Iga kvalifitseeritud tööline teenib nädalas 21 rbl., iga kvalifitseerimata tööline aga 15 rbl. Brigaad teenis nädalas kokku 174 rbl. Mitu kvalifitseeritud ja mitu kvalifitseerimata töölist oli brigaadis?

161. On vaja vahetada 100 rbl. paberraha 3-, 5- ja 25-rublalisteks nii, et kokku oleks 20 rahatähte. Kuidas seda teha?

162. Osteti vihikuid à 7 kop. ja à 4 kop., kokku 53 kopika eest. Kui palju osteti kumbagi sorti vihikuid?

163. Et toita n hobust ja lehma t päeva jooksul, kulutati P tsentnerit heina. Ühele hobusele antakse päevas keskmiselt a kg heina, lehmale aga b kg $(a>b)$. Avaldada valemite abil, kui palju oli hobuseid ja kui palju oli lehmi.

KAS SA OSKAD LAHENDADA VÕRRANDEID JA VÕRRATUSI

164. Lahenda võrrand $x+(1-a)y=3$, võttes tundmatuks $a(y\neq 0)$.

165. Lahenda võrrandid:
1) $3x=2(x-3)+x+4$; 2) $3x=2(x-3)+x+6$;

3) $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{(x+2)(x+3)}$; 4) $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$;

5) $\frac{2}{x-3}=\frac{5}{x-3}$.

166. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x+y-3z=3 \\ 2x-3y-5z=2 \\ x-4y-2z=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x-3y-5z=3 \\ x-4y-2z=2 \end{cases}$

167. Koosta kolme tundmatuga esimese astme võrrandisüsteem, millel: 1) ei ole lahendeid, 2) on lõpmatu hulk lahendeid, 3) on üks lahend: $x=2$, $y=-3$, $z=-1$.

168. Lahenda võrratused:

1) $x^2+1>x^2$; 3) $\frac{x-1}{1-x}>0$;

2) $x^2+1<x^2$; 4) $\frac{x-2}{2-x}<0$.

ARVUTA

169. Leia võimalikult lihtne arvutusvõte:

1) $7\frac{1}{2}\cdot 6\frac{1}{2}$; 2) $11\frac{3}{4}\cdot 12\frac{1}{4}$; 3) $100^2-99^2+98^2-97^2+$

$+96^2-95^2+\ldots+4^2-3^2+2^2-1^2$.

170. Leia kiiresti avaldise arvuline väärtus:

1) $a^2(a+b^2)(a^4-b^{10})(a^2-b)$, kui $a=5$ ja $b=25$;

2) $\frac{m^2(m+n^2)(m^3-n^6)(m^2-n)}{m^2+n^2}$, kui $m=4$ ja $n=16$;

3) $x^2-86x+113$, kui $x=87$.

171. Lihtsusta avaldis:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}$$

ja leia tema arvuline väärtus, kui $a=2$.

172. Millega võrdub vahe $|a|-a$?

173. Millega võrdub summa $|a|+a$?

174. Millega võrdub murd $\frac{a+|a|}{2}$?

175. Leia võimalikult lihtne viis summa arvutamiseks:

1) $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+$ $+\frac{1}{1024}$;

2) $S=1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{63}$.

176. Seitsmel isikul on igaühel seitse kassi, iga kass sööb ära seitse hiirt, iga hiir sööb ära seitse odrapead, igast peast võib kasvada seitse mõõtu vilja. Mitu mõõtu vilja säilib, tänu nendele kassidele? (Egiptuse papüürus — umbes 2000 a. e. m. a.)

177. Keegi tahtis rautada oma hobust ja pöördus sepa poole palvega teha seda veidi odavamalt. Sepp tegi ettepaneku: «Maksa ainult naelte eest, mida ma kulutan 24 tükki. Esimese naela eest maksa $\frac{1}{4}$ kop., teise eest $\frac{1}{2}$ kop., kolmanda eest 1 kop. jne., kogu aeg kahekordistades tasu iga järgmise naela eest.» Kui palju tuleks sel viisil maksta üksnes viimase naela eest? (Vanaaegne ülesanne.)

178. Keegi müütab oma hobust rautamisnaelte arvu järgi, mida on 32. Ta küsib esimese naela eest 1 kop., teise eest 2, kolmanda eest 4, neljanda eest 8 ja alati järgmise eest kaks korda rohkem kui eelmise eest. Küsitakse, kui kalliks hindab ta hobuse. (L. Euleri ülesanne.)

MÕTLE, PLIIATS KÄES

179. Naturaalarvude p ja q kohta on teada, et $p<q$. Kuidas asetsevad arvteljel punktid, mis esitavad arve 1, $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{p}$? Kumb kahest viimasest punktist on lähemal punktile, mis esitab arvu 1?

180. Leia avaldise $4x^2-12x+10$ vähim väärtus.

181. Millise x väärtuse korral murd $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ omandab vähima väärtuse?

182. Lennuk lendab Moskvast Kiievisse ja pöördub tagasi Moskvasse. Millise ilmaga läbib lennuk kogu tee kiiremini — kas tuulevaikusega või tuule korral, mis puhub ühtlase tugevusega suunas Moskva—Kiiev?

183. Auto sõitis kahe linna vahemaa kiirusega 50 $\frac{km}{h}$, tagasi aga kiirusega 30 $\frac{km}{h}$. Milline oli tema keskmine kiirus?

184. Ühest matemaatikute teaduslikust kongressist osavõtjaile esitati hommikueine ajal järgmine ülesanne. Kujutlege, et igal keskpäeval asub teele Le Havre'ist (Prantsusmaa) New Yorki (USA) postiaurik ja samal ajal väljub sama kompanii aurik New Yorgist Le Havre'isse. Iga aurik on teel täpselt 7 ööpäeva ning nad sõidavad kõik sama teed. Mitut oma kompanii aurikut kohtab Le Havre'ist New Yorki sõitev aurik? Lahenda see ülesanne.

185. Kirovi sadamast suundub iga päev kell 12 reisiaurik Sokolki sadamasse ja on teel täpselt kolm ööpäeva. 20. mail kell 12 päeval väljus Sokolki sadamast mootorkaater, mis jõudis Kirovisse täpselt kahe ööpäeva pärast. Mitut reisiaurikut kohtas kaater oma teel?

TÕESTA

186. Tõestada, et paaritu arvu ruut on paaritu arv.

187. Tõestada, et kui mingi arvu ruut on paarisarv, siis ka see arv ise on paarisarv.

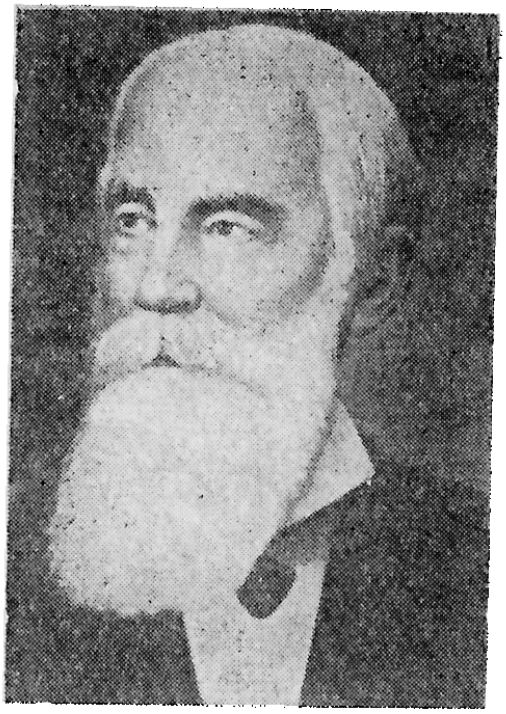
188. Tõestada, et paarisarvu ruut on arvu 4 kordne.

189. Tõestada, et kahe järjestikuse naturaalarvu ruutude vahe on paaritu arv.

190. Tõestada, et kahe järjestikuse paaritu arvu ruutude vahe jagub 8-ga.

191. Tõestada, et kahe järjestikuse naturaalarvu korrutise ja neist suurema arvu summa võrdub suurema arvu ruuduga.

192. Tõestada, et kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on arvu 8 kordne.



P. Tšebõšev

193. Tõestada, et kui mingi erinevate numbritega kahekohalise arvu numbrid ümber paigutada ning lahutada tulemus antud arvust, siis vahe jagub 9-ga. Kas see on õige kolmekohalise arvu korral (vahetatakse äärmised numbrid)?

194. Tõestada, et n esimese paaritu arvu summa on n^2 (n — paarisarv).[14]

195. Selleks et numbriga 5 lõppevat kahekohalist arvu ruutu tõsta, võib toimida nii: kümneliste arv tuleb korrutada arvuga, mis on kümneliste arvust ühe võrra suurem, ja saadud korrutisele juurde kirjutada 25. Nii, $75^2=5625$. Tõestada selle reegli õigsus! Kas võib rakendada seda eeskirja kolmekohaliste arvude kohta? Arvuta: 35^2; 55^2; 65^2; 85^2; 125^2.

196. Tõestada, et mistahes kolme järjestikuse naturaalarvu korrutis jagub 6-ga.

197. Milliste arvudega jagub mistahes kolme järjestikuse naturaalarvu korrutis, kui nende summa on paaritu arv?

198. Tõestada, et arv m^3-m jagub mistahes naturaalarvulise m korral 6-ga.

---

[14] Proovi tõestada, et antud väide on õige ka paaritu n korral.

199. Tõestada, et arv m^2-1 jagub paarituarvulise m korral 8-ga.

200. Tõestada, et mistahes paaritu arvu kuubi ja selle arvu enda vahe jagub 24-ga.

201. Tõestada, et mitme $4n+1$ kujul väljendatud arvu korrutis on sama kujuga arv. Miks on piisav vaadelda kahe sellise kujuga arvu korrutist?

202. Tõestada, et iga arv kujul n^4+4, kus $n>1$, on kordarv.[15]

203. Tõestada, et kui mõlemad kahest antud arvust on kahe ruudu summad, siis ka nende korrutis on esitatav kahe ruudu summana.

204. Suur vene matemaatik P. Tšebõšev tõestas, et kahe naturaalarvu n ja $2n$ (kui $n>1$) vahel on vähemalt üks algarv. Kasutades seda, tõesta, et algarve on lõpmata palju.

GRAAFIKUD [16]

Ent kõverjoon — funktsiooni geomeetriline ekvivalent — ütleb meile hoopis rohkem kui valem ja on palju ülevaatlikum kui arvuliste väärtuste tabel.

V. Gontšarov

205. Joonesta NSV Liidu ja mõnede kapitalistlike maade tööstustoodangu muutumise graafik järgmiste andmete põhjal (1929. a. tööstustoodang loetakse 100%). Millal kasvas NSVL tööstustoodang kõige kiiremini?

---

[15] Seda lauset nimetatakse sageli Sophie Germain'i teoreemiks. Prantsuse naismatemaatik S. Germain (1776—1831) sai eriti kuulsaks uurimustega elastsusteooria alal, mille eest anti talle Pariisi Teaduste Akadeemia preemia.

[16] Loe väga kasulikku raamatut: А. С. Смогоржевский. Метод координат, М., Гостехиздат, 1952.

	1929	1937	1943	1946	1949	1950	1952	1955
NSVL . . .	100	429	573	466	870	1082	1421	2049
Ameerika Ühendriigid .	100	103	215	153	164	190	210	234
Inglismaa .	100	124	—	118	144	153	153	181
Prantsusmaa . . .	100	82	—	63	92	92	108	125

206. Joonesta temperatuuri muutumise graafik novembrikuu esimese 20 päeva kohta järgmiste andmete põhjal:

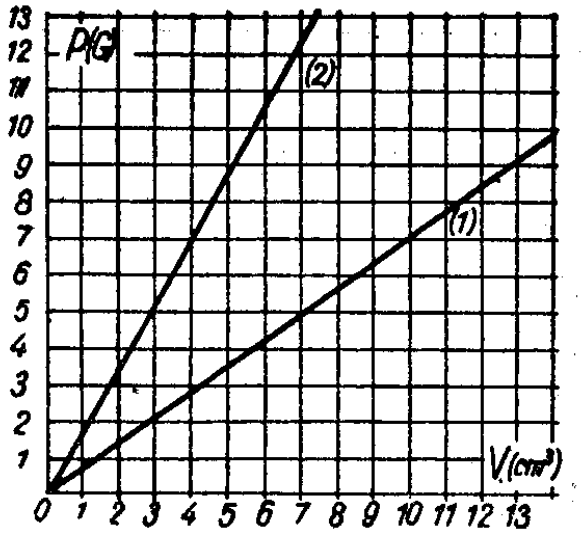
Kuupäev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatuur	3	4	2	0	−1	−2	−5	−3	−1,5	−2
Kuupäev	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Temperatuur	0	3	1	−3	−6	−6,5	−7	−9	−12	−10

Vasta graafiku abil järgmistele küsimustele:
1) Millal oli kõrgeim, millal madalaim temperatuur?
2) Millal täheldati külmenemist ja millal soojenemist?
3) Millal muutus temperatuur eriti järsult ja kuidas (tõusis või langes)?

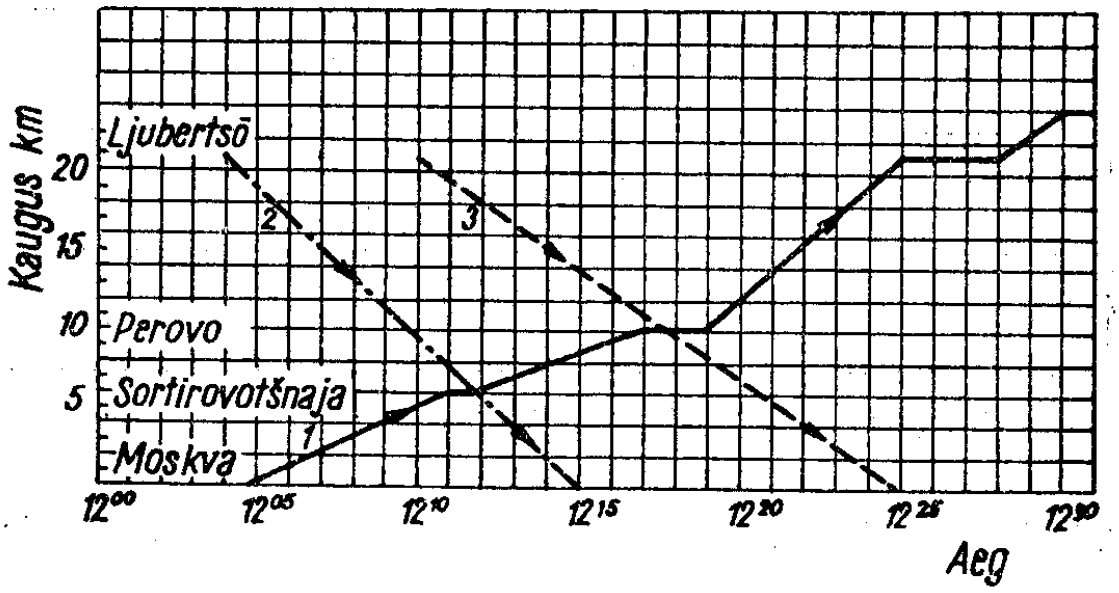
207. Vaatle graafikuid bensiini (1) ja väävelhappe (2) kaalu (P) sõltuvuse kohta ruumalast V (joon. 4). Määra graafiku järgi: 1) Kui palju kaalub 12,5 cm^3 bensiini; 12,5 l bensiini; 5,4 l väävelhapet? 2) Kui suure ruumalaga on 1 kG, 8 kG bensiini; 1 kG, 2,5 kG väävelhapet?

208. On teada, et 1 toll on võrdne 2,54 cm-ga. Ehita graafik tollide teisendamise kohta sentimeetriteks. Graafiku abil määra tollides 6 cm, 4,5 cm, 1 cm ja sentimeetrites 2,4 tolli, 3,5 tolli.

Joon. 4



Joon. 5



209. Vaatle kolme rongi liikumise graafikut (joon. 5).

Vasta graafiku abil järgmistele küsimustele:

1) Millal saabub rong nr. 1 Perovo jaama ja kui kaua ta seisab selles jaamas?
2) Kus ja millal kohtuvad rongid nr. 1 ja nr. 2?
3) Millisel teeosal on rongi nr. 1 kiirus suurim? Arvuta see.
4) Kumb rongidest nr. 2 ja nr. 3 liigub kiiremini?
5) Mitu minutit sõidab rong nr. 1 Sortirovotšnaja jaamast Ljubertsõ jaamani?

210. Joonesta tuule tugevuse (pallides) ja kiiruse (meetrites sekundis) vahelise sõltuvuse «astmeline» graafik järgmiste andmete alusel:

Tuule tugevus	0	1	2	3	4	5
Tuule kiirus	0–0,5	0,6–1,7	1,8–3,3	3,4–5,2	5,3–7,4	7,5–9,8
Tuule tugevus	6	7	8	9	10	11
Tuule kiirus	9,9–12,4	12,5–15,2	15,3–18,2	18,3–21,5	21,6–25,1	25,2–29,0

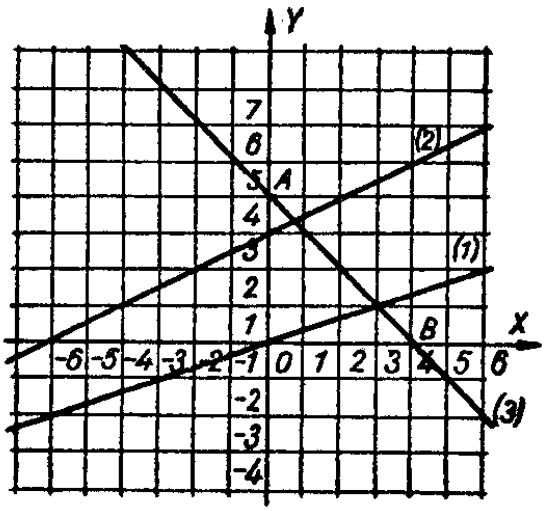
Tuule kiirus märgi horisontaal-, tugevus aga vertikaalteljel.

211. Joonesta kartuli erikaalu ja tema tärklisesisalduse vahelise sõltuvuse graafik järgmiste andmete alusel:

Erikaal	1,03	1,10	1,12	1,14	1,15
Tärklisesisalduse %	14	18	22,5	26,5	29,0

Arvuta, kui palju tärklist sisaldab 1 tonn kartuleid erikaaluga: 1) 1,08; 2) 1,13.

212.[17] Joonisel 6 on joonestatud muutuvate suuruste x ja y vahelise sõltuvuse kohta kolm graafikut. Väljenda need sõltuvused valemitega.



Joon. 6

[17] Ülesanne 212 ja selle peatüki järgmised ülesanded on määratud VIII ja vanemate klasside õpilastele.

213. Võeti terasvarb, mille pikkus 0° juures oli 1 m, ja soojendati seda. Erinevatel temperatuuridel ($t°$) mõõdeti selle varva pikenemine (l mm). Saadi järgmised resultaadid:

t	60	90	105	120	145	165	180	210	230
l	0,75	1,05	1,3	1,5	1,8	2	2,1	2,5	2,8

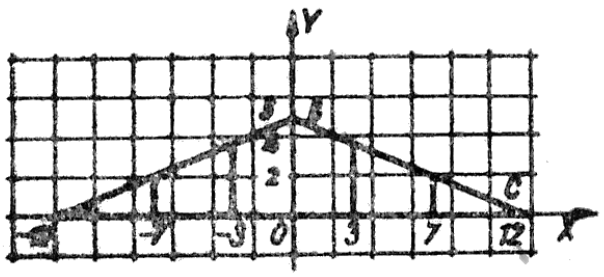
Joonesta nende andmete järgi punktid ja tõmba sirge, millele need punktid asetseksid võimalikult lähedal. Väljenda valemi abil temperatuuri ja varva pikenemise vaheline sõltuvus. Arvuta varva pikkus temperatuuril 200°, kui tema pikkus 0° puhul on 3 m.

214. Sama terasvarba temperatuuril 0° venitati $\left(P\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}\right)$. Iga kord mõõdeti tema pikenemine (l mm). Tulemused olid järgmised:

P	750	1095	1200	1440	1800	1950	2220	2400	2550
l	0,35	0,50	0,55	0,65	0,85	0,9	1,0	1,1	1,2

Milline kuju on sellel graafikul? Kui pikk on terasvarb, kui teda venitada jõuga 2000 kG ristlõike 1 ruutsentimeetri kohta, kusjuures varva pikkus enne venitamist oli 3 m?

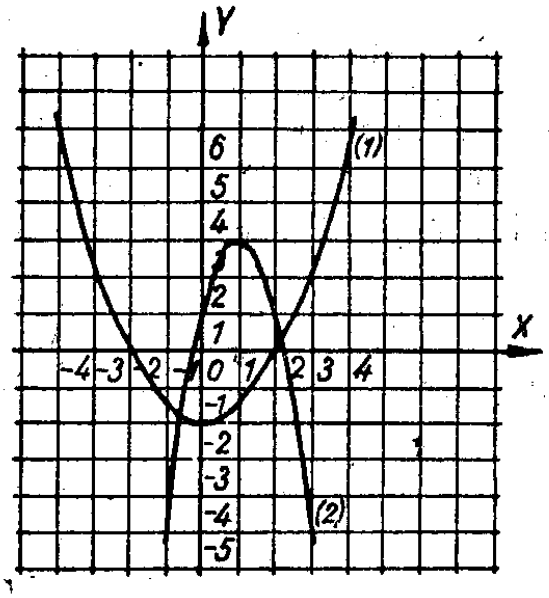
215. On vaja panna sarikad katusele, mis on kahele poole kaldu ja mille laius on 24 m ning kõrgus 5 m. On tarvis määrata sarikaid toetava nelja püstkanduri pikkused (joon. 7).



Joon. 7

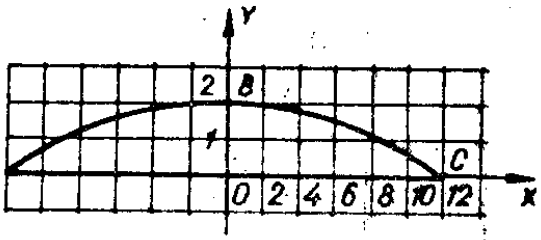
216. Kui maapinnalt visata kivi vertikaalselt üles algkiirusega 20 $\frac{m}{s}$, siis kõrgus (h m), milleni ta jõuab t sekundi pärast (arvestamata õhutakistust), avaldub valemiga $h=20t-4{,}9t^2$. Joonesta selle sõltuvuse graafik. Määra, milline on kivi suurim tõusukõrgus ja millal ta selle saavutab. Mitu sekundit pärast liikumise algust kukub kivi maapinnale?

217. Joonisel 8 on ehitatud 2 parabooli. Leia ruutkolmliikmed, mille graafikuteks on need paraboolid.



Joon. 8

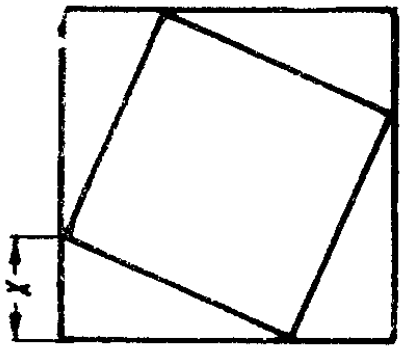
Joon. 9



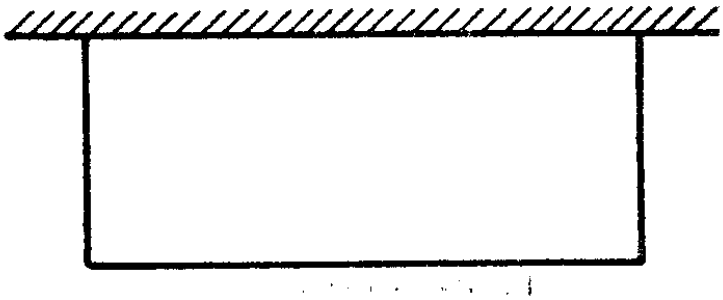
218. Kaarsillal on kaare keskel asetseva haripunktiga parabooli kuju (joon. 9). Võlvkaare kõrgus on 2 m, temale vastava kõõlu pikkus aga 24 m. Kaarel on 5 vertikaalset tugisammast, mis on kinnitatud kõõlu punktidesse ja jaotavad selle kõõlu võrdseteks osadeks. Arvuta sammaste pikkused.

219. Ruudusse küljega 2 dm on joonestatud teine ruut, mille tipud asetsevad antud ruudu külgedel (joon. 10). Milline peab olema antud ruudu tipu kaugus temale lähimast sissejoonestatud ruudu tipust, et sissejoonestatud ruudu pindala oleks väikseim? Väljenda valemiga sissejoonestatud ruudu pindala ning selle ruudu ja antud ruudu tippude vahelise kauguse sõltuvus, siis aga ehita selle sõltuvuse graafik. Kuidas lahendada seda ülesannet graafikuta?

220. 16 cm pikkusest traadist on vaja painutada suurima pindalaga ristkülik. Millised peavad olema selle ristküliku mõõtmed?



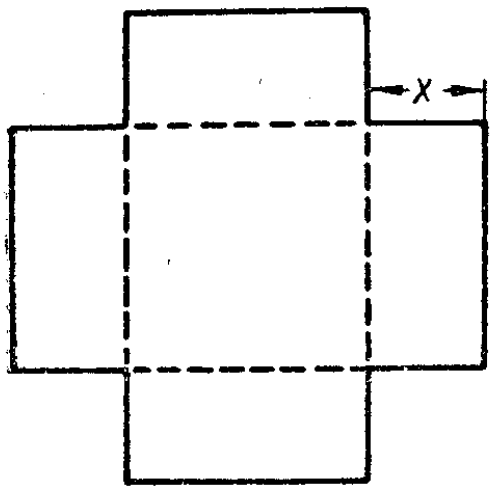
Joon. 10



Joon. 11

221. Varuti materjal 100 m pikkuse aia ehitamiseks. Selle aiaga on vaja piirata ristkülikukujuline maatükk laste mänguväljaku jaoks. Aed peab liituma maja seinaga (joon. 11). Kuidas püstitada aed nii, et maatüki pindala oleks suurim?

222. Ruudukujulisest plekitükist, mille külje pikkus on 2 dm, tuleb valmistada pealt lahtine karp. Selleks lõigatakse nurkadest välja võrdsed ruudud ja painutatakse saadud «ristjalga» mööda punktiire (joon. 12).



Joon. 12

Kui pikk peab olema nurkadest väljalõigatavate ruutude külg, et saada suurima ruumalaga karp? Avalda valemiga karbi ruumala sõltuvus x-st, ehita graafik ja leia selle põhjal niisugune x väärtus, mille puhul karbi ruumala on suurim.

III PEATÜKK

GEOMEETRIA

Loodus kõneleb matemaatika keeles, mille tähtedeks on ringid, kolmnurgad ja muud matemaatilised kujundid.

Galilei

ARVUTA

223. Mõõta kella minutiosuti pikkus. Millise tee läbib tema tipp ööpäevas, kuus (30 päeva), aastas (365 päeva)?

224. Kaevu väntvõlli diameeter on 0,24 m. Selleks et ämbrit välja tõmmata kaevu põhjast, tuleb teha 10 pööret. Kui sügav on kaev?

225. Puu ümbermõõt (ringjoone pikkus) on 88 cm. Arvutada puu ristlõike pindala.

226. Suure Tunguusi meteoriidi plahvatusel põlenud taigaala diameeter on umbes 38 km. Kui suur pindala taigast põles?

227. Kaks sama diameetriga veevärgitoru on vaja asendada ühe toruga, millel oleks samasugune läbilaskevõime. Milline peab olema selle toru diameeter asendatavate torude diameetriga võrreldes?

228. Tükk alumiiniumi kaalub 654 G. Teades, et alumiiniumi tihedus on 2,6, leida selle tüki ruumala.

229. Kaks malmist valatud eset kaaluvad 26,2 kG ja 29,7 kG, välisruumalad on 3,77 dm^3 ja 4, 24 dm^3. Kumma sisemuses on õhumulle (tühikuid) ning milline on nende tühikute koguruumala, kui malmi erikaal on 7?

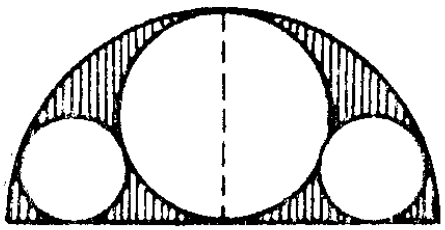
230. Teekannu, mille pindala on 7,5 dm^2, nikeldamiseks kulus 13,2 G niklit. Kui paks on teekannu kattev niklikiht? (Nikli erikaal on 8,8.)

231. Suure Tunguusi meteoriidi mass ulatus teadlaste arvutuste kohaselt 50 000 tonnini. Millised oleksid sama massiga raudkuubi mõõtmed? (1 m^3 rauda kaalub 7,8 T.) Anna vastus täpsusega kuni üks meeter. Lahenda see ülesanne proovimise teel või kasutades arvude kuupide tabelit.

232. Kuidas muutub kasti ruumala, kui tema pikkust suurendada 50% võrra, laius jätta endiseks, kõrgust aga vähendada $1\frac{1}{2}$ korda?

233. Ehitistel kasutatav tellis kaalub 4 kG. Kui palju kaalub samast materjalist mängutellis, mille kõik mõõtmed on 4 korda väiksemad?

234. Kumb on suurem — kas poolringi kolme siseringi või viirutatud osa pindala (joon. 13)?



Joon. 13

TÖESTA

235. Tööline, kes valmistas tammepuust parkettpõranda jaoks ruudukujulisi plaate, kontrollis neid nii: ta võrdles nende külgede pikkusi, ja kui kõik neli külge osutusid võrdseiks, luges ta ruudu õigesti välja lõigatuks. Kas selline kontrollimine on usaldatav?

236. Kui meister ütles sellele töölisele, et ta kontrollib valesti, hakkas tööline kontrollima nii, et võrdles diagonaalide pikkusi. Kui mõlemad diagonaalid osutusid võrdseiks, luges ta ruudu õigesti välja lõigatuks. Kas ei teinud see tööline uut viga?

237. Kui töölisele öeldi, et ta toimib jälle valesti, otsustas ta kontrollida oma tööd kõigi nelja osa võrdlemisega, milleks plaadi diagonaalide lõikepunkt jao-

tab diagonaalid. Kui kõik need neli osa osutusid võrdseiks, luges tööline ruudu õigesti välja lõigatuks. Kas võib nii kontrollida ruutu? Aga kuidas oleks pidanud tööline toimima?

238. Millisel kõigist ristkülikuist ümbermõõduga 36 cm on suurim pindala? Et selles küsimuses orienteeruda, võta mõned ristküliku pikkuse väärtused ja koosta tabel:

Ristküliku pikkus					
Ristküliku laius					
Ristküliku pindala					

Püüa põhjendada selle tabeli vaatlemisest tehtud järeldust (koosta ristküliku pindala väljendav valem ja uuri seda).

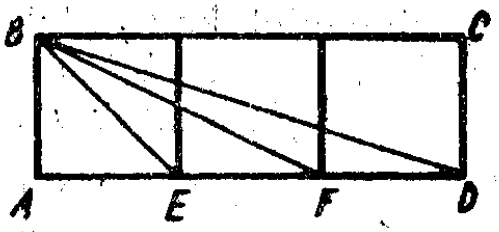
239. *Nelja värvi ülesanne.*[18] Geograafilised kaardid trükitakse sageli mitmevärvilistena. Iga maa või maaosa värvitakse ühe värviga. Selliste kaartide trükkimise lihtsustamiseks piirdutakse sageli ainult üksteisega kokku puutuvate maade või alade värvimisega eri värvi. Tõesta (tuues näiteid), et kahest või kolmest värvist geograafilise kaardi trükkimiseks ei piisa. Geograafiliste kaartide valmistamise pikaajaline praktika viib järeldusele, et piisab neljast värvist. Ometi pole veel keegi suutnud seda loogiliselt tõestada või ümber lükata. Nelja värvi ülesanne on jäänud seni lahendamatuks. On õnnestunud ainult tõestada, et mistahes kaarti võib värvida viie värviga.

---

[18] Selle ülesande esitas esimesena inglise matemaatik Cayley 1879. a. Palju detailsemalt räägitakse sellest niisugustes huvitavates raamatutes, nagu

1) Г. Радемахер и О. Теплиц. Числа и фигуры, М., «Наука», 1966.

2) Е. Дынкин и В. Успенский Математические беседы, М., Гостехиздат, 1952.

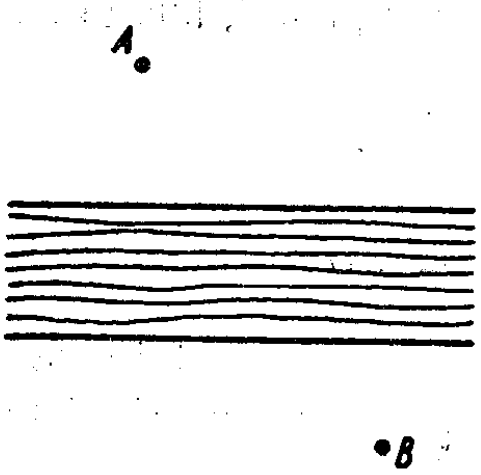


Joon. 14

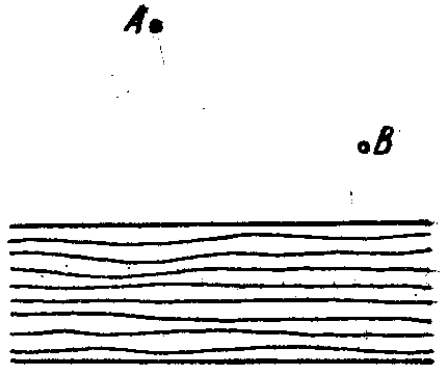
240. Kolmest võrdsest ruudust, nagu on näidatud joonisel 14, koostati ristkülik. Tema tipust B tõmmati kolm kiirt BE, BF ja BD. Tõestada, et $\angle AEB + \angle AFB + \angle ADB = 90°$.

KONSTRUEERI

241.[19] Kaks asustatud punkti A ja B asetsevad paralleelsete kallastega jõe erinevail kaldail (joon. 15). Kuidas tuleb ehitada sild üle jõe nii, et nende kahe punkti vaheline tee oleks lühim?



Joon. 15



Joon. 16

242. Kaks asulat A ja B paiknevad jõe erinevatel kallastel ja erinevatel kaugustel jõest. Kuhu tuleb ehitada asulatest ühekaugusel asetsev paadisadam?

243. Jõe samal kaldal, sellest erinevatel kaugustel, asuvad kaks kolhoosi A ja B (joon. 16). Need kolhoosid otsustasid koos ehitada üle jõe silla. Kuhu tuleb ehitada sild, et ta asetseks kolhoosidest ühekaugusel?

---

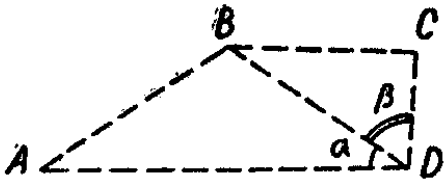
[19] Ülesanded 241—249 lahenda konstruktsiooni abil. Tõesta konstruktsioonide õigsust.

244. Jõe samal kaldal, sellest erinevatel kaugustel, asuvad kaks kolhoosi (joon. 16). Kuidas tuleb rajada nende kolhooside vaheline lühim jõeni ulatuv tee?

245. Konstrueeri kaht antud kontsentrilist ringjoont puudutavate ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht, kui antud ringjoonte raadiused on R ja r.

246. On antud kaks paralleelset sirget ja nende vahel ringjoon. Ehita antud paralleele ja antud ringjoont puudutavad ringjooned.

247. *Pothenot' ülesanne.*[20] Vaatleja asetseb maatüki mingis punktis selle maatüki kaardiga. Ta näeb kolme nähtavat orientiiri (näiteks raudteejaama veetorni A, koolihoonet B ja kolhoosi silotorni C), mis on ka kaardil märgitud (joon. 17). Punktis, kus vaatleja asub, mõõdab ta kaks nurka α ja β, milles on nähtavad maastikul sirglõigud AB ja BC. Kuidas peab vaatleja kandma kaardile selle punkti, kus ta seisab?



Joon. 17

248. Kuidas jõuda kuubi pinda mööda ühest tipust lühimat teed mööda vastastippu, kui kuubi serva pikkus on 2 dm? Kui pikk on see tee?

249. Kuidas jõuda lühimat teed mööda risttahuka pinnal ühest tipust vastastippu, kui risttahuka pikkus on 3 dm, laius 2 dm ja kõrgus 4 dm? Kui pikk on see tee?

---

[20] Üldkujul seisneb see ülesanne mingi punkti asendi määramises maastikul kahe nurga järgi, mille tipud asetsevad selles punktis ja mida moodustavad kolme tuntud asukohaga punktisse viivad suunad. Prantsuse matemaatik L. Pothenot (1660—1732) andis sellele huvitavale ning praktiliselt tähtsale ülesandele ühe geomeetrilise lahenduse. Veel varem, XVII sajandi algul, lahendas ülesande hollandi matemaatik ja astronoom W. Snell, mõned lahendusviisid olid aga tuntud juba XVI sajandil. Üldse on teada enam kui 100 selle ülesande lahendust. Loe Pothenot' ülesande kohta raamatust:

Д. И. Перепелкин. Геометрические построения в средней школе, М., Изд.-во АПН РСФСР, 1947.

250. On antud sirglõik AB. Tema keskmine osa on ligipääsematu. On vaja ehitada selle lõigu keskristsirge. Kuidas seda teha?

251. Kolmnurga ABC tipp A ei mahtunud joonisele. Kuidas ehitada selle kolmnurga kõrgus h_a?

252. Kuidas tõmmata mediaanid kolmnurgas, mille üks tipp ei mahtunud joonisele?

253. On antud kaks punkti. Kuidas tõmmata sirkli ja joonlauaga sirgjoont läbi nende punktide, kui joonlaud on lühem nendevahelisest kaugusest?

254. On antud kolm punkti A, B ja C. Punkt B on nurga tipp, punktid A ja C aga asetsevad selle nurga haaradel. Kasutades ainult sirklit, ehitada selle nurgaga võrdne nurk, s. t. ehitada kolm punkti A_1, B_1 ja C_1 nii, et nurk $A_1B_1C_1$ oleks võrdne nurgaga ABC.

255. Kasutades ainult sirklit, tõmmata läbi antud punkti A paralleelne sirge antud sirgega, mis on määratud kahe punktiga B ja C, s. t. ehitada niisugune punkt D, et AD ja BC asetseksid paralleelsetel sirgetel.

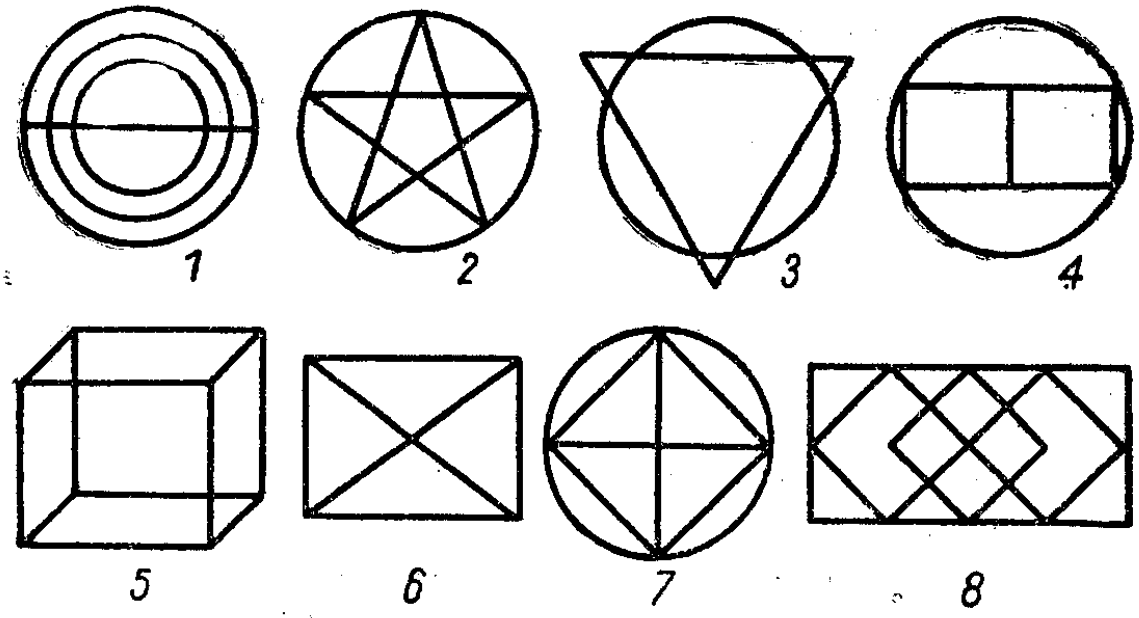
256. Kasutades ainult sirklit: 1) ehitada antud punktiga A sümmeetriline punkt sirge suhtes, mis on määratud punktidega B ja C; 2) tõmmata antud punktist A ristsirge antud sirgele BC, s. t. ehitada veel üks punkti A läbiva sirge BC ristsirge punkt.

257. On antud kaks punkti A ja B. On vaja ehitada ainult sirklit kasutades punkt, mis asetseks punktidega A ja B määratud sirgel.

258. Ehitada ainult sirklit kasutades nurgad 30°, 60° ja 90°.

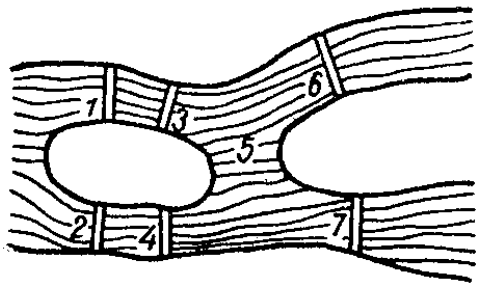
259. On antud sirglõik ja sellest väljaspool punkt, millekaugus sirglõigust on suurem kui pool sirglõigu pikkust. Antud sirglõigule kui diameetrile on ehitatud ringjoon. On vaja tõmmata ainult joonlauda kasutades ristsirge antud punktist antud sirglõigule.

260. Kas on võimalik joonistada igaühte kujunditest 1—8 (joon. 18) pliiatsit paberilt tõstmata ja juba tõmmatud joont üle joonistamata?



Joon. 18

261. Kuulus matemaatik Leonhard Euler huvitus 1736. a. seitsme silla ülesandest. See ülesanne on niisugune. Kaliningradi linnas (endine Königsberg) oli Euleri ajal 7 silda, mis ühendasid Pregeli jõe kaldaid saartega (joon. 19). Kas võib jalutuskäigul linnas läbida kõik seitse silda, ületamata ühtki neist kahte korda? Püüa lahendada see ülesanne. Kui aga ei oleks olnud kolmandat ja neljandat silda, kas siis oleks saanud ülejäänud sillad läbi käia?

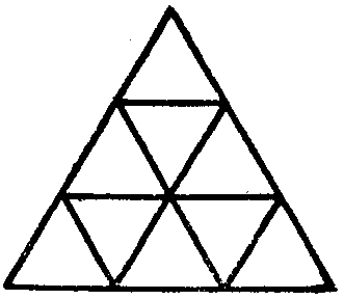


Joon. 19

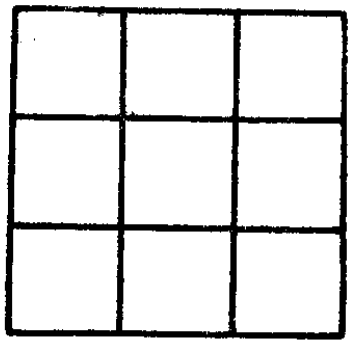
NUPUTAMISÜLESANDED TIKKUDEGA

262. Paigutada 12 tikku nii, et tekiks 5 ruutu.

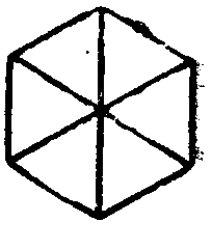
263. Tikkudest on moodustatud kujund, mis koosneb 9-st võrdsest kolmnurgast (joon. 20). On vaja kõrvaldada 5 tikku nii, et jääks alles 5 kolmnurka. Kuidas seda teha?



Joon. 20



Joon. 21



Joon. 22

264. Paiguta ümber samas kujundis 6 tikku nii, et tekiks 6-st võrdsest nelinurgast koosnev kujund.

265. Tikkudest on koostatud kujund (joon. 21).
1) Eemalda 4 tikku nii, et jääks alles 5 ruutu.
2) Kõrvalda 8 tikku nii, et säiliks 2 ruutu.
3) Võta ära 6 tikku nii, et jääks alles kokku 3 ruutu.

266. Tikkudest on moodustatud 6-st võrdkülgsest kolmnurgast koosnev kujund (joon. 22). Paiguta ümber 4 tikku nii, et tekiks 3 võrdkülgset kolmnurka.

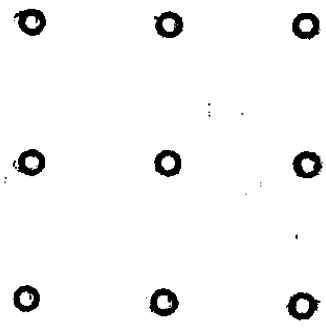
267. Moodusta 6-st tikust 4 võrdkülgset kolmnurka.

GEOMEETRILISED NUPUTAMISÜLESANDED

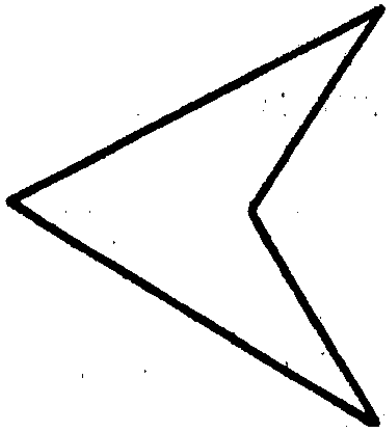
268. Kuidas läbida pliiatsit paberilt tõstmata nelja sirgjoonega üheksa punkti, mis asetsevad nii, nagu on näidatud joonisel 23?

269. Kuidas paigutada 6 ringi nii, et tekiks 3 kolmeringilist rida ja 6 kaheringilist rida?

270. Kuidas asetada 10 ringi viiele võrdsele sirglõigule nii, et igal sirglõigul paikneks 4 ringi?



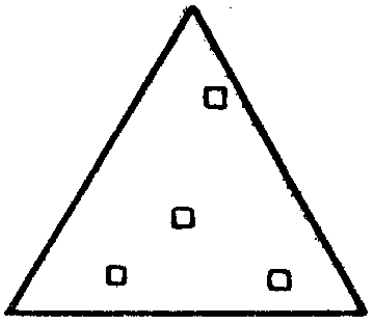
Joon. 23



Joon. 24

271. Joonisel 24 esitatud kujund on vaja jaotada kuueks osaks, tõmmates ainult 2 sirget. Proovi seda teha!

272. Võrdkülgse kolmnurga kujuline maatükk, kus asub 4 kaevu (joon. 25), on vaja jaotada ühesuguse kujuga pindvõrdseteks osadeks nii, et igaühel neist paikneks kaev. Kuidas seda teha?



Joon. 25

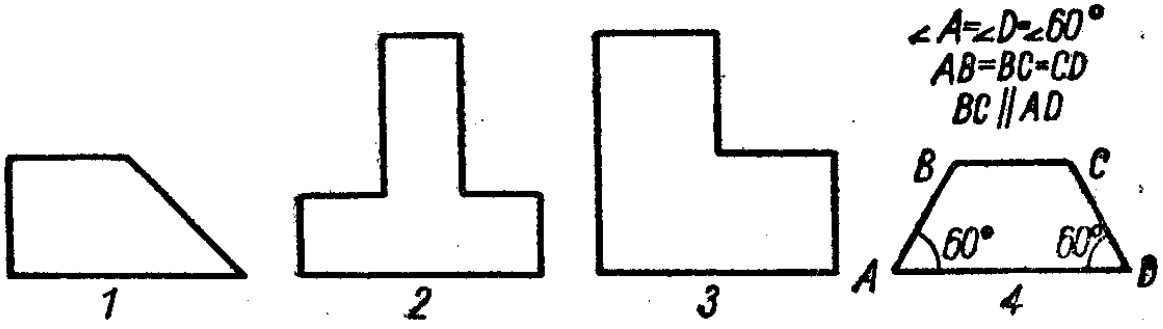
273. Antud ristküliku alus on kõrgusest kaks korda suurem.

1) Lõika see ristkülik kaheks osaks nii, et osadest võiks koostada täisnurkse kolmnurga.

2) Kuidas on vaja lõigata see ristkülik kaheks osaks nii, et neist saaks koostada võrdhaarse kolmnurga?

3) Kuidas on tarvis lõigata antud ristkülik kolmeks osaks nii, et osadest võiks koostada ruudu?

274. Joonista iga kujund (joon. 26) ja lõika see neljaks võrdseks osaks.



Joon. 26

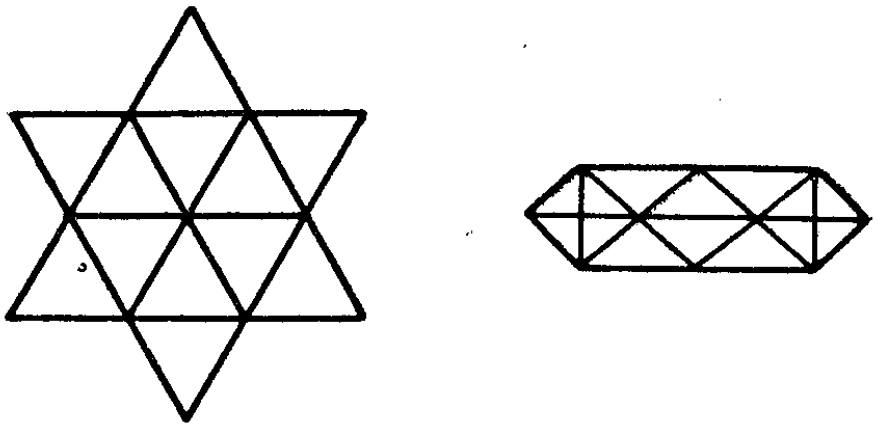
275. Millise lihtsaima kujuga (tasapinnaliste tahkudega) pidi olema kivi, et ürginimene, teinud sellesse ava ja kinnitanud kivi kepi otsa, oleks võinud kasutada saadud riista nii kirvena kui ka kõplana?

VASTA KÜSIMUSTELE

276. Mitu 360°-st väiksemat nurka tekib, kui läbi ühe punkti tasapinnal tõmmata kolm kiirt?

277. Mitu teravnurka tekib, kui antud teravnurga sees tõmmata tema tipust 3 kiirt?

278. Mitu kolmnurka on kummaski kujundis (joon. 27)?



Joon. 27

279. On antud münt. Kui palju on vaja samasuguseid münte, mida oleks võimalik asetada ümber antud mündi nii, et kõik mündid puudutaksid antud münti ja paarikaupa üksteist?

280. Mööda liikumatu ringi kontuuri veereb libisemata teine ring, mille raadius on liikumatu ringi raadiusest 3 korda väiksem. Mitu korda pöörleb liikuv ring iseenda ümber selle ajaga, mille jooksul ta veereb ümber suurema ringi üks kord?

281. Milliseid lihtsaid vahendeid saab kasutada ringi keskpunkti leidmiseks?

282. Ringjoonele raadiusega 5 cm on tõmmatud kaks ristuvat diameetrit. Ringjoonel võetud punktist C on tõmmatud nendele diameetritele ristsirged, mis lõikuvad diameetritega punktides A ja B. Leida punktide A ja B vaheline kaugus.

283. Ruudukujulise põhjaga basseini nurkades seisavad 4 sammast. Basseini tuleks laiendada nii, et selle põhja pindala suureneks kaks korda, kujult jääks aga ruuduks. Kas saab seda teha sambaid kõrvaldamata? Kui saab, siis kuidas?

HUVITAVAD KÕVERAD [21]

284. *Archimedese spiraal.* Kujutle, et mööda ühtlaselt pöörleva ketta raadiust ronib kärbes jääva kiirusega. Kärbse poolt kujutatud tee on kõver, mida nimetatakse Archimedese spiraaliks. Joonesta üksköik milline Archimedese spiraal.

285. *Sinusoid.* Tee tihedast paberist, seda mõne korra kokku rullides, toru. Lõika see toru habemenoaga kaldu läbi. Millise joone kujundab läbilõige, kui rullida lahti üht selle toru kahest osast? Joonista see joon paberilehele. Tekib üks väga huvitavatest kõveratest, mida nimetatakse sinusoidiks. Eriti sageli tuleb temaga kohtuda elektro- ja raadiotehnika õppimisel.

286. *Nikomedese* [22] *konhoid.* Ehita kõverjoon, mida nimetatakse Nikomedese konhoidiks. Seda võib teha nii. Tõmba paberilehele sirge AB. Väljaspool seda sirget märgi punkt O (poolus). Siis vali sirglõik a, mis on lühem kui punkti O kaugus sirgest AB. Edasi, läbi punkti O tõmba sirgeid ning alates nende sirgete ja ja sirge AB lõikepunktidest paiguta neile sirgetele mõlemale poole sirget AB lõik a. Iga kord saad kaks otsitava kõvera punkti. Nikomedese konhoid koosneb kahest harust, mis asetsevad kummalgi pool sirget AB.

Püüa mõista, milline kuju on Nikomedese konhoidil, kui lõigu a pikkus on: 1) võrdne punkti O kaugusega sirgest AB, 2) suurem sellest kaugusest. Nikomedese

---

[21] Huvitavate kõverate kohta loe raamatuid:

1) А. С. Маркушевич. Замечательные кривые, М., Гостехиздат, 1952;

2) Г. Н. Берман Циклоида, М., Гостехиздат, 1951.

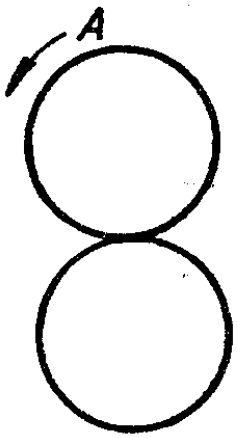
[22] Nikomedes — kreeka matemaatik, kes elas III sajandil e. m. a.

konhoidi kasutati 200 a. e. m. a. kuulsa ülesande lahendamisel: jaotada suvaline nurk kolmeks võrdseks osaks.

Samasuguseid konstruktsioone võib teostada ka siis, kui võtta sirge AB asemel ringjoon. Sel juhul võib pooluse O võtta mitmeti. Vaatle kas või kaht juhtumit: 1) poolus O langeb kokku ringjoone keskpunktiga; 2) poolus O asetseb ringjoonel ning a võrdub selle ringjoone raadiusega. Millised jooned (neid nimetatakse Pascali [23] tigudeks) tekivad?

287. *Kardioid.* Võta kaks võrdset vineerist välja lõigatud ketast (võib võtta ka kaks ühesugust münti). Üks neist kinnita liikumatult. Teine aseta esimese kõrvale ja märgi tema serval esimese ketta keskpunktist kõige kaugemal asetsev punkt A (joon. 28). Siis veereta liikuvat ketast libisematult mööda liikumatut ketast ning vaatle, millise joone kujutab punkt A. Joonesta see joon. See osutub üheks Pascali teoks ja teda nimetatakse kardioidiks. Tehnikas kasutatakse seda joont väga tihti hammasratas-mehhanismide ehitamisel.

Mitu ringi teeb teine ketas selleks ajaks, kui ta pöördub tagasi algasendisse? Kontrolli vastust, kasutades selleks kaht ühesugust münti.



Joon. 28

288. *Ringjoone rullmähis.* Võta vineerist või lauast väljasaetud ketas ja kinnita ta laual asetsevale paberilehele. Keri kettale niit. Niidi otsa tee silmus, aseta sellesse pliiats, ja pingutades niiti, keri ta kettalt lahti. Siis tõmbab pliiatsi ots paberile teatava kõverjoone (spiraali). Seda joont nimetatakse ringjoone

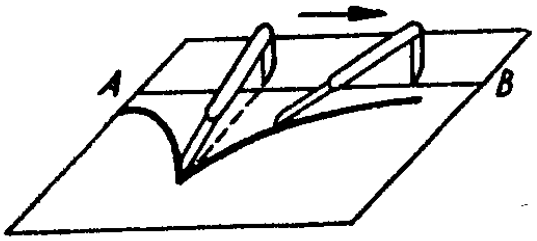
[23] Blaise Pascal — kuulus prantsuse matemaatik (1623—1662).

evolvendiks (rullmähiseks). Sellist joont mööda lendaks Maalt ära kivi, kui talle lakkaks mõjumast Maa külgetõmbejõud ja lendamist ei segaks õhutakistus.

289. *Traktriss.* Võta paberileht. Tõmba sellele sirgjoon AB. Siis võta taskunuga, millel oleksid terad kahes otsas. Ava terad nii, nagu on näidatud joonisel 29, ja aseta nuga paberilehele nõnda, et tema terad paikneksid AB-le tõmmatud ristsirgel. Poolavatud tera teravik peab asetsema sirgel AB. Hoides käega vabalt sellest terast, lükka nuga nii, et poolavatud tera nihkuks mööda sirget AB. Siis teine, täielikult avatud tera joonestab oma teravikuga paberile peene joone. Tõmba see pliiatsiga üle. Seda joont nimetatakse traktrissiks (veojooneks).

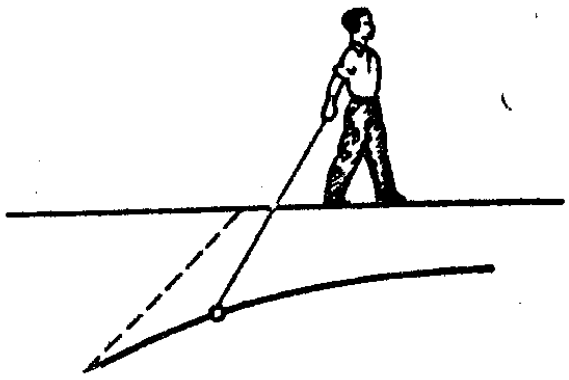
Sellise joone võib ehitada ka maastikul. Liivasele kohale tõmba sirge, seejärel võta nöör ja seo selle otsa kivi. Jää seisma tähistatud sirgele ja aseta kiviga nöör nii, et ta oleks selle sirgega risti ning kivi lamaks liival. Siis, hoides nööri otsapidi käes, vea enda järel kivi. Joon, mille kivi liivale tõmbab, ongi traktriss (joon. 30).

Kujutle, et traktriss pöörleb ümber sirge AB. Tekib pind, mis meenutab avaustega liidetud kaht lõpmatut ruuporit (joon. 31). Seda geomeetrias tähtsat osa etendavat pinda nimetatakse pseudosfääriks.

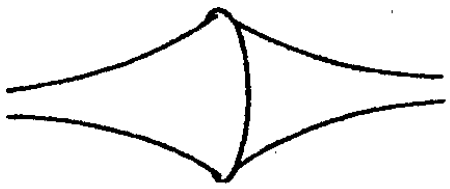


Joon. 29

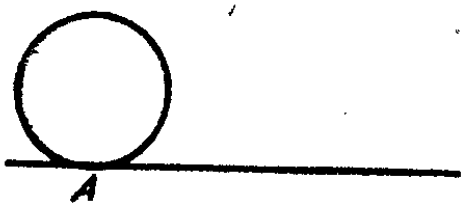
Joon. 30



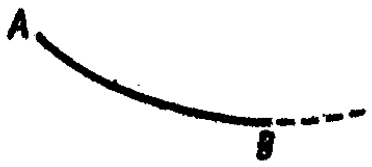
Joon. 31



290. *Tsükloidid.* Kujutle, et ring veereb libisemata mööda sirget. Jälgi teed, mille seejuures kujutab ringjoonel valitud punkt A (joon. 32). Joonesta saadud kõver.



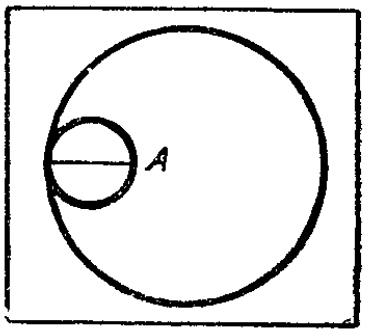
Joon. 32



Joon. 33

Seda nimetatakse tsükloidiks. Tsükloidil on palju tähelepanuväärseid omadusi. Üks neist on järgmine. Matemaatikud püüdsid ammu lahendada ülesannet: millise kujuga peab olema kaht punkti *A* ja *B* (*A* kõrgemal kui *B*) ühendav konarusteta renn, et sile metallkera veereks lühima ajaga mööda seda renni oma kaalu mõjul punktist *A* punkti *B*. Võib mõelda, et renn peab olema sirgjooneline. Kuid see ei ole nii. Võib-olla tuleb renni painutada mööda ringjoone kaart, nagu mõtles kuulus itaalia füüsik, astronoom ja matemaatik Galilei? Ei. Galilei eksis. Ja alles 1696. a. tegi šveitsi matemaatik J. Bernoulli kindlaks, et renn peab olema painutatud mööda tsükloidi, kumerusega allapoole (joon. 33).
Olgu mööda sirget veerevale ringile radiaalselt kinnitatud õhuke liist. Millise joone kujutab selle liistu punkt, mis asetseb ringi keskpunktist suuremal kaugusel kui raadius? Milline joon aga tekib, kui see kaugus on raadiusest väiksem? Mõlemaid neist kõveraist nimetatakse samuti tsükloididdeks, esimesel juhul pikendatud, teisel juhul lühendatud tsükloidiks.

291. *Hüpotsükloidid.* Võta tükk paksu kartongi või vineeri ja tee sellesse ringikujuline väljalõige raadiusega 12 cm. Siis lõika samast materjalist kolm ringi raadiustega 4 cm, 3 cm ja 2 cm. Aseta kartongitükk selles oleva väljalõigatud avausega paberilehele,



Joon. 34

paiguta väljalõikesse esimene kolmest ringist nii, et ta puudutaks väljalõike äärt, ja tähista selle ringi kontuuril punkt (joon. 34). Siis jälgi, millise joone kujutab tähistatud punkt, kui ring veereb libisemata mööda väljalõike ringjoont. Tee sama teise ja kolmanda ringiga. Kõiki saadud jooni nimetatakse hüpotsükloididdeks.

292. XVIII sajandi matemaatika-alastes käsikirjades võib kohata niisugust väidet: võrdsete ümbermõõtudega kujundid ümbritsevad võrdseid pindalasid. Kas see väide on õige? (Too näiteid.)

293. On tehtud kindlaks, et kõigist kinnistest ühesuguse pikkusega tasapinnalistest kõveratest ümbritseb ringjoon suurimat pindala. Näita, et kinnise tasapinnalise kõveraga, mille pikkus on l, ümbritsetud pindala ei või osutuda suuremaks kui $\frac{l^2}{4\pi}$.

IV PEATÜKK

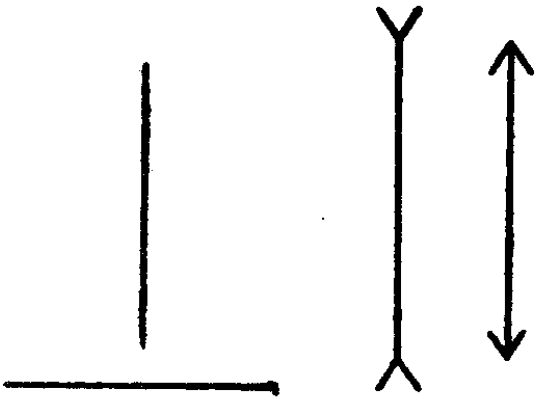
LOOGIKA MATEMAATIKAS

ÕPI ÕIGESTI ARUTLEMA

«Kunagi, päris õppeaasta algul, juhtusin kuulma kahe tüdruku kõnelust. Vanem neist käis VI klassis, noorem V klassis. Tüdrukud vahetasid muljeid tundidest, õpetajatest, sõbrataridest, uutest õppeainetest. Kuuenda klassi õpilast hämmastasid väga geomeetria tunnid. «Näe imet,» rääkis ta, «õpetaja tuli klassi, joonistas tahvlile kaks võrdset kolmnurka, seejärel aga tõestas meile terve tunni, et need on võrdsed. Kuidagi ei mõista, miks on seda vaja?» «Aga kuidas sa siis vastad tunnis?» küsis noorem tüdruk. «Õpin õpiku järgi... ainult väga raske on aru saada, kuhu milline täht panna...»» Niisuguse arutlusega algab A. Fetissovi huvitav raamat «О доказательстве в геометрии» (Гостехиздат, 1954).

Olen samuti korduvalt juhtunud kuulma VI klassi õpilastelt, et nad ei mõista, miks on vaja arutluste abil tõestada geomeetrilisi teoreeme. «Et tippnurgad on võrdsed, see on niikuinii näha,» ütlevad nad. «Et võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed, näitab joonis. Mida siin veel arutleda?» imestavad nad. Selliseid küsimusi ei võinud jätta vastuseta ja seepärast tuli vestelda õpilastega geomeetrilistest tõestustest. Ühest niisugusest vestlusest ma jutustangi.

VI klassi õpilane Borja ütles mulle, et geomeetria teoreeme on vaja tõestada joonistega. «Vaatad joonisele ja kohe on näha, et teoreem on õige. Silm ei peta,» kõneles ta. Siis ma näitasin Borjale mõnda käepärast olevat joonist. «Võrdle nende kahe lõigu pikkust,» palusin ma (joon. 35). Borja vaatas joonisele ja ütles naeratades:



Joon. 35

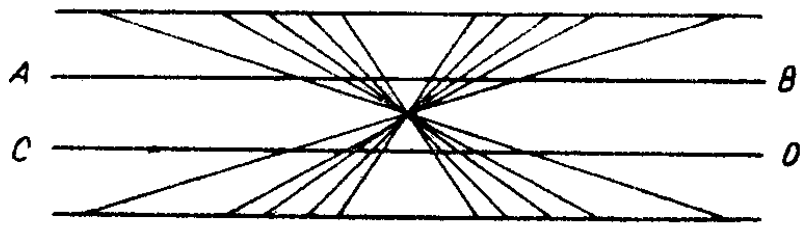


Joon. 36

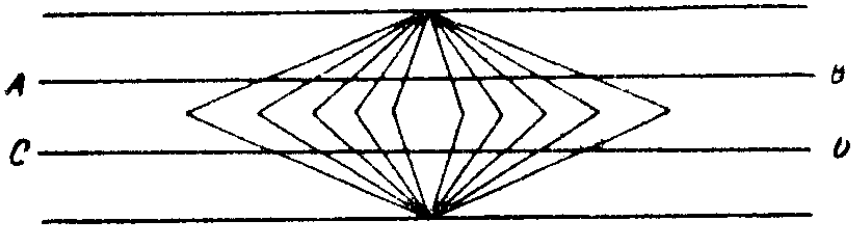
Joon. 37

«Muidugi, vertikaalne on pikem.» — «Aga nüüd?» — ja ma näitasin teist joonist (joon. 36). «Selge, et vasakpoolne on pikem,» teatas Borja. «Siin aga on kaks rööpkülikut (joon. 37) ja kummalegi neist on tõmmatud diagonaal. Võrdle neid.» Ka seekord teatas Borja enesekindlalt, et vasakpoolne diagonaal on pikem. Siis palusin Borjat võtta joonlaud ja mõõta kõiki võrreldud lõike. Ta tegi seda meeleldi, põrmugi kahtlemata, et mõõtmine ainult kinnitab tema vastuseid. Kuid mõõtmised näitasid, et igal joonisel on võrreldavad lõigud võrdsed. Borja ei uskunud seda ja hakkas uuesti mõõtma. Uued mõõtmised viisid samale järeldusele — lõigud on võrdsed. Borja nägu väljendas hämmeldust. Ta pilgutas silmi, püüdes mõista, milles on siis asi.

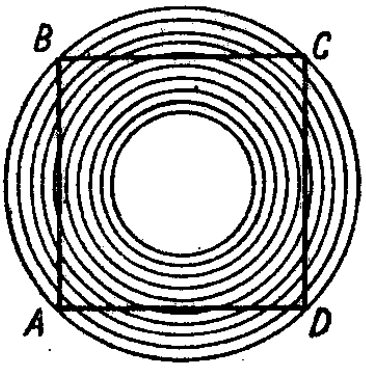
Siis ma näitasin Borjale veel kolme joonist (joon. 38, 39, 40) ja palusin teda määrata, kas jooned *AB* ja *CD* nendel joonistel on sirged või kõverad. Vastus oli niisugune: «Muidugi kõverad.» Ja taas jäi Borja nõutuks, kui pani nende juurde joonlaua ning avastas, et kõik need jooned on sirged.



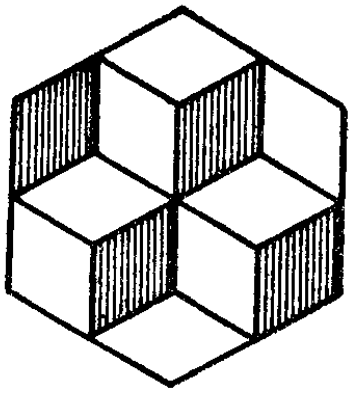
Joon. 38



Joon. 39



Joon. 40



Joon. 41

Lõpuks näitasin Borjale veel üht joonist (joon. 41) ja küsisin, mis on sellel kujutatud. Ta vaatas tähelepanelikult ja ütles: «Siin on kujutatud kolm kuupi — üks ülal, kaks aga all.» — «Vaata uuesti,» palusin, «sest mulle paistab, et ülal on kaks kuupi, nende all üks.» Borja vaatas uuesti tähelepanelikult. «Aga ometi on õige, et kaks on ülal ja üks all. Miks aga mulle algul paistis, et on vastupidi? Pidage, pidage, jälle on kaks all, üks aga ülal!» Borja hõõrus imestunult silmi. «Kuidas siis nii? Jälle on kaks ülal, üks all. Imelik!»

Pärast seda jäi mul Borjalt küsida, kas võib teoreeme joonistega tõestada, kas meie silmad ei või meid petta. Ja Borja tunnistas ausalt, et jooniste vaatlus võib viia vigadele, siis mõtles pisut ning ütles elavnedes: «Silmi usaldada ei saa, on vaja mõõta.» Mul tuli vestlust jätkata. Ütlesin Borjale, et igasugused mõõtmised on ebatäpsed, pealegi on neid tihti raske teostada. Näiteks ei ole käepärast vajalikke instrumente. Kuid peamine seisneb muus. Mõõta võib ühe või mõne lõigu, ühe või mõne nurga jne. Kuid kõiki kujundeid mõõta pole võimalik. Ja see, mis on õige mingi kahe mõõdetud kolmnurga kohta, võib osutuda teiste kolmnurkade puhul ebaõigeks. Kuidas siis teha? Järelduse tegi Borja ise. «Pole midagi parata, et tõestada teoreeme, tuleb õppida arutlema.» See oli hea järeldus. Tõepoolest, on tarvis õppida õigesti, loogiliselt arutlema.

Kõneluse lõpul jutustasin Borjale, mida hiljuti kuulsin ühes VI klassi geomeetria tunnis. Selles tunnis, enne võrdhaarse kolmnurga omadusi käsitleva teoreemi õppimist, tehti eksperimentaalne töö. Iga õpilane joonestas oma vihikusse võrdhaarse kolmnurga ja mõõtis malliga selle kolmnurga alusnurgad. Pärast seda tehti järeldus, et

võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed. Formuleeriti teoreem. Siis ütles õpetaja nõnda: «Me kontrollisime teoreemi võrdhaarse kolmnurga alusnurkadest 35 sellise kolmnurga kohta (tunnis oli 35 õpilast). Kui see teoreem osutus õigeks 35 võrdhaarse kolmnurga kohta, kas siit võib järeldada, et ta on õige iga võrdhaarse kolmnurga puhul? Aga võib-olla, et kolmekümne kuuenda kolmnurga korral, mille joonestame, on ta väär? Suudaksite te, tegeldes kõik selle teoreemi katselise kontrollimisega, proovida kõikvõimalikke võrdhaarseid kolmnurki? Miks te ei saa kontrollida teoreemi katseliselt kõigi võrdhaarsete kolmnurkade kohta ka siis, kui tegeleksite sellega kas või kogu eluaja? Kui ka kõik inimesed maakeral tegeleksid sellega, täielikku veendumust teoreemi õigsuses ikkagi ei saavutataks. Kuidas siis toimida? Appi tulevad arutlused ning 10 minutiga teeme seda, mis katselise kontrolliga pole võimalik isegi siis, kui kontrollimisel töötaksid kõikide koolide kõik õpilased. Loogiliste arutluste abil tõestame teoreemi kõikvõimalike võrdhaarsete kolmnurkade kohta. Niisugust tähtsat osa etendab geomeetrias arutlus.» Edasi esitati tunnis selle teoreemi tõestus.

Borja kuulas mind väga tähelepanelikult. Hüvastijätul ütles ta, et sai nüüd aru, milleks on vaja tõestada teoreeme nii, nagu seda tehakse tundides, ja et ta teeb selle selgeks ka teistele oma klassi õpilastele.

Ka sina, selle raamatu noor lugeja, püüa mõista, miks on vaja tõestada teoreeme loogiliste arutluste abil ja järelda, et on tarvis visalt õppida, õigesti arutleda.

Saa aru, et teoreemi tõestus on loogiliste arutluste ahel, mis viib tõestatava teoreemi varem tõestatud teoreemide ja kasutuselevõetud aksioomide juurde, mis olid tõestatud veel varem. Lõpptulemusena toetuvad kõik teoreemid tõestuseta tunnustatud ja kogemusest järeldatud aksioomidele.

On olemas selline teadus nagu loogika, mis õpetab, kuidas on vaja arutleda, et meie mõtlemine oleks selge, ladus, järjekindel, tõestav ning vasturääkivusteta. Nagu aritmeetika ja grammatika eeskirju mittetundev inimene ei saa õigesti arvutada ja oskuslikult kirjutada, nii ka inimene, kes ei tunne loogika reegleid, ei saa vigadeta arutleda ning tegutseda. Tähendab, nõukogude inimene, selleks et tuua rohkem kasu oma suurele kodumaale, kommunismi ehitamise üritusele, peab hästi tundma loogikat.

Eriti palju tuleb arutleda matemaatikas. Matemaatikaga tegeleval inimesel tuleb sageli defineerida mõisteid, selgitada seoseid nende vahel, hinnata, millistesse gruppidesse (liikidesse) võib rühmitada kujundeid, arve, võrrandeid jne. Kuid eriti tihti tuleb matemaatikas arutluste teel tuletada mitmesuguseid valemeid, reegleid ning tõestada teoreeme. Mitte juhuslikult on leidunud selliseid matemaatikuid, kes arvasid, et matemaatika — see on teadus «hädavajalike mõttejärelduste tootmisest». Selline vaade matemaatikale on muidugi väär, kuid õige on see, et ilma loogikata ei saa olla matemaatikat. See aga tähendab, et matemaatika edukaks õppimiseks peab sihikindlalt õppima õigesti arutlema. See tähendab samuti, et matemaatika õppimine ise on väga kasulik mõtlemise reeglite ja seaduste omandamiseks. Mitte põhjuseta ei nimetata matemaatikat mõnikord mõistuse «kõvasiks». Mitte juhuslikult ei rääkinud M. Kalinin Moskva Lenini rajooni keskkoolide vanemate klasside õpilastele, et «matemaatika distsiplineerib mõistust, õpetab loogiliselt mõtlema. Asjata ei kõnelda, et matemaatika — see on ajude gümnastika. Ma ei kahtle, et teie pea on mõtetest tulvil, kuid neid mõtteid on vaja korrastada, distsiplineerida, suunata kasuliku töö voolu, kui nii võib väljendada. Matemaatika aitabki teid selle ülesandega toime tulla.»

Elu, eriti tehnika, aga ka mitmesugused teadused seavad matemaatika ette üha uusi ja uusi ülesandeid. Nende ülesannetega toime tulemiseks peavad matemaatikud läbi töötama matemaatika teooria küsimusi ja looma meetodeid, mis kindlustavad tekkinud ülesannete eduka lahendamise. Kuidas siis toimivad matemaatikud? Matemaatikutele tulevad appi loogilised arutlused. Iga matemaatikaülesande lahendamine — see on eelkõige arutluste ahel. Arvutused ning geomeetrilised konstruktsioonid, mida nii sageli tuleb kasutada ülesannete lahendamisel, on võimatud loogiliste arutlusteta, neid suunatakse arutlustega. Tähendab, matemaatikas on võimatu toime tulla loogikata.

Toome mõned näited. Planeet Uraan avastati 1781. a. Tema liikumise vaatlused XVIII sajandi lõpul ja XIX sajandi algul näitasid, et see pisut erineb teoreetiliselt arvutatud liikumisest. Seda erinevust oli võimalik seletada ainult uue, Päikesest veel kaugemal asetseva tundmatu planeedi mõjuga Uraanile. Siis prantsuse teadlane

Leverrier (1811—1877), lähtudes häiretest Uraani liikumisel, loogiliselt arutledes ja küllalt keerukaid arvutusi teostades, näitas selle planeedi asukoha taevas. Ja tõepoolest, Leverrier' poolt näidatud taevapiirkonnas leidis astronoom Galle 23. septembril 1846. a. uue planeedi, mis nimetati Neptuuniks. See avastus on üheks silmapaistvamaks inimmõtte saavutuseks. Samuti avastati Neptuuni taga järgmine, üheksas planeet Pluuto.

Matemaatika aitas samuti avastada paljusid väikeplaneete, näiteks Cerest. Esimesena vaatles Cerest astronoom Piazzi, kuid kaotas selle vaatluste vaheaja tõttu. Appi tuli kuulus matemaatik Gauss. Kasutades Piazzi poolt saadud mõningaid andmeid uuest planeedist, arvutas ta selle planeedi liikumistee. Tõepoolest, Gaussi näpunäidete järgi leiti planeet uuesti.

Toon veel ühe näite, mis illustreerib loogika tähtsust matemaatikas. Juba kaugel muinasajal püüdsid inimesed katselisel teel leida ringjoone pikkuse ja diameetri suhet, s. o. arvu, mis näitab, mitu korda on ringjoone pikkus suurem tema diameetrist. Arvu, mida tähistatakse tähega π (pii), tuleb kasutada näiteks ringjoone pikkuse või ringi pindala arvutamisel antud diameetri järgi, kuid ka paljude muude tähtsate ülesannete lahendamisel. Niisiis oli tarvis määrata arv π vajaliku täpsusega. Katseline π arvutamine suutis anda vaid jämedalt ligikaudse tulemuse. Arvu π ebatäpseid väärtusi kasutati inimkultuuri varajasemail astmeil. Näiteks muistses Egiptuses, enam kui 3000 aastat tagasi, loeti π võrdseks 3-ga. Meie maal kasutati XVII sajandi algul sageli sama π väärtust. Hiljem kasutati väärtust 3,14, mõnikord 3,16. III sajandil e.m.a. leidis Archimedes mõõtmisteta, üksnes arutluste ja arvutuste abil arvule küllaldase täpsusega väärtuse $3\frac{1}{7}$ (Archimedese arv). Archimedes oli üks suurimaid vanakreeka matemaatikuid, andekas leidur ja ustav poeg oma kodumaale, mille vaenlaste vastu võideldes ta hukkus. Hiljem arvutasid teised matemaatikud, kasutades Archimedese avastust, π veel suurema täpsusega. Nii arvutas XVI sajandil saksa matemaatik Ludolph, kulutades väga palju aega, selle arvu 35 kümnendkohta. Ludolphi poolt arvutatud π väärtus on 3,14 159 265 358 979 323 846 264 338 327 950 288.

Veel täpsemate π väärtuste arvutused ei katkenud

pärast Ludolphit. Vähetuntud inglise matemaatik Shanks arvutas 1873. a. selle arvu 527 kümnendkohta. Shanks, tõsi küll, arvutas kokku 707 kümnendkohta, kuid alates 528-ndast olid need ebaõiged. Niisugusel π ligikaudsel väärtusel, mille leidis Shanks, ei ole praktilist ega teoreetilist väärtust. Inglismaal ja USA-s leidus aga ikkagi matemaatikuid, kes aastail 1946—1947 rekordi tagaajamisel arvutasid arvule π 808 kümnendkohta. Tähtis on see, et loogilised arutlused, mis lubavad arendada geomeetriat ning teisi matemaatika osi, annavad võimaluse arvutada π mistahes täpsusega igal juhul, ilma mingisuguste mõõtmisteta.

Kõik öeldu sunnib tegema järeldust, et on hädavajalik sihikindlalt omandada oskust loogiliselt arutleda. Igal meie kooliõpilasel on tarvis visalt õppida õigesti mõtlema. Võib-olla tuleb seda teha ainult keskkooli vanemates klassides? Ei. Kõigis keskkooli klassides on vaja palju ja püsivalt õppida arutlema loogiliselt. V—VIII klassi õpilastele on selles suhtes väga kasulikud alljärgnevad loogilist mõtlemist arendavad küsimused ning harjutused. Proovi neis orienteeruda. Suhtu neisse väärilise tõsidusega. Ära rutta vastustega.

ÕIGED JA VÄÄRAD VÄITED

294. Millised alljärgnevatest väidetest on õiged ja millised väärad?

1) Kui kahe täisarvu korrutis jagub 6-ga, siis vähemalt üks tegureist jagub 6-ga.
2) Selleks et arv jaguks 2-ga, on tarvis, et ta lõpeks nulliga.
3) Kahe paaritu arvu summa on paaritu arv.
4) Ei ole täisarvu, mille kuup lõpeks numbriga 2.
5) Selleks et $a^3=a^2$, on tarvis, et $a=1$.
6) Selleks et täisarvu kuup jaguks 5-ga, on tarvis, et see arv jaguks 5-ga.
7) Mistahes paarisarvu ruut jagub 4-ga.
8) Iga 1-st suurem naturaalarv jagub vähemalt ühe algarvuga.
9) Kui $|a|=|b|$, siis $a=b$.
10) Kui $a=b$, siis $|a|=|b|$.
11) Kui $ab>0$, siis $a>0$ ja $b>0$.

TEOREEMIDE KOOSTISOSAD

295. Igas alljärgnevas matemaatilises lauses eralda eeldus ja väide:

1) Kahe paarisarvu summa on paarisarv.
2) Kui arvu numbrite summa jagub 9-ga, siis arv jagub 9-ga.
3) Paaritute arvude vahe on paarisarv.
4) Paarisarvu ruut jagub 4-ga.
5) Mistahes kolme järjestikuse naturaalarvu korrutis jagub 6-ga.
6) Kahe arvu korrutis võrdub nulliga, kui vähemalt üks tegureist võrdub nulliga.

296. Eralda järgmistes teoreemides eeldused ja väited:

1) Kui kolmnurgas kõik küljed on võrdsed, siis ka kõik nurgad on võrdsed.
2) Tippnurgad on võrdsed.
3) Igas kolmnurgas suurema külje vastas asetseb suurem nurk.
4) Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.
5) Kahe väliselt puutuva ringjoone keskpunktide vaheline kaugus võrdub nende ringjoonte raadiuste summaga.

TEOREEMI PÖÖRDTEOREEM JA VASTANDTEOREEM

297. Formuleeri igale alljärgnevale teoreemile pöördteoreem ja määra, kas see kehtib või mitte:

1) Kui arv lõpeb nulliga, siis ta jagub 5-ga.
2) Kui kumbki kahest liidetavast on paarisarv, siis ka nende summa on paarisarv.
3) Kolme paaritu arvu summa on paaritu arv.
4) Kui a on täisarv, siis ka $6a$ on täisarv.
5) Kui arv jagub 2-ga ja 3-ga, siis ta jagub 6-ga.
6) Kui arv jagub 10-ga, siis ta jagub 5-ga.

298. Formuleeri igale järgmisele teoreemile pöördteoreem ja määra, kas see pöördteoreem kehtib või mitte:

1) Kui nurgad on tippnurgad, siis nad on võrdsed.
2) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdhaarne.
3) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdnurkne.

4) Kui kolmnurga üks nurk on nürinurk, siis kaks ülejäänut on teravnurgad.
5) Kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis niisugused kolmnurgad on võrdsed.
6) Nurgad võrdhaarse kolmnurga aluse juures on võrdsed.
7) Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

299. Igale alljärgnevale kehtivale või mittekehtivale teoreemile formuleeri pöördteoreem ning määra, kas ta kehtib või mitte:
1) Kui üks kahest tegurist võrdub nulliga, siis nende korrutis võrdub samuti nulliga.
2) Kui nelinurga diagonaalid on võrdsed, siis nelinurk on ristkülik.
3) Kui nelinurga diagonaalid on teineteisega risti, siis nelinurk on romb.
4) Kui ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.
5) Sümmeetrilised kujundid on võrdsed.

300. Sõnasta teoreemi «Rööpküliku diagonaalid poolituvad oma lõikepunktis» pöördteoreem ja tõesta see. Formuleeri otsese teoreemi vastandteoreem ning pöördteoreemi vastandteoreem. Kas need kehtivad?

301. Sõnasta teoreemi «Nelinurk, mille diagonaalid poolituvad oma lõikepunktis, on rööpkülik» pöördteoreem. Kas see kehtib?

302. Sõnasta teoreemi «Kui arv jagub 9-ga, siis tema numbrite summa jagub 9-ga» pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Kas need kehtivad?

303. Kas kehtib teoreem «Võrdsete diagonaalidega nelinurk, mille üks nurk on täisnurk, on ristkülik»?

304. Kolmnurkadest ABC ja $A_1B_1C_1$ on teada, et $AB=A_1B_1$, $AC\neq A_1C_1$ ning $BC\neq B_1C_1$. Kas need kolmnurgad on võrdsed?

305. Kas kehtib teoreem «Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nurgaga, siis need kolmnurgad on võrdsed»?

306. Sõnasta teoreemi «Täisnurgad on võrdsed» pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Kas need teoreemid kehtivad?

TARVILIKUD JA PIISAVAD TINGIMUSED

Tingimust nimetatakse t a r v i l i k u k s, kui ta järeldub väitest. Tingimust nimetatakse p i i s a v a k s, kui temast järeldub väide.

307. Pane igas järgmises lauses mõttepunktide asemele «on tarvilik», «on piisav» või «on tarvilik ja piisav».

1) Selleks et kahe täisarvu summa oleks paarisarv, ..., et kumbki liidetav oleks paarisarv.
2) Selleks et arv jaguks 15-ga, ..., et ta jaguks 5-ga.
3) Selleks et arv jaguks 3-ga, ..., et ta jaguks 6-ga.
4) Selleks et arv jaguks 10-ga, ..., et ta jaguks 2-ga ja 5-ga.
5) Selleks et kahe naturaalarvu summa oleks suurem kui 30, ..., et üks liidetav oleks suurem kui 15.
6) Selleks et korrutis $(x-3)(x+2)(x-5)$ võrduks 0-ga, ..., et $x=3$.
7) Selleks et kahel ruudul oleks üks ja sama pindala, ..., et nende küljed oleksid võrdsed.
8) Selleks et kahe naturaalarvu summa jaguks 2-ga, ..., et mõlemad liidetavad jaguksid 2-ga.
9) Selleks et naturaalarv jaguks 100-ga, ..., et see arv jaguks 10-ga.
10) Selleks et naturaalarv jaguks 100-ga, ..., et see arv jaguks 1000-ga.
11) Selleks et nelinurk oleks ristkülik, ..., et tema diagonaalid oleksid võrdsed.
12) Selleks et nelinurk oleks rööpkülik, ..., et tema kõik küljed oleksid võrdsed.
13) Selleks et nelinurk oleks ristkülik, ..., et tema kõik nurgad oleksid võrdsed.
14) Selleks et nelinurk oleks rööpkülik, ..., et tema diagonaalid oleksid võrdsed.

15) Selleks et kehtiks võrratus $\frac{1}{x}<1$, ..., et $x>1$.

16) Selleks et kehtiks võrratus $\frac{1}{x}<1$, ..., et $x<0$ või $x>1$.

308. Selleks et samas ringis (või võrdsetes ringides) kaared oleksid võrdsed, on tarvilik ja piisav, et neile vastavad kõõlud oleksid võrdsed. Millise kahe teoreemiga võib selle teoreemi asendada?

309. Selleks et samas ringis (või võrdsetes ringides) kõõlud oleksid võrdsed, on tarvilik ja piisav, et nad oleksid ühesugustel kaugustel keskpunktist. Millise kahe teoreemiga võib selle teoreemi asendada?

MÕNED TEOREEMID JA KÜSIMUSED

310. Kui kolme täisarvu summa on paarisarv, mida võib siis väita nende arvude korrutise kohta?

311. Kas võib väita, et kui iga tegur ei jagu jäägita antud arvuga, siis ka korrutis ei jagu selle arvuga?

312. Tõestada, et kui mingi kahekohalise arvu korrutis 5-ga on kahekohaline arv, siis kahekohalise teguri esimene (vasakpoolne) number on 1.

313. Kahe naturaalarvu korrutis osutus paarisarvuks. Kas nende arvude summa on paaris- või paaritu arv? Kui aga võtta mitte kaks, vaid kolm arvu?

314. Tõestada, et kui kahe naturaalarvu korrutis on suurem kui 82, siis vähemalt üks neist arvudest on suurem kui 9. Formuleeri pöördteoreem. Kas see kehtib?

315. Millise võrduse võib saada kahe ebaõige võrduse liikmeti liitmisel (lahutamisel, korrutamisel)? Too näiteid.

ÜLESANDED

316. Koolis on 370 õpilast. Tõestada, et selle kooli õpilaste hulgas on vähemalt kaks õpilast, kes tähistavad oma sünnipäeva ühel ja samal päeval.

317. Ühes majas elab 13 õpilast. Kõik nad õpivad ühes ja samas koolis. Selles koolis on 12 klassi. Tõestada, et vähemalt kaks selles majas elunevat õpilast õpib ühes klassis.

318. Ühes okaspuumetsas on 550 000 kuuske. Ühelgi neist ei ole rohkem kui 500 000 okast. Tõestada, et äärmisel juhul on kahel kuusel selles metsas ühesugune arv okkaid.

319. Kooli ühes klassis on 23 õpilast. Kas võib väita, et selles klassis leidub vähemalt kaks õpilast, kelle perekonnanimi algab sama tähega? Kui aga selles klassis oleks 35 õpilast?

320. Tõestada, et mistahes täisarvu rublasid, mis on suurem kui 7, võib maksta kolme- ja viierublalistega.

321. Tõestada, et kui on antud kolm mingit 3-ga mittejaguvat naturaalarvu, siis jagub 3-ga kas nende kolme summa või neist kahe summa.

322. Mingist arvust on teada, et ta on paaritu, ei jagu 5-ga ja et tema ruut lõpeb sama numbriga, millega arv ise. Leida, milline number on selle arvu lõpus.

323. Korvis on kaht sorti õunu. Sealt võetakse huupi mõned õunad. Milline vähim arv õunu on vaja võtta, et nende hulgas oleks vähemalt kaks õuna ühest sordist?

324. Karbis on 4 värvi- ja 10 harilikku pliiatsit. Karbist võetakse huupi mõned pliiatsid. Milline vähim arv pliiatseid on vaja karbist võtta, et nende hulgas oleks mitte vähem kui: a) kaks värvipliiatsit, b) kolm harilikku pliiatsit?

325. On 9 väliskujult ühesugust münti. On teada, et üks neist on valeraha. Sellel on väiksem kaal.
Kuidas kahe kaalumisega kausskaaludel (vihtideta) eraldada valeraha? Kui aga oleks 10 münti?

326. Tsehhi kontrollosakonda toodi 26 ühesuguse väliskujuga metalldetaili. On teada, et ühel neist on sees tühik. Kuidas eraldada see detail teistest ainult kolme kaalumisega kausskaaludel (vihtideta)?

327. On 80 münti. Nende hulgas on üks valeraha, mis on kergem kui kõik ülejäänud ühesuguse kaaluga mün-

did. Kuidas eraldada valeraha ainult nelja kaalumisega vihtideta kausskaaludel?

328. Kuuenda klassi õpilane ostis kauplusest 9 vihikut, mõned märkmikud à 6 kop. ja 3 pliiatsit. Müüja kirjutas talle tšeki 58 kop. Heitnud tšekile pilgu, ütles õpilane müüjale, et on tehtud viga. Müüja imestas, kuidas võis õpilane nii kiiresti vea avastada. Arvutades uuesti, leidis müüja muidugi vea. Kuidas sai õpilane viga märgata, heites tšekile ainult pilgu?

329. Perekonnaliikmete vanuste summa on praegu 73 aastat. Perekonna koosseis: mees, naine, tütar ja poeg. Mees on naisest 3 aastat vanem, tütar pojast 2 aastat vanem. Nelja aasta eest oli perekonnaliikmete koguvanus 58 aastat. Kui vana on praegu iga perekonnaliige?

330. Kaks ühes kolhoosis elavat pioneeri hakkasid kooli minema üheaegselt. Esimene käis poole ajast, mis tal teel kulus, kiirusega 5 $\frac{km}{h}$, pärast aga käis kiirusega 4 $\frac{km}{h}$. Teine käis esimese poole teed kolhoosist kooli kiirusega 4 $\frac{km}{h}$, teise poole aga kiirusega 5 $\frac{km}{h}$ Kumb pioneer jõudis varem kooli?

331. Nelja järjestikuse naturaalarvu korrutis on 3024. Leida need arvud.

TÄBARAD OLUKORRAD

332. 7 ühesugust õuna on vaja jaotada võrdselt kaheksa poisi vahel. Kuidas teha seda nii, et lõikeid oleks võimalikult vähe?

333. Kuidas jaotada kahte võrdsesse ossa 12 ämbrit kaheteistkümneämbrises vaadis olevat leivakalja, kasutades selleks veel kaht tühja vaati — kaheksa- ja viieämbrilist?

334. Neljal kolhoosnikul oli vaja ületada jõgi. Jõudnud jõe äärde, nägid nad väikest paati, milles sõitsid kaks poissi. Kolhoosnikud palusid poisse viia nad üle jõe, kuid selgus, et paati võib istuda ainult kaks

poissi või siis ainult üks täiskasvanu. Poisid tahtsid väga kolhoosnikuid aidata ja nad mõtlesidki välja, kuidas seda teha. Teatava aja jooksul ületasid kolhoosnikud selle paadiga jõe. Mida poisid välja mõtlesid?

335. Inimene pidi viima üle jõe hundi, kitse ja avatud korvi kapsastega. Kuid oh häda — paat on nii väike, et suudab kanda ainult inimest ning koos temaga kas hunti, kitse või kapsaid. Jätta ühele kaldale hunti ja kitse, samuti kitse ja kapsaid kuidagi ei või. Olukord näis väljapääsmatuna, kuid siiski leidis inimene lahenduse. Ta viis kõik õnnelikult selle paadiga üle jõe. Kuidas ta toimis?

336. Üks inimene jutustas: «Kui täna hommikul ärkasin, vaatasin seinakella. See seisis. Teist kella mul polnud. Raadio vaikis. Mõtlesin, kuidas kella õigeks panna, ja tegin seda nii. Üles tõusnud, läksin sõbra juurde, kes elas teises kvartalis. Kui kohale jõudsin, vaatasin tema kella, mis käib õigesti. Vestelnud pisut sõbraga, jätsin hüvasti, vaatasin veel kord kella, ja läksin koju. Niipea kui koju jõudsin, panin kella õigeks ja tegin seda peaaegu täpselt. Kuidas ma toimisin? Arvake ära.»

337. Vanadest aritmeetika ülesannete kogudest võib leida sellise ülesande. Isa pärandas oma kolmele pojale 19 hobust. Vanem poeg pidi saama $\frac{1}{2}$, keskmine $\frac{1}{4}$, noorem aga $\frac{1}{5}$ hobustest. Kui isa suri, ei osanud pojad pärandatud hobuseid omavahel kuidagi jaotada ja otsustasid pöörduda abi saamiseks isa sõbra poole. Too, mõelnud, otsustas vendi aidata. Selleks tõi ta kohale oma hobuse, nii et kokku oli 20 hobust. 10 hobust sai vanem vend, 5 — keskmine, 4 — noorem. Ülejäänud hobuse võttis selle omanik — isa sõber. Miks nii välja tuli? Kas ei tehtud mingit viga? Uuri seda ülesannet.

338. Kolm lillemüüjat müütasid pargi sissekäigu ees lilli. Esimesel oli 33, teisel 29 ja kolmandal 27 lillekimpu. Lillemüüjad müüsid kimpe üheaegselt ühesuguse hinnaga. Müünud lilled, lugesid nad saadud raha

üle. Ilmnes, et nad said müüdud lillede eest ühesugused rahasummad. Kuidas võis see juhtuda?

339. Ühe pioneerisalga koondusel võtsid naljahambad viis ühesugust ruutu paberit — kaks valget ja kolm punast. Siis seati ritta kolm pioneeri — Vasja, Kolja ja Petja, ning paluti neid panna üks käsi selja taha. Sellesse kätte anti igaühele, nii et ta ei näinud, punane ruut, ülejäänud kaks ruutu aga pandi ära. Pärast seda lubati kõigil kolmel vaadata, mis värvi ruudud on peos kahel ülejäänul, siis aga pidi igaüks kätt selja tagant võtmata kiiresti otsustama, mis värvi ruut tal on. Kolja taipas esimesena, millist värvi ruut on tal peos. Kuidas ta arutles?

340. Sepale toodi 5 kolmelülilist ketitükki ja paluti need ühendada üheks ahelaks. Sepp mõtles, kuidas seda tellimust lihtsamalt täita. Mitu lüli on siis vaja lahti võtta ja pärast uuesti ühendada, et kõik tükid moodustaksid ühe keti? Mõelnud, asus sepp tööle, ja võtnud lahti ainult kolm lüli, täitis tellimuse. Kuidas toimis sepp?

341. Lasteaeda, kus oli 50 last, saadeti 60 suurt ja 60 väiksemat õuna. Oli otsustatud need jaotada nii: suured anda 30 lapsele, igaühele 2, väikesed aga ülejäänud 20-le kolmekaupa. Nõnda jätkus õunu kõigile täpselt. Ent transportimisel läksid sordid segi. Siis otsustas kasvataja teha nii: teades, et suuri õunu tuleb anda lapse kohta 2, väikesi aga 3, hakkas ta õunu jagama ühisest hunnikust 5-kaupa iga kahe lapse kohta. Tema hämmastuseks ei jäänud õunu kahele viimasele lapsele. Miks juhtus nii?

342. Kolhoosnik tõi turule müügiks kaks korvi õunu, 30 õuna kummaski korvis. Ta kavatses müüa nii: esimesest korvist 2 õuna 10 kop. eest, teisest korvist 3 õuna 10 kop. eest. Kolhoosnik arvutas, et ta saab kokku 2 rbl. 50 kop. Müügiks valmistumisel tuli ta aga mõttele segada õunad ja müüa 5 õuna 20 kop. eest. Nii ta ka tegi, lootes teenida sel viisil sama summa. Milline oli aga tema imestus, kui selgus, et ta sai mitte 2 rbl. 50 kop., vaid 2 rbl. 40 kop. Miks nii juhtus?

343. Ühele pioneerile, kes oli hea joonistaja, andis rühmajuht ülesande joonistada kõiki selle rühma pioneere, kes end ise joonistada ei oska. Pioneer mõtles, kuidas on tema endaga. Kui ta oskab end joonistada, siis ei pea ta end joonistama, kuid kui ta end ei joonista, siis peab ta end joonistama. Tõepoolest, kuidas siis on?

344. Ruudust küljepikkusega 3 ühikut on vaja välja lõigata kuubi, mille serva pikkus on 1, täispindala esitav kujund. Kuidas seda teha?

345. Teineteise lähedal paiknevad kaks asustatud punkti A ja B. Kõik A elanikud räägivad ainult tõtt, B elanikud aga valetavad alati. A ja B elanikud külastavad üksteist. Sa asud ühes neist punktidest. Millise küsimuse (ainult ühe) võid esitada esimesele inimesele, keda kohtad selles punktis, et vastuse järgi määrata, kas see punkt on A või B?

MATEMAATILISED SOFISMID

Sofismiks nimetatakse ettekavatsetud valet järeldust, mis näib õigena. Milline sofism ka ei oleks, kindlasti sisaldab ta üht või mitut maskeeritud viga. Eriti sageli teostatakse matemaatilistes sofismides varjatult keelatud tehteid või ei arvestata teoreemide, valemite ning reeglite rakendamise tingimusi. Mõnikord arutletakse väära joonise abil või toetutakse ekslikele järeldustele jõudmiseks «silmanähtavusele». Tuleb ette ka sofisme, mis sisaldavad muid vigu.

Sofismid on etendanud matemaatika arengus olulist osa. Nad on soodustanud matemaatiliste arutluste ranguse tõusu ja kaasa aidanud matemaatiliste mõistete ning meetodite sügavamale selgitamisele. Sofismide osa matemaatika arengus sarnaneb osaga, mida etendasid isegi väljapaistvate matemaatikute poolt tehtud ettekavatsematud vead matemaatilistes tõestustes. I. Pavlov ütles, et veast õigesti arusaamine on tee avastuse poole. Tõepoolest, vigade selgitamine matemaatilistes arutlustes on sageli edendanud matemaatika arengut. Eriti õpetlik on ses suhtes Eukleidese paralleelsete sirgete aksioomi ajalugu.

Nagu teada, formuleeritakse see aksioom nii: läbi punkti, mis asetseb antud sirgest väljaspool, võib tõmmata ainult ühe sirge, mis on paralleelne antud sirgega. Enam kui kahe tuhande aasta jooksul püüdsid paljud silmapaistvad eri aegadel elanud ja eri rahvustest matemaatikud seda väidet tõestada, s. t. järeldada muudest geomeetria aksioomidest.[24] Ühtki neist katsetest ei krooninud edu. Leitud rohkearvulised «tõestused» osutusid vigasteks. «Selle tõe ranget tõestust,» kirjutas suur vene matemaatik N. Lobatševski 1823. a. oma geomeetriaõpikus, «ei ole suudetud seni leida; neid, mis on antud, võib nimetada ainult selgitusteks, need ei vääri tunnustamist matemaatiliste tõestustena täielikus mõttes.» Need tõestused, vaatamata vigadele neis, tõid ikkagi kasu geomeetria arengule. Põhiliselt selgitati välja seosed mitmesuguste geomeetria teoreemide vahel. Võib öelda, et need «tõestused» valmistasid ette üht suurimat avastust geomeetria vallas ja kogu matemaatikas — uue, mitteeukleidilise geomeetria avastamist. Selle avastuse ja uue geomeetria väljatöötamise au kuulub meie suurele kaasmaalasele N. Lobatševskile. N. Lobatševski püüdis algul ka ise tõestada paralleelide aksioomi, kuid mõistis varsti, et seda pole võimalik teha. 1826. a. tegi ta kindlaks, et paralleelide aksioomiga väljendatavat väidet muude geomeetria aksioomide abil tõestada ei saa. Tee, mille kaudu Lobatševski tegi kindlaks paralleelide aksioomi tõestamatuse, juhtiski teda uue geomeetria avastamisele. See avastus on üks neist, mis on teinud vene matemaatika kuulsaks.

Seda laadi näiteid saaks tuua mitu. Nad veenavad selles, et vigadest ülesaamine matemaatilistes arutlustes soodustab matemaatika arengut.

Mille poolest siis on sofismid matemaatika õppijaile kasulikud? Mida nad võivad anda?

Sofismide analüüsimine arendab eelkõige loogilist mõtlemist, s. t. kujundab eluks hädavajalikke õige mõtlemise harjumusi. Leida sofismis viga tähendab olla sellest teadlik, kuid see väldib tema kordumise edaspidi teistes matemaatilistes arutlustes. Kui laps kord puudutab kuuma eset, siis hiljem püüab ta seda mitte enam teha. Ta on

[24] Aksioomid on katselise põhjendusega lähtelaused, mis on võetud matemaatikas kasutusele ilma loogiliste tõestusteta. Paralleelide aksioomi iseärasused andsid põhjust mõelda, et ta on muudetav teoreemiks, s. t. tõestatav muude geomeetria aksioomide abil.

palju ettevaatlikum. Nii ilmutab matemaatika õppijagi hiljem rohkem ettevaatlikkust, et mitte korrata tuntud viga.

Edasi, mis on eriti tähtis, sofismide analüüsimine aitab õpitavat matemaatika-alast materjali teadlikult omandada, arendab vaatlusoskust, mõtlemisvõimet ja kriitilist suhtumist sellesse, mida õpitakse. Kui matemaatika õppija analüüsib sofismi, teab ta, et võib langeda lõksu ning püüab seda vältida. Et mitte sattuda püünisesse, tuleb edasi liikuda väga tähelepanelikult ja teha iga samm suure ettevaatlikkusega. Küsimus on selline: kes keda alistab, kas sofism oma analüüsija või vastupidi. Tähendab, matemaatilised sofismid sunnivad tähelepanelikult ja valvsalt edasi liikuma, hoolikalt jälgima formuleeringute täpsust, kirjutiste ja jooniste õigsust, üldistuste lubatavust, sooritatud operatsioonide seaduspärasust. See kõik on vajalik ja kasulik.

Lõpuks, sofismide analüüs on huvitav. Ainult väga kuiva inimest ei suuda huvitav sofism kütkestada. Kui meeldiv on avastada viga matemaatilises sofismis ja sellega nagu taastada tõde oma õigustes! Ning mida raskem on sofism, seda rohkem annab rahuldust tema analüüs.

On palju eri raamatuid, millesse on kogutud mitmesuguseid sofisme. XIX sajandi lõpul ja XX sajandi algul omandas õpilaste hulgas eriti suure kuulsuse Obreimovi raamat «Matemaatilised sofismid». Seda raamatut loeti innukalt. Oli raske leida gümnasisti, kes polnud seda lugenud. V. Obreimovil, eesrindlikul revolutsioonilise meelsusega rahvaharidustegelasel XIX sajandi viimastel aastakümnetel ning XX sajandi algul, õnnestus koguda ja ümber töötada huvitavaid sofisme. Kas mitte V. I. Lenin ei pidanud silmas seda matemaatiliste sofismide kogu, kui ta ühes oma artiklis kirjutas, et sellised kogumikud toovad kasu kooliõpilastele?

Tuleb rõhutada, et V. I. Lenin pidi võitluses, mida ta juhtis töölisklassi vaenlaste vastu, sageli analüüsima ja paljastama oma vastaste mitmesuguseid poliitilisi sofisme. Maskeeritud vigu sisaldavaid arutlusi poliitilistest küsimustest võrdles V. I. Lenin matemaatiliste sofismidega. Ta kõneles, et need arutlused sarnanevad «nagu kaks tilka vett nende targutustega, mida matemaatikud nimetavad matemaatilisteks sofismideks ja milledes tõestatakse — range loogikaga, nagu esimesel pilgul näib, — et kaks

korda kaks on viis, et osa on suurem kui tervik jne.»[25] Need V. I. Lenini sõnad näitavad, et ta tundis matemaatilisi sofisme ning see kindlasti aitas tal sofisme poliitikas paljastada.

Meie ajal väljaantud teostest matemaatiliste sofismide kohta on huvitav V. Bradise, V. Minkovski ja A. Hartševa väike raamat «Ошибки в математических рассуждениях» (Учпедгиз, 1959). Sellest õpetajate jaoks kirjutatud teosest leiab ka õpilane palju kasulikku.[26]

Raamatuid matemaatilistest sofismidest on raske muretseda. Seepärast otsustasime «Huvitavas matemaatikas» anda mõned sofismid. Sofismide analüüsimisel on vaja püüda leida iseseisvalt neis sisalduvad vead ja nendest täpselt aru saada. Kui aga vead ei ilmne ning selles raamatus antud näpunäited ei aita? Mis siis teha? Kui sofism «ei alistu», siis on tingimata vaja pöörduda õpetaja poole selgituste saamiseks. Väga tähtis on taotleda täpset arusaamist vigadest, vastasel korral on sofismid kasutud ja võib-olla isegi kahjulikud. Ära unusta seda!

346. *4 rbl.=40 000 kop.* Võtame õige võrduse 2 rbl.= =200 kop. ja tõstame tema pooled ruutu. Tuleb 4 rbl.=40 000 kop. Milles on viga?

347. *5=6.* Proovime tõestada, et 5=6. Selleks võtame samasuse: $35+10-45=42+12-54$. Viime vasakul ja paremal poolel ühise teguri sulgude järele. $5(7+2-9)=6(7+2-9)$. Jagame võrduse mõlemad pooled ühise teguriga. Saame 5=6. Milles on viga?

348. *$2\cdot 2=5$.* Leia viga järgmistes arutlustes. On samasus $4:4=5:5$. Viime samasuse kummalgi poolel ühise teguri sulgude järele. Saame $4(1:1)=5(1:1)$. Sulgudes on võrdsed arvud. Seepärast 4=5 ehk $2\cdot 2=5$.

349. *2=3.* Leia viga järgmises «tõestuses». Vahed 4—10 ja 9—15 on võrdsed. Kummagagi neist liidame ühe ja sama arvu $\frac{25}{4}$, siis saame võrdsed arvud, seega

---

[25] V. I. Lenin. Teosed, 7. köide, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1952, lk. 77.

[26] Loe samuti huvitavat raamatut:

Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах, М., Гостехиздат, 1953.

$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4}$. Seda samasust saab kirjutada niisugusel kujul: $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$. Siit: $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$ ehk $2=3$.

350. *5=1.* Soovides tõestada, et 5=1, arutleme nii. Arvudest 5 ja 1 lahutame eraldi ühe ja sama arvu 3. Saame arvud 2 ja −2. Nende arvude ruutu tõstmisel tekivad võrdsed arvud 4 ja 4. Tähendab, lähtearvud 5 ja 1 peavad ka olema võrdsed. Kus on viga?

351. *4=8.* Võtame võrrandisüsteemi

$2x+y=8;\ x=2-\frac{y}{2}$.

Lahendame selle süsteemi asendusvõttega. Saame $4-y+y=8$, s. t. $4=8$. Milles siin asi on?

352. *Kõik arvud on omavahel võrdsed.* Püüame tõestada, et kõik arvud on omavahel võrdsed. Olgu $m\neq n$. Võtame samasuse $m^2-2mn+n^2=n^2-2nm+m^2$. Saame $(m-n)^2=(n-m)^2$. Siit $m-n=n-m$ ehk $2n=2m$, seega aga $n=m$. Milles on viga?

353. *Iga nullist erinev arv võrdub oma vastandarvuga.* Milline viga on tehtud järgmistes arutlustes? Valime vabalt 0-st erineva arvu a. Tähistame ta tähega x, $x=a$. Korrutame mõlemad võrduse pooled $-4a$-ga. Saame $-4ax=-4a^2$ ehk $-4ax+4a^2=0$. Selle võrduse mõlema poolega liidame x^2. Saame $x^2-4ax+4a^2=x^2$ ehk $(x-2a)^2=x^2$. Seega $x-2a=x$, kuid $x=a$, seepärast $a-2a=a$ ehk $-a=a$.

354. *Iga arv võrdub oma poolega.* Võtame kaks võrdset arvu a ja b, $a=b$. Korrutame a-ga selle võrduse mõlemad pooled ja siis lahutame neist b^2. Saame $a^2-b^2=ab-b^2$ ehk $(a+b)(a-b)=b(a-b)$. Siit $a+b=b$ ehk $a+a=a$, sest $b=a$. Niisiis $2a=a$ või $a=\frac{a}{2}$. Milline viga on tehtud neis arutlustes?

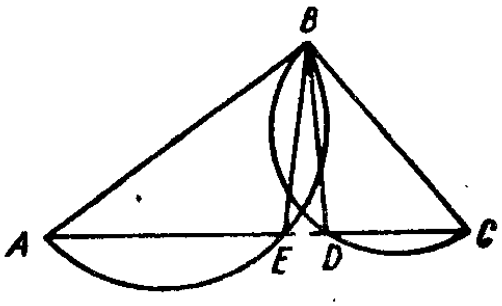
355. *Negatiivne arv on positiivsest suurem.* Valime kaks positiivset arvu a ja b. Võrdleme kaht suhet $\frac{a}{-b}$ ja $\frac{-a}{b}$. Nad on võrdsed, sest neist kumbki võrdub $-\frac{a}{b}$.

Võime koostada võrde $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$. Kuid kui võrde esimese suhte eesliige on suurem tagaliikmest, siis ka teise suhte eesliige on suurem selle tagaliikmest. Meie juhtumil $a>-b$, järelikult peab olema $-a>b$, s. t. negatiivne arv on positiivsest suurem. Milles on viga?

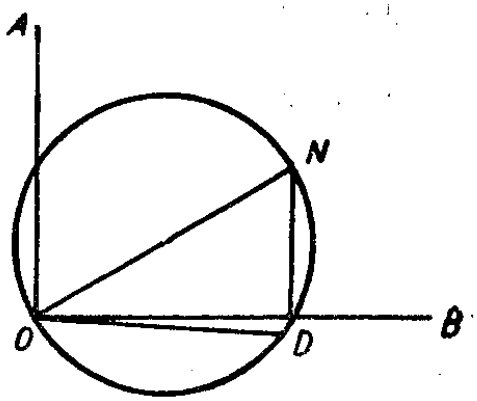
356. *Iga arv võrdub temast kaks korda suurema arvuga.* Olgu a mingi suvaline arv. Võtame samasuse $a^2-a^2=a^2-a^2$. Vasakul poolel viime a sulgude järele, parema poole aga lahutame tegureiks ruutude vahe valemi järgi. Siis saame: $(a-a)a=(a-a)(a+a)$. Lihtsustanud seda samasust, saame $a=2a$. Milles on siin viga?

357. *Iga arv võrdub nulliga.* Leida viga niisuguses arutluses. Milline ka oleks arv a, ikka on õiged võrdused: $(+a)^2=a^2$ ja $(-a)^2=a^2$. Järelikult $(+a)^2=a^2$, seega aga $+a=-a$ ehk $a+a=0$, kuid siis $2a=0$ ning seepärast $a=0$.

358. *Punktist saab tõmmata sirgele kaks ristsirget.* Püüame tõestada, et läbi punkti, mis asetseb väljaspool sirget, saab tõmmata sellele sirgele kaks ristsirget. Sel eesmärgil vaatleme kolmnurka ABC (joon. 42). Selle kolmnurga külgedele AB ja BC kui diameetritele ehitame poolringjooned. Lõikugu need poolringjooned küljega AC punktides E ja D. Ühendame punktid E ja D punktiga B sirgete abil. Nurk AEB on täisnurk kui diameetrile toetuv piirdenurk, samuti on nurk BDC täisnurk. Järelikult $BE\perp AC$ ja $BD\perp AC$. Sirge AC kaks ristsirget läbivad punkti B. Milles on viga?



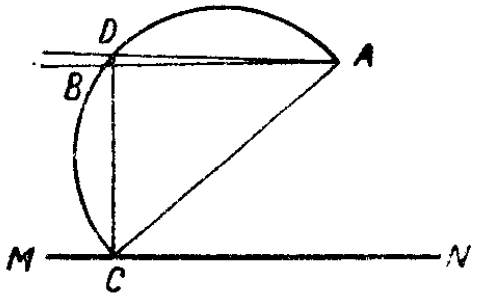
Joon. 42



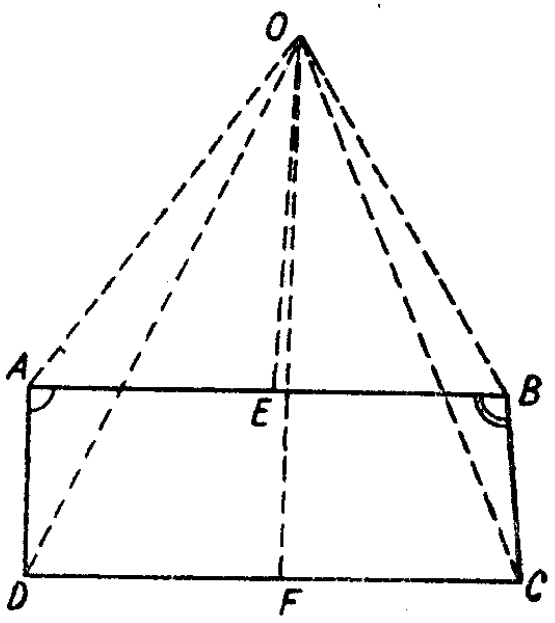
Joon. 43

359. *Sirgel valitud punktist saab tõmmata sellele sirgele kaks ristsirget* (asetsevad sellega ühel tasapinnal). Leia viga niisuguses «tõestuses». Võtame täisnurga AOB (joon. 43). Nurga sees läbi tipu O tõmbame vabalt sirge ja eraldame sellel suvalise lõigu ON. Võttes selle lõigu keskpunkti tsentriks, joonestame punkte O ja N läbiva ringjoone. Tõmbame läbi punkti N paralleelse sirge AO-ga. Lõigaku see sirge ringjoont punktis D. Ühendame punktid O ja D sirglõikude abil. Nurk ODN kui diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk, et aga $ND \parallel AO$, siis nurk DOA on ka täisnurk. Järelikult $OB \perp AO$ ja $OD \perp AO$.

360. *Läbi väljaspool sirget asetseva punkti saab panna kaks antud sirgega paralleelset sirget.*
Olgu antud sirge MN ja temast väljaspool punkt A. Juhime läbi punkti A sirgega MN paralleelse sirge AB. Valime sirgel MN mingi punkti C. Lõigule AC kui diameetrile ehitame poolringjoone. Olgu selle poolringjoone ja punkti C läbiva MN ristsirge lõikepunktiks D. Tõmbame sirge läbi punktide A ja D. Kuna nurk CDA on täisnurk, aga $CD \perp MN$, siis on AD sirgega MN paralleelne. Seega läbivad punkti A kaks sirget, mis on paralleelsed sirgega MN (joon. 44). Milles on viga?



Joon. 44

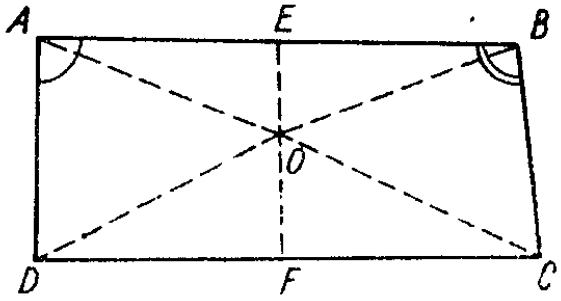


Joon. 45

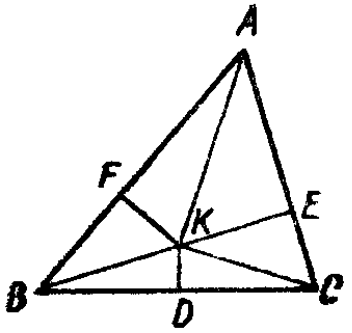
361. *Täisnurk võrdub nürinurgaga.* Proovime tõestada, et täisnurk on võrdne nürinurgaga. Teeme selleks järgmise konstruktsiooni. Võtame mingi sirglõigu AB

ning ehitame tema otspunktide A ja B juurde täis- ja nürinurga (joon. 45). Nende nurkade haaradel eraldame tippudest alates võrdsed lõigud $AD=BC$. Poolitame sirglõigud AB ja DC ning juhime neile ristsirged läbi jaotuspunktide. Et AB ja DC pole paralleelsed, siis lõikuvad need ristsirged mingis punktis O. Ühendame punkti O punktidega A, B, C, D. Saadud kolmnurgad AOD ja BOC on võrdsed, sest $AO=OB$, $AD=BC$ ja $DO=CO$. Tähendab, $\angle OAD=\angle OBC$, kuid $\angle EAO=\angle EBO$, sest $\angle DAE=\angle CBE$, s. t. täisnurk võrdub nürinurgaga.

Analoogiliselt võib vaadelda juhtumeid, kus punkt O asetseb AB peal ja AB-st allpool (joon. 46). Järeldus ka neist juhtumeist on samasugune: täisnurk võrdub nürinurgaga. Milles on viga?

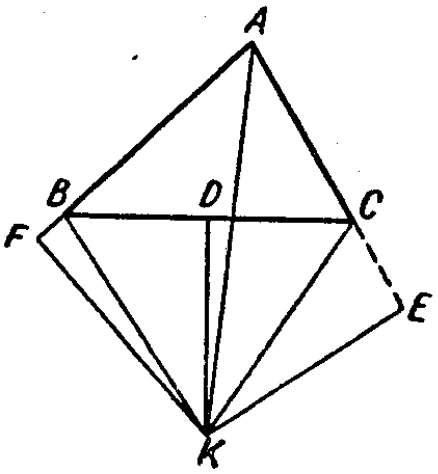


Joon. 46



Joon. 47

362. *Iga kolmnurk on võrdhaarne.* Olgu ABC suvaline kolmnurk (joon. 47). Ehitame nurga A poolitaja ning ristsirge küljele BC, mis läbib tema keskpunkti D. Võib osutuda, et nurgapoolitaja ja ristsirge lõikepunkt (K) asetseb kolmnurga ABC sees. Tõmbame punktist K ristlõigud KE ja KF külgedele AC ja AB. Saame $\triangle AEK=\triangle AFK$, seega aga $KE=KF$ ning $AE=AF$. Kolmnurgad BKD ja CKD on samuti võrdsed, seepärast aga $KB=KC$. Jääb vaadelda täisnurkseid kolmnurki BKF ja CKE. Need on võrdsed, sest $KE=KF$ ning $KB=KC$. Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $EC=FB$. Võtame kaks võrdust: $AE=AF$ ja $CE=BF$. Liitnud need liikmeti, saame $AC=AB$. Analoogiliselt võib arutleda juhtumil, kui punkt K asetseb kolmnurgast ABC väljaspool (joon. 48). Arutlused juhtumil, kui punkt K asetseb küljel BC (ühtib punktiga D), pole samuti

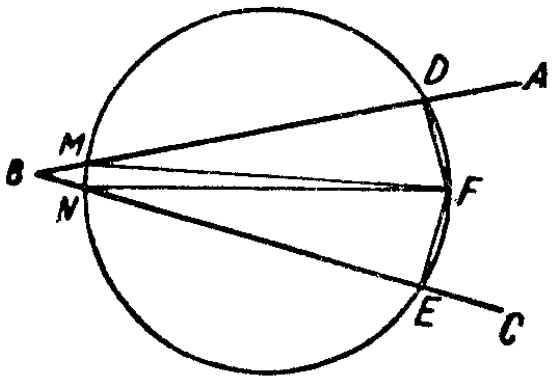


Joon. 48

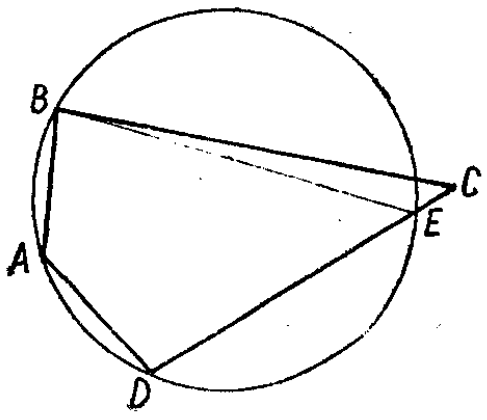
keerukad (teosta need ise). Kõigil juhtumeil tuleme järeldusele, et kolmnurk ABC on võrdhaarne. Kus on viga?

363. *Igal ringjoonel on kaks keskpunkti.* Ehitame teravnurga ABC (joon. 49). Valime tema haaradel punktid D ja E ning paneme läbi nende haaradele ristsirged. Lõikugu need ristsirged punktis F. Läbi kolme punkti D, F ja E tõmbame ringjoone. See ring lõikab nurga haarasid punktides M ja N. Lõigud MF ning NF peavad olema ehitatud ringjoone diameetriteks, sest neile toetuvad selle ringjoone piirdenurkadena täisnurgad MDF ja NEF. Lõikude MF ning NF keskpunktid peavad olema konstrueeritud ringjoone keskpunktideks. Järelikult on ringjoonel kaks keskpunkti. Kus on viga?

364. *Kolmnurga välisnurk võrdub sisenurgaga, mis pole tema kõrvunurgaks.* Vaatleme nelinurka $ABCD$, milles nurkade A ja C summa on 180° (joon. 50). Läbi



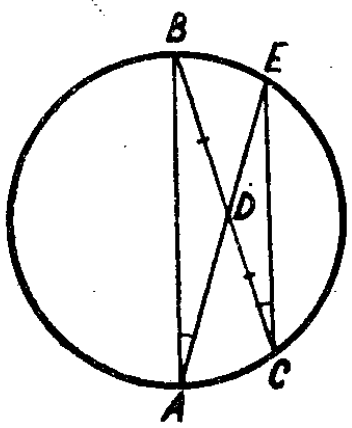
Joon. 49



Joon. 50

punktide D, A ja B tõmbame ringjoone. Lõigaku see ringjoon külge DC punktis E. Ühendame sirglõiguga punktid E ja B. Siis $\angle C = 180° - \angle A$ (konstruktsiooni järgi), $\angle BED = 180° - \angle A$ (et $ABED$ on kõõlnelinurk, siis tema vastasnurkade BED ja BAD summa on 180°). Järelikult $\angle C = \angle BED$, kuid $\angle BED$ on kolmnurga CBE välisnurk, $\angle C$ aga temaga mitte kõrvuti olev sisenurk. Leia viga.

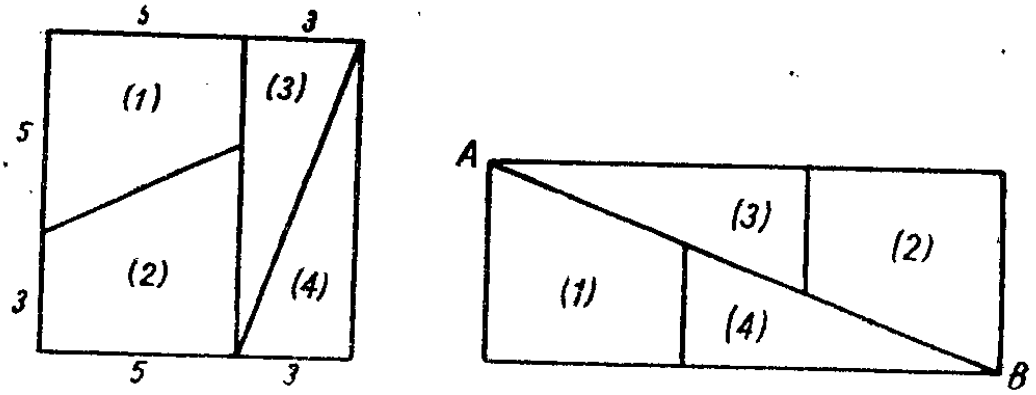
365. *Kõõl, mis ei läbi keskpunkti, võrdub diameetriga.* Olgu tõmmatud ringjoonele diameeter AB. Punktist B tõmbame mingi kõõlu BC, mis ei läbi keskpunkti, ja ehitame läbi selle kõõlu keskpunkti D ning punkti A uue kõõlu AE. Lõpuks ühendame punktid E ja C sirglõiguga (joon. 51). Vaatleme kolmnurki ABD



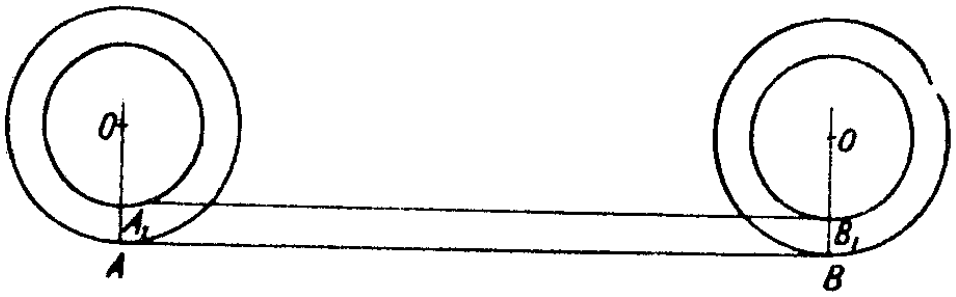
Joon. 51

ning EDC. Neis kolmnurkades $BD = DC$ (konstruktsiooni järgi), $\angle A = \angle C$ (kui ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad). Peale selle $\angle BDA = \angle EDC$ (kui tippnurgad). Kui aga ühe kolmnurga külg ja kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga ühe külje ja kahe nurgaga, siis need kolmnurgad on võrdsed. Seega $\triangle BDA = \triangle EDC$, võrdsetes kolmnurkades asetsevad aga võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed. Seepärast $AB = EC$. Kus on viga?

366. *$64 = 65$.* Ruut külje pikkusega 8 ühikut on lõigatud neljaks osaks, nagu on näidatud joonisel 52. Nendest osadest on kokku seatud ristkülik. Ristküliku alus osutus võrdseks 13, kõrgus aga 5 pikkusühikuga. Lähteruudu pindala võrdub 64, saadud ristküliku pindala aga 65 pindalaühikuga. Tähendab, $64 = 65$. Milles siin asi on?



Joon. 52



Joon. 53

367. *Kõigi ringjoonte pikkused on võrdsed.* Ühendame teineteisega liikumatult kaks erineva raadiusega ringi nii, et nende keskpunktid langeksid kokku. Paneme nad liikuma nõnda, et suurem veereks libisemata mööda sirget ja teeks täispöörde (joon. 53). Siis sirglõigu AB pikkus võrdub suurema ringjoone pikkusega (raadius OA). Väiksem ring, olles liikumatult kinnitatud suuremale, teeb samuti täispöörde. Lõigu A_1B_1 pikkus võrdub väiksema ringjoone pikkusega (raadius OA_1). Et aga $AB=A_1B_1$ (kui ristküliku vastasküljed), siis järelikult on nende kahe ringjoone pikkused võrdsed. Milles siin asi on?

368. *Mõned õpilaslikud vead.*

1) Seitsmenda klassi õpilasele anti lahendada võrrand $2x^2+6x=5x+15$. Õpilane toimis nii. Ta lahutas võrrandi mõlemad pooled tegureiks ja sai $2x(x+3)=5(x+3)$. Et vasakul ja paremal poolel leidus ühine tegur $x+3$, siis jagas õpilane sellega võrrandi mõlemad pooled ja sai tulemuseks $2x=5$, $x=2\frac{1}{2}$. Millise jämeda vea tegi õpilane?

2) Seitsmenda klassi õpilane pidi lahendama võrrandi $2+\frac{1}{x-3}=\frac{4-x}{x-3}$. Ta andis sellise lahenduse: $2(x-3)+1=4-x$, $2x-6+1=4-x$, $2x+x=4+6-1$, $3x=9$, $x=3$. Millise jämeda vea tegi õpilane selles lahenduses?

3) Kaheksanda klassi õpilasele anti lahendada võrrand $x+x\sqrt{2}=1$. Õpilane andis niisuguse lahenduse: $x\sqrt{2}=1-x$, $2x^2=1+x^2-2x$, $x^2+2x-1=0$, $x=-1\pm\sqrt{2}$. Milles on viga?

V PEATÜKK

MATEMAATILISED MEELELAHUTUSED

LÕBUSAD KÜSIMUSED JA ÜLESANDED

369. Toa igas neljas nurgas istub kass. Iga kassi vastas istub kolm kassi. Mitu kassi on kokku selles toas?

370. Puuris on kolm küülikut. Kõik kolm tüdrukut palusid endale ühe küüliku. Tüdrukute palve täideti, igaühele anti küülik. Ja ometi jäi puuri üks küülik. Kuidas võis nii juhtuda?

371. Kaks isa ja kaks poega jaotasid omavahel kolm apelsini nii, et igaüks sai ühe apelsini. Kuidas võis see juhtuda?

372. Isal on kuus poega. Igal pojal on õde. Mitu last on isal?

373. Kaks läksid — viis seent leidsid. Neli lähevad — kas palju leiavad?

374. Üks viienda klassi õpilane kirjutas endast nii: «Sõrmi-varbaid on mul kakskümmend viis ühel käel, sama palju teisel, jalgadel aga 10.» Kuidas see nii on?

375. Kujutle, et oled masinist Kiievist Leningradi sõitvas reisirongis. Rongi koosseisus on kokku 13 vagunit. Rongi teenindab brigaad, milles on 30 inimest. Rongi ülem on 46 aastat vana. Kütja on masinistist 3 aastat vanem. Kui vana on rongi masinist?

376. Moskvast väljus Kirovisse reisirong kiirusega $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Samal ajal saadeti Kirovist esimesele rongile vastu

kiirrong, mille kiirus oli 60 $\frac{km}{h}$. Kumb rongidest on nende kohtumise momendil Moskvast kaugemal?

377. Lendas kari parte. Üks ees ja kaks järel, üks järel ja kaks ees, üks kahe vahel ja kolm reas. Mitu parti lendas?

378. Õmblustöökojas lõigati iga päev, alates 1. märtsist, 200-meetrise kalevikanga otsast 20 meetrit. Millal lõigati viimane tükk?

379. Kaks saagijat peavad saagima $5\frac{1}{2}$ m pikkuse palgi poolemeetristeks tükkideks. Mitu minutit nad seda teevad, kui palgi risti läbisaagimine kestab iga kord $2\frac{1}{2}$ minutit?

380. Röövik roomab maapinnalt 1 m pikkusele taime varrele. Päeval ta ronib ülespoole 3 dm, öösel aga libiseb allapoole 2 dm. Mitme ööpäeva pärast jõuab röövik taime latva?

381. Ühe kirjaniku kogutud teoste kaks köidet seisavad raamatukapis samal riiulil. Esimene köide asetseb teisest vasakul, selle kõrval. Esimeses köites on 230 lehekülge, teises 325 lehekülge. Mitu lehekülge on kokku esimese köite esimese lehekülje ja teise köite viimase lehekülje vahel?

382. Õpilased rivistusid kehalise kasvatuse tunnis vahekaugustega üks meeter. Rivi kogupikkus oli 25 m. Mitu õpilast oli?

383. Pioneerid Vasja ja Kolja elavad mitmekorruselises majas — Vasja teisel, Kolja aga neljandal korrusel. Mitu korda on Kolja korteri põrand kõrgemal maapinnast, kui Vasja korteri põrand (esimene korrus algab maapinnalt ning kõigi korruste kõrgused on ühesugused)?

384. Koljal ja Manjal oli ühepalju vihikuid. Kolja andis kaks oma vihikut Manjale. Mitme võrra oli nüüd Manjal vihikuid rohkem kui Koljal?

385. Köidetud raamat maksab 64 kop. Kui palju maksab raamatu köide, kui on teada, et raamat ise on oma köitest kallim 60 kop. võrra?

386. Jõe voolu kiirus on $2\,\frac{km}{h}$. Kui palju on kaatri liikumiskiirus pärivoolu suurem kui vastuvoolu kaatri jääva kiiruse juures?

387. Kahes klassis on 70 õpilast. Ühes klassis on 5 õpilast rohkem kui teises. Mitu õpilast on kummaski klassis?

388. Arvu suurendati 25% võrra. Mitme protsendi võrra on vaja vähendada seda suurendatud arvu, et saada esialgne arv?

389. Mingit arvu vähendati 25% võrra. Mitme protsendi võrra on vaja saadud arvu suurendada, et saada esialgne arv?

390. Vanemal vennal on 25% võrra rohkem raha kui nooremal. Mitu protsenti oma rahast peab andma vanem nooremale, et neil oleks raha ühepalju?

391. Leiutajad tegid töökoja tööks vajaliku elektrienergia säästmiseks kolm ettepanekut. Üks neist ettepanekuist annab 30% kokkuhoidu, teine 50%, kolmas aga 20%. Otsustati realiseerida kõik kolm ettepanekut. Võib mõelda, et töökoda ei vajagi enam elektrienergiat. Kas see on nii?

392. Kaks mullatöölist kaevavad 2 tunniga 2 m kraavi. Mitu mullatöölist on vaja, et nad kaevaksid 100 töötunniga 100 m samasugust kraavi?

393. Kui pika ajaga läbiks 0,5 km pikkune rong, sõites kiirusega 60 $\frac{km}{h}$, 0,5 km pikkuse tunneli?

394. On hästi teada, et viis ruudus on 25, kümme ruudus on 100, pool ruudus on $\frac{1}{4}$, kolmandik ruudus on $\frac{1}{9}$. Millega aga võrdub nurk ruudus?

395. Arvu 666 on vaja suurendada poolteisekordseks, teostamata temaga mingeid aritmeetilisi tehteid. Kuidas seda teha?

396. Poolita arv 188 nii, et tulemuseks oleks 1.

397. On vaja jagada poolsada poolega. Kui palju see on?

398. Mitu kümnelist saab, kui korrutada kaks kümnelist kahe kümnelisega?

399. Milline märk tuleb panna 0 ja 1 vahele, et saada arv, mis oleks suurem kui 0, ent väiksem kui 1?

400. Mitu tahku on kuuetahulisel teritamata pliiatsil?

401. Kas võib ringi sektor olla segmendiks?

402. Kas on olemas jooni (ringjoonest erinevaid), mille kõik punktid asetsevad ühesugusel kaugusel ühest punktist?

403. Missuguse eseme kontuur kujutub ühesuguselt, ükskõik milliselt kohalt vaadatuna teda joonistada?

MATEMAATIKA-ALANE VIKTORIIN

Matemaatika-alase viktoriini küsimusi ja ülesandeid tuleb võtta ka selle raamatu teistest osadest.

404. Arbuus maksab 10 kop. ja veel pool arbuusi. Kui palju maksab arbuus?

405. Mis on praegu kell, kui ööpäeva ülejäänud osa on möödunust 2 korda pikem?

406. On 9 kG kruupe ning vihid 50 G ja 200 G. Kuidas välja kaaluda kausskaaludel kolme võttega 2 kG kruupe?

407. 6 kalurit sõid 6 päevaga 6 koha. Mitme päevaga söövad 10 kalurit 10 koha?

408. Pool on kolmandik arvust. Milline on arv?

409. Klassis on 36 õpilast. Poisse on 3 võrra rohkem kui tüdrukuid. Mitu tüdrukut ja mitu poissi on klassis?

410. Mitu korda on vaja liita suurimale ühekohalisele arvule suurimat kahekohalist arvu, et saada suurim kolmekohaline arv?

411. Mitme võrra on esimese saja kõigi paarisarvude summa suurem tema kõigi paaritute arvude summast?

412. Leida suurima ühe-, kahe-, kolme- ja neljakohalise arvu summa.

413. Arvutada: $5+10+15+20+25+\ldots+100$.

414. Arvutada (võimalikult lihtsalt): $a^2-69a+130$, kui $a=70$.

415. Mitme nulliga lõpeb arv, mis väljendub korrutisena $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot14\cdot15$?

416. Arvutada 1) $2^{2^{2^2}}$; 2) $[(2^2)^2]^2$; 3) $1^{3^{3^3}}$.

417. Kas on võimalik näidata väikseimat (positiivset) murdarvu?

418. Milline arv jagub kõigi arvudega (jäägita)?

419. Millisel juhul võrdub kahe arvu korrutis korrutatavaga?

420. Millal võrdub jagatis jagatavaga?

421. Millal võrdub kahe arvu summa nende vahega?

422. Millal võrdub kahe arvu korrutis nende jagatisega?

423. Millega võrdub kahe arvu suurim ühisjagaja, kui nende arvude väikseim ühiskordne on võrdne nende korrutisega?

424. Kuidas kirjutada 1000 kaheksa kaheksa ja summa märkide abil?

425. Pool arvust 12 osutus võrdseks 7-ga. Kuidas võis see juhtuda?

426. Kaks kolhoosnikut läksid linna ja kohtasid teel veel viit kolhoosnikut. Mitu kolhoosnikut kokku läks linna?

427. (Mõtle loogiliselt!) Põles 5 küünalt. Kaks neist kustutati. Mitu küünalt jääb järele?

428. (Mõtle loogiliselt!) Mis on kallim: kilogramm kümnekopikalisi või pool kilogrammi kahekümnekopikalisi münte?

429. (Mõtle loogiliselt!) Lendasid pardid. Kokku oli neid 5. Üks tapeti. Mitu jäi järele?

430. (Mõtle loogiliselt!) Nurka 1° vaadatakse luubiga, mis annab neljakordse suurenduse. Kui suur paistab nurk?

431. Kes esimesena võttis kasutusele kümnendmurrud?

432. Milline on kõigi kahekohaliste paaritute arvude korrutise viimane number?

433. Kes tegi ettepaneku kasutada koma matemaatilise märgina?

434. Kes soovitas tähistada ringjoone pikkuse ja diameetri suhet tähega π (pii)?

435. Kes esitas korrutamise ja jagamise märgid (·), (:)?

436. Millal võeti meie maal meetermõõdustik kohustuslikule kasutamisele?

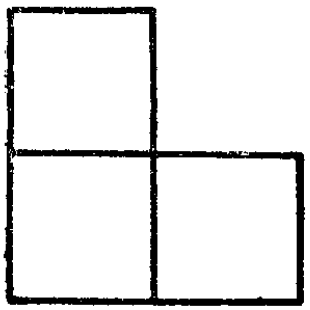
437. Milliste ilukirjanduslike teoste pealkirjad algavad arvudega 3, 20, 80 000, 12?

438. Milline vene kirjanik lõpetas füüsika-matemaatika teaduskonna?

439. Kas saab lõigata isekülgse kolmnurga kaheks võrdseks kolmnurgaks?

440. Millise kolmnurga kõrgused lõikuvad tema ühes tipus?

441. On vaja tõmmata sirge nii, et see lõikaks kolmnurga kõiki külgi. Kuidas seda teha?



Joon. 54

442. Kuidas jaotada kujund (joon. 54) kuueks võrdseks kolmnurgaks, pliiatsit paberilt võtmata?

MEELELAHUTUSED

443. *Mõistata mõeldud arv.* Tee oma sõbrale ettepanek mõelda mingi kolmekohaline arv ja kirjutada sellele juurde täpselt samasugune arv. Saadud kuuekohalist arvu palu korrutada 2-ga, tulemust jagada algul 7-ga, siis seda, mis välja tuleb, 11-ga, lõpuks 13-ga. Kui sõber ütleb, et jagamine jäägita ei tule välja, teata talle veendunult, et ta eksis, ning käsi

leida viga. Pärast seda küsi, milline tuli vastus, ja sa ütled kiiresti tema poolt mõeldud arvu, jaganud nimetatud vastuse 2-ga.
Mõtle, miks nii saab.
Selle asemel, et korrutada kuuekohalist arvu 2-ga, võib teda korrutada 3, 5, 10 ja teiste arvudega. Siis tuleb mõeldud arvu saamiseks jagada sõbra poolt nimetatud arv vastavalt 3, 5, 10-ga jne.

444. *Arva ära, kui palju tuleb.* Ütle kaaslastele: «Mõelge igaüks mingi kolmekohaline arv, kuid tingimata niisugune, mille sajaliste number ei võrdu üheliste numbriga ega ole sellest ühe võrra väiksem või suurem. Kirjutage mõeldud arvu ümberpööratud arv, s. o. arv, mis kirjutatakse samade numbritega, kuid vastupidises järjekorras. Neist kahest arvust (mõeldud ja ümberpööratud) võtke suurem ja lahutage sellest väiksem. Kirjutage jälle saadud vahe ümberpööratud arv ning arvutage selle vahe ja tema ümberpööratud arvu summa.»
Kui see kõik on tehtud, palu üht kaaslast liita tema poolt saadud arvuga 100, teist — 200, kolmandat — 300 jne.
Võid igaühele öelda, millise arvu ta sai. Selleks liida iga kord 1089-ga see arv, mille palusid liita lõpuks. Nii, esimene pidi saama 1189, teine 1289 jne.
On veelgi parem, kui kirjutad need arvud aegsasti paberilehtedele, paned lehed ümbrikesse, ümbrikele kirjutad mängust osavõtjate nimed ja lõpuks ulatad neile ümbrikud vastustega.
Püüa ise aru saada, milles siin asi on, ja selgita pärast ka teistele.

445. *Jaguvus 11-ga.* Palu sõpra kirjutada klassitahvlile või paberile mingi mitmekohaline arv. Võid sellele arvule kiiresti juurde kirjutada paremale või vasakule ühe numbri nii, et saadud arv jaguks 11-ga. Näiteks kui sõber kirjutab arvu 43 572, siis on sul vaja kirjutada juurde paremale või vasakule 1. Saadud arv 435 721 jagub 11-ga.
Kas sa tead, milline number tuleb arvule juurde kirjutada, et siis saadud arv jaguks 11-ga? Et mõista seda küsimust, kasuta 11-ga jaguvuse tunnust:

11-ga jaguvad need ja ainult need arvud, mille paaritunumbrilistel kohtadel olevate numbrite summa võrdub paarisnumbrilistel kohtadel olevate numbrite summaga või on sellest suurem ehk väiksem arvu võrra, mis jagub 11-ga.
Enne esinemist selle trikiga harjuta ise, pärast ettekannet aga selgita sõpradele selle «saladust».

446. *Jaguvus 37-ga.* Võid esineda pioneerikoondusel sellise trikiga. Kirjutagu keegi pioneer klassitahvlile mingi kahe- või kolmekohaline arv. Sa võid sellele arvule väga kiiresti juurde kirjutada mõned numbrid nii, et saadud kuuekohaline arv jaguks 37-ga. Kirjutagu pioneer tahvlile näiteks kolmekohaline arv 456. Sul on võimalik sellele arvule vasakule või paremale juurde kirjutada 210 või 543, üldiselt niisugune kolmekohaline arv, et selle arvu ja antud kolmekohalise arvu summa oleks ühesuguste numbritega kirjutatav kolmekohaline arv (antud juhul 666 või 999). Kui antud on kahekohaline arv, tuleb ta esmalt täiendada mingi numbriga kolmekohaliseks. Sedasama võib teha ka neljakohalise arvuga. On vaja ainult paluda kirjutada niisugune neljakohaline arv, mille tuhandeliste ja üheliste summa ei ületaks arvu 9. Olgu antud näiteks arv 5674. Siis tuleb vasakule juurde kirjutada numbrid 3 ja 2. Saadakse arv 325 674. Leia selgitus.

447. *Mõistata mõeldud arv.* L. Magnitski tõi oma raamatus «Aritmeetika» mõeldud kahekohalise arvu mõistatamiseks järgmise võtte: «Kui keegi mõtleb kahekohalise arvu, siis ütle talle, et ta suurendaks selle arvu kümneliste arvu 2 korda, korrutisega liidaks 5 ühelist, saadud summat suurendaks 5 korda ja liidaks uue korrutisega 10 ühelise ning mõeldud arvu üheliste summa, teostatud tehete tulemuse aga teataks sulle. Kui sa näidatud resultaadist lahutad 35, saad teada mõeldud arvu.»
Miks nii tuleb?

448. *Arva ära mõeldud arvu numbrite summa.* Soovita igaühele oma sõpradest mõelda mingi kolmekohaline arv, mille kirjutis ei sisalda ühesuguseid numbreid. Koostagu seepeale igaüks, võttes mõeldud arvu

numbreid kahekaupa, mõeldud arvust kõikvõimalikud kahekohalised arvud (selliseid arve on 6) ning leidku kõigi nende arvude summa. Küsi igalt mängust osavõtjalt, millise summa ta sai. Jaganud selle summa 22-ga, leiad sõbra poolt mõeldud arvu numbrite summa.

Olgu näiteks, et mõeldud arv oli 145. Selle arvu puhul on kõigi kahekohaliste arvude summa 14+ +15+45+41+51+54=220. Kui 220 jagad 22-ga, saad tõesti 10 — mõeldud arvu numbrite summa. Miks nii tuleb?

449. *Mõistata läbikriipsutatud number.* Tuntud aritmeetiline trikk, mis seisneb järgnevas. Soovitatakse kirjutada mingi kolme- või neljakohaline erinevatest numbritest koosnev arv. Mõistataja ei tohi teada, milline arv nimelt kirjutatakse. Arvu kirjutajal on õigus arvu numbreid meelevaldselt ümber paigutada. Tekib kaks arvu: algul kirjutatud ja pärast numbrite ümberpaigutamist saadud arv. Neist arvudest väiksem kästakse lahutada suuremast, läbi kriipsutada saadud vahes üks number ning arvutada ülejäänud numbrite summa. See summa teatatakse mõistatajale ja ta ütleb, milline number kustutati.

Et teada saada mahatõmmatud numbrit, toimib mõistataja nii. Nimetatud numbrite summat täiendab ta lähima suurema arvu 9 kordseni (9, 18, 27, 36 jne.). Täiendav arv annabki kustutatud numbri. Kui summa ise osutub arvu 9 kordseks, siis oli läbi kriipsutatud 0 või 9. Selgita seda trikki.

450. *Kiiresti summeerimine.* Võid hämmastada oma kaaslasi arvude summeerimise kunstiga. Seda saab teha nii. Kirjuta klassitahvlile mingi mitmekohaline arv, näiteks 450 678. Võid kirjutada mistahes arvu, ainult ärgu olgu selle üheliste arv väiksem kui 2. Edasi käsi kellelgi kaaslastest kirjutada selle arvu alla nagu liitmiselgi mingi arv, millel on sama palju numbreid. Seejärel kirjuta ise kolmas liidetav, mille numbrid täiendaksid teise liidetava vastavaid numbreid 9-ni. Kirjutagu seepeale keegi kaaslastest mingi neljas liidetav (sama numbrite arvuga). Viies liidetav kirjuta samuti ise nagu kolmaski.

Saadud viie arvu summa võid kirjutada silmapilkselt. Alusta ühelistest. Neid peab olema 2 võrra vähem kui esimeses arvus. Edasi kirjuta järjest kõik esimese arvu numbrid ning ette pane 2. See on kõik. Tahvlile tekib näiteks niisugune kirjutis:

$$\begin{array}{rr} & 450\,678 \\ & 329\,157 \\ + & 670\,842 \\ & 257\,934 \\ & 742\,065 \\ \hline & 2\,450\,676 \end{array}$$

Lase kaaslastel seda summat kontrollida.
Samuti võib toimida, võttes mitte viis, vaid seitse liidetavat. Sel juhul on ainult summa üheliste arv 3 võrra väiksem esimese liidetava üheliste arvust ja ette tuleb kirjutada mitte 2, vaid 3.
Mitmekesistamiseks võib võtta täisarvude asemel kümnendmurrud. Püüa ise aru saada sellise summeerimise «saladusest» ning selgita seda ka kaaslastele.

451. *Silmapilkselt summeerimine.* Kirjutagu keegi kaaslastest tahvlile näide lahutamise kohta. Vahet pole vaja välja arvutada. See, kes kirjutas esimese näite, või äsja tahvli juurde kutsutu peab kirjutama edasi uue näite lahutamisest nii, et lahutatavaks teises näites oleks esimese näite vähendatav. Arvutada pole samuti vaja. Seepeale kirjutatakse kolmas näide lahutamisest nii, et lahutatav võrduks teise näite vähendatavaga. Järgnevalt võib kirjutada tahvlile suvalise arvu selliseid näiteid lahutamisest. Kuni seda tehakse, ära tahvlile vaata. Niipea kui kõik näited on kirjutatud, pöördu näoga tahvli poole ja silmitse kirjutatud näiteid. Siis võid otsekohe öelda, millega võrdub kõigi tahvlile kiriutatud, kuid väljaarvutamata vahede summa. Selleks pead viimase vahe vähendatavast lahutama esimese vahe lahutatava. Olgu näiteks tahvlile kirjutatud niisugused vahed: 340—80; 450—340; 620—450; 680—620; 700—680; 825—700; 900—825. Kõigi nende vahede summa on 900—80, s. t. 820. Kaaslased kontrolligu

sind, arvutades iga vahe ja siis nende summa. Muidugi võib kirjutada vahed mitte ainult täisarvudes, vaid ka harilikes ning kümnendmurdudes, samuti ratsionaalarvudes (positiivsetes ja negatiivsetes arvudes). Miks on see võimalik? Analüüsi ise ja selgita kaaslastele.

452. *Veel üks huvitav summeerimine.* Lõika kartongist 6 ühesugust riba ja jaota neist igaüks kriipsudega 6 võrdseks osaks. Kirjuta ribadele arvud:

esimesele — 345, 246, 741, 444, 642, 543;
teisele — 125, 422, 323, 620, 224, 521;
kolmandale — 900, 405, 504, 108, 702, 306;
neljandale — 238, 436, 535, 733, 832, 634;
viiendale — 136, 235, 730, 532, 433, 631;
kuuendale — 484, 286, 880, 583, 682, 187.

Kui sul on sellised ribad, võid hämmastada klassikaaslasi, summeerides kiiresti ribadele kirjutatud arvude veerge. Pane valmistatud ribad lauale nii, et nad oleksid kõrvuti. Kas ribade otsad on ühel sirgel, pole tähtis. Asetsegu näiteks ribad nii, nagu on näidatud joonisel 55. Täielikke veerge on 3. Võid kergesti leida iga sellise veeru kuue arvu summa. Toimi nii. Leia nende arvude üheliste summa. Saad otsitava summa kümneliste ja üheliste arvu. Et saada tuhandeliste ja sajaliste arvu, tuleb 50-st lahutada veeru üheliste arv. Nii on kolmanda täieliku veeru arvude summa 3020 (sest 1+2+5+6+

125	422	323	620	224	521			
	345	246	741	444	642	543		
			238	436	535	733	832	634
900	405	504	108	702	306			
		484	286	880	583	682	187	
	136	235	730	532	433	631		

Joon. 55

+3+3=20, 50−20=30), aga teise veeru arvude summa 3218 (sest 4+4+6+2+0+2=18, 50−18=32).
Püüa iseseisvalt mõista, miks nii tuleb.

453. *Hämmastav mälu.* Kirjuta aegsasti klassitahvlile või paberilehele 30—50 mitmekohalist arvu, võib ka rohkem olla. Üleskirjutamisel nummerda arvud. Arvud kirjuta nii, et arvu numbriga liida 9 ja leia saadud arvu ümberpööratud arv. See on miljoniliste arv. Edasi arvuta saadud miljoniliste arvu numbrite summa. Selle summa üheliste arv (ainult üheliste) annab sajatuhandeliste arvu. Et leida kümnetuhandeliste arvu, arvuta kahe viimase numbri (s. o. miljoniliste ja sajatuhandeliste) summa ning võta jälle ainult selle summa ühelised jne. Olgu mõned niisugused näited, mida kirjutad: nr. 5 — 41 561 785; nr. 11 — 2 246 066; nr. 16 — 52 796 516. Selle kõik ette valmistanud, võid klassikaaslasi hämmastada suurepärase mäluga. Pöördu tahvli juurest kõrvale ja ütle kohalviibijaile, et pidasid meeles kõik need arvud. Sind ei usuta. Siis soovita neil kontrollida sinu mälu. Öelgu keegi sulle arvu number. Teostades tehteid peast, loed arve nagu meenutades, pikkamisi. Tee seda nii. Olgu arvu number 32. Siis arvuta vaikides: 32+9=41; ümberpööratud arv on 14, ja ütle:

14 miljonit,
1+4=5 — viissada,
4+5=9 — üheksakümmend,
5+9=14; 4 — neli tuhat,
9+4=13; 3 — kolmsada,
4+3=7 — seitsekümmend,
7+3=10; 0 ühelist.

454. *Mõistata vanus ja sünnipäev.* Luba sõpradele, et sa mõistatad igaühe vanuse ja sünnipäeva. Selleks lase neil teha järgmised arvutused. Igaühe sünnikuu järjekorranumber korrutada 100-ga ja saadud korrutisega liita sünnikuupäeva number. Siis saadud summa korrutada 2-ga ning tulemusega liita 8. Resultaat korrutada 5-ga, korrutisega liita 4 ja saadud summa korrutada 10-ga, siis liita tulemusega 4 võrra suurendatud vanus täisaastates. Kirjutagu iga-

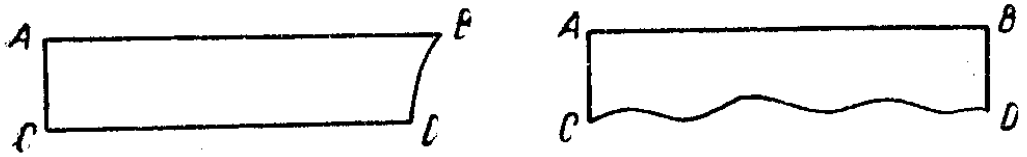
üks, kes teostas kõik arvutused, oma perekonnanime ja saadud arvu paberilehele ning andku leht sulle. Saanud lehe, võid öelda igaühele tema vanuse ja sünnipäeva. Toimi nii: saadud arvust lahuta iga kord 444 ja jaota vahe rühmadeks paremalt vasakule, kaks numbrit igaühes. Siis esimene rühm paremalt vasakule annab vanuse, teine — kuupäeva, ja kolmas — sünnikuu järjekorranumbri.
Püüa aru saada selle etteaste «saladusest» ja selgita siis sõpradele.

455. *Mõistata mõeldud arv.* Valmista seitse kaardikest. Esimesele neist kirjuta kõik paaritud arvud 1 kuni 100, s. t. 1, 3, 5, 7, 9 jne. kuni 99.
Teisele kaardile kirjuta arvud: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, ..., 98, 99.
Kolmandale kaardile kirjuta arvud: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, ..., 92, 93, 94.
Neljandale kaardile kirjuta arvud: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, ..., 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.
Viiendale kaardile kirjuta esmalt 16 järjestikust naturaalarvu alates 16-st, järgmised 16 järjestikust arvu alates 32-st jäta kirjutamata, siis kirjuta uuesti 16 arvu alates 48-st jne.
Kuuendale kaardile kirjuta esmalt 32 järjestikust naturaalarvu alates 32-st, järgmised 32 arvu jäta kirjutamata, ja lõpuks kirjuta arvud 96 kuni 100.
Viimasele kaardikesele kirjuta kõik naturaalarvud 64 kuni 100.
Anna kaaslasele 7 valmistatud kaardikest. Mõelgu ta mingi arv 1 kuni 100 ning võtku välja kaardikesed, millele see arv on kirjutatud. Heites vaid pilgu nendele kaardikestele, võid mõistatada mõeldud arvu. Selleks tuleb leida väljavalitud kaardikestele kirjutatud esimeste arvude summa. Püüa aru saada, miks nii juhtub.

456. *Meeldiv number.* Küsi sõpradelt, milline number kellelegi meeldib. Öelgu keegi number 4. Soovita tal 4 korrutada 9-ga, siis aga saadud korrutis korrutada arvuga 12 345 679. Tulemuseks saab ta arvu 444 444 444, s. t. arvu, mis kirjutatakse temale meeldiva numbri abil. Kui keegi ütleb, et talle meeldib 8,

siis soovita 8 korrutada 9-ga, siis aga korrutada arv 12 345 679 saadud korrutisega 72. Ta saab arvu, mis kirjutatakse samuti ainult temale meeldiva numbriga 8. Kui aga keegi ütleb, et temale meeldib 0, siis vasta, et 0 on muidugi tähtis number, kuid sulle isiklikult ta ei meeldi, ja palu nimetada teine number.
Püüa ise ära mõistatada selle etteaste «saladus» ning selgita seda ka sõpradele.

457. *Kõvera võrdlemine sirgega.* Selle numbri esitamiseks valmista ette kaks puuplaadikest (joon. 56), pabeririba ja mõõtejoonlaud.

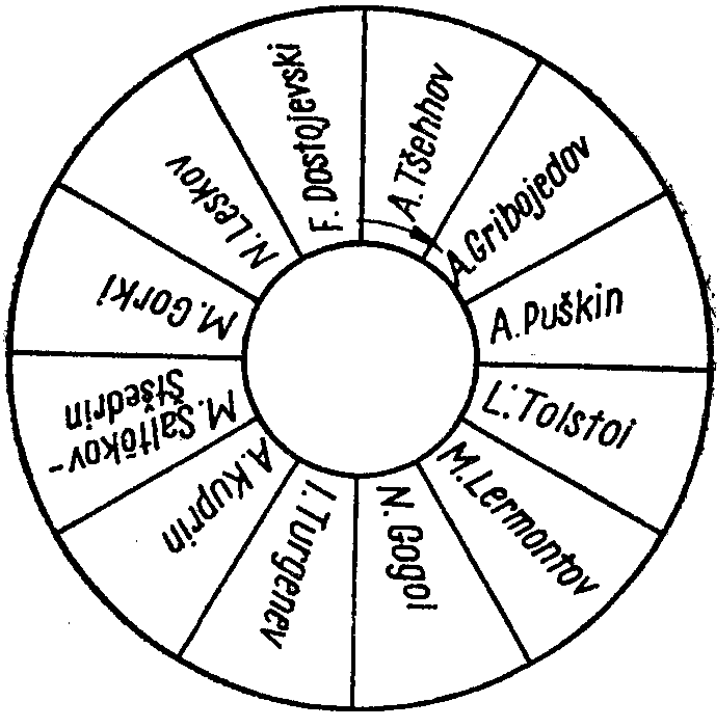


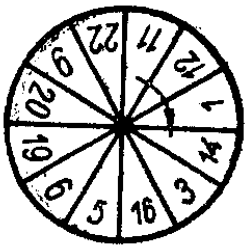
Joon. 56

Võta esimene plaadike ja palu võrrelda silma järgi tema kaht sirgjoonelist külge. Esita küsimus: mitme sentimeetri võrra on *AB* pikem kui *CD*? Vastused kirjuta tahvlile, siis aga palu võrrelda kellelgi *AB* ja *CD* pikkusi mõõtejoonlaua abil. Tavaliselt võrreldakse kahe sirglõigu pikkusi silma järgi üsna täpselt. Pärast seda näita teist plaadikest ja küsi, mitme sentimeetri võrra on sirgjooneline külg *AB* lühem kõverjoonelisest küljest *CD*. Harilikult ei ole õigeid vastuseid, vead on küllalt suured. Näita seda, kasutades pabeririba ja mõõtejoonlauda.

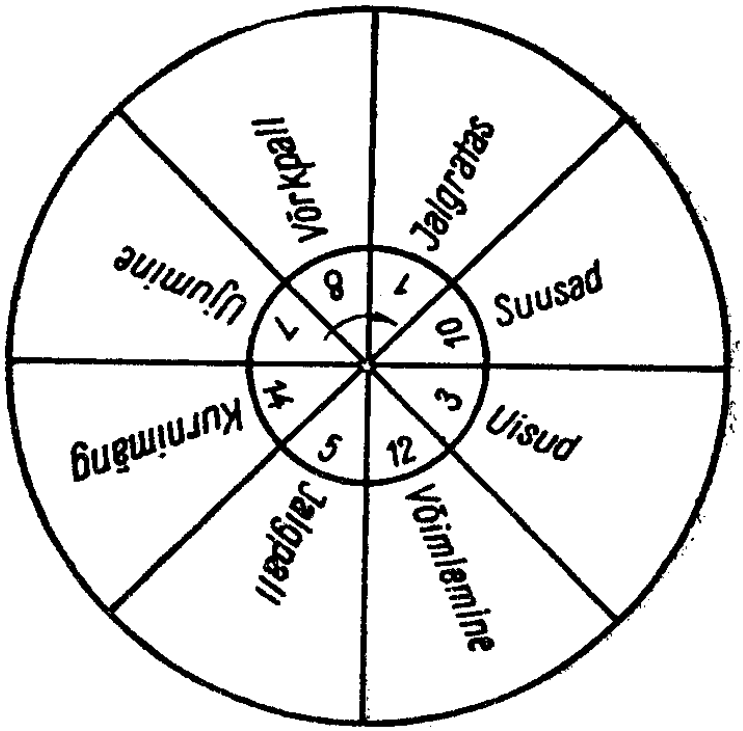
458. *Hämmastavad pinnad.* Võta paberilint ja liimi selle otsad kokku. Näita kaaslastele, mis saab. Küsi neilt: kas võib värvida seda pinda nii, et üks külg oleks näiteks punane, teine aga sinine? Kas võib kärbes ronida ühelt küljelt teisele serva ületamata? Mis saab, kui see pind läbi lõigata mööda keskjoont? Kõik need küsimused ei tekita kaaslastele raskusi.
Seepeale võta samasugune lint, keera tema üht otsa 180° ja liimi jälle kokku. Näita saadud pinda kaaslastele. Esita täpselt samu küsimusi nagu varem, siis aga näita enamiku vastuste ekslikkust. Sel

juhul saadud pinda nimetatakse Möbiuse leheks. Sellel pinnal on ainult üks külg. Kärbes, istudes sellisel lindil, võib ronida tema igast punktist teise, serva ületamata. Servi on sel lindil mitte kaks, vaid üks. Kogu selle pinna võib katkestamatult värvida ühe värviga. Kui lint mööda keskjoont läbi lõigata, ei jagune ta kaheks osaks, vaid tekib üks lint (juba kaheküljeline). Lõpuks võta samasugune lint ja enne kokkuliimimist keera tema üht otsa 360° võrra. Tekib samuti kaheküljeline pind. Kui see läbi





Joon. 57



Joon. 58

lõigata mööda keskjoont, jaguneb ta kaheks kinniseks teineteisega seotud lindiks.

459. *Mõistata.* Tee kartongist kaks ringi, nagu on näidatud joonisel 57. Suurema ringi raadius olgu 20 cm, väiksemal 8 cm.

Aseta väiksem ring suuremale ja liida nad nii, et väiksem võiks pöörelda nende ühise keskpunkti ümber. Nende kahe liidetud ringi abil võid mõistatada, millisest kirjanikust sinu sõber mõtleb.

See toimub nõnda. Sõber peab mõtlema ühest kirjanikust, kelle perekonnanimi on kirjutatud suure ringi sektorile, siis peab ta vaatama, milline arv seisab selle perekonnanime vastas väiksemal ringil, ja pöörama väiksemat ringi noolega näidatud suunas nii mitme jaotuse (osasektori) võrra, kui suur on see arv. Millises asendis on algul väiksem ring, pole oluline. Sul pole samuti vaja teada, mitme jaotuse võrra pöörab sõber väiksemat ringi.

Et mõistatada mõeldud kirjanikku, piisab vaatamisest, millise asendi võtab väiksem ring. Mõeldud kirjaniku perekonnanime vastas seisab alati arv 12. Püüa lahendada nende imepäraste ringide «saladus». Siin on veel üks «võluringide» variant (joon. 58). Nende abil võid teada saada, milline spordiala sinu sõbrale meeldib.

VI PEATÜKK

TUTVU, TEE, ÕPI KASUTAMA

Teooria ilma praktikata on surnud, viljatu; praktika ilma teooriata võimatu, kahjulik. Teooria jaoks on vaja esmajoones teadmisi, praktika jaoks aga ka oskusi...

A. Krõlov

ÕPI KASUTAMA RUUTJUURTE TABELEID [27]

Praktilisel arvutamisel tuleb väga sageli kasutada mitmesuguseid tabeleid. Näiteks kasutatakse arvude korrutamise ja jagamise, protsentarvutuse, pöördarvude, arvude ruutude ning kuupide, ruut- ja kuupjuurte, ringjoonte pikkuste, ringide pindalade, trigonomeetriliste suuruste jne. tabeleid. Selliste tabelite rakendamine oluliselt kiirendab, lihtsustab ja kergendab arvutaja tööd, tabelite oskuslik kasutamine viib aga arvutusvigade tunduva vähenemiseni. Ka sul tuleb visalt õppida tabelite kasutamist. Siin on näiteks ruutjuurte tabel (lk. 109).

Arvude ruutjuuri tuleb võtta algebraliste avaldiste arvuliste väärtuste leidmisel, võrrandite lahendamisel, mitmesuguste geomeetriaülesannete puhul, füüsika tundides jne. Kasutada iga kord ruutjuure võtmise tuntud juhist on väsitav ning selleks kulub palju aega. Siin tuleb appi ruutjuurte tabel, mis on väga lihtne. Temas on üldse ainult kaks tulpa — arvude tulp ja nende ruutjuurte tulp, arvutatud täpsusega kuni 0,0005. Arv, millest on vaja leida ruutjuurt, võetakse esimesest tulbast, selle kõrval teises tulbas aga on otsitav ruutjuur.

---

[27] VIII klassi õpilastele.

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
0,1	0,316	4,1	2,025	8,1	2,846	21	4,583	61	7,810
0,2	0,447	4,2	2,049	8,2	2,864	22	4,690	62	7,874
0,3	0,548	4,3	2,074	8,3	2,881	23	4,796	63	7,937
0,4	0,632	4,4	2,098	8,4	2,898	24	4,899	64	8,000
0,5	0,707	4,5	2,121	8,5	2,915	25	5,000	65	8,062
0,6	0,775	4,6	2,148	8,6	2,933	26	5,099	66	8,124
0,7	0,837	4,7	2,168	8,7	2,950	27	5,196	67	8,185
0,8	0,894	4,8	2,191	8,8	2,966	28	5,292	68	8,246
0,9	0,949	4,9	2,214	8,9	2,983	29	5,385	69	8.307
1,0	1,000	5,0	2,236	9,0	3,000	30	5,477	70	8,367
1,1	1,049	5,1	2,258	9,1	3,017	31	5,568	71	8,426
1,2	1,095	5,2	2,280	9,2	3,033	32	5,657	72	8,485
1,3	1,140	5,3	2,302	9,3	3,050	33	5,745	73	8,544
1,4	1,183	5,4	2,324	9,4	3,066	34	5,831	74	8,602
1,5	1,225	5,5	2,345	9,5	3,082	35	5,916	75	8,660
1,6	1,265	5,6	2,366	9,6	3,098	36	6,000	76	8,718
1,7	1,304	5,7	2,387	9,7	3,114	37	6,083	77	8,775
1,8	1,342	5,8	2,408	9,8	3,130	38	6,164	78	8,832
1,9	1,378	5,9	2,429	9,9	3,146	39	6,245	79	8,888
2,0	1,414	6,0	2,449	10,0	3,162	40	6,325	80	8,944
2,1	1,449	6,1	2,470	10,1	3,178	41	6,403	81	9,000
2,2	1,483	6,2	2,490	10,2	3,194	42	6,481	82	9,055
2,3	1,517	6,3	2,510	10,3	3,209	43	6,557	83	9,110
2,4	1,549	6,4	2,530	10,4	3,225	44	6,633	84	9,165
2,5	1,581	6,5	2,550	10,5	3,240	45	6,708	85	9,220
2,6	1,612	6,6	2,569	10,6	3,256	46	6,782	86	9,274
2,7	1,643	6,7	2,588	10,7	3,271	47	6,856	87	9,327
2,8	1,673	6,8	2,608	10,8	3,286	48	6,928	88	9,381
2,9	1,703	6,9	2,627	10,9	3,302	49	7,000	89	9,434
3,0	1,732	7,0	2,646	11,0	3,317	50	7,071	90	9,487
3,1	1,761	7,1	2,665	11	3,317	51	7,141	91	9,539
3,2	1,789	7,2	2,683	12	3,464	52	7,211	92	9,592
3,3	1,817	7,3	2,702	13	3,606	53	7,280	93	9,644
3,4	1,844	7,4	2,720	14	3,742	54	7,348	94	9,695
3,5	1,871	7,5	2,739	15	3,873	55	7,416	95	9,747
3,6	1,897	7,6	2,757	16	4,000	56	7,483	96	9,798
3,7	1,924	7,7	2,775	17	4,123	57	7,550	97	9,849
3,8	1,949	7,8	2,793	18	4,243	58	7,616	98	9,899
3,9	1,975	7,9	2,811	19	4,359	59	7,681	99	9,950
4,0	2,000	8,0	2,828	20	4,472	60	7,746	100	10,000

Võib juhtuda, et selle tabeli esimeses tulbas puudub arv, millest on tarvis võtta ruutjuurt. Olgu näiteks vaja leida $\sqrt{7{,}64}$. Sel juhul võib toimida nii. Tabeli abil leiame:

$$\sqrt{7{,}6}=2{,}757$$

$$\sqrt{7{,}7}=2{,}775$$

On näha, et arvu suurendamisel 0,1 võrra suurenes tema ruutjuur 0,018 võrra. Võib ligikaudselt arvutada ruutjuure suurenemise võrdeliselt arvu suurenemisega (mida see tähendab graafiliselt?). Seepärast arvu suurendamisel 0,01 võrra suureneb juur $0{,}018 : 10 = 0{,}0018$ võrra, arvu suurenemisel aga 0,04 võrra suureneb juur $0{,}0018 \cdot 4 = 0{,}0072$ ehk ümmarguselt 0,007 võrra. Tähendab, $\sqrt{7{,}64}$ võib lugeda võrdseks $2{,}757 + 0{,}007$, s. t. 2,764-ga.

Ruutjuure võtmisel arvudest, mis on suuremad kui 100, on hõlpus kasutada valemit $\sqrt{n}=10\sqrt{\frac{n}{100}}$, ruutjuurte leidmisel aga arvudest, mis on väiksemad kui 1, valemit $\sqrt{n}=\frac{1}{10}\sqrt{100n}$.

Harjuta selle tabeli kasutamist.

Mõtle, kas ei võiks tabelit kasutada ka arvude ligikaudsel ruututõstmisel.

«ARVUTAV JOONIS»

Selle raamatu lisas 1 on antud nomogramm («arvutav joonis») protsentarvutusteks. Liimi see kartongile. Kasutades seda nomogrammi, võid arvutusi sooritamata lahendada piisava täpsusega mitmesuguseid ülesandeid protsentidest.

a) Olgu vaja leida 3% 825-st. Leia horisontaalteljelt OA punkt 825 ja pane tähele temale vastava vertikaali ning sirge $p=3$ lõikepunkti. Liigu mööda horisontaalsirget, mis läbib seda punkti, ja loe vertikaalteljelt Oa vastav arv. See on ligikaudu 24,5.

b) Olgu vaja leida arv, kui 6% sellest on 42. Selle ülesande lahendamisel tuleb toimida vastupidiselt. Teljelt Oa on vaja leida punkt 42 ja tähele panna vastava horisontaali ning sirge $p=6$ lõikepunkti. Sellest punktist tuleb liikuda mööda vertikaali teljeni OA ja sealt lugeda vastus. See on ligikaudu 696.

c) Nõutakse leida arvu 35 protsentsuhe arvusse 437. Selleks on vaja leida punkt, mille puhul $a=35$ ja $A=437$, siis aga määrata, milline kaldsirge (millise arvu p korral) läbib seda punkti. Saadakse $p=8$.

PROTSENTMALL

Sektordiagrammide ehitamiseks on sobiv kasutada protsentmalli. Seda pole raske valmistada. Lõika tugevast paberist tavalise (kraad-) malli kujuline mall. Jääb kanda poolringjoonele protsendijaotused. Selleks tuleb jaotada poolringjoon 50-ks võrdseks osaks. Üks protsendijaotus peab sisaldama 3°,6 (sest 360 : 100 = 3,6), viis protsendijaotust 18°, kümme protsendijaotust 36°.

Kasutades protsentmalli, joonesta sektordiagramm järgmiste andmete põhjal:

Maailmajagude pindalad

(milj. km²)

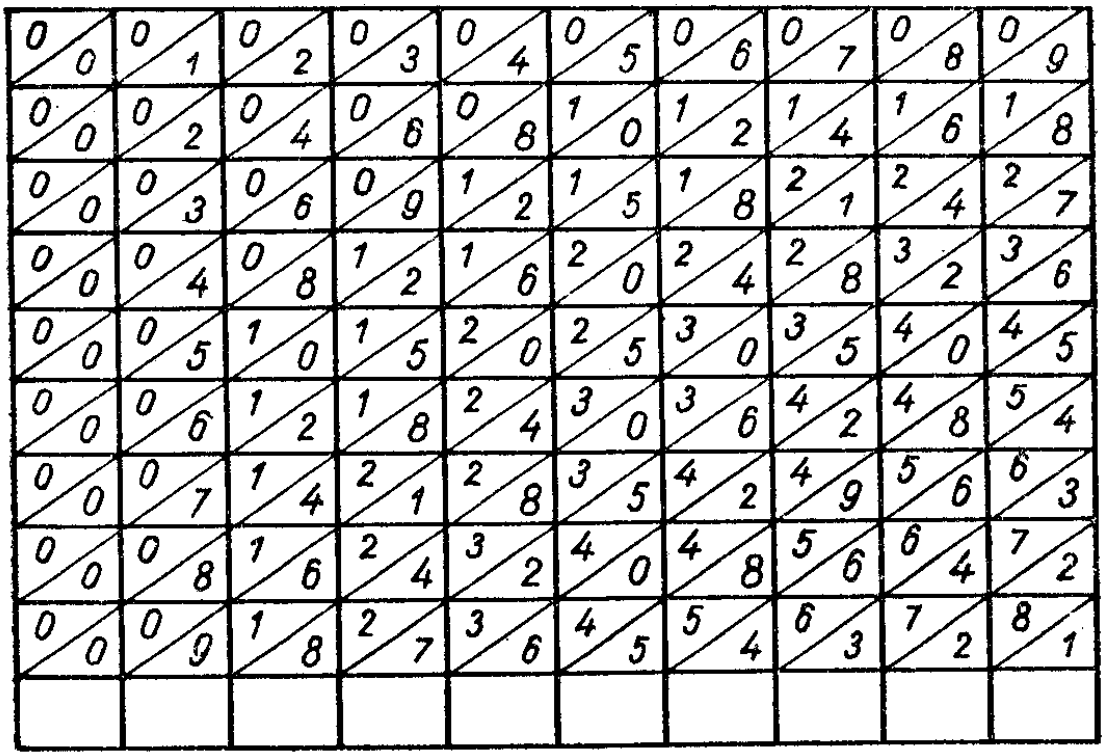
Euroopa	10,0
Aasia	43,5
Ameerika	42,5
Aafrika	30,0
Austraalia ja Okeaania	9,0
Antarktis	14,0

Eelnevalt avalda maailmajagude pindalad kogu maismaa pindalast protsentides.

NAPIERI PULGAD

Võid valmistada lihtsa arvutusvahendi, mis kannab nimetust Napieri pulgad. See vahend oli kunagi kuulus. Tollest ajast alates on leiutatud uued, märksa täiuslikumad arvutusvahendid (aritmomeeter, logaritmiline arvutuslükati, mitmesugused arvutusmasinad). Ja siiski on kasulik tutvuda selle vahendiga ning õppida seda rakendama.

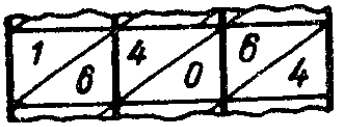
Napieri pulki kasutatakse arvude korrutamiseks. Nad valmistatakse väga lihtsalt. Lõika kartongist või tugevast paberist 20 või 30 riba pikkusega 1 dm ja laiusega 1,5 cm. Lineeri 10 riba ja kirjuta neile numbrid nii, nagu

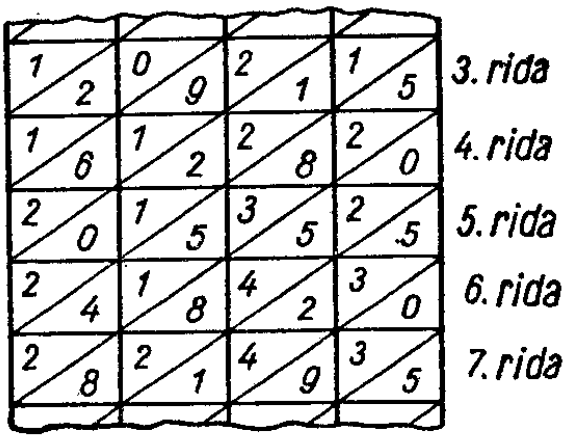


Joon. 59

Joon. 60

Joon. 61





on näidatud joonisel 59.[28] Tee veel 10 või 20 samasugust riba. See on kõik.

Kuidas kasutada Napieri pulki?

Olgu näiteks vaja arvutada korrutis 258 · 8. Võtame ribad ülemiste numbritega 2, 5 ja 8 ning paneme nad kõrvuti (joon. 60). Kaheksandast reast (ülalt loendades) loeme korrutise (paremalt vasakule): ühelisi 4, kümnelisi 0+6=6, sajalisi 6+4=10, s. o. 0 sajalist ja 1 tuhandeline, tuhandelisi 1+1=2 (summad võetakse mööda «diagonaale»). Seega korrutis on 2064.

Olgu veel näide 3027 · 5. Võtnud 4 riba ülemiste

[28] Arutle, kuidas saadakse ribadele kirjutatavad numbrid.

numbritega 3, 0, 2 ja 7 ning asetanud nad kõrvuti, loeme korrutise viiendast reast ülalt: ühelisi 5, kümnelisi 0+3, sajalisi 0+1, tuhandelisi 5+0, kümnetuhandelisi 1. Saame 15 135.

Napieri pulki võib kasutada ka kahe mitmekohalise arvu korrutamisel. Olgu vaja arvutada korrutis $4375 \cdot 347$. Paigutame kõrvuti 4 riba ülemiste numbritega 4, 3, 7 ja 5 (joon. 61).

Loeme arvude 4375 ja 7 korrutise. Saame 30 625. Edasi korrutame 4375 ja 4 kümnelist. Saame 17 500 kümnelist. Leiame veel 4375 ja 3 sajalise korrutise. Saame 13 125 sajalist. Jääb leida saadud korrutiste summa:

$$\begin{array}{r} 30\,625 \\ +\ 175\,000 \\ 1\,312\,500 \\ \hline 1\,518\,125 \end{array}$$

Summeerida on muidugi hõlpsam arvelaual.

ARITMEETILINE ARVUTUSLÜKATI

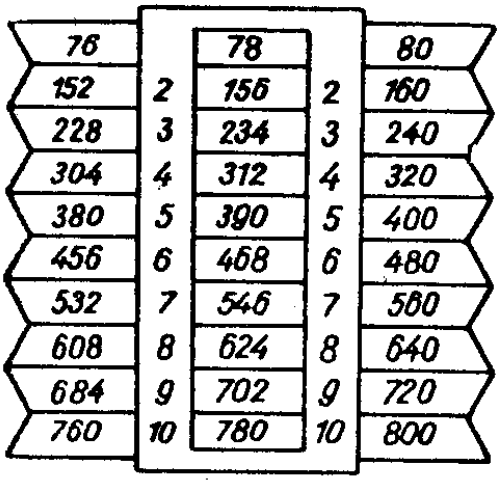
Aritmeetilist arvutuslükatit kasutatakse mitmekohaliste arvude korrutamiseks ja jagamiseks. Teda saab kasutada ka kümnendmurdude korrutamiseks ja jagamiseks ning protsentarvutusteks.

Sellist lükatit on lihtne valmistada. Raamatu lisas 2 on antud kaks arvskaalat, mida on võimalik kasutada. Need skaalad tuleb liimida tugeva kartongiriba või õhukese puuplaadi kahele küljele. Riba mõõtmed on määratud sellele kleebitavate arvskaalade mõõtmetega. Kui lükati valmistamiseks kasutatakse kartongi, tuleb selle servad kuni pealeliimitud skaaladeni ääristada tugeva värvilise paberi või õhukese riidega.

Veel on vaja teha märkija. Selleks tuleb 26—30 mm laiune kartongiriba klambritaoliselt kokku murda ja kokku liimida nii, et klamber liiguks kergesti nihutamisel mööda lükatit. Jääb teha märkija kummalegi küljele väljalõige nii, et selles oleks näha ainult üks skaala arvude veerg (tulp). Sellest väljalõikest vasakule ja paremale on vaja kirjutada arvud 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 10 teise, kolmanda, neljanda jne. rea kohale.

Kuidas kasutatakse aritmeetilist arvutuslükatit?

a) Olgu vaja leida korrutis 78 · 8. Võtame lükati selle skaala, mille ülemises reas on arv 78. Nihutame märkijat mööda lükatit nii, et tema väljalõikes paistaks tulp ülemise arvuga 78. Siis loeme märkija arvu 8 kõrvalt väljalõikest vastuse 624 (joon. 62).



Joon. 62

b) Korrutame 3425 arvuga 7. Korrutatav 3425 sisaldab 34 sajalist ja 25 ühelist. Korrutame esmalt 34 sajalist 7-ga. Saame 238 sajalist. Seejärel korrutame 25 ühelist 7-ga. Saame 175. Otsitav korrutis on 23 800 + + 175 = 23 975.

c) Olgu vaja 67 korrutada 98-ga. Toimime nii. Korrutame 67 esmalt 9 kümnelisega. Saame 603 kümnelist. Edasi korrutame 67 8-ga. Saame 536. Lõpuks leiame saadud arvude summa 6030 + 536 = 6566.

d) On vaja 728 jagada 8-ga. Jagatise leidmiseks paneme tähele märkijal arvu 8, ning vaadates märkijale, nihutame seda nii, et arvu 8 kõrvale ilmuks jagatav 728. Jagatis võrdub arvuga, mis paistab märkija väljalõikes ülal, s. o. 91.

e) Olgu vaja teostada korrutamine 42,56 · 0,9. Leiame algul korrutise 4256 · 9. Saame 37 800 + 504 = 38 304. Jääb eraldada saadud tulemuses komaga 3 kohta. Vastus: 38,304.

f) Proovi lahendada lükati abil mõned ülesanded protsendi leidmise kohta arvust ning arvu leidmise kohta tema teatud protsendi järgi. Näiteks: 1) Leida 7% 8,24-st; 2) 9% tundmatust arvust on 6,57. Leida see arv.

Meie ajastu iseloomustavaks jooneks on tehnika enneolematult tormiline arenemine kõigis tootmisharudes. Meie ajastu — see on kiireneva tehnilise progressi ajastu. Kiires tempos toimub masinate ja seadmete uuendamine, kasvab igasuguste masinate ning tööpinkide väljalase, mitmesuguste tootmisharude tähtsamad tööd automatiseeritakse. Tootmisprotsesside automaatjuhtimiseks ja nende kontrollimiseks vajatakse vahendeid ning sisseseadeid. Tootmises kasutatakse laialdaselt elektrit ja keemiat. Rakendatakse abinõusid toorainete ning energiaressursside täielikuks ja ratsionaalseks kasutamiseks. Ees seisavad suured tööd aatomienergia rahuotstarbeliseks rakendamiseks.

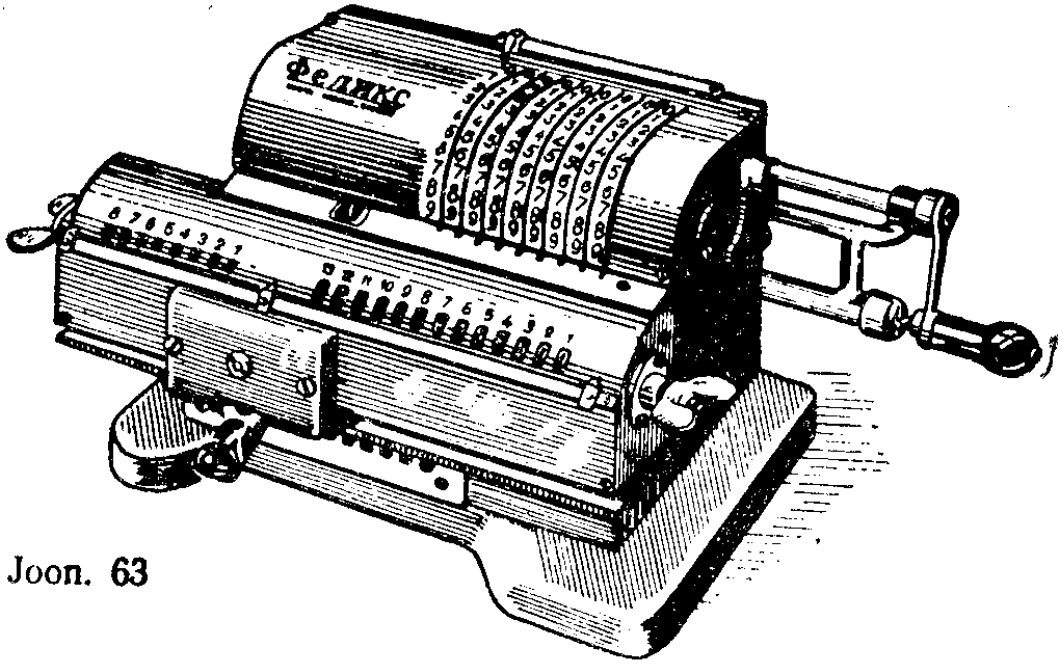
Kõigi nende ülesannete lahendamine nõuab suurt arvutustööd. Mitmekesised ja mahukad arvutused on hädavajalikud samuti kõigi meie suurte ning väikeste ettevõtete, asutuste ja organisatsioonide majanduslikus tegevuses, meie plaanide väljatöötamisel ja nende täitmise arvestuses. See kõik kohustab meid põhjalikult valdama arvutustehnikat, seda täiustama. Kui sirgud ja hakkad tööle, tuleb ka sinul palju arvutada. Valmistu siis selleks.

Arvutusi kergendavate ja kiirendavate vahendite hulgas, peale tabelite ning nomogrammide («arvutavate jooniste»), on eriti hinnatavad niisugused vahendid, nagu arvelaud, aritmomeeter, logaritmiline arvutuslükati, muidugi ka uued arvutusmasinad.

Arvelaud, vene rahva leiutis, on lihtne kuid väga teravmeelne arvutusvahend. Ta sobib hästi kokku uue arvutustehnikaga. Liitmis- ja lahutamistehted on teostatavad arvelaual väga kergesti, keerukamad on korrutamine ning jagamine. Sa tead, kuidas seda vahendit kasutada, kuid on vaja veel vilumusi. Nende arendamiseks ja kinnistamiseks on kasulik lugeda mitmeid käsiraamatuid.[29] Neis raamatuis on kirjeldatud üksikasjalikult, kuidas tuleb arvelauda kasutada, ja on antud harjutusi.

---

[29] 1) А. И. Кононенко. Техника вычислений на счетах, изд. Харьковского университета, 1955; 2) Н. П. Юрьев. Счетная техника, Госстатиздат, 1952; 3) М. И. Иванов. Русские счеты и их использование в школе, Учпедгиз, 1953; 4) В. М. Брадис. Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, 1954.



Joon. 63

Kasuta mitmesuguseid võimalusi, et õppida arvelaual hästi arvutama.

Üheks kõige levinumaks arvutusmasinaks meie maal on aritmomeeter (joon. 63). Selle leiutas 1874. a. Vene Rahakoja peamehhaanik insener Odner, ja see saavutas juba varsti tunnustuse ning laialdase leviku. Aritmomeetri põhiülesandeks on mehhaniseerida korrutamis- ja jagamistehted. Aritmomeetril saab ka liita ja lahutada, kuid see pole kasulik, kuna nõuab võrdlemisi palju aega. Kui sul on vaja õppida kasutama aritmomeetrit, siis organiseeri selleks grupp oma klassi õpilasi ning palu matemaatika õpetajat või kedagi arveala töötajaist teid õpetada. Kui sellist gruppi organiseerida ei saa, võid iseseisvalt õppida aritmomeetri kasutamist eespool märgitud N. Jurjevi või V. Bradise raamatute järgi.

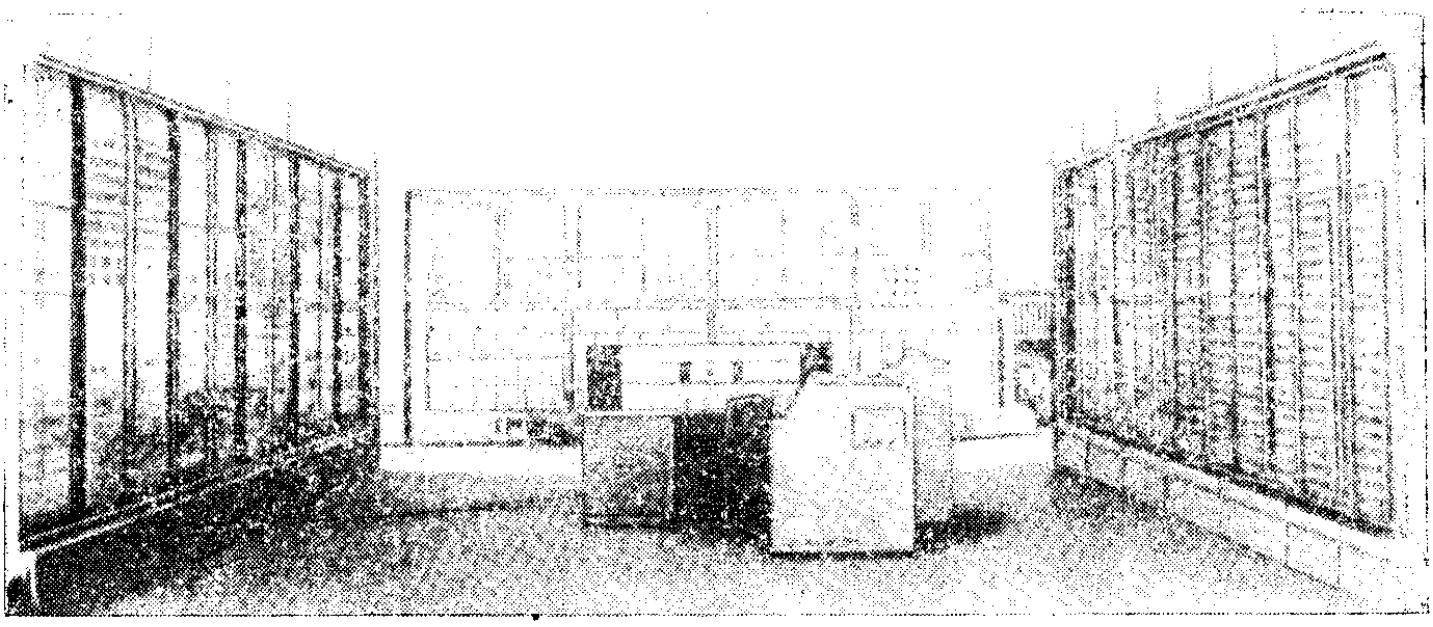
Viimastel aastatel on jõudsasti arenenud elektronarvutid, mis on suutelised sooritama matemaatilisi tehteid tohutu kiirusega. Ühe sellise masina abil arvutati 1952. aastal 13 minutiga arv $2^{1279}-1$ ja kontrolliti, et see arv (tema tavalises kirjutises on 386 numbrit) on algarv. Muide — tänapäeval tuntud suurim algarv on $2^{2281}-1$. Selle arvu leidmine ning kontrollimine, et ta on algarv, teostati samuti arvutusmasinaga.

Kaasaegne kiiretoimeline arvutusmasin on näiteks võimeline suure täpsusega välja arvutama mürsu lennu kestuse ajaga, mis on väiksem selle lennu kestusest. Nii-

sugused masinad võivad tänapäeval tagada arvutuste täpsuse miljondiku protsendini ja tehete sooritamise kiiruse kümnekohaliste arvudega mitukümmend tuhat operatsiooni sekundis.

Kiiretoimelisi elektronarvuteid rakendatakse suure eduga mitmesuguste matemaatika-, samuti füüsika-, keemia-, statistika-, astronoomia- jne. ülesannete lahendamisel. Kuid eriti tähtis on see, et elektronarvuteid saab kasutada mitmesugustel eesmärkidel. Raske on nimetada sellist teaduse või tehnika valdkonda, kus kiiretoimelised arvutusmasinad ei leiaks rakendamist. Niisugused arvutid teostavad mitte ainult matemaatilisi, vaid ka loogilisi operatsioone. Avanevad võimalused tõlkida selliste masinate abil raamatuid mistahes keelest teise keelde, juhtida lennukite lende ja maandumist, automaatselt töödelda tööpinkidel keerukaid detaile, reguleerida valgusfooride abil automaatselt tänavaliiklust ühes linnaosas või isegi terves linnas jne.

Nõukogude inseneride kollektiiv akadeemik S. Lebedevi juhtimisel ehitas Teaduste Akadeemia kiiretoimelise elektronarvuti БЭСМ (joon. 64). See masin sooritab ühes sekundis keskmiselt 7000—8000 operatsiooni üheksakohaliste kümnendarvudega. Ta asendab kümnete tuhandete arvutajate töö. See arvuti võib mõne tunniga teostada arvutustöö, mida vilunud arvutaja ei suuda teha kogu



Joon. 64

oma elu jooksul. Näiteks kui lennukikorpuse ühe variandi kontrollimiseks oli varem vaja suure grupi töötajate — tehnikute, inseneride ja matemaatikute — kümnepäevast tööd, siis БЭСМ abil võib selle teha 10 minutiga. Seda masinat kasutati tõlkijana inglise keelest vene keelde. Tõlgiti matemaatika-alase raamatu teksti. Katsed olid edukad.

БЭСМ ehitus on keeruline. Tema põhiosadeks on: aritmeetiline seade, mille abil teostatakse kõik aritmeetilised tehted; operatiivne mäluseade, mis salvestab ja säilitab arvutusprogrammi, lähteandmeid ning vahepealseid resultaate; magnetiline mäluseade, mis on määratud kümnete ja sadade tuhandete arvude salvestamiseks ning säilitamiseks; juhtimisseade; sisendseade programmi ja lähteandmete jaoks ning trükkimisseade, mis väljastab töö tulemused.

БЭСМ opereerib arvudega, mis on väljendatud kahendsüsteemis.

Muidugi on БЭСМ keeruka konstruktsiooniga. Ta koosneb suurest hulgast väikestest standardblokkidest. Temas on fotoelemente, elektronkiirte torusid, elektronreleesid, elektronskeeme, magnetofone, fototrüki seadmeid ja palju muud.

Selline masin muidugi ei suuda asendada inimest. Kui keerukaid operatsioone ta ka ei teostaks, allub ta kõigil toiminguil inimese poolt koostatud programmile.

Nõukogude Liidus on peale БЭСМ veel palju teisi kiiretoimelisi elektronarvuteid: «Strela», M-2, «Ural» ja eriotstarbelised masinad. Kuid see on alles algus. Meil toodetakse iga aastaga üha rohkem elektronarvuteid. See võimaldab laialdaselt rakendada kiirarvutustehnikat rahvamajanduses. Kiiretoimeliste elektronarvutite rakendamine toob aga kaasa tööviljakuse tohutu kasvu kõige erinevamatel inimtegevuse aladel ja avab uued võimalused ümbritseva maailma nähtuste tundmaõppimiseks.

Elektronarvutid on kaugelt ületanud arvutustöö piirid. Nad on leidnud rakendamist juhtimismasinatena. Elektronarvutite teooria väljatöötamine etendas suurt osa uue teaduse — küberneetika — arengus. See teadus määrab kindlaks juhtimisprotsessi üldisi seaduspärasusi. Paljud tema järeldused on rakendatud elusorganismide ja automaatseadmete juures. Küberneetika probleemid on köitnud nüüd mitte ainult matemaatikute, vaid ka füüsi-

kute, füsioloogide, psühholoogide tähelepanu. Nõukogude teadlaste ees seisab tõsine ning vastutusrikas ülesanne — tagada meie maal uue, suure ja tähtsa teadusliku suuna — küberneetika — edukas areng.

Elektronarvutite konstrueerimine ja tootmine saab meie maal suure ulatuse. See uus tehnika ja teaduse valdkond kutsub ellu uusi kutsealasid. On vaja insenere, tehnikuid ning kvalifitseeritud töölisi elektronarvutite väljatöötamiseks, loomiseks, monteerimiseks ja juhtimiseks.

On vägagi võimalik, et ka sul tuleb aja jooksul luua selliseid masinaid või neid kasutada. Selleks on vaja koolis hästi õppida.[30]

EKKER

Ekrit kasutatakse maastikul täisnurkade ja eeskätt antud sirgele ristsirgete ehitamiseks. Kõige lihtsamalt valmistatakse ekker järgmiselt. Lauast paksusega 10—20 mm või mitmekihilisest vineerist tuleb lõigata ruut küljega 200 mm ja kinnitada selle alla liist, milles on avaus ekri kandejalale seadmiseks. Väljalõigatud lauale on vaja märkida selle laua mõõtmetest veidi väiksemate mõõtmetega ruudu tipud. Selleks tuleb joonestada laua diagonaal, leida selle keskpunkt ja tõmmata läbi saadud keskpunkti diagonaalile ristsirge. Tekib teine diagonaal. Mööda diagonaale, alates nende lõikepunktist, tuleb asetada neljas suunas 130 mm pikkused lõigud. Nende lõikude otspunktid ongi otsitavateks tippudeks. Seda konstruktsiooni tuleb teha võimalikult täpselt ja kontrollida. Konstruktsiooni kontrollimiseks on tarvis mõõta saadud ruudu küljed. Kui nad osutuvad võrdseiks (täpsusega kuni 0,5 mm), tuleb leitud tippudesse kinnitada (vertikaalselt) nööpnõelad või peened paelad.

Milliseid geomeetria teoreeme on vaja kasutada nööpnõelte kinnituspunktide otsimisel?

Milliseid nurki võib maastikul ehitada ekri abil? Kuidas seda teha?

Õpi kasutama ekrit maastikul mõõdistamisel.

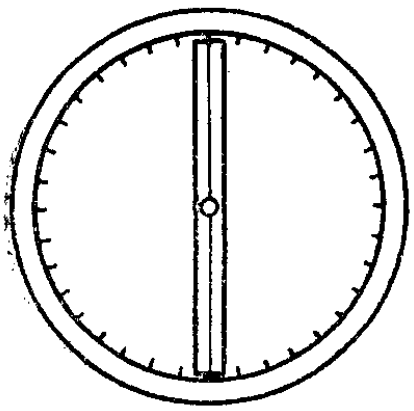
---

[30] Loe raamatut: Н. Корбинский и В. Пекелис. Быстрее мысли, М., «Молодая гвардия», 1959.

NURGAMÕÕTJA

Nurgamõõtja valmistamiseks on vaja 15 mm paksusest lauast välja lõigata ring raadiusega 80 mm. Kui niisugust ringi on raske välja lõigata, siis võib ta asendada ruuduga, mille külg on 160 mm. Saadud laua alla on tarvis kinnitada liist, milles on avaus seadise paigutamiseks statiivile. Peale on vaja liimida paberist ring (limbi skaala) raadiusega 70 mm ja kraadijaotustega ringjoonel. Kõige parem oleks kasutada trükitud limbi skaalat, kuid kui see pole võimalik, tuleb skaala ise valmistada. Tihedast paberist lehele on vaja joonestada näidatud raadiusega ringjoon, jaotada ta võimalikult täpselt 360-ks võrdseks osaks ja kirjutada ringjoone vastavate jaotuste juurde (kellaosuti liikumise suunas) arvud: 0°, 10°, 20°,..., 350°, mis näitavad, kui palju kraade on kaartes, alates 0°-ga tähistatud alguspunktist (vt. lisa 3).

Jääb veel valmistada alidaad. See on 140 mm pikkune, 15 mm laiune ja 6—8 mm paksune liist. Alidaad on vaja kinnitada limbi keskele kruviga. Ta peab pöörlema selle kruvi ümber. Liistule on vaja tõmmata servadega paralleelne ning limbi keskpunkti läbiv joon, joone otstesse, 60 mm kaugusele keskpunktist aga kinnitada nööp-



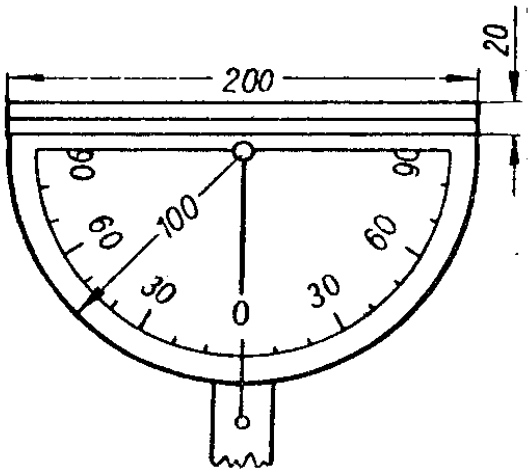
Joon. 65

nõelad (joon. 65). Nööpnõelte asemel võib alidaadi otstesse kinnitada viseerimisseadeldise. Selleks on kaks ristkülikukujulist plaati. Ühesse neist on lõigatud kitsas vertikaalne pilu, teisesse aga palju laiem väljalõige, kuhu on tõmmatud pingule jõhv või niit. Plaadid kinnitatakse vertikaalselt alidaadi otste külge.

Kirjeldatud nurgamõõtjat kasutatakse nurkade mõõtmiseks horisontaaltasapinnas.

EKLIMEETER-NIVELLIIR

Eklimeetrit kasutatakse nurkade mõõtmiseks vertikaaltasapinnas, nivelliiri aga maapinna ühe punkti kõrguse määramiseks teise suhtes. Mõlemat ülesannet saab lahendada ühe ja sama seadise abil.



Joon. 66

Seda seadist pole raske valmistada. On vaja välja lõigata 5-millimeetrisest tasasest vineerist segment, nagu on näidatud joonisel 66, ja liimida sellele paberist poolring, millel on kraadijaotused (vt. lisa 4). Poolringi kohale vineerist segmendi külge tuleb kinnitada sile 200 mm pikkune, 20 mm laiune ja 8—10 mm paksune puuliist. Liistu keskkohta, paralleelselt poolringi diameetriga, on tarvis tõmmata joon jaotustest 90°—90° ning selle joone otstesse, 15 mm kaugusele liistu servadest, kinnitada kaks nööpnõela viseerimiseks.

Vineerist segment kinnitatakse kruviga ümmarguse, alt teritatud lati ülaosa külge. Ta peab suurema pingutuseta pöörlema ümber kinnituskruvi. Lõpuks kinnitatakse kruvi pea külge loenöör, mille otsas on koormus. Nööri pikkus peab olema umbes 110—120 mm.

Milline asend on vaja anda vineerist segmendile, et seadist kasutada nivelliirina?

Millisele teoreemile tugineb selle seadise kasutamine eklimeetrina?

Õpi kasutama seda seadist nii eklimeetrina kui ka nivelliirina.

MENSUL

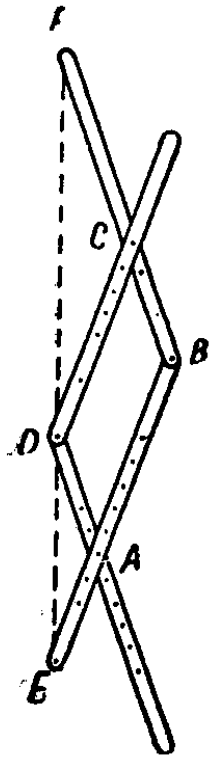
Mensuli põhiosadeks on mensulilaud ja alidaad. Mensulilaud valmistatakse kuivast 15—20 mm paksusest lauast ruudukujulisena, külje pikkusega 300—350 mm. Võib kasutada ka vineeri, lüües selle puuliistudest raamile. Laua alla kinnitatakse liist, milles on avaus statiivile asetamiseks. Kõige lihtsam on kasutada alidaadina kolmnurkset mõõtejoonlauda. Sel juhul on vaja viseerida mööda joonlaua ülaserva.

Millistel teoreemidel põhineb mensuli kasutamine maatüki plaanistamisel?

Õpi mensulit kasutama.

PANTOGRAAF

Pantograafi kasutatakse joonise või pildi mõõtmete suurendamiseks või vähendamiseks (tasapinnalise kujundi ehitamiseks, mis on antud kujundiga sarnane). Ta koosneb neljast ühesugusest õhukesest puuliistust, millesse on tehtud võrdsetele kaugustele väikesed avaused, et liiste kruvide abil šarniirselt ühendada. Liistud ühendatakse nii, et nelinurk *ABCD* oleks rööpkülik ja et punktid *E*, *D* ning *F* asetseksid ühel sirgel (joon. 67).



Joon. 67

Seda pantograafi kasutatakse järgmiselt. Punkt *E* kinnitatakse (selles asetseva teraviku abil) liikumatult joonise tasapinnale. Avausse *F* pannakse pliiats ja avausse *D* terav tihvt. Seejärel tõmmatakse punktisse *D* kinnitatud tihvtiga mööda joonise kontuuri. Siis joonestab avausse *F* asetatud pliiats kujundi, mis on tihvtiga üle tõmmatud joonisega sarnane. Kui on vaja saada vähendatud kujutist, siis tuleb panna pliiats avausse *D*, tihvt aga avausse *F*. Kinnitades liiste mitmel viisil, võib saada mitmesuguste mõõtmetega kujutisi.

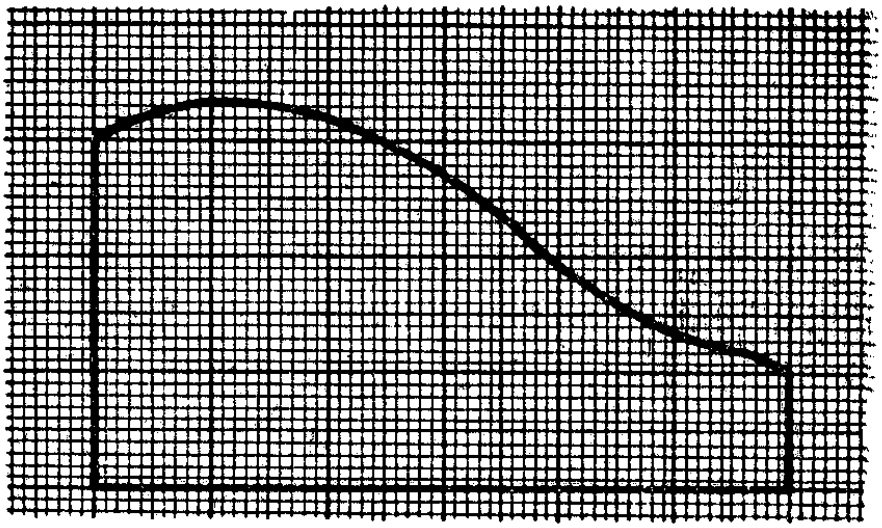
Tutvu pantograafi teooriaga näiteks N. Glagolevi geomeetriaõpiku (I osa) järgi.

Millistele teoreemidele tugineb pantograafi rakendamine?

Õpi kasutama pantograafi.

PALETT

Väikeste mõõtmetega mitmesuguste kujundite (sealhulgas kõverjooneliste) pindalade mõõtmiseks võib kasutada paletti. Seda on kerge valmistada. On vaja võtta leht läbipaistvat paberit, näiteks vahapaberit või kalkat, ja kanda sellele millimeetrivõrk (võib piirduda ka ruutvõrguga, kus vahed on 2 mm). Kui pole läbipaistvat paberit, võib võtta tavalist paberit, kanda sellele võrk, seepeale aga hõõruda paberilehe vastaskülge taimeõliga.



Joon. 68

Paletti kasutatakse järgmiselt. Ta asetatakse kujundile, mille pindala tahetakse mõõta. Edasi tuleb loendada kujundi kontuuri sees olevate paleti sentimeetriste ja millimeetriste ruutude arv. Lõpuks on tarvis loendada paleti millimeetriste ruutude arv, mida läbib kujundi kontuur, ning leida pool sellest arvust. Jääb arvutada kujundi pindala.

Kuidas arvutada paleti abil maatüki pindala tema plaani järgi, kui on antud plaani joonmõõt?

Joonisel 68 on kujund koos sellele asetatud paletiga. Paleti ruutude loendamine näitab, et kujundi pindala on ligikaudu: $100 \cdot 11+14+23+2+89+27+99+52+$ $+13+(6+5+3+5+9+1+9+8)\cdot\frac{1}{2}=1100+319+23\approx$ $\approx 14{,}4$ (cm^2).

Meie majanduslikus tegevuses, kõigil suurtel ja väikestel ehitustel, väga paljudel teaduslikel uurimistel, meie maa kaitsevõime tugevdamise vastutusrikkal tööl, igapäevases elus on maastiku mõõdistamisel üpris suur tähtsus. Mitmesuguste teede (raud-, maanteed jm.), metrooliinide rajamine, maade kuivendamine ja niisutamine, tammide, hüdroelektrijaamade, sildade püstitamine, elektriülekandeliinide, gaasi- ja naftajuhtmete, veevärgi, kanalisatsiooni, kaevanduste, sadamate, linnade ja külade, tehaste ning vabrikute ehitamine, lennud lennukeil, laevasõit, riigi- ja kolhoosimaade õige kasutamine ning palju, palju muud nõuab mõõtmisi maastikul. Need on sellised mõõtmised, mida inimesel tuleb eriti sageli teha. Kui sirgute, siis nõutakse kindlasti teiltki niisuguste mõõtmiste tegemise oskust. Seepärast on teil vaja selleks valmistuda.

Eespool kirjeldatud seadised (ekker, nurgamõõtja, eklimeeter-nivelliir, mensul ja teised), mida võib ise valmistada, aitavad teil mõista, kuidas niisuguseid töid teha. Kuid arusaamisest üksi on vähe. On vaja harjutada neid seadiseid ka kasutama. Minge põllule, metsa, jõe äärde, õue, tänavale, väljakule ning tehke seal mitmesuguseid mõõdistamistöid. Ka turismimatkad, pikemad ekskursioonid, pioneerilaagreis viibimine pakuvad selleks häid võimalusi. Ärge tehke töid üksinda, vaid gruppides, igaühes 3—4 inimest. Lugege raamatuid, mis aitavad teil teada saada, kuidas mõõdistamistöid maastikul tehakse.[31]

Sul on vaja leida oma sammu keskmine pikkus. Selleks märgi maastikul tähistega vahemaa 200—400 m, mõõda selle pikkus ruletiga, siis aga läbi see kaugus ühtlaste sammudega mitte vähem kui kolm korda ja loenda iga kord oma sammude arv. Parem on loendada samme paarikaupa, vasaku või parema jala järgi. Siis leia saadud kolme arvu aritmeetiline keskmine ning jaga tähistatud vahemaa pikkus selle aritmeetilise keskmisega. Oma sammu keskmine pikkus pea meeles. Et kergendada sam-

---

[31] 1) S. Golitsõn. Tahan saada topograafiks, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1956;
2) П. Я. Дорф и А. О. Румер. Измерения на местности, изд. АПН, РСФСР, 1953.

mude ümberarvutamist meetriteks, koosta ja kirjuta oma märkmikku väike tabel.

Sammud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meetrid										

Korrutades alumise rea arvud 10-ga ja 100-ga, saad kümnete ja sadade sammude väljendused meetrites. Sammude ümberarvutamisel meetriteks jääb sul leida vaid arvude summa, mis näitab mõõdetavat vahemaad meetrites sadade, kümnete ja üksikute sammude kaudu.

Arenda oma silmamõõtu. Seda on tarvis elus ja tööl. Kas lähed kooli, viibid jalutuskäigul või matkal, siirdud kalale, sõidad pioneerilaagrisse, kasuta juhust, hinda silma järgi mitmesuguseid kaugusi ning kontrolli oma hinnanguid vahemaade mõõtmise teel ruletiga, sammudega, jalgratta kaugusemõõtjaga jne. Pea seejuures meeles, et kui valgustus on nõrk, näiteks hämarikus, paistavad kaugused suuremalena. Kui mõõdetaval vahemaal leidub takistusi (ehitised, järsak jne.), siis vahemaa näib lühem.

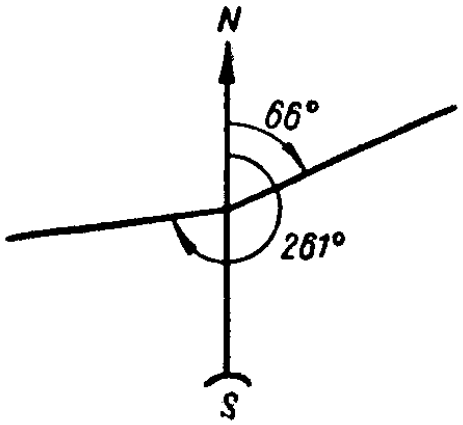
Esemed	Kui kaugelt on nad nähtavad
Tuuleveskid	15 km
Külad ja suured majad	8 km
Üksikute majade grupid	5 km
Majade aknad	4 km
Majade korstnad	3 km
Üksikud puud	2 km
Kilomeetripostid	1 km
Puude tüved	850 m
Aknaraamide võrestikud	500 m
Inimese jalgade liikumine	500 m
Riiete värv ja osad	250 m
Inimeste näod	150 m
Näoilme	100 m
Silmad	60 m

Kasuta kauguste määramiseks esemete eraldamise tabelit.

Sul tuleb seda tabelit täiendada (vt. lk. 125).

Harjuta ka nurkade, maatükkide ja kujundite pindalade, kehade ruumalade mõõtmist silma järgi.

Suure praktilise tähtsusega on orienteerumine maastikul kompassi abil. Et õppida kasutama kompassi, on eriti tähtis hästi omandada, kuidas asetsevad maastikul suuna asimuudid. Antud suuna asimuudiks (magnetiliseks) nimetatakse nurka, mida mõõdetakse magnetnõela põhjapoolse otsa ja antud suuna vahel, loetud kellaosuti liikumise suunas (joon. 69). Ilmselt võib muutuda asimuudi suurus 0° kuni 360°.



Joon. 69

Arutle, kuidas tuleb kasutada kompassi mitmesuguste suundade asimuutide määramisel maastikul.

Kuidas aga määrata maastikul suunda, kui on antud tema asimuut?

Mine kompassiga põllule, niidule, jõe äärde ja harjuta mitmesuguste suundade asimuutide leidmist ning suundade leidmist nende asimuutide järgi.

Jalutuskäigul väljaspool linna koosta selle jalutuskäigu marsruut, näidates skeem-joonisel orientiirid, suunamuutmised (asimuutide abil) ning nende suunamuutmiste vahed (sammudes või meetrites).

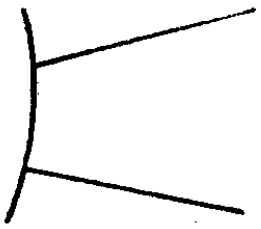
460. Valmista nöörist kolmnurk. Võta selleks 6 m pikkune nööritükk, ühenda selle otsad ja tähista värviliselt iga 0,5 m. Tähiseid tuleb 12. Maastikul võib paigutada niisuguse nööri kolme vaia abil nii, et tekib võrdkülgne kolmnurk küljega 2 m.
Kuidas ehitada nöörkolmnurga abil nurgad 60°, 30°, 90°? Milliseid nurki veel on võimalik ehitada selle kolmnurga abil? Kuidas ehitada selle kolmnurga abil läbi antud sirgel asetseva punkti ristsirge antud sirgele?

461. Kuidas mõõta ekri ja ruleti abil ümmarguse torni laius (ümmarguse lillepeenra diameeter)?

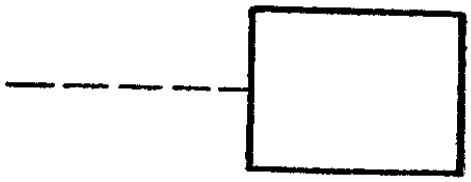
462. Kuidas asetada ekrit kasutades tähised mööda ringjoont, mille ühe diameetri otspunktid on antud?

463. Maastikul on tähistatud kaks suunda. Nende lõikepunkt on ligipääsmatu (joon. 70). a) Kuidas tähistada maastikul nende suundade vahelise nurga poolitajat? b) Kuidas panna maastikul sirge läbi antud punkti ning nende suundade ligipääsmatu lõikepunkti?

464. Kuidas tähistada sirget üle tõkke, näiteks üle ehitise või puudegrupi (joon. 71)? Kuidas aga tähistada sirget üle kuristiku?



Joon. 70



Joon. 71

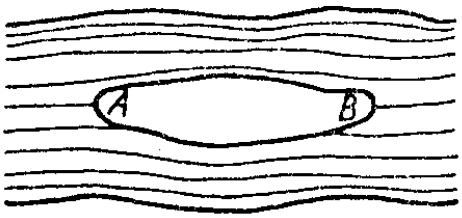
465. Kuidas määrata punktide A ja B vahelist kaugust, kui üks neist on ligipääsmatu (näiteks jõe laiust)?

466. Kuidas leida punktide A ja B vahelist kaugust, kui nad mõlemad on vaatlejale ligipääsetavad, kuid üks

[32] Püüa leida kõigile ülesannetele mitu lahendusviisi ja määra, millistele teoreemidele tuleb tugineda. Mõeldud lahendusviisidest vali kõige õnnestunumad ja rakenda neid praktilistel töödel maastikul.

pole teisest nähtav või nad on eraldatud takistusega, näiteks järvega?

467. Kuidas leida kahe ligipääsmatu punkti *A* ja *B* vahelist kaugust, näiteks saare pikkust, saarele minemata (joon. 72)?



Joon. 72

468. Kuidas mõõta puu kõrgust?

469. Kuidas mõõta vabrikukorstna või raadiomasti kõrgust, kui tema vundamendi juurde ei saa minna?

470. Kuidas mõõta väikese künka kõrgust, kuristiku sügavust, jõekalda kõrgust?

VII PEATÜKK

ÜLESANDED MATEMAATIKA OLÜMPIAADIDEKS [33]

On poisil käsil ülesanne raske,
ta tegi vea — läks kaotsi tund.
Kuid nooruk ohkas, otsast algas...
Teist korda lahendama sundis end.
Ka Lenin lapsepõlves toimis nii.

I. Antonov

ARITMEETIKA JA ALGEBRA

471. Kaks pumpa pumpasid süvendist vett. Üks töötas 2 min., teine aga 8 min. ning selle ajaga pumpasid nad 44 hektoliitrit. Kui esimene pump oleks pumbanud kaks korda kiiremini, teine aga neli korda aeglasemalt, oleksid nad sama ajaga pumbanud 32 hektoliitrit. Kui palju vett pumpas kumbki pump ühe minutiga?

472. Rong sõidab teatava vahemaa 10 tunniga. Kui tema kiirus suureneks 10 km võrra tunnis, siis läbiks ta sama vahemaa 8 tunniga. Leida see vahemaa ja rongi kiirus.

473. Paaki on juhitud toru. Ummistuse tõttu vähenes vee juurdevool selle toru kaudu 10% võrra. Mitme protsendi võrra rohkem aega kulub paagi täitmiseks?

474. Linna kolmes koolis on 1740 õpilast. $\frac{2}{3}$ esimese kooli õpilaste arvust võrdub 0,5-ga teise kooli ja $\frac{2}{5}$-ga kolmanda kooli õpilaste arvust. Mitu õpilast on igas koolis?

---

[33] Me ei anna nende ülesannete kohta vastuseid ja näpunäiteid. Näita oma lahendusi õpetajale ja ta ütleb, kas sa lahendasid ülesanded õigesti.

475. Kaks jalgratturit väljusid samaaegselt, et sõita pioneerilaagrist linna. Üks jalgrattur sõitis kiirusega $12\frac{km}{h}$, teine — $14\frac{km}{h}$. $1\frac{1}{2}$ tunni pärast vähendas teine kiirust 10 kilomeetrini tunnis. Kui kaugel pioneerilaagrist jõuab esimene jalgrattur teisele järele?

476. Raamatubaas sai raamatud 20%-lise hinnaalandusega, kuid müüs nad tegeliku hinnaga. Mitu protsenti sai baas kasumit?

477. Kastis on õunad. Esmalt võeti kastist pool kõigist õuntest ja pool õuna, seejärel pool ülejäägist ja pool õuna ning lõpuks pool uuest ülejäägist ja veel pool õuna. Pärast seda jäi kasti 31 õuna. Mitu õuna oli algul kastis?

478. Ühelt inimeselt küsiti: «Kui vana te olete?» Ta vastas nii: «10 aastat tagasi olin ma pojast 4 korda vanem, 10 aasta pärast aga olen temast ainult kaks korda vanem.» Kui vana on see inimene?

479. Esmaspäeval, 11. mail suundusid Jaroslavlist 3 aurikut järjekordsele reisile. Mitme päeva pärast väljuvad samad aurikud uuesti Jaroslavlist pühapäevasel päeval, kui esimene aurik väljub reisile Jaroslavlist 1 kord 3 päeva järel, teine — 1 kord 4 päeva ja kolmas — 1 kord 6 päeva järel?

480. Mootorrattur peab sõitma ühest linnast teise määratud ajaks. Kui ta sõidab kiirusega 35 $\frac{km}{h}$, hilineb ta 2 tundi, kui aga kiirus on 50 $\frac{km}{h}$, jõuab ta kohale 1 tund varem. Milline on linnade vahemaa?

481. Plaani järgi oli vaja 18 päevaga üles töötada teatav hulk küttepuid. Kogu töö lõpetati 2 päeva enne tähtaega ja seejuures oli tehtud 160 m^3 küttepuid üle plaani. Mitu kuupmeetrit tehti küttepuid, kui on teada, et iga päev tehti üle plaani 85 m^3?

482. 1 paari liimitud suuskade hind on 1 paari tavaliste suuskade hinnast $2\frac{3}{4}$ rbl. võrra suurem. 50 paari liimitud suuski maksavad sama palju kui 61 paari tavalisi suuski. Määrata kummagi sordi suusapaari hind.

483. Kui tehase ühe tsehhi 40 töölist hakkasid töötama uue meetodi järgi, suurenes tsehhi toodang 20% võrra, kui aga hiljem 60% kogu tsehhi töölistest hakkas töötama samal meetodil, siis suurenes tsehhi toodang $2\frac{1}{2}$ korda. Mitu töölist oli selles tsehhis ja mitu korda suureneb tsehhi toodang, kui kõik töölised hakkavad töötama uue meetodi järgi?

484. Orav toob pähkli pessa 20 min. jooksul. Kui kaugel on tema pesa sarapikust, kui on teada, et orav jookseb kandamita kiirusega $5\frac{m}{s}$, pähkliga aga $3\frac{m}{s}$ (pähkli haaramiseks aega ei arvestata)?

485. Jalakäija, minnes mööda linna tänavat, märkas, et iga 12 min. pärast jõuab tramm talle järele, iga 6 min. pärast aga tuleb tramm vastu. Jalakäija ja trammi ühtlast liikumist arvestades määrata, milliste ajavahemike järel väljuvad trammid lõpp-peatustest.

486. Mitja sõidab rongis, mille kiirus on $36\frac{km}{h}$. Aknast välja vaadates nägi Mitja paralleelteel vastu tulevat kiirrongi. See rong möödus 3 sekundiga aknast, mille juures oli Mitja. Vastu tulnud rongi pikkus oli 75 m. Millise kiirusega see sõitis?

487. Kaks rongi sõidavad teineteisele vastu kõrvuti asetsevail teedel. Esimese rongi kiirus on $30\frac{km}{h}$, teise kiirus $40\frac{km}{h}$. Teise rongi ühe vaguni akna juures istuv reisija märkas, et esimene rong möödus temast täpselt 6 sekundiga. Määrata esimese rongi pikkus.

488. Neli ühes majas elavat pioneeri panid rahad kokku ja ostsid jalgpalli. Esimene maksis poole kogu summast, teine — ühe kolmandiku sellest, mida maksid kolm ülejäänut, kolmas — ühe neljandiku sellest, mida maksid kolm ülejäänut, neljas — puuduvad 50 kop. Kui palju maksis jalgpall?

489. Kahes plekknõus on piima — esimeses kaks korda rohkem kui teises. Kui esimesest nõust valati välja 30 l, teisest aga 20 l, siis jäi esimesse 3 korda rohkem kui teise. Kui palju piima oli esialgu kummaski nõus?

490. Pilet botaanikaaeda maksis 15 kop. Peale pileti hinna alandamist kasvas külastajate arv poole võrra, rahaline tulu piletite eest aga suurenes veerandi võrra. Kui palju alandati pileti hinda?

491. Aurik sõidab Gorkist Astrahani 5 ööpäevaga, tagasi aga 7 ööpäevaga. Kui kaua peavad ujuma parved pärivoolu Gorkist Astrahanini?

492. 11,5 km pikkune tee punktist A punktini B kulgeb algul mäest üles, siis tasasel alal, seejärel aga mäest alla. Jalakäija, minnes A-st B-ni, läbis kogu tee 2 tunni 54 minutiga; tagasitulekuks kulus tal aga 3 tundi 6 minutit. Tema kiirus ülesmäge oli $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$, tasasel alal $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$, allamäge $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kui pikk oli tee tasasel alal?

493. Kaks tehast A ja B võtsid vastu tellimuse valmistada 12 päevaga traktoritele tagavaraosi. Kuid kaks päeva pärast tellimuse täitmise algust pandi tehas A remondi tõttu seisma, seepärast pidi tellimuse täitmise lõpetama tehas B. Teades, et tehase B tootlikkus moodustab $66\frac{2}{3}$ % tehase A tootlikkusest, määrata, mitu päeva pärast tehase A seismajäämist täidetakse tellimus.

494. Kaks jalgratturit väljusid üheaegselt, üks punktist A punktisse B, teine vastupidises suunas. Kumbki sõitis jääva kiirusega, ning jõudnud lõpp-punkti, pöördus otsekohe tagasi. Esimest korda kohtusid nad 40 km kaugusel punktist B, teist korda 20 km kaugusel A-st 8 tundi pärast esimest kohtumist. Leida punktide A ja B vahemaa ning jalgratturite kiirused.

495. Taastada kustutatud numbrid, mis on märgitud tärnikestega:

1)
$$\begin{array}{r} 23{*}{*}85 \\ {*}{*}{*}5 \\ \hline {*}{*}{*}{*}2{*} \\ {*}347{*}{*} \\ {*}{*}9570 \\ {*}04{*}{*}{*} \\ \hline 7{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} {*}7{*}{*}{*} \\ 743 \\ \hline {*}{*}{*}{*}{*}5 \\ {*}{*}{*}{*}{*}{*} \\ {*}{*}{*}{*}{*}{*} \\ \hline 42{*}{*}{*}87{*} \end{array}$$

496. Arvutada võimalikult lihtsamalt summa:

1) $\frac{6}{5\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 9}+\frac{6}{9\cdot 11}+\frac{6}{11\cdot 13}+\frac{6}{13\cdot 15}+\frac{6}{15\cdot 17}+$
$+\frac{6}{17\cdot 19}+\frac{6}{19\cdot 21}$;

2) $\frac{20}{5\cdot 10}+\frac{20}{10\cdot 15}+\frac{20}{15\cdot 20}+\frac{20}{20\cdot 25}+\frac{20}{25\cdot 30}+\frac{20}{30\cdot 35}+$
$+\frac{20}{35\cdot 40}+\frac{20}{40\cdot 45}+\frac{20}{45\cdot 50}+\frac{20}{50\cdot 55}+\frac{20}{55\cdot 60}$.

497. Lihtsustada korrutis (esitada arvu 2 astmete summana): $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\ldots(2^{256}+1)$.

498. Kas on olemas murd nimetajaga 20, mis on suurem kui $\frac{4}{13}$ ja väiksem kui $\frac{5}{13}$?

499. Milline arv on vaja lahutada murru $\frac{52\,367}{47\,633}$ lugejast ja liita nimetajaga, et saada pärast taandamist murd $\frac{17}{83}$?

500. Tõesta, et arv $43^{43}-17^{17}$ jagub jäägita 10-ga.

501. Lihtsusta avaldis: $(a^2-b^2-c^2+2bc):\frac{a+b-c}{a+b+c}$.

502. Lihtsusta avaldis: $(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-$
$-b)^3-(a+b+c)^3$.

503. Esita korrutisena: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

504. Lahuta tegureiks: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

505. Esita $a^{128}-b^{128}$ korrutisena $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$ $(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$.

506. Anum mahuga 10 *l* on täidetud petrooliga. Käepärast on veel kaks tühja anumat mahuga 7 *l* ja 3 *l*. Kuidas jaotada see petrool kahte anumasse nii, et neis oleks ühesugune liitrite arv?

507. Aias korjati õunu. Need jaotati 500-sse kasti. Ükski kast ei saa mahutada üle 240 õuna. Tõesta, et vähemalt kolm kasti sisaldavad ühesuguse arvu õunu.

508. Tõesta, et taandumatut murdu $\frac{p}{q}$ arvuni 1 täiendav murd on samuti taandumatu.

509. Tõesta, et arvu 1 ja taandumatu murru $\frac{p}{q}$ summa on samuti taandumatu.

510. Tõesta, et arv $n(n^2+5)$ jagub 6-ga ükskõik millise naturaalarvu n puhul.

511. Tõesta, et avaldis $\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6}$ on m iga naturaalarvulise väärtuse korral naturaalarv.

512. Tõesta, et avaldis m^5-5m^3+4m jagub 120-ga mistahes naturaalarvulise m korral.

513. Tõesta, et nelja järjestikuse naturaalarvu korrutise ja arvu 1 summa on naturaalarvu ruut.

514. Tõesta, et iga naturaalarv, mille kirjutis on igas 4-st suurema alusega arvusüsteemis 114, on täpne ruut.

515. Tõesta, et iga naturaalarv, mille kirjutis on igas 2-st suurema alusega arvusüsteemis 121, on täpne ruut.

516. Lahenda võrrandid: 1) $|x|-15=\frac{|x|+3}{4}$;

2) $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}$; 3) $15x-3|3x-2|=45-5(2x-5)$.

517. Lahenda kahe võrrandi süsteem:

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ |x-1|-|y-5|=0 \end{cases}$$

518. 1) Mitu nulli on korrutise $1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots50$ lõpus?
2) Võõrsõnade sõnastiku lehekülgede nummerdamiseks vajati 6869 numbrit. Mitu lehekülge on selles sõnastikus?

GEOMEETRIA

519. Ristkülikukujuline maatükk, kus kasvavad maasikad ja mille pikkus on kolm korda suurem laiusest, on ümbritsetud taraga, mis asetseb maatüki külgedest 2 m kaugusel. Taraga piiratud pindala on selle maatüki pindalast 128 m² võrra suurem. Määrata tara pikkus.

520. Mitu korda ööpäevas on kellaosutid teineteisega risti?

521. Kas kehtib teoreem: kui sirge läbib kolmnurga külje keskpunkti ja tema lõik, mis asetseb külgede vahel, võrdub poolega alusest, siis see lõik on kolmnurga kesklõik?

522. Ristkülikukujulisest vaibast mõõtmetega 9 m ja 12 m lõigati ristkülikukujuline tükk mõõtmetega 8 m ning 1 m (eraldatud tüki pikem külg on paralleelne vaiba lühema küljega). Lõika vaiba ülejäänud osa 3 tükiks nii, et neist võiks õmmelda ristkülikukujulise vaiba. Kuidas aga lõigata ülejäänud osa 3 tükiks nii, et neist saaks õmmelda ruudukujulise vaiba?

523. Kuidas tuleb lõigata ristkülik külgedega 16 cm ja 9 cm kaheks osaks nii, et neist võiks koostada ruudu?

524. Mistahes nelinurk tuleb lõigata viieks osaks nii, et osadest võiks koostada ristküliku. Kuidas seda teha?

525. Tõesta, et kui kolmnurga nurgapoolitaja ühtib mediaaniga, siis on kolmnurk võrdhaarne.

526. Tõesta, et kui kolmnurga mediaan võrdub poolega küljest, millele ta on tõmmatud, siis on kolmnurk täisnurkne.

527. Tõesta, et kui kolmnurga 2 mediaani on võrdsed, siis on kolmnurk võrdhaarne.

528. Tõesta, et kui nelinurga külgede lõikamisel ringjoonega tekib 4 võrdset kõõlu, siis on nelinurga vastaskülgede summad võrdsed.

529. On antud kaks ristsirget. Jääva pikkusega sirglõigu otspunktid libisevad mööda antud sirgeid. Leida seejuures tekkivate kolmnurkade raskuskeskmete geomeetriline koht.

530. On antud 3 punkti, mis ei asetse ühel sirgel. On vaja ehitada 3 paarikaupa üksteist puudutavat ringjoont tsentritega neis punktides.

531. Kolmnurk ABC on võrdkülgne. Tema külje AC pikendusele CE on ehitatud teine võrdkülgne kolmnurk CDE (külje pikkus võib olla teistsugune). On tõmmatud lõigud AD ja BE. Nende lõikude keskpunktid M ning N on ühendatud punktiga C. On vaja tõestada, et kolmnurk CMN on võrdkülgne.

532. Tõesta, et kolmnurga kahele küljele kui diameetritele ehitatud ringjooned lõikuvad kolmandal küljel (või selle pikendusel).

533. On antud nurk ABC ja selle sees punkt M. On vaja ehitada läbi punkti M sirge, mis eraldab kolmnurga antud ümbermõõduga $2p$.

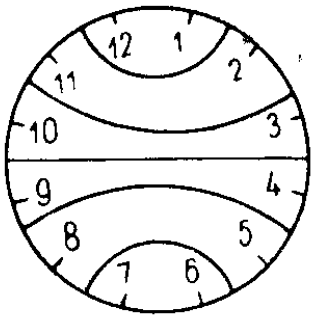
VASTUSED JA NÄPUNÄITED

1. Miljon korda. **2.** Ligikaudu 694. **3.** Ligikaudu 114. **4.** 750 km. **5.** Umbes 3 000 000 000. **6.** Peaaegu 42 ööpäeva. **7.** Umbes 204 ööpäeva. **8.** 1 000 000; 10 000 000 000. **9.** 1 000 000; 1 000 000 000. **10.** 1000 km. **11.** 1 000 000 km. **12.** Ligikaudu 12 500 000. **13.** Ei (kaal 200 kG). **14.** Umbes 10 kg. **15.** 1) 2; 2) 10; 3) 3; 4) 18. **16.** 5 tundi. **17.** Pioneerid sõitsid autol 3 korda pikema tee, kui läbisid jalgsi, kuid aega kulus 4 korda vähem. Tähendab, nad sõitsid autoga 12 korda kiiremini kui käisid jalgsi. **18.** 2 kG **19.** Õpik maksab 22 kop., ülesannete kogu 9 kop. **20.** I — 270 t, II — 130 t, III — 170 t. Näpunäide. Kokku toodi kolme lattu kaupa (400+300+440) : 2, s. t. 570 t. Kolmandasse lattu toodi 570−400=170 (t), esimesse 570−300= =270 (t) ja teise 570−440=130 (t). **21.** Vanem 5 rbl. 60 kop., noorem 4 rbl. **22.** 12 ja 4. **23.** $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **24.** 7 ploomi. **25.** 8 kG. **26.** $\frac{1}{12}$. **27.** 13 t. 20 min. **28.** 7 aasta pärast. **29.** 51 ja 17. **30.** 7 ja 9. **31.** $2\frac{8}{11}$ m ja $2\frac{8}{11}$ dm. **32.** 40 m³ kase- ja 60 m³ männipuid. **33.** 15 pakki à 3 kG ja 9 pakki à 5 kG. **34.** 3 kG. **35.** 3 kG. **36.** 640 m. Näpunäide. Otsitava tee pikkus võrdub: 10+30+50+70+90+110+130+150= =(10+150)+(30+130)+(50+110)+(70+90)=160·4=640 (m). **37.** 4 minuti pärast. **38.** 16 km. Näpunäide. Teine poiss jõuab esimesele järele 2 tunni pärast. Selle ajaga jookseb koer 16 km. **39.** 15 minutiga. **40.** Esimene. Näpunäide. Ülesanne lahendub ilma arvutusteta. Selle ajaga, mille jooksul esimene veoauto on teinud mõlemad «otsad», jõuab teine veoauto ainult punktisse *B*. **41.** 120 m. **42.** 27. **43.** Esimene perenaine peab saama 1,5 rbl., teine aga 4,5 rbl. **44.** Kogu raha, mille andis kolmas kütt, peab esimene kütt endale võtma. **45.** 42 vihikut. Näpunäide. Esimesel ja teisel õpilasel on kokku sama palju raha kui ülejäänutel. Tähendab kokku osteti 21·2, s. o. 42 vihikut. **46.** 7 kanapoega. **47.** Keti pikkus on 12·40+3·2= =486 (mm)≈0,5 (m). **48.** Rongi pikkus on 225 m ja kiirus 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Näpunäide. Rong läbib 450 m ajaga 45−15=30 (s). Seepärast rongi kiirus on $\frac{450}{30}=15\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ ehk 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Rongi pikkus on 15·15= 225 (m). **49.** I — $46\frac{1}{3}$ arssinat, II — $34\frac{1}{3}$ arssinat, III — $25\frac{1}{3}$ arssinat. **50.** 36 hane. **51.** 28 õpilast. **52.** $38\frac{14}{47}$ rbl. **53.** 12 küülikut, 23 faasanit. **54.** 12 tunniga; I — 30 setverti, II — 27 setverti, III — 24 setverti. **55.** $\frac{6}{11}$ tunniga. Näpunäide. 6 tunniga täidab esimene toru 6 sellist veemahutit, teine 3, kolmas aga 2, kokku 11 veemahutit. Seega täidavad 3 toru koos ühe veemahuti $\frac{6}{11}$ tunniga. **56.** 24 tunniga. **57.** 35 päevaga. **58.** Matemaatika-alases käsikirjas, millest see ülesanne on võetud, antakse niisugune lahendus: 12 tunniga sööb lõvi 12 lammast, hunt 6, koer 4, kokku 22 lammast. Seepärast lõvi, hunt ja koer söövad koos ühe lamba $\frac{12}{22}$, s. o. $\frac{6}{11}$ tunniga. **59.** 12 aastaga võivad neli puuseppa koos ehitada 25 maja, ühe maja aga võivad nad ehitada $\frac{12\cdot 365}{25}$ päevaga, s. o. $175\frac{1}{5}$ päevaga. **60.** $9\frac{7}{37}$ päeva pärast. **61.** 15 minuti pärast. **62.** 285 versta. **63.** 8 päeva pärast. **64.** 67%. **65.** 31,5%. **66.** $33\frac{1}{3}$ protsendi võrra. **67.** 50% võrra. **68.** 28,6% võrra. **69.** 83,6%; 16,4%. **70.** Teine. Näpunäide. Esimese töölise kiirus võrdub $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}=\frac{99}{100}$ teise kiirusest, s. t. on teise kiirusest väiksem. **71.** 21% võrra. **72.** 32% võrra. **73.** Väheneb 9% võrra. **74.** 8,9% võrra. **75.** 441 g. **76.** 2 rbl., 3 rbl., 4 rbl. **77.** 10 kop. **78.** 1) 55 kop.; 2) 40 kop. **79.** 200%. **80.** 101·50=5050. **81.** (1+2+3+4+ ... +12)·2+24=180. **82.** 2. Näpunäide. $\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=\frac{10^2+11^2+12^2}{365}+\frac{13^2+14^2}{365}=$ =1+1=2. **83.** Arvutatav summa on sobiv esitada kujul (1+999)+ +(3+997)+(5+995)+ .... Kokku on selliseid liidetavate paare 250, sest esimeses tuhandes on 500 paaritut arvu. Seega summa igas sulgavaldises on 1000. Seepärast otsitav summa võrdub 1000·250=250 000. **84.** 1) (99−97)+(95−93)+(91−89)+ ... +(7−5)+(3−1)=2·25= =50; 2) kirjutame summa kujul $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$ $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$; 3) $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{10}-$ $-\frac{1}{100}=\frac{9}{100}$. **85.** 1) Jagatis on 2·3·4·6=144, jääk on 1; 2) 1.

86. Vt. joon. 73. **87.** Näiteks: 1) $\left(\frac{5}{5}\right)^5$;

2) $(5-5)^5$; 3) $\frac{5+5}{5}$; 4) $\frac{5\cdot 5}{5}$.



Joon. 73

88. Näiteks: $22+2+2+2$. **89.** Näiteks $\frac{222}{2}$. **90.** Näiteks: 1) $99+\frac{9}{9}$; 2) $99+\frac{99}{99}$. **91.** Näiteks: 1) $33-3+\frac{3}{3}$; 2) $3\cdot 3\cdot 3+3+\frac{3}{3}$; 3) $5\cdot 5+5+\frac{5}{5}$. **92.** Näiteks: 1) $111-11$; 2) $33\cdot 3+\frac{3}{3}$; 3) $(5+5+5+5)\cdot 5$. **93.** $123-45-67+89$. **94.** Näiteks: $\frac{4+4}{4+4}$, $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$, $\frac{4+4+4}{4}$, $4+(4-4)\cdot 4$, $\frac{4\cdot 4+4}{4}$, $\frac{4+4}{4}+4$, $4+4-\frac{4}{4}$, $\frac{(4+4)\cdot 4}{4}$, $4+4+\frac{4}{4}$, $4+4+4-\sqrt{4}$.

95. 10^{20} on suurem kui 20^{10}, sest $20^{10}=(2\cdot 10)^{10}=10^{10}\cdot 2^{10}$, aga $10^{20}=10^{10}\cdot 10^{10}$. **96.** 100^{20} on suurem kui 9000^{10}, sest $100^{20}=100^{10}\cdot 100^{10}$, aga $9000^{10}=(90\cdot 100)^{10}=90^{10}\cdot 100^{10}$. **97.** a) $2+2=2\cdot 2$, b) n ja 1 ($n+1>n\cdot 1$). **98.** $\frac{1}{2}$ ja -1. **99.** 35. **100.** 1) 111; 2) 11^{11}. **101.** 2^{22}. **102.** $(-9)^9$. **103.** 9^{9^9}. **104.** See, milles oli 20 dekaliitrit. **105.** Igaüks peab saama $\frac{5}{6}$ õuna, kuid $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Seega on vaja anda igaühele pool ja üks kolmandik õuna. **106.** $\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. **107.** 59. Näpunäide. Kui otsitava arvuga liita 1, siis ta jagub 2-, 3-, 4-, 5- ja 6-ga. Väikseim arv, mis jagub igaühega neist arvudest, on $2\cdot 3\cdot 2\cdot 5=60$. Järelikult on otsitav arv $60-1$, s. o. 59. **108.** $(2\cdot 3\cdot 2\cdot 5)\cdot n+1$ peab jaguma 7-ga. Väikseim selline võimalik n väärtus on 5. Järelikult oli korvis 301 muna. Järgmine sobiv n väärtus on 12. Siis saaksime 721 muna, kuid korvi ei saa niisugust arvu mune paigutada. **109.** 1) Arv 7 on koostatud 4-st tikust nii: VII. Arvu 5 võib saada kahe tiku ümberpaigutamisega nii: $\frac{\text{V}}{\text{I}}$. 2) Ühe tiku ümberpaigutamisega võib saada arvu 1 nii: $\sqrt{1}$. **110.** 1) $6750-3894$; 2) $44{,}45+59{,}27+78{,}43$; 3) $27\cdot 32$; 4) $66\cdot 111$; 5) $324\cdot 57$; 6) $568\cdot 24$; 7) $48384:126$; 8) $52650:325$; 9) $1089700:12$. **111.** 1) 2; 2) 4; 3) 12; 4) 24. **112.** 10^{49}. Märkus. Seda arvu võiks lugeda näiteks nii: 10 triljonit undetsiljonit. Tõepoolest, 10^6 — miljon, 10^9 — biljon ehk miljard, 10^{12} — triljon, 10^{15} — kvadriljon, 10^{18} — kvintiljon, 10^{21} — sekstiljon, 10^{24} — septiljon, 10^{27} — oktiljon, 10^{30} — noniljon, 10^{33} — detsiljon, 10^{36} — undetsiljon

jne. Suuri arve siiski nii ei loeta. Peaaegu alati väljendatakse nad arvu 10 astmete abil. Näiteks $2\,400\,000\,000\,000\,000\,000 = 24 \cdot 10^{17}$. **113.** Mistahes naturaalarvu saab kirjutada kahendsüsteemis. Näiteks $34 = 100\,010_2 = 2^5 + 2$, $19 = 10\,011_2 = 2^4 + 2 + 1$. Seega on mistahes naturaalarv esitatav kujul, millest räägitakse selles ülesandes. **114.** Alusel 4. **115.** Õpilane kasutas arvude kirjutamisel arvusüsteemi alusega 8. **116.** 1) 10 numbrit: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2) 5 numbrit: 0, 1, 2, 3, 4; 3) 8 numbrit; 4) 3 numbrit; 5) 2 numbrit: 0, 1. **117.** 1) $34\,311_5$; 2) $102\,220_3$; 3) $1\,000\,000_2$. **118.** 1) 37; 2) 410; 3) 3550; 4) 2594. Näpunäide. $5042_8 = 5 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8 + 2 = 2594$. **119.** 1) 6 korda, 2) 216 korda. **120.** 1) Väheneb 3 korda, 2) väheneb 27 korda. **121.** 1) Alusel 3; 2) alusel 6; 3) alusel 8. **122.** 1) $12\,315_5$; 2) $16\,303_8$; 3) $11\,113_5$. Näpunäide.

$$\begin{array}{r} 322_5 \\ \times\ \ 14_5 \\ \hline + \begin{array}{r} 2343_5 \\ 322_5 \end{array} \\ \hline 11113_5 \end{array}$$

123. 1) Alusel 3; 2) alusel 5; 3) alusel 9. **124.** 1) Alusel 5; 2) alusel 8; 3) alusel 8; 4) alusel 7. **125.** $5 \cdot 5 = 31$. Arvutussüsteemi alus on 8. **126.** On. **127.** Jaguvuse tunnused erinevates arvutussüsteemides on üldiselt erinevad. **128.** 1) 1000_2; 2) $0{,}11_2$; 3) $0{,}10\,011\,001\,100\ldots_2$; 4) $0{,}12_3$; 5) $0{,}202\,020\ldots_3$. **129** $\frac{7}{16} = 0{,}0111_2$, $\frac{1}{3} = 0{,}010\,101\ldots_2$, $\frac{4}{5} = 0{,}11\,001\,100\ldots_2$. **130.** $\frac{4}{27} = 0{,}011_3$, $\frac{4}{5} = 0{,}21\,012\,101\ldots_3$. **131.** 1 kG, 3 kG, 9 kG, 27 kG. **132.** 61 981. **133.** 504. **134.** 8; 12; 5; 20. **135.** 801. **136.** 60 129. **137.** 1) 45; 2) 81. **138.** $\frac{22}{35} > \frac{110}{177}$, sest $\frac{22}{35} = \frac{110}{175}$. **139.** 7. Näpunäide. Murru lugejale ja nimetajale ühe ja sama arvu liitmisel saadud uue nimetaja ja lugeja vahe (enne saadud murru taandamist) on sama, mis antud murrul. Seepärast uue nimetaja ning lugeja vahe peab olema $41 - 11 = 30$. Püüame leida niisugust murdu, mis võrduks $\frac{3}{8}$-ga ja mille nimetaja ning lugeja vahe oleks 30. Murru $\frac{3}{8}$ nimetaja ja lugeja vahe on $8 - 3 = 5$. Et saada vahet, mis võrdub 30-ga, piisab murru $\frac{3}{8}$ nimetaja ning lugeja korrutamisest 6-ga $(30 : 5 = 6)$, mistõttu murru suurus ei muutu. Tekib murd $\frac{18}{48}$, mis võrdub $\frac{3}{8}$-ga. Võrrelnud murdu $\frac{18}{48}$ murruga $\frac{11}{41}$, näeme, et otsitav arv on 7. **140.** 19. **141.** 22. Näpunäide. Kui antud murru lugejast lahutada ja nimetajaga liita üks ning sama arv, siis lugeja ja nimetaja summa ei muutu.

142. 424. Näpunäide. Raamatu lehekülgede nummerdamiseks on kasutatud 9 ühekohalist arvu — 9 numbrit, 90 kahekohalist arvu — 180 numbrit, ja mingisugune arv kolmekohalisi arve. Seda kolmekohaliste arvude hulka on kerge leida. Kõigi kolmekohaliste arvude numbreid on $1164-(9+180)=975$, seega on kasutatud $975:3=325$ kolmekohalist arvu. Kokku on kasutatud raamatu lehekülgede nummerdamiseks $9+90+325=424$ arvu. **143.** 1794. **144.** 1) $(10+1)\cdot(2+1)=33$; 2) $3\cdot4\cdot6=72$. **145.** Näpunäide. Ühekohalisi arve on 9. Need hõivavad esimesed 9 kohta. Siis tulevad kahekohalised arvud, mida on 90. Numbrid, mis neid väljendavad, hõivavad järgmised 180 kohta jne. Tähendab, sajandale kohale tuleb kirjutada mingi kahekohalise arvu number. Leiame selle arvu. $100-9=91$. 91 jagame 2-ga. Jagatiseks saame 45 ja jäägiks 1. Seepärast seisab sajandal kohal 46-nda kahekohalise arvu esimene number, 46. kahekohaline arv on aga 55. Järelikult on otsitav number 5. **146.** 7 töölist; 520 rbl. **147.** 176 õpilast. **148.** 4 venda ja 3 õde. **149.** 10 km kaugusele linnast; 3 tundi. **150.** 4 rbl. 80 kop. **151.** 7 lammast ja 5 lammast. **152.** 3 keppi ja 4 hakki. **153.** 84 aastat. **154.** 50 aastat ja 14 aastat. **155.** $65\frac{5}{11}$ min. pärast. **156.** $21\frac{9}{11}$ min. pärast. **157.** 85 714. **158.** 4. **159.** 1) Antud murd. 2) Arvuga $1+\frac{1}{b}$, kus b on antud murru nimetaja. **160.** 4 kvalifitseeritud, 6 kvalifitseerimata töölist. Näpunäide. Olgu kvalifitseeritud tööliste arv x, kvalifitseerimata tööliste arv aga y. Siis $21x+15y=174$ või $7x+5y=58$. Teist võrrandit ei saa koostada, kuid tuleb pidada silmas, et x ja y on mittenegatiivsed täisarvud. Andes x-le järjest väärtusi 0, 1, 2, 3 jne., võib arvutada vastavad y väärtused. Arvutuste tulemused võib kirjutada tabeli kujul:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$=\frac{58-7}{5}$	$\frac{58}{5}$	$\frac{51}{5}$	$\frac{44}{5}$	$\frac{37}{5}$	6	$\frac{23}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$

Suuremaid väärtusi kui 8 ei saa x omandada, sest vastavad y väärtused on negatiivsed. Saadud tabel näitab, et ainult x väärtuse puhul, mis võrdub 4-ga, on vastav y väärtus positiivne täisarv. Ülesande vastusteks ongi need x ja y väärtused. **161.** Ülesanne on lahendatav. Tõepoolest, tema tingimuste järgi võib koostada kaks kolme tundmatuga võrrandit, nimelt: $3x+5y+25z=100$, $x+y+z=20$.

Elimineerides neist võrranditest x, saame $y+11z=20$. Siit $y=20-11z$. Ülesande tingimuse järgi $y\leqslant 20$ (kuid suurem või võrdne 0-ga). Tähendab, z võib olla ainult 0 või 1. On kaks võimalust: 1) $z=0$, $y=20$, $x=0$; 2) $z=1$, $y=9$, $x=10$. **162.** Ülesandel on kaks lahendit, nimelt: a) 3 vihikut à 7 kop. ja 8 vihikut à 4 kop., b) 7 vihikut à 7 kop. ja 1 vihik à 4 kop. **163.** $\frac{ant-100P}{(a-b)t}$ lehma, $\frac{100P-bnt}{(a-b)t}$ hobust. **164.** $a=1-\frac{3}{y}+\frac{x}{y}$. **165.** 1) Võrrandil ei ole lahendeid; 2) selle võrrandi lahendiks on iga arv; 3) võrrandil ei ole lahendeid: arv -2 ei ole tema lahendiks, sest kui $x=-2$, kaotavad mõlemad võrrandi pooled mõtte; 4), 5) — võrrandeil ei ole lahendeid. **166.** 1) Süsteemil ei ole lahendeid; 2) süsteemil on lõpmata palju lahendeid ($14y+4$, y, $1+5y$, kus y on suvaline arv). **167.** Kontrolli end ise, lahendades koostatud süsteemid. **168.** 1) Selle võrratuse lahendiks on iga arv; 2) ja 3) — lahendeid ei ole; 4) lahend — iga 2-st erinev arv.

169. 1) $7\frac{1}{2}\cdot 6\frac{1}{2}=\left(7+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(7-\frac{1}{2}\right)=7^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=48\frac{3}{4}$; 2) $\left(12-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(12+\frac{1}{4}\right)=144-\frac{1}{16}=143\frac{15}{16}$; 3) otsitav summa on $199+195+191+\ldots+7+3=(3+199)\cdot 25=5050$ (algul kasutame ruutude vahe valemit). **170.** 1) 0; 2) 0; 3) 200. Näpunäide. Esimesel juhul saab viimane tegur a^2-b, kui $a=5$ ja $b=25$, võrdseks 0-ga. Kolmandal juhul: $87^2-86\cdot 87+113=87(87-86)+113=87+113=200$. **171.** Tuleb $\frac{32}{1-a^{32}}$. Kui $a=2$, võrdub avaldis — $\frac{32}{4\,294\,967\,295}$. Näpunäide. Summeeritavad murrud tuleb järjest, alates kahest esimesest, viia ühisele nimetajale. **172.** Kui $a\geqslant 0$, vahe $|a|-a$ on 0, $a<0$ puhul on ta $2|a|$. **173.** Kui $a\geqslant 0$, summa $|a|+a$ on $2a$, $a<0$ puhul on ta 0. **174.** Kui $a\geqslant 0$, on murd $\frac{a+|a|}{2}$ võrdne a-ga, $a<0$ puhul 0-ga. **175.** 1) $2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}$, $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}$. Esimesest võrdusest lahutame liikmeti teise. Saame: $S=2-\frac{1}{1024}=\frac{2047}{1024}=1\frac{1023}{1024}$. 2) $2S=2+2^2+2^3+2^4+2^5+\ldots+2^{63}+2^{64}$, $S=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\ldots+2^{63}$.

Esimesest võrdusest lahutame liikmeti teise. Saame: $S=2^{64}-1$. Jääb arvutada 2^{64}. Seda on lihtsam teha nii: $2^3=8, 2^9=8^3=512$, $2^{27}=512^3=134217728$, $2^{54}=134217728^2=18\,014\,398\,509\,481\,984$,

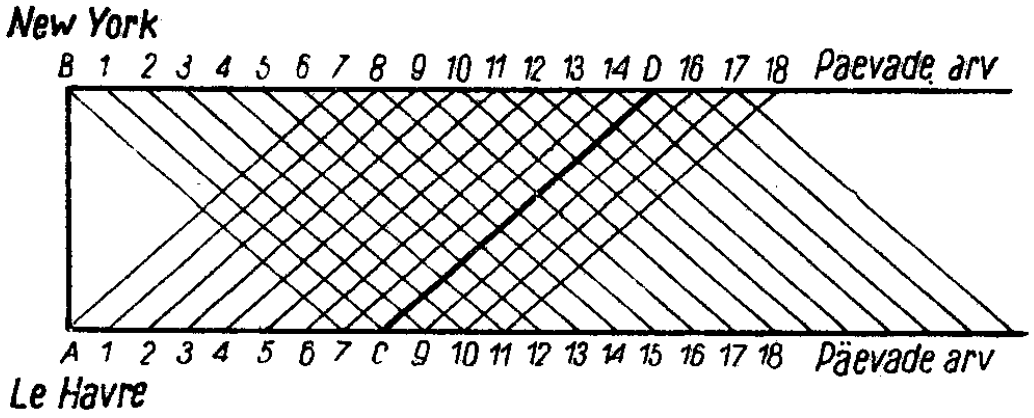
$2^{10}=2^9\cdot 2=1024$, $2^{64}=2^{54}\cdot 2^{10}=18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$. Järelikult $S=18\,446\,744\,073\,709\,551\,616\approx 184\cdot 10^{17}$. **176.** 16 807 mõõtu. **177.** 20 971 rbl. 52 kop. **178.** 42 949 672 rbl. 95 kop. **179.** Punkt, mis esitab arvu 1, asetseb murde $\frac{p}{q}$ ja $\frac{q}{p}$ kujutavate punktide vahel, sest $\frac{p}{q}$ on lihtmurd, $\frac{q}{p}$ aga liigmurd. Punktile 1 asetseb lähemal punkt $\frac{p}{q}$, sest $1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q}$, aga $\frac{q}{p}-1=\frac{q-p}{p}$, kuid murd $\frac{q-p}{q}$ on väiksem kui $\frac{q-p}{p}$. **180.** Väikseim väärtus on 1. Näpunäide.

$$4x^2-12x+10=4x^2-2\cdot 2x\cdot 3+9+1=(2x-3)^2+1.$$

Antud avaldis omandab väikseima väärtuse $(2x-3)^2$ väikseima väärtuse korral, kuid avaldise $(2x-3)^2$ väikseim väärtus on $0\left(\text{kui } x=\frac{3}{2}\right)$. Kasulik on ehitada antud kolmliikme graafik. **181.** Kui $x=0$. Näpunäide. $\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$. Vahe $1-\frac{2}{x^2+1}$ on väikseim, kui murd $\frac{2}{x^2+1}$ on suurim. Kuid murd $\frac{2}{x^2+1}$ on suurim siis, kui nimetaja on väikseim. Nimetaja x^2+1 omandab väikseima väärtuse $x=0$ puhul. **182.** Tuuletu ilmaga kulub lennuks vähem aega. Seda tuleb arvestada kõigil transpordiala töötajail. Näpunäide. Olgu Moskva ja Kiievi vahemaa a km, lennuki omakiirus $v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, tuule kiirus aga $u\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Siis lennuaeg sinna ja tagasi tuuletu ilmaga on $\frac{2a}{v}$ (tundi), tuule korral aga $\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}$ (tundi). Summat $\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}$ võib teisendada nii: $\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}=\frac{av-au+av+au}{v^2-u^2}=\frac{2av}{v^2-u^2}=\frac{2a}{v-\frac{u^2}{v}}$.

Võrreldes kaht avaldist $\frac{2a}{v}$ ja $\frac{2a}{v-\frac{u^2}{v}}$, märkame, et esimene on teisest väiksem, sest tema nimetaja on teise nimetajast suurem, lugejad on aga võrdsed. **183.** $37{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Näpunäide. Tähistame linnade vahemaa a km. Siis kogu tee (sinna ja tagasi) sõidab auto $\frac{a}{50}+\frac{a}{30}$ (tunniga). Tähendab, keskmine kiirus on $\frac{2a}{\frac{a}{50}+\frac{a}{30}}=\frac{2a}{a\frac{8}{150}}=\frac{300}{8}=37{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

184. 15. Siia hulka kuuluvad ka need kaks aurikut, millega kohtub New Yorki sõitev aurik Le Havre'is (lahkumise momendil) ja New Yorgis

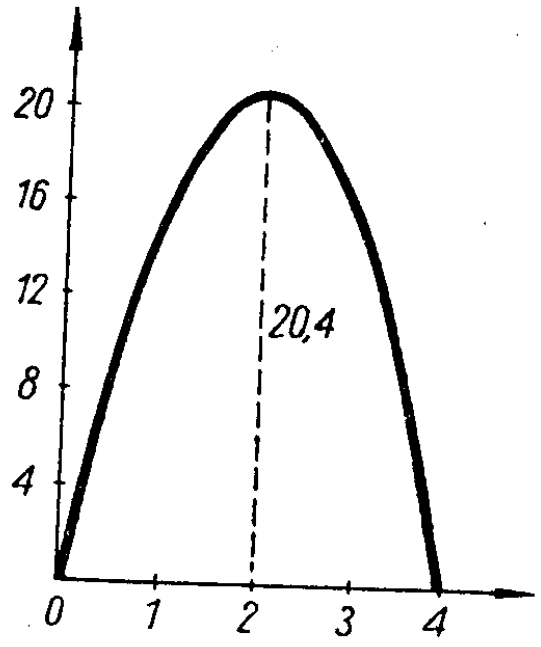


Joon. 74

(saabumise momendil). Näpunäide. See ülesanne lahendub kõige selgemini graafiliselt. Joonisel 74 on laevade liikumise graafikud. Piki horisontaali märgitakse päevade arv, piki vertikaali aga laevade poolt läbitav tee. Sirglõik AB kujutab Le Havre'i ja New Yorgi vahelist kaugust (mööda aurikute liikumisteed). Liikumisgraafikute lõikepunktid väljendavad aurikute kohtumisi (meenuta rongide liikumisgraafikuid). Kui jälgida graafikult ühe Le Havre'ist New Yorki sõitva auriku liikumist (joonisel lõik CD), siis selle graafiku ja New Yorgist Le Havre'isse sõitvate aurikute liikumisgraafikute lõikepunktide otsene loendamine annab arvu 15. Tähendab, on 15 kohtumist. **185.** 6 (kaasa arvatud aurik, mis saabus Sokolki sadamasse kaatri väljumise momendil, ja aurik, mis väljus Kirovi sadamast kaatri saabumise momendil). See ülesanne, nagu eelminegi, lahendub kergesti graafiliselt. **186.** $(2n-1)^2=2(2n^2-2n)+1$. **187.** Arv ise ei või olla paaritu, sest siis tema ruut (vt. eelmist ülesannet) oleks paaritu arv. **188.** $(2n)^2=4n^2$. **189.** $(n+1)^2-n^2=2n+1$. **190.** $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$. **191.** $n(n+1)+(n+1)=(n+1)^2$. **192.** $2n(2n+2)=4n(n+1)$. Üks arvudest n ja $n+1$ on paarisarv. Seega $4n(n+1)$ on arvu 8 kordne. **193.** Olgu a selle arvu kümneliste arv ja b üheliste arv. Siis $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$, a $\neq$ b. Kolmekohalise arvu puhul jagub vahe 99-ga. **194.** $1+3+5+7+\ldots+(2n-7)+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)$. Võtame selliste arvupaaride summad: $1+(2n-1)=2n$, $3+(2n-3)=2n$, $5+(2n-5)=2n$ jne. Kokku on selliseid summasid $\frac{n}{2}$. Igaüks neist võrdub $2n$-ga, järelikult otsitav summa on $2n\frac{n}{2}=n^2$. **195.** $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$; $35^2=1225$; $55^2=3025$; $125^2=15\,625$. **196.** $n(n+1)(n+2)$. Üks või koguni kaks neist arvudest on paarisarvud ja üks on kindlasti arvu 3 kordne. Järelikult jagub nende arvude korrutis 6-ga. **197.** Kui kolme järjestikuse arvu (naturaalarvu) summa on paaritu arv, siis esimene neist arvudest on paaris-, teine paaritu, kolmas paarisarv. Tähendab, kolmest antud

arvust kaks jaguvad 2-ga. Veel jagub üks neist kahest arvust 4-ga. Peale selle jagub üks kolmest järjestikusest naturaalarvust kindlasti 3-ga. Järelikult kolme sellise järjestikuse naturaalarvu korrutis jagub 2-, 4-, 8-, 3-, 6-, 12-, 24-ga. **198.** $m^3-m=m(m+1)(m-1)=(m-1)m(m+1)$. Meil on kolme järjestikuse naturaalarvu korrutis, mis tingimata jagub 6-ga (vt. ülesanne 196). **199.** $m=2n-1$, $(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1=4n(n-1)=4(n-1)n$. Arvud $n-1$ ja n on järjestikused naturaalarvud. Üks neist on kindlasti paarisarv. Tähendab, $4(n-1)n$ jagub alati 8-ga. **200.** $m^3-m=(m-1)m(m+1)$. Arvud $m-1$ ja $m+1$ on paarisarvud. Tähendab, üks neist jagub 2-ga, teine 4-ga, s. t. nende korrutis jagub 8-ga. Peale selle jagub üks kolmest järjestikusest naturaalarvust 3-ga. Seepärast jagub vaadeldav vahe 24-ga. **201.** $(4n+1)(4m+1)=16nm+4m+4n+1=4(4mn+m+n)+1$. **202.** $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2+2n)\cdot(n^2+2-2n)=[(n+1)^2+1][(n-1)^2+1]$. **203.** $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2=a^2c^2+d^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+2abcd-2abcd=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$. **204.** Võtame arvud 2, 4, 8, 16, 32, 64 jne. lõpmatult. Igaüks neist on 2 korda eelmisest suurem. Kõiki neid arve võib kirjutada arvu 2 astmetena, siis saame 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ... Astendajad on järjestikused naturaalarvud, kuid naturaalarve, nagu teada, on lõpmata palju. Niisiis leidub arvu 2 astmete vahel lõpmata palju vahemikke, igaüks neist vahemikest aga sisaldab vähemalt ühe algarvu. Seepärast on algarve lõpmata palju. **212.** 1) $y=\frac{1}{3}x$; 2) $y=\frac{1}{2}x+3$; 3) $y=-x+4$. Näpunäide. Kolmandat sõltuvust võib väljendada valemiga nii. Otsitava valemi üldkuju on $y=ax+b$, seepärast on x ja y vahelist sõltuvust väljendavaks graafikuks sirge. Valime a ja b arvutamiseks kaks punkti, mida läbib selle sõltuvuse graafik, näiteks $A(0,4)$ ja $B(4,0)$, ning nende koordinaadid paigutame võrrandisse $y=ax+b$. Saame: $4=b$ ja $0=4a+b$. Seega $b=4$, $a=-1$. **213.** Antud juhul on sõltuvuse graafikuks sirge, mis läbib koordinaatide algust. Seepärast peab valemi üldkuju olema $l=at$. Vaja on arvutada a. Kuid et ehitatav sirge läbib punkti koordinaatidega $t=165$ ja $l=2$, siis peab olema $2=165a$, millest $a=\frac{2}{165}$. Seega $l\approx\frac{2t}{165}$. **214.** Selle sõltuvuse graafikuks (küllaldase täpsusega) on koordinaatide algust läbiv sirge. Sõltuvuse valemiks on sellisel juhul $l\approx\frac{1}{2220}\cdot P$. Varva pikkus $\approx 3{,}003$ m. **215.** Leiame sirge BC võrrandi. Tema üldkuju on $y=ax+b$. Paigutame siia a ja b määramiseks punktide B ning C koordinaadid. Saame süsteemi $\begin{cases}5=b\\0=12a+b.\end{cases}$ Lahendame selle: $b=5$, $a=-\frac{5}{12}$. Seega sirge BC võrrand on niisugune: $y=-\frac{5}{12}x+5$. Väiksem püstkandur on võrdne selle

sirge ordinaadiga, kui $x=7$, s. t. $-\frac{5}{12}\cdot 7+5\approx 2{,}08$ (m). Suurema kanduri pikkus on $-\frac{5}{12}\cdot 3+5=3{,}75$ (m).



Joon. 75

216. Antud juhul on t ja h vahelise sõltuvuse graafik niisugune (joon. 75). Kivi tõusu suurim kõrgus on 20,4 m. Sellel kõrgusel on kivi 2 sek. pärast. Kivi kukub maha 4 sek. pärast. **217.** Esimene parabool on funktsiooni $y=ax^2+c$ graafikuks, kus a ja c on tundmatud koefitsiendid (antud juhul ruutkolmliikme üldkujus ax^2+bx+c $b=0$, sest parabooli haripunkt on teljel Oy). Võtame parabooli mingi kahe punkti koordinaadid, näiteks (0, −2) ja (2,0), ning asetame need võrrandisse $y=ax^2+c$. Saame kaks esimese astme võrrandit kahe tundmatuga $\begin{cases}-2=c\\0=4a+c.\end{cases}$ Lahendades selle süsteemi, leiame: $c=-2$, $a=\frac{1}{2}$. Seega on esimene parabool funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2-2$ graafikuks.

Teine parabool, mille haripunkt ei asetse teljel Oy, on funktsiooni $y=ax^2+bx+c$, kus a, b ja c on tundmatud koefitsiendid, graafikuks. Koefitsientide määramiseks võtame parabooli mingi kolme punkti koordinaadid, näiteks (0,1), (1,3) ja (2,1), ning paigutame need võrrandisse $y=ax^2+bx+c$. Saame kolme võrrandi süsteemi:
$\begin{cases}1=c\\3=a+b+c\\1=4a+2b+c.\end{cases}$ Lahendades selle süsteemi, leiame: $c=1$, $a=-2$, $b=4$. Seega $y=-2x^2+4x+1$. **218.** Antud juhul on parabooli võrrandil kuju $y=ax^2+c$. Asetame sellesse võrrandisse a ja c määramiseks punktide B ning C koordinaadid: $\begin{cases}2=c\\0=144a+c\end{cases}$ $c=2$, $a=-\frac{1}{72}$, seepärast aga $y=-\frac{x^2}{72}+2$. Sammaste pikkuste arvutamiseks on vaja leida y väär-

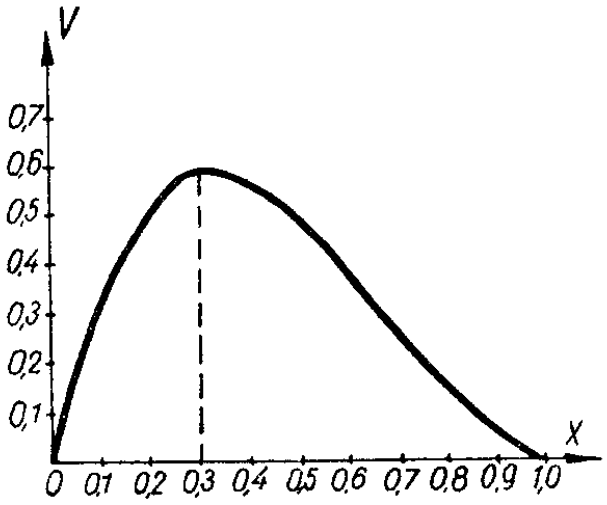
---

[34] Ülesandeid 219—221 võib lahendada graafiliselt. On vaja ehitada saadud funktsioonide graafikud ja leida nende järgi tarvilikud suurused.

tused x väärtuste puhul 4 ja 8. Saame: 1,78 m ja 1,11 m. **219.**[34] Sissejoonestatud ruudu külg võrdub Pythagorase teoreemi järgi $\sqrt{x^2+(2-x)^2}$, s. o. $\sqrt{2x^2-4x+4}$, seega aga selle ruudu pindala on $S=2x^2-4x+4$. Et leida, millisel x väärtusel sissejoonestatud ruudu pindala, võrdudes $2x^2-4x+4$, on väikseim, toimime nii: $2x^2-4x+4=$ $=2(x^2-2x+2)=2[(x^2-2x+1)+1]=2[(x-1)^2+1]$. Siin omab $(x-1)^2$ väikseima väärtuse, kui $x-1=0$, s. o. kui $x=1$. Seepärast on sissejoonestatud ruudu pindalal väikseim väärtus 2, kui $x=1$. **220.** Kui tähistame ristküliku pikkuse x-ga, siis tema laius on $8-x$, pindala aga $S=x(8-x)$, s. t. $S=-x^2+8x$. Tuleb teha kindlaks, millise x väärtuse puhul on S väärtus suurim. Võib toimida nii: $-x^2+8x=-$ $-(x^2-8x+16-16)=-[(x-4)^2-16]=-(x-4)^2+16$. Saadud avaldise väärtus on suurim, kui $x-4=0$, s. o. kui $x=4$. **221.** Tähistame maatüki pikkuse x-ga, siis tema laius on $\frac{100-x}{2}$, seega aiaga piiratud maatüki pindala on $S=x\frac{100-x}{2}$ või $S=-\frac{1}{2}x^2+50x$. Kuid $-\frac{1}{2}x^2+50x=-$ $=-\frac{1}{2}(x^2-100x+2500-2500)=-\frac{1}{2}[(x-50)^2-2500]=-\frac{1}{2}(x-50)^2+1250$. Saadud avaldise väärtus on suurim, kui $x-50=0$, s. o. kui $x=50$. Maatüki pikkus on 50 m, laius aga 25 m. **222.** Karbi põhjaks oleva ruudu külg on $2-2x$, seega karbi ruumala on $V=(2-2x)^2x$ ehk $V=4x^3-8x^2+4x$. Selle funktsiooni graafiku ehitamiseks koostame tabeli $(0<x<1)$:

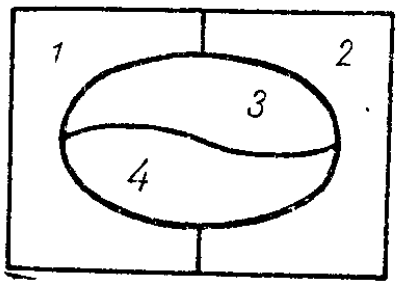
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
V	0,32	0,51	0,59	0,58	0,5	0,38	0,25	0,13

Graafiku järgi (joon. 76) on näha, et karbi ruumala on suurim, kui $x=0{,}3$ dm. **224.** $\approx 7{,}5$ m. **225.** ≈ 616 cm^2. **226.** ≈ 1130 km^2. **227.** $\sqrt{2d}$, kus d on kummagi asendatava toru diameeter. **228.** 252 cm^3. **229.** Esimese valatud eseme sisemuses on tühikud koguruumalaga 0,03 dm^3. **230.**

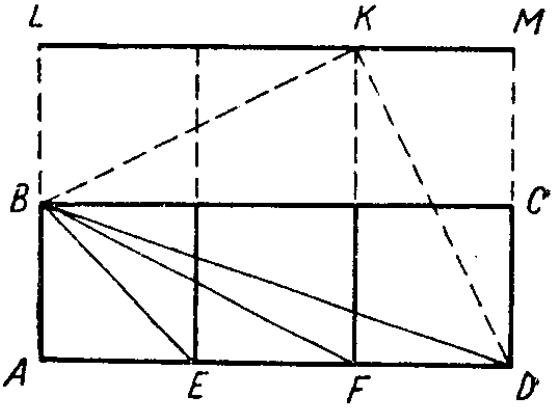


Joon. 76

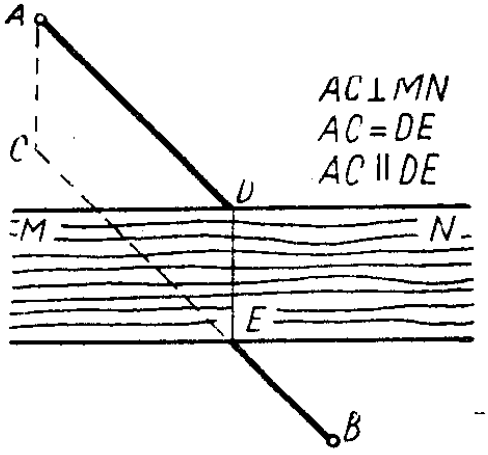
0,02 mm. **231.** Kuubi serv oleks suurem kui 18 m, kuid väiksem kui 19 m. **232.** Jääb muutumatuks. **233.** 62,5 G. **234.** Kolme siseringi pindala on suurem. **235.** Selline kontrollimine on usaldamatu. Rombil, mis ei ole ruut, on samuti võrdsed küljed. **236.** Ka see kontrollimine pole usaldatav. Ristkülikul, mis ei ole ruut, on ka võrdsed diagonaalid. **237.** Selline kontrollimine on samuti usaldamatu. Tööline oleks pidanud kasutama üht ruudu omadust, näiteks külgede võrdsust ja diagonaalide võrdsust. **238.** Ruut. Näpunäide. Olgu ristküliku pikkus x. Siis laius on $18-x$, seega aga pindala võrdub $x(18-x)$ ehk $-x^2+18x$. Kuid $-x^2+18x=-(x^2-18x)=-(x^2-2\cdot x\cdot 9+$ $+81-81)=-[(x-9)^2-81]$. Avaldisel $-[(x-9)^2=81]$ on suurim väärtus, kui $x-9=0$. Tähendab, ristküliku pikkus peab olema 9 cm, siis on aga ka laius 9 cm. Tekib ruut. **239.** Näiteks joonisel 77 kujutatud nelja ala värvimiseks ei piisa kahest ega isegi kolmest värvist. **240.** Otstarbekas on joonisel 78 näidatud abikonstruktsioon. Ristkülik $BLMC$ võrdub ristkülikuga $ABCD$. Ta koosneb nagu antud ristkülikki kolmest ruudust. Kolmnurk BKD on täisnurkne ja võrdhaarne, sest $BK=KD$, $\angle BKD=90°$. Seega $\angle BDK=45°$. Peale selle $\angle AEB=45°$, $\angle AFB=\angle MDK$. Seepärast $\angle AEB+\angle AFB+\angle ADB=\angle BDK+$ $+\angle MDK+\angle ADB=90°$. **241.** Vt. joon. 79. **242.** Vt. joon. 80. **243.** Vt.



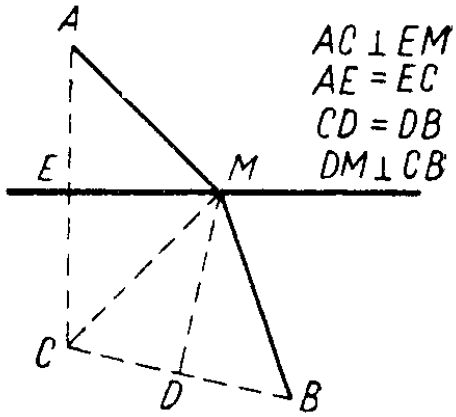
Joon. 77



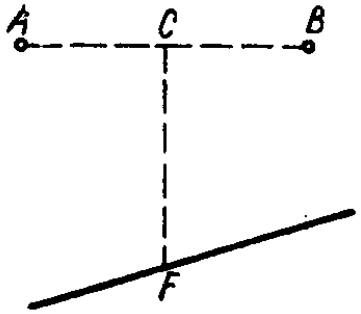
Joon. 78



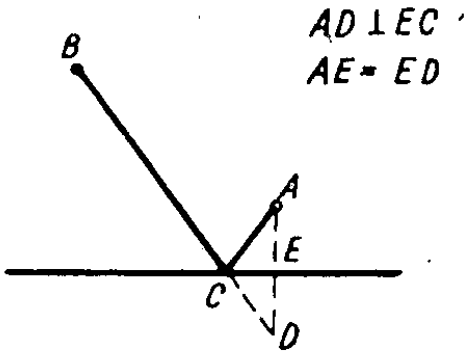
Joon. 79



Joon. 80



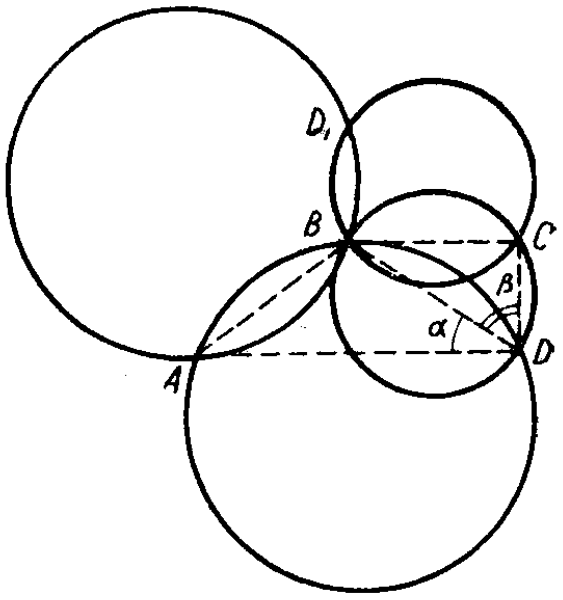
Joon. 81



Joon. 82

joon. 81. **244.** Vt. joon. 82. **245.** Otsitava geomeetrilise koha moodustavad kaks antud ringjoontega kontsentrilist ringjoont, mille raadiused on $\frac{R+r}{2}$ ja $\frac{R-r}{2}$. Teine ringjoon raadiusega $\frac{R-r}{2}$ sageli unustatakse. **246.** Üldjuhul tekib neli ringjoont. Neist kahe keskpunktid asetsevad antud sirgetest võrdsetel kaugustel paikneval sirgel ja antud ringjoone keskpunktist kaugusel $r+\frac{d}{2}$, kus r on antud ringjoone raadius ning d on paralleelide vaheline kaugus. Kahe teise ringjoone keskpunktid asetsevad samal sirgel, antud ringjoone keskpunktist kaugusel $\frac{d}{2}-r$. Neid kaht ringjoont sageli ei märgata.

247. Kaardile on vaja ehitada punktide geomeetriline koht, millelt sirglõik AB on nähtav nurga all α, ja punktide geomeetriline koht, millelt sirglõik BC on nähtav nurga all β (joon. 83). Ehitatavad geomeetrilised kohad lõikuvad kahes punktis D ja D_1. Üks neist punktidest ongi otsitav. Kumb nimelt neist kahest punktist on otsitav,

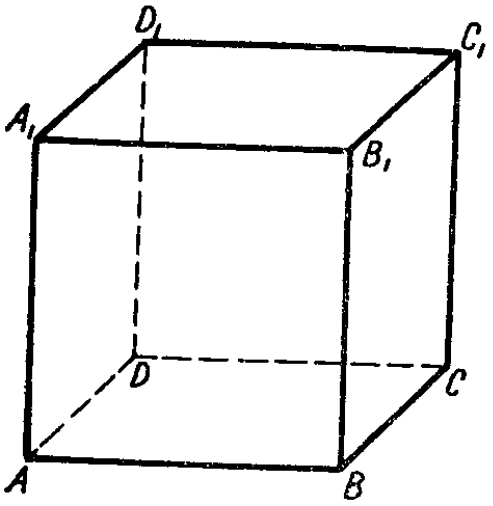


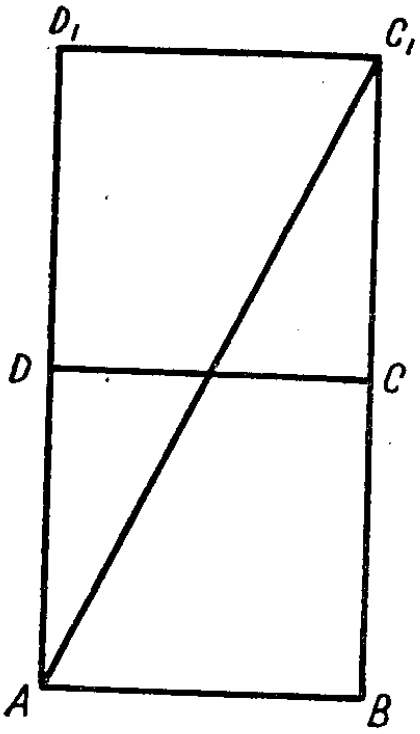
Joon. 83

ilmneb vaatleja asendist maastikul orientiiride A, B ja C suhtes. Võimalik on juhtum, kus kaared ADB ning BDC osutuvad ühe ringjoone kaarteks. Sel juhtumil on ülesanne määramatu. **248.** Tipust A on vaja minna mööda lühimat teed tippu C_1 (joon. 84). Võib liikuda mööda tahke $ABCD$ ja DCC_1D_1. Pöörame need kaks tahku nii, et nad asetseksid ühel tasapinnal. Lühim tee punktist A punktisse C_1 on tee mööda sirglõiku AC_1. Samasugune on lühim tee ka mööda teisi tahke. Lõigu AC_1 pikkus on ligikaudu 4,5 dm. (Joonisel 85 kujutab lõik AB

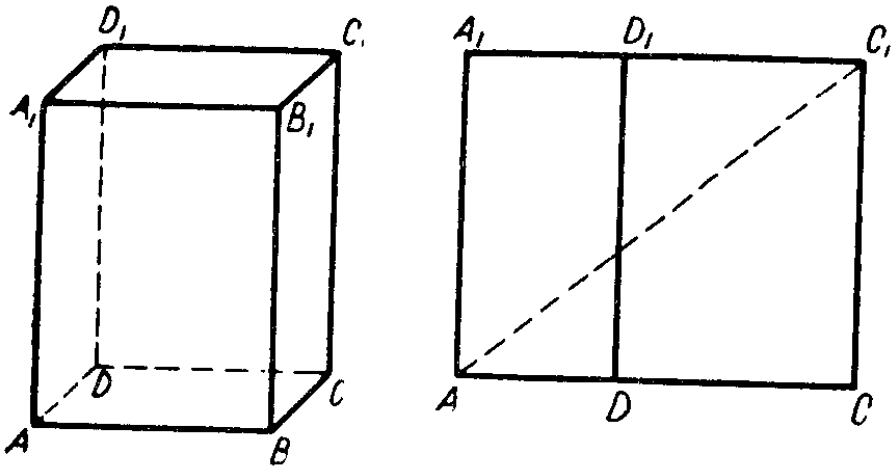
Joon. 84

Joon. 85



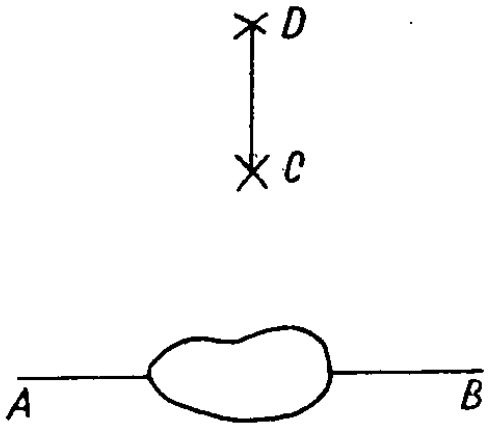


kuubi serva 2 dm.) **249.** Lühimaks teeks tipust A tippu C_1 on tee tahkudel ADD_1A_1 ja DCC_1D_1 või tahkudel ABB_1A_1 ja BCC_1B_1 (joon. 86). Pööranud tahud ADD_1A_1 ja DCC_1D_1 nii, et nad asetsevad ühel tasapinnal, saame ristküliku ACC_1A_1. Selle ristküliku diagonaal AC_1 ongi lühimaks teeks. Tema pikkus on 6,4 dm. Tee mööda tahke $ABCD$ ja CDD_1C_1 või mööda tahke ABB_1A_1 ja $B_1A_1D_1C_1$ on palju

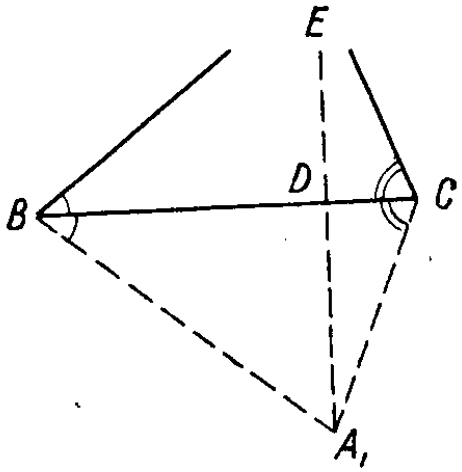


Joon. 86

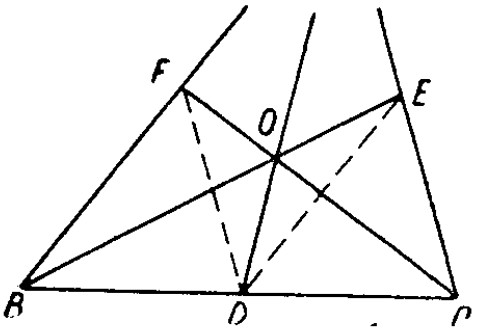
pikem. **250.** Konstruktsioon selgub jooniselt (joon. 87). **251.** Konstruktsiooni illustreerib joonis (joon. 88). $A_1D_1 \perp BC$, ED — osa otsitavast kõrgusest. (On võimalikud ka teistsugused lahendused.) **252.** Punkt D, mis jaotab külje BC kaheks võrdseks osaks, võib olla leitud. Saab leida kahe ülejäänud külje keskpunktid, tõmmates läbi punkti D sirged DE ja DF, mis on paralleelsed nende külgedega. Siis on kerge tõmmata kaks mediaani BE ja CF. Kolmas mediaan peab läbima-



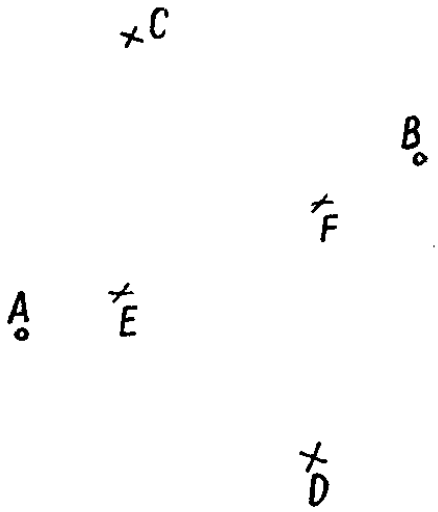
Joon. 87



Joon. 88

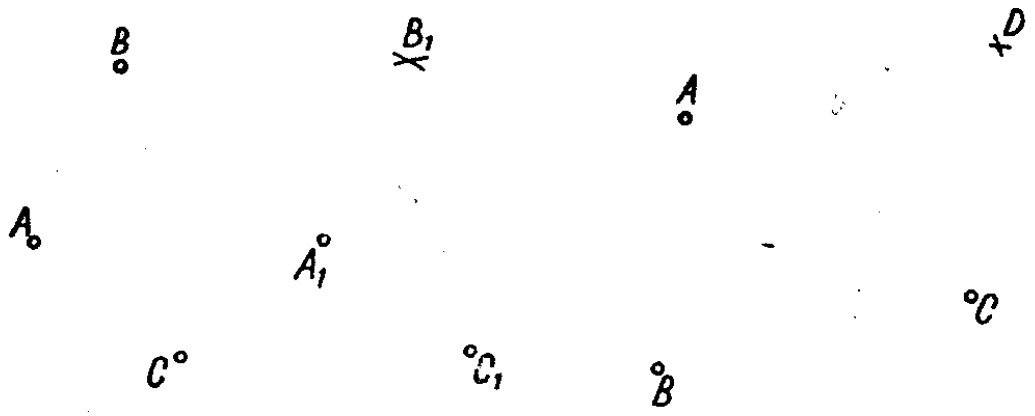


Joon. 89



Joon. 90

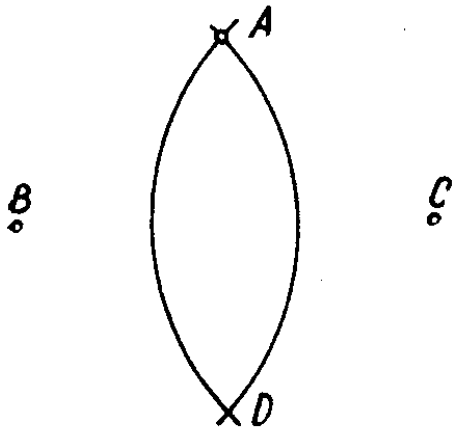
punkti D ning kahe esimese mediaani lõikepunkti (joon. 89). **253.** Võttes antud punktid A ja B keskpunktideks, tõmbame kaks lõikuvat sama raadiusega kaart. Võttes edasi keskpunktideks nende kaarte kaks lõikepunkti C ja D, tõmbame kaks kaart ühesuguse raadiusega, mis on lühem AC (joon. 90). Saame punktid E ja F, mis asetsevad otsitaval sirgel. **254.** Ehitame punktid A_1 ja C_1, mille vaheline kaugus on AC. Punktist A_1 raadiusega AB tõmbame kaare ning punktist C_1 raadiusega CB teise kaare (joon. 91). Nende kaarte lõikepunkt ongi otsitavaks punktiks B_1. **255.** Punktist C kui keskpunktist tõmbame kaare raadiusega AB. Siis tõmbame punktist A kui keskpunktist teise kaare raadiusega BC (joon. 92). Nende kaarte lõikepunkt ongi otsitavaks punktiks D. **256.** 1) Punktist B kui keskpunktist tõmbame kaare raadiusega AB ja punktist C raadiusega AC (joon. 93). Nende kaarte teine lõikepunkt D ongi otsitavaks punktiks. 2) Konstruktsioon on samasugune. **257.** Punktidest A ja B kui keskpunktidest

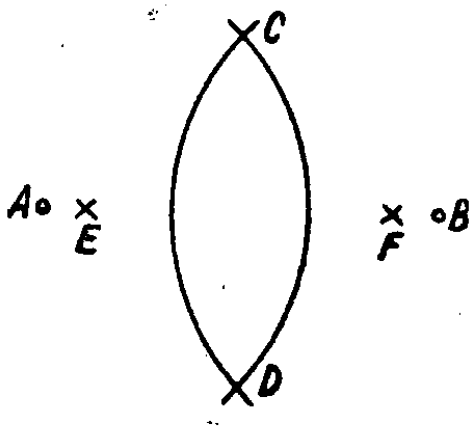


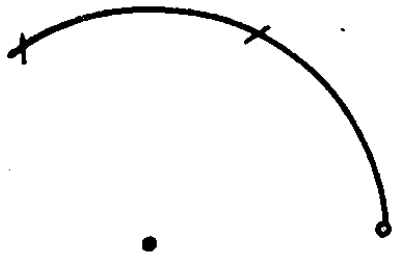
Joon. 91

Joon. 92

tõmbame kaks lõikuvat kaart. Nende kaarte kahest lõikepunktist C ja D tõmbame kaks lõikuvat ühesuguse raadiusega kaart (joon. 94). Nende kaarte lõikepunktid E ja F paiknevad sirgel AB. **258.** Esmalt tuleb ehitada nurk 60°. Selle poolitamisel saame nurga 30°. Nurga 90° võib ehitada nii. Esiteks ehitame nurga 120°, võttes kaks 60°-st nurka. Seejärel poolitame ühe neist nurkadest. Siis nurkade 30° ja





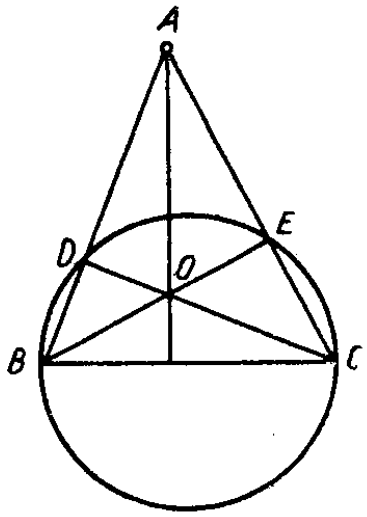


Joon. 93

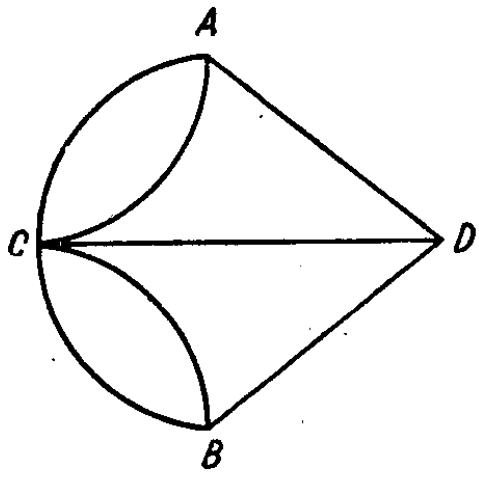
Joon. 94

Joon. 95

60° summa annab nurga 90° (joon. 95). **259.** Antud sirglõigu BC otspunktid ühendame punktiga A sirglõikude abil. Nende sirglõikude ja ringjoone lõikepunktid D ning E ühendame antud sirglõigu otspunktidega. Saame sirglõigud CD ja BE (joon. 96). Need sirglõigud on kolmnurga ABC kõrgusteks. Kolmas kõrgus ongi BC ristsirgeks, mis on tõmmatud punktist A. See kolmas kõrgus peab läbima punkti

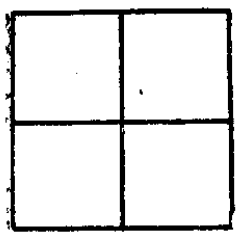


Joon. 96

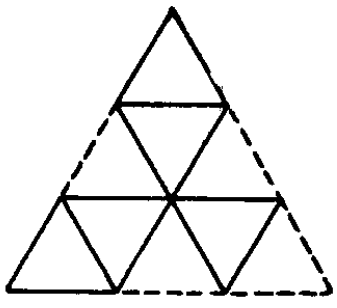


Joon. 97

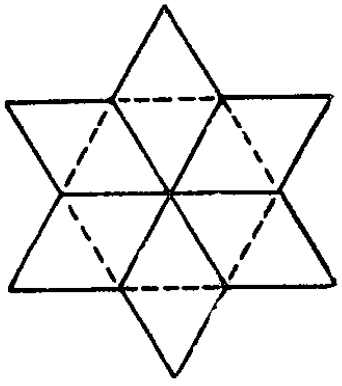
A ja kahe kõrguse lõikepunkti *O*. **260.** On võimalik — 1, 2, 3, 4, 8; ei saa — 5, 6, 7. N ä p u n ä i d e. Kujundi paaristipuks nimetatakse tema niisugust tippu, millest väljub paarisarv jooni, kui aga joonte arv on paaritu, siis nimetame tippu paarituks. Selleks et määrata, kas on võimalik kujundit joonestada katkestamatu liikumisega, tuleb esmalt kindlaks teha, kas sellel kujundil on paarituid tippe ja mitu neid on. Iga paaristipp on läbitav. Iga kord, jõudes sellesse, on võimalik väljuda. Paaritu tipu korral on asi teisiti. Sellises tipus võib liikumine alata või lõppeda, sest paaritutesse tippudesse viivaid teid on paaritu arv. Seepärast — kui paarituid tippe on enam kui kaks, ei saa kujundit katkestamatu liikumisega joonestada. Juhul kui kujundi kaks tippu on paaritud, peab alustama joonestamist ühes neist tippudest ja lõpetama teises. **261.** See Euleri ülesanne on samaväärne järgmise ülesandega: joonestada pideval liikumisel kujund, mis on esitatud joonisel (joon. 97), kus punktid *A* ja *B* tähistavad kaldaid, punktid *C* ja *D* saari, punkte ühendavad jooned aga sildu. Selle kujundi vaatlus sunnib järeldama, et pideva liikumisega teda joonestada ei saa, sest tema kõik neli tippu on paaritud. Tähendab, läbida 7 silda, millest räägib ülesandes Euler, ületamata ühtki sil-



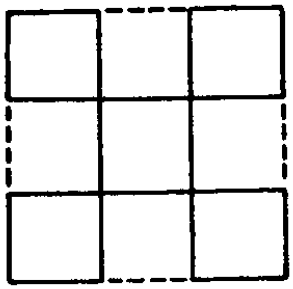
Joon. 98



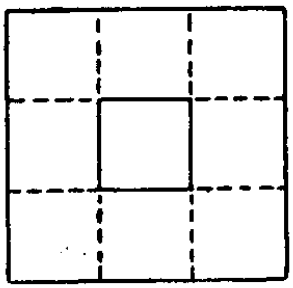
Joon. 99



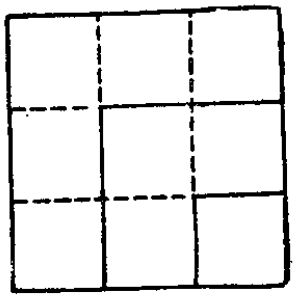
Joon. 100



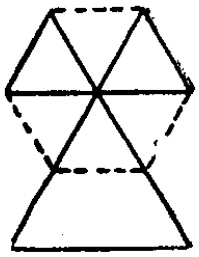
Joon. 101



Joon. 102

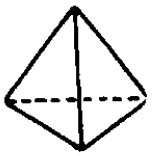


Joon. 103

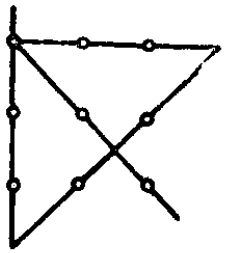


Joon. 104

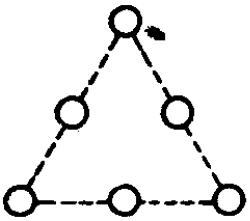
da kaks korda, ei saa. Kui poleks olnud kolmandat ja neljandat silda, siis oleks võinud ülejäänud sillad ületada nii, nagu nõutakse ülesandes. **262.** Vt. joon. 98. **263.** Vt. joon. 99. **264.** Vt. joon. 100. **265.** 1) Vt. joon. 101. 2) Vt. joon. 102. 3) Vt. joon. 103. **266.** Vt. joon. 104. **267.** Vt. joon. 105. Tekib ruumiline kujund (tetraeeder). **268.** Vt. joon. 106. **269.** Vt. joon. 107. **270.** Vt. joon. 108. **271.** Vt. joon. 109. **272.** Vt.



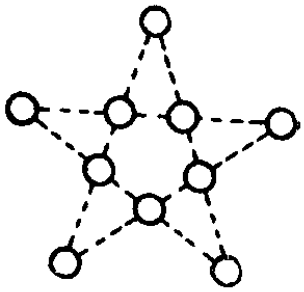
Joon. 105



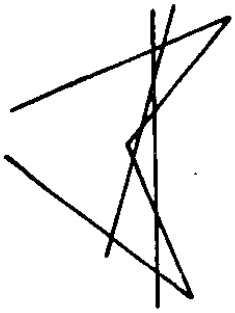
Joon. 106



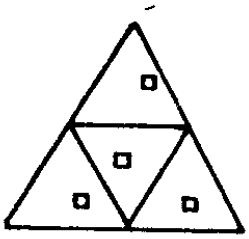
Joon. 107



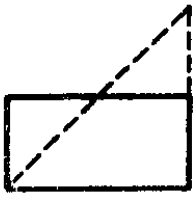
Joon. 108

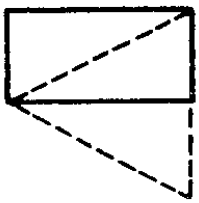


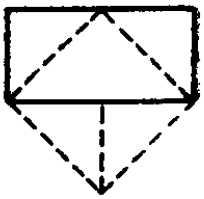
Joon. 109



Joon. 110

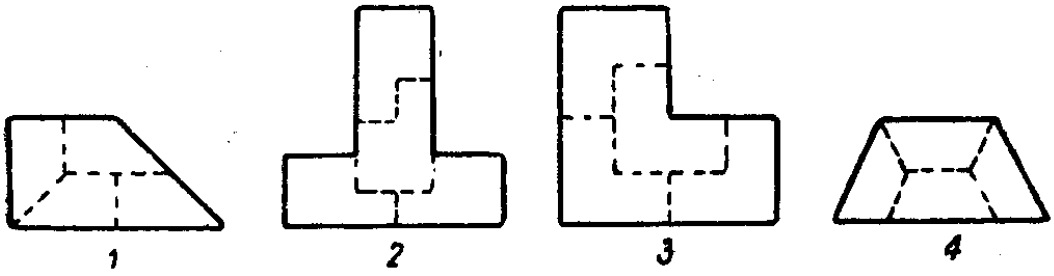




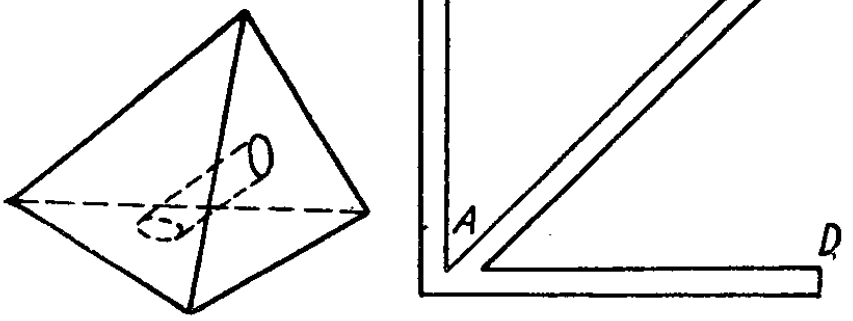


Joon. 111

joon. 110. **273.** Vt. joon. 111. **274.** Vt. joon. 112. **275.** Kolmnurkse põhjaga püramiid (tetraeeder, vt. joonis 113). **276.** 6. **277.** 10. **278.** 1) 20; 2) 28. **279.** 6. **280.** 4 korda. **281.** Vt. joon. 114. $\angle CAD = 90°$, AB on selle nurga poolitaja. Võib kasutada ka joonestuskolmnurka. Sellel ja teistel juhtudel peab tõmbama kaks diameetrit. **282.** 5 cm. Näpunäide. Lõik AB võrdub ringjoone raadiusega. **283.** Vt. joon. 115. **284.** Vt. joon. 116. **285.** Vt. joon. 117. **286.** Vt. joon. 118. **287.** Vt. joon. 119. **288.** Vt. joon. 120. **289.** Vt. joon. 121. **290.** Vt. joon. 122. **291.** Vt. joon. 123. **292.** Väide on ekslik. Võrdle näiteks võrdsete

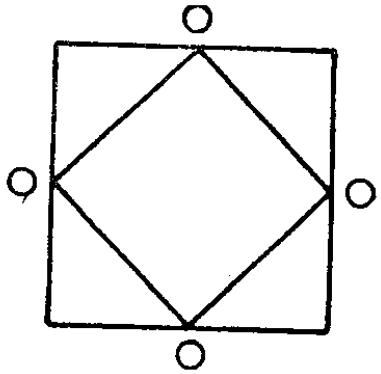


Joon. 112



Joon. 113

Joon. 114



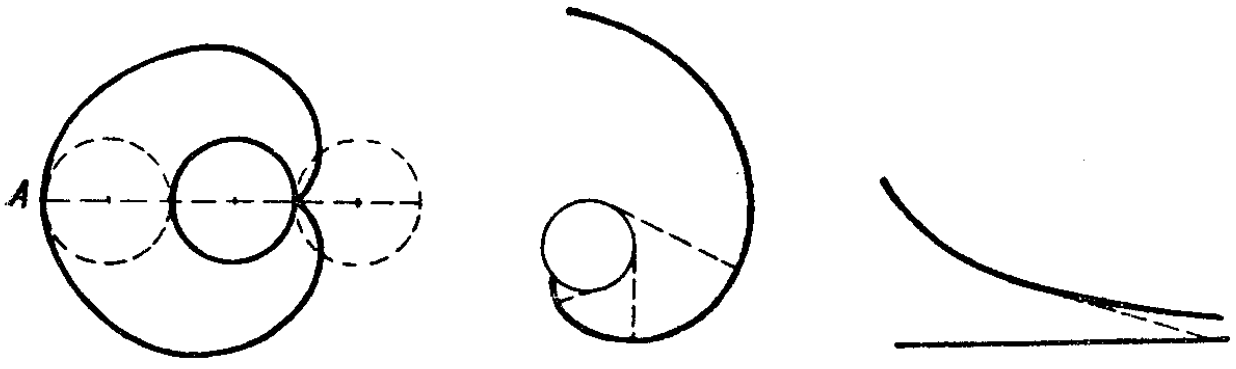
Joon. 115



Joon. 116

Joon. 117

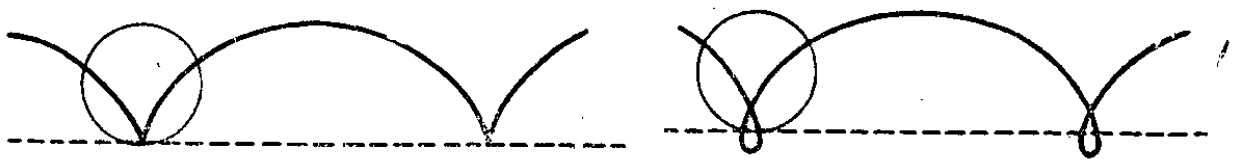
Joon. 118



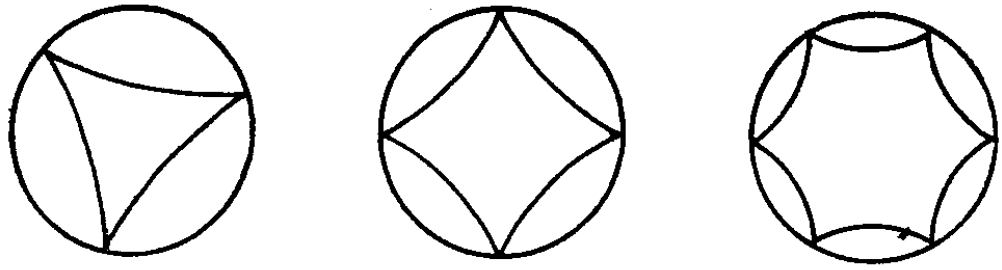
Joon. 119

Joon. 120

Joon. 121



Joon. 122



Joon. 123

ümbermõõtudega ruutu ja ristkülikut. **293.** Kinnise kõveraga, mille pikkus on l, ümbritsetud pindala pole suurem ringi pindalast, mida piirab ringjoon pikkusega l. Kuid sellise ringi pindala võib arvutada:

$$R=\frac{l}{2\pi},\ S_{\text{ring}}=\pi R^2=\pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2=\frac{l^2}{4\pi}.$$

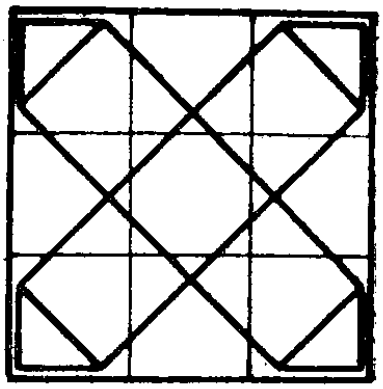
294. Õiged on 6), 7), 8) ja 10) väide, väärad 1), 2), 3), 4), 5), 9) ja 11). **300.** Kehtivad. **301.** Kehtib. **302.** Kehtivad: **303.** Ei kehti. **304.** Kolmnurgad võivad olla võrdsed, kuid võivad olla ka mittevõrdsed. **305.** Ei kehti. **306.** Pöördteoreem ja vastandteoreem ei kehti. **307.** Tingimus on tarvilik, kui ta järeldub väitest, s. o. kui kehtib pöördteoreem. Tingimus on piisav, kui temast järeldub väide, s. o. kui kehtib otsene teoreem. Tingimus on tarvilik ja piisav, kui kehtivad otsene ja pöördteoreem. 1) Piisav; 2) tarvilik; 3) piisav; 4) tarvilik ja piisav; 5) tarvilik; 6) piisav; 7) tarvilik ja piisav; 8) piisav; 9) tarvilik; 10) piisav; 11) tarvilik; 12) piisav; 13) tarvilik ja piisav; 14) mittepiisav ja mittetarvilik; 15) piisav; 16) tarvilik ja piisav. **308.** a) Kui ringis (või võrdsetes ringides) kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kõõlud. b) Kui ringis (või võrdsetes ringides) kõõlud on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kaared. **310.** Korrutis on paarisarv. **311.** Ei või. **313.** Kahe arvu korral on summa paarisarv, kolme arvu korral aga paaritu arv. **315.** Võib saada ka õige võrduse. **316.** Aastas on 365 või 366 päeva. Kui iga päev tähistaks oma sünnipäeva ainult üks õpilane, siis saaksid oma sünnipäeva tähistada vaid 365 või 366 inimest Kuid õpilasi oli 370. Vasturääkivus, mille juurde jõudsime, sunnib oletuse kõrvale jätma. Seega peab olema niisuguseid päevi, millal tähistavad oma sünnipäeva mitu õpilast. **318.** Kui kõigil kuuskedel oleks erinev arv okkaid, siis ei võiks olla kõiki kuuski metsas rohkem kui 500 001, sest igal kuusel ei ole rohkem kui 500 000 okast. Samal ajal oli metsas 550 000 kuuske. Seepärast ei saa eeldada, et kõigil kuuskedel oleks erinev arv okkaid. Järelikult leidub ühesuguse okaste arvuga kuuski. **319.** Kui klassis on 23 õpilast, siis ei saa väita, et seal on kaks õpilast, kelle perekonnanimed algavad sama tähega, sest tähestikus on tähti roh-

kem. Kui klassis on rohkem õpilasi kui tähestikus tähti, siis leidub klassis vähemalt kaks õpilast, kelle perekonnanimed algavad sama tähega. **320.** On piisav, kui tõestada, et kolme- ja viierublalistega saab maksta 8, 9 ja 10 rubla, sest järgmised arvud võib saada, liites nendele arvudele arvu 3 kordseid. Kuid $8=3+5$, $9=3+3+3$ ja $10=5+5$. **321.** Naturaalarvud, mis ei jagu 3-ga, on kujul $3n+1$ ja $3n+2$. On võimalikud ainult sellised juhud: 1) kõik kolm arvu on esimesel kujul, siis jagub nende summa 3-ga; 2) kolmest arvust on kaks esimesel kujul ja üks teisel, siis jagub 3-ga esimesel kujul oleva arvu ja teisel kujul oleva arvu summa; 3) üks arv on esimesel kujul ja kaks teisel kujul, siis on nagu teisel juhul; 4) kõik kolm arvu on teisel kujul, siis jagub nende summa 3-ga. **322.** Kui arv on paaritu, siis võib tema viimaseks numbriks olla 1, 3, 5, 7 või 9. Kuid arv 5-ga ei jagu, seega ei saa ta lõppeda numbriga 5. Lõpuks arvestame, et arvu ruut lõpeb sama numbriga, millega arv ise. See omadus on 1-ga lõppevail arvudel, 3-ga, 7-ga ja 9-ga lõppevail arvudel seda aga pole. Tähendab, arvu lõpus on 1. **323.** 3. **324.** a) 12, b) 7. **325.** Ühele kaalukausile paneme 3 münti, teisele samuti 3. Tasakaalu korral on valeraha ülejäänud kolme hulgas. Kui tasakaalu pole, on valeraha nende kolme mündi hulgas, mis kaaluvad vähem. Eraldanud 3 münti, mille hulgas on valeraha, võtame neist kaks ning asetame ühekaupa kaalukaussidele. Tasakaalu korral on ülejäänud münt valeraha, kui tasakaal puudub, siis on valeraha kergem. **326.** Esmalt paneme detaile kaalukaussidele 9-kaupa. Selle kaalumisega eradame 9 või 8 detaili, mille hulgas on tühikuga detail. Siis paneme detaile kaalukaussidele 3-kaupa ja eraldame 3 või 2 detaili, mille hulgas on meid huvitav detail. Lõpuks paneme kaalukaussidele detaile ühekaupa ning eraldame vajaliku. **328.** Ostu üldmaksumus pidi jaguma 3-ga, sest 3-ga jagub vihikute kogumaksumus, kuna neid oli 9; pliiatsite kogumaksumus, sest neid oli 3; ja märkmike kogumaksumus, kuna igaühe hind oli 6 kop. Kuid 58 kop. ei jagu 3-ga. **329.** Nelja aasta eest oli kõigi nelja perekonnaliikme koguvanus 15 aasta võrra väiksem (73—58), mitte aga 16 võrra. Tähendab, noorimat perekonnaliiget (poega) siis veel ei olnud. Järelikult on poeg praegu 3, tütar 5, ema 31 ja isa 34 aastat vana. **330.** Esimene. **331.** Kui iga arv oleks suurem kui 10, siis oleks korrutis suurem kui 10 000. Edasi on selge, et nende arvude hulka ei kuulu 5 ja 10. Seepärast otsitavad arvud võivad olla 1, 2, 3, 4 või 6, 7, 8, 9. Esimese nelja arvu korrutis on vaid 24. Jäävad üle arvud 6, 7, 8, 9. Nende korrutis on tõesti 3024. **332.** Võib toimida nii: lõigata 4 õuna pooleks, 2 õuna neljaks ja 1 õuna 8-ks võrdseks osaks. Iga poiss peab saama $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{8}$ õuna. **333.** Võib toimida näiteks nii, nagu nähtub järgnevast tabelist:

	Algul	Pärast ümbervalamisi						
12-ämbrine tünn	12	4	4	9	9	1	1	6
8-ämbrine tünn	0	8	3	3	0	8	6	6
5-ämbrine tünn	0	0	5	0	3	3	5	0

334. Kalda, millel viibivad kolhoosnikud, tähistame tähega *A*, teise kalda aga tähega *B*. Algul sõidavad mõlemad poisid kaldale *B* ja üks neist jääb sinna. Teine poiss toob kolhoosnikuile paadi, ise aga randub kaldal *A*. Üks kolhoosnik istub paati ning ületab jõe. Seejärel toob kaldale *B* jäänud poiss paadi kaldale *A*, võtab teise poisi peale jne. **336.** Sõbra juurde mineku eel keerasin oma kella üles ning jätsin kellaaja meelde. Sõbra juurest tagasi jõudnud, vaatasin uuesti oma kella. Võrrelnud selle esimest ja teist näitu, määrasin, kui palju aega kulus mul sõbra külastamiseks. Lahutasin sellest ajast sõbra korteris viibimise aja ning jagasin vahe 2-ga. Nõnda leidsin aja, mis kulus mul sõbra juurest koju tulekuks. Seega pidin koju jõudmise momendil seadma oma kella nii, et selle näit võrdus minu väljumise hetkel sõbra juurest tema kella näidu ja minul teel kulunud aja summaga. **337.** Vea tegi pärandaja. Ta unustas, et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$ summa ei ole 1, vaid $\frac{19}{20}$. Seda möödalaskmist kasutaski pärandaja sõber. Faktiliselt sai vanem poeg mitte $\frac{1}{2}$, vaid $\frac{10}{19}$, keskmine mitte $\frac{1}{4}$, vaid $\frac{5}{19}$, ja noorem mitte $\frac{1}{5}$, vaid $\frac{4}{19}$. **338.** Lillemüüjad müüsid lillekimpe üheaegselt ühesuguse hinnaga, kuid mitte ühepalju. Näiteks müüs esimene 3, teine 5 ja kolmas 6 kimpu à 1 rbl., ülejäänud müüsid nad aga hinnaga 1 rbl. 3 kimpu. Siis teenis igaüks 13 rbl. **339.** Kolja arutles nii: Vasjal ja Petjal on punased ruudud. Seega võib mul olla kas valge või punane ruut. Kui mul oleks valge ruut, siis kas Petja või Vasja taipaks kiiresti, et tal on punane ruut. Samal ajal võiks Petja arutleda näiteks nii: Koljal on valge ruut, Vasjal aga punane, tähendab, mul on punane, sest kui mul oleks valge, siis ütleks Vasja kohe, et tal on punane, kuna valgeid ruute on ainult kaks, ülejäänud on aga punased. Samuti võib arutleda ka Vasja. Nad aga vaikivad. Seega ei ole mul valge, vaid punane ruut. **340.** Sepp võttis lahti ühe ketitüki kolm lüli. Nende kolme lüliga ühendas ta ülejäänud neli tükki üheks ketiks. **341.** 2 suure ja 3 väiksema õuna kaupa oli võimalik anda üheaegselt kokku 20 korda, s. o 40 lapsele. Siis oleks järele jäänud 20 suurt õuna. Kui neid oleks antud 2-kaupa, siis oleksid ülejäänud 10 last

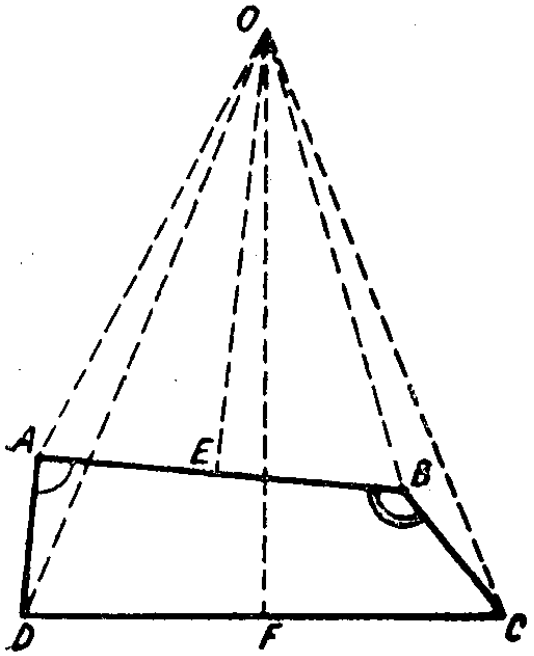
Joon. 124



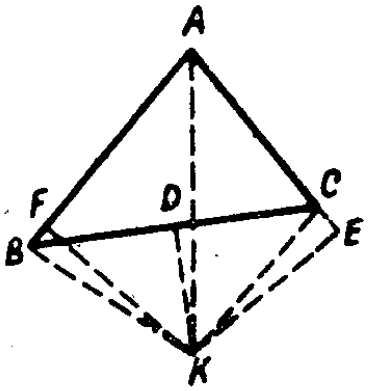
need saanud, kuid anti tegelikult 5-kaupa kahe kohta. Seepärast ülejäänud 20 õuna ei saanud 10 last, vaid $(20:5)\cdot 2$, s. o. 8. Seega ei jätkunud õunu 2 lapsele. **342.** Kolhoosnik võis müüa 2-kaupa esimesest ja 3-kaupa teisest korvist samaaegselt ainult 10 korda. Pärast seda jääks esimesse korvi 10 õuna, mille eest peaks kolhoosnik saama 50 kop. Tegelikult aga sai ta 10 õuna müügist 40 kop., sest ta võttis iga 5 õuna eest 20 kop. **343.** Rühmajuht oleks pidanud täpselt määrama, kuidas on joonistaja endaga. **344.** Nõutava kujundi võib välja lõigata nii, nagu on näidatud joonisel 124. **345.** Võib küsida: «Kas te elate selles külas?» Kui see, kellelt küsite, vastab «jah», siis olete külas *A*, kui «ei», siis külas *B*. (Esimene inimene, keda kohtate, võib olla nii küla *A* kui ka küla *B* elanik.) Külas *A* selle küla elanik ning siin viibiv küla *B* elanik vastavad sinu küsimusele «jah», külas *B* aga «ei». **346.**[35] Mingit rahasummat pole mõtet ruutu tõsta. Ruutu tõstetakse arve, mitte aga mõõdetavaid suurusi. **347.** Võrduse pooli ei saa jagada avaldisega $7+2-9$, sest $7+2-9=0$. **348.** Viga on ühise teguri viimises sulgude järele samasuse $4:4=5:5$ vasakul ja paremal poolel. **349.** Kui $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$, siis peab olema $-\left(2-\frac{5}{2}\right)=3-\frac{5}{2}$, mitte aga $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$. Kui arvude ruudud on võrdsed, siis see veel ei tähenda, et arvud ise on võrdsed. Kahe arvu ruutude võrdsusest järeldub ainult, et on võrdsed nende arvude absoluutväärtused. **350.** Samasugune viga nagu ülesandes 349. **351.** Süsteemi võrrandid on sobimatud. Seepärast tekib väär võrdus $4=8$. **352.** ja **353.** Samasugune viga nagu ülesandes 349. **354.** Ei saa jagada vahega $a-b$, sest $a-b=0$. **355.** Omadus — kui esimese suhte eesliige on suurem tagaliikmest, siis ka teise suhte eesliige on suurem tema tagaliikmest — võib olla kehtetu, kui mõned võrde liikmed on negatiivsed. **356.** Jagamine vahega $a-a$ on lubamatu. **357.** Viga tekib ülemineku ruutude võrdsuselt ruututõstetavate arvude võrdsusele. **358.** Arutlused toetuvad väärale joonisele. Tegelikult poolringjooned lõiku-

---

[35] Paragrahvi «Matemaatilised sofismid» juures piirdume lühikeste näpunäidetega. Üksikasjaliselt ja põhjalikult on selgitatud siin toodud sofisme Dubnovi, Bradise, Minkovski ja Hartševa raamatutes.



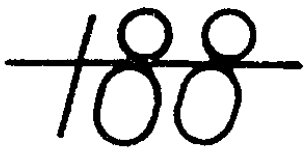
Joon. 125



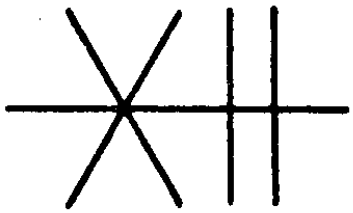
Joon. 126

vad küljega AC ühes punktis, s. t. BE ja BD ühtivad. **359.** Punkt D peab asetsema sirgel OB. **360.** Punkt D peab asetsema sirgel AB. **361.** Arutluses vaadeldud juhtumid on võimatud. Ainuvõimalikku juhtumit illustreerib joonis 125. **362.** Ainuvõimalikku juhtumit, kui kolmnurk ABC ei ole võrdhaarne, illustreerib joonis 126. **363.** ja **364.** Vead on joonistes. **365.** Kui ühe kolmnurga külg ja kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja kahe nurgaga, siis see veel ei tähenda, et kolmnurgad on võrdsed. **366.** Ristküliku osad (1) ja (4) ei liitu tihedalt osadega (2) ja (3). Nende vahele tekib väljavenitatud rööpküliku kujuline «pragu», pindalaga 1 ruutühik. **367.** Lõigu A_1B_1 pikkus ületab väiksema ringjoone pikkuse, kuna väiksem ring veereb libisedes mööda sirget A_1B_1. **368.** 1) Võrrandi mõlemat poolt ei tohi jagada tundmatut sisaldava avaldisega, sest tekib, üldiselt öeldes, antud võrrandiga mittesamaväärne võrrand. 2) Leidnud $x=3$, oleks õpilane pidanud kontrollima, kas selle x väärtuse puhul ühine nimetaja võrrandi vasakul ja paremal poolel ei muutu 0-ks. Arv 3 ei ole selle võrrandi lahendiks, kuna sel x väärtusel muutub ühine nimetaja $x-3$ 0-ks. Antud võrrandil pole lahendeid. 3) Õpilane ei eraldanud võõrlahendit $-1-\sqrt{2}$. Muidugi polnud mingit vajadust võrrandi pooli ruutu tõsta. **369.** 4. **370.** Ühele tüdrukule anti puur koos küülikuga. **371.** Kokku oli 3 inimest: poeg, isa ja vanaisa. **372.** 7. **373.** Ülesanne on määramatu. **374.** Õpilane unustas sõnade «kakskümmend» ja «viis» vahele kooloni panemata. **375.** Rongi masinist on nii vana kui ülesande lahendaja, sest ülesande tingimustes on öeldud: «Kujutle, et oled masinist...». **376.** Mõlemad rongid on nende kohtumise momendil Moskvast ühekaugusel. **377.** 3. **378.** 9. märtsil. **379.**

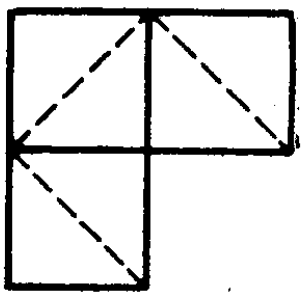
25 minutit. **380.** $7\frac{1}{2}$ ööpäeva pärast. **381.** Ainult kaaned. **382.** 26. **383.** 3 korda. **384.** 4 võrra. **385.** 2 kop. **386.** 4 km võrra. **387.** Ülesandel pole lahendeid. **388.** 20% võrra. **389.** $33\frac{1}{3}$% võrra. **390.** 10%. **391.** Elektrienergia kulu moodustab esialgsest 28%. **392.** 2. **393.** 1 minutiga. **394.** 90°. **395.** Paberilehte, millele on kirjutatud arv 666, tuleb pöörata 180° võrra (et alumine osa saaks ülemiseks). Tekib arv 999. **396.** On vaja kirjutada see arv ja tõmmata joon, nagu on näidatud joonisel 127. Tulemust võib tõlgendada nii, et 100 jagatakse 100-ga. **397.** 100. **398.** 40 kümnelist. **399.** Koma. **400.** 8. **401.** Võib. Poolringi võib lugeda nii sektoriks kui ka segmendiks. **402.** Selline omadus on igal joonel, mis asetseb kera pinnal. **403.** Kera kontuur. **404.** 20 kop. **405.** Kell 8. **406.** Esmalt tuleb välja kaaluda vihte kasutamata 4,5 kG kruupe. Siis, samuti vihtideta, kaaluda välja 4,5 kG kruupidest 2,25 kG. Lõpuks tuleb välja kaaluda vihtide 200 G ja 50 G abil 2,25 kG kruupidest 250 G. Siis ülejäänud osa väljakaalutud kruupidest kaalub 2 kG. **407.** 6 päevaga. **408.** $1\frac{1}{2}$. **409.** Ülesandel pole lahendeid. **410.** 10 korda.



Joon. 127



Joon. 128

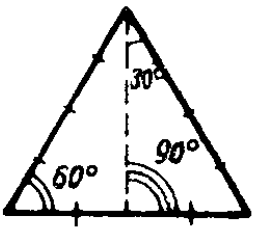


Joon. 129

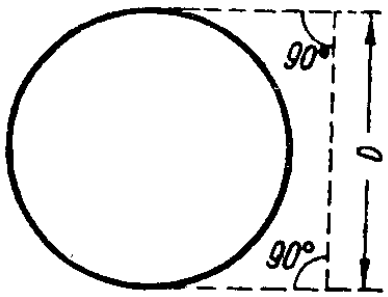
411. 50 võrra. **412.** 11 106. **413.** 1050. **414.** 200. **415.** Kolme. **416.** 1) 65 536; 2) 256; 3) 1. **417.** Murdarvude hulgas pole väikseimat. **418.** 0. **419.** Kui korrutaja on 1. **420.** Kui jagaja on 1. **421.** Kui üks liidetavaist ja lahutatav on 0. **422.** Kui üks tegureist ja jagaja on 1 või -1. **423.** 1. **424.** $888+88+8+8+8$. **425.** Kirjuta 12 rooma numbritega ja tõmba joon, nagu on näidatud joonisel 128. Võib anda ka sellise vastuse: $12_{12} : 2_{12} = 7_{12}$. **426.** Kaks. **427.** Kaks (ülejäänud kolm küünalt põlevad ära). **428.** Kilogramm metalli on alati kallim kui pool kilogrammi sama metalli. **429.** Jääb järele üks, ülejäänud lendavad ära. **430.** 1°. **431.** Samarkandi matemaatik Gijaseddin Kaši Džemšid (surn 1456. a.) ja poolteist sajandit hiljem flaami õpetlane Simon Stevin (1548—1620). **432.** 5. **433.** Šoti matemaatik John Napier (1550—1617). **434.** Leonhard Euler (1736) ja U. Johns (1706). **435.** Väljapaistev saksa matemaatik G. Leibniz (1698 ja 1684). **436.** 14. septembril 1918. a. võttis Rahvakomissaride Nõukogu V. I. Lenini eesistumisel

vastu määruse meetermõõdustiku kasutuselevõtmisest meie maal. **438.** A. Gribojedov. **439.** Ei. **440.** Täisnurkses kolmnurgas. **441.** Sirge tuleb tõmmata läbi kolmnurga tipu nii, et ta lõikaks selle tipu vastaskülge. **442.** Vt. joon. 129. **443.** Kolmekohalisele arvule sama arvu juurdekirjutamine on samaväärne selle arvu korrutamisega 1001-ga, kuid $1001=7\cdot 11\cdot 13$. **444.** Olgu mõeldud arv $100a+10b+c$ ja $a>c$. Ümberpööratud arv on $100c+10b+a$, vahe on aga $99a-99c$. See vahe võrdub $100(a-c-1)+90+(10-a+c)$, kus $a-a-1$ on sajaliste arv ning $10-a+c$ on üheliste arv. Vahe ümberpööratud arv on $100\,(10-a+c)+90+a-c-1$. Summa on $100\,(a-c-1)+90+$ $+(10-a+c)+100(10-a+c)+90+a-c-1=100\cdot 9+180+9=1089$. **446.** Olgu kahe kolmekohalise arvu summa $a+b$ kolmekohaline arv, mis on kirjutatud kolme ühesuguse numbriga (näiteks 666). See kolmekohaline arv jagub 37-ga, sest 111 jagub 37-ga. Arvule a arvu b paremale juurdekirjutamine annab arvu $10^3a+b=1000a+b=999a+$ $+(a+b)$. Saadud liidetavad $999a$ ning $a+b$ jaguvad 37-ga. Jagub ka arv 10^3a+b. **447.** $10a+b$ — mõeldud arv. Saab: $(2a+5)\cdot 5+10+b=$ $=10a+25+10+b=10a+b+35$. **448.** Mõeldud arvu iga number esineb kuues kahekohalises arvus 4 korda, kusjuures ta näitab 2 korda kümneliste ja 2 korda üheliste arvu. Järelikult kuue kahekohalise arvu summa annab jagamisel 22-ga jagatisena mõeldud arvu numbrite summa. **449.** On teada, et iga naturaalarvu numbrite summa jagamisel 9-ga tekib sama jääk, mis selle arvu enda jagamisel 9-ga. Kahe samade numbritega kirjutatud arvu jagamisel 9-ga peavad tekkima võrdsed jäägid. Seepärast jagub nende arvude vahe jäägita 9-ga. Tähendab, et leida kustutatud numbrit, on vaja täiendada ülejäänud numbrite summa lähima arvuni, mis on arvu 9 kordne. **450.** Viiest kirjutatud arvust on neli viimast arvu niisugused, et nende numbrite summa igas järgus võrdub $9\cdot 2=18$. Seega viie kirjutatud arvu üheliste summa on võrdne arvu 18 ja esimese arvu üheliste summaga, s. t. nende viie arvu summas on ühelisi 2 võrra vähem kui esimeses arvus ning peale selle tekib 2 kümnelist. Selle summa kümneliste arv võrdub 18+2 ja esimese arvu kümneliste summaga, s. t. tekib esimese arvu kümneliste arv ning 2 sajalist. Viie arvu sajaliste arv on võrdne esimese arvu sajaliste arvuga ja 2 tuhandelist jne. Iga kord tuleb üle viia kõrgemasse järku kaks eelmise järgu kümmet. **451.** Olgu esimene vahe $a-b$, siis teine on $c-a$, kolmas $d-c$, neljas $e-d$, viies $f-e$. Kui piirduda viie vahega, on nende summa $a-b+c-a+d-$ $-c+e-d+f-e=f-b$. **452.** Ülesanne seisneb arvude valikus. Kartongiribadele kirjutatud arvude iseärasused on järgmised. Ühe ja sama riba arvudel on keskmised numbrid ühesugused. Ühesugused on ka kõigi nende arvude äärmiste numbrite summad (esimeses ribas 8, teises 6, kolmandas 9, neljandas 10, viiendas 7 ja kuuendas 8). Lõpuks

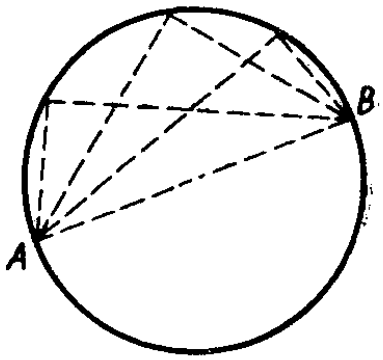
on kõigi kuue riba keskmiste numbrite summa, mis tähistab kümneliste arvu, 20. Mis saadakse ühe veeru kuue kolmekohalise arvu summa leidmisel? Kõigi kuue arvu üheliste liitmisel saame tõesti otsitava summa kümneliste ja üheliste arvud. Sajaliste arvu leidmiseks võime toimida nii: ühe ja sama veeru kuue arvu äärmiste numbrite kõikide summade summast, mis on $8+6+9+10+7+8=48$, lahutame nende kuue arvu üheliste summa, s. t. äärmiste parempoolsete numbrite summa. Saame nende kuue arvu äärmiste vasakpoolsete numbrite summa, s. t. nende sajaliste summa. Ent veel tuleb liita 2 sajalist, mis on saadud antud arvude kümneliste liitmisel. Teisiti — otsitava summa sajaliste leidmiseks tuleb arvust $48+2$, s. t. arvust 50, lahutada antud arvude üheliste summa. **454.** Olgu kuu järjekorranumber m, kuupäev t ja aastate arv n, siis $\{[(100m+t)2+8]5++4\}10+n+4=10\,000m+100t+n+444$. **455.** Selle meelelahutuse aluseks on arvude esitamine kahendsüsteemis. Võtame näiteks arvu 23. Teda võib esitada arvu 2 astmete ning arvu 1 summana nii: $23=2^4+2^2+2+1$. On oluline, et selline esitus on ühene. Et seda arvu saaks kaardikeste järgi mõistatada, peab ta olema kirjutatud ainult esimesele, teisele, kolmandale ja viiendale kaardikesele. Nii ka on. Seega kaardikeste esimesed numbrid on arvu 2 need astmed, mis kuuluvad mõeldud arvu kujusse, kui see on esitatud arvu 2 astmete (erinevate astendajatega), ja võib olla ka arv 1, summana. **456.** $12\,345\,679\cdot 9=111\,111\,111$. **459.** Kogu «saladus» on väiksema ringi



Joon. 130

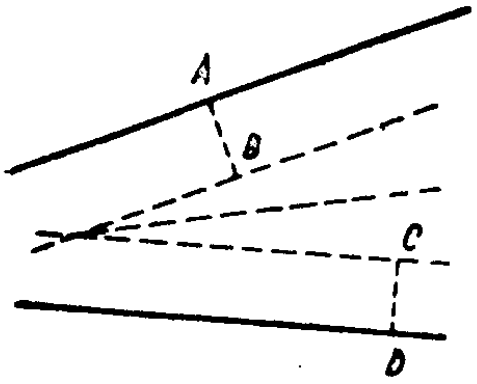


Joon. 131

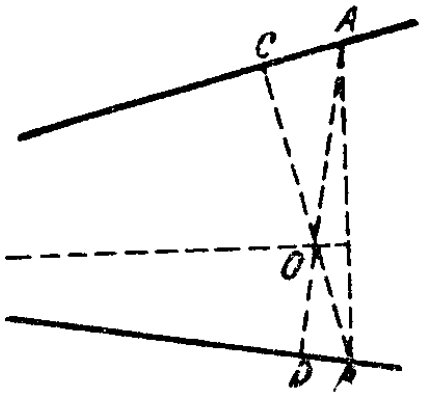


Joon. 132

pöördeid iseloomustavate arvude valikus. **460.** Vt. joon. 130. **461.** Vt. joon. 131. **462.** Vt. joon. 132. **463.** a) Ehitame antud sirgele ristsirged. Ristsirgetele, alates nende aluspunktidest, paigutame võrdsed lõigud AB ja CD. Läbi nende otspunktide B ja C tõmbame antud sirgetega paralleelsed sirged (joon. 133). (Võrdsete lõikude AB ja CD pikkused tuleb valida nii, et antud sirgetega paralleelsed abisirged lõikuksid ligipääsetavas punktis.) Jääb ehitada saadud nurga poolitaja. b) Läbi antud punkti O juhime antud sirgetele ristsirged

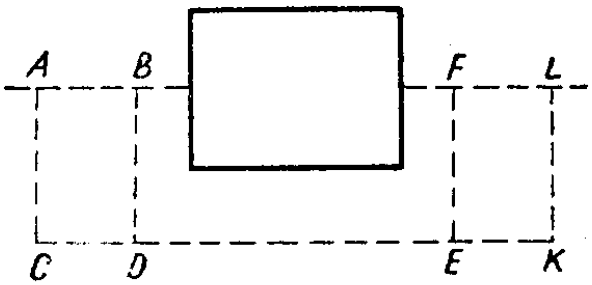


Joon. 133

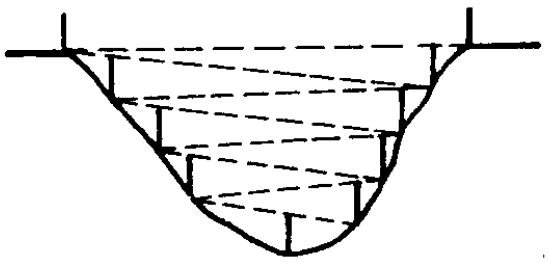


Joon. 134

(joon. 134). Nende ristsirgete ja antud sirgete lõikepunkte A ning B (ei ole ristsirgete aluspunktideks) vaatleme kolmnurga kahe tipuna, selle kolmnurga kolmas tipp — antud sirgete lõikepunkt — on aga ligipääsmatu. Siis võib lõike BC ja AD lugeda selle kolmnurga kõrgusteks. Need kõrgused lõikuvad punktis O. Kolmnurga kolmas kõrgus, mis läbib tema kolmandat (ligipääsmatut) tippu, peab läbima punkti O ning olema risti küljega AB. See ongi otsitav sirge. **464.** Lahendusi selgitavad joonised 135 ja 136. **465.** Võib ehitada maastikul külje BC ning tema lähisnurkade 1 ja 2 järgi kolmnurga CA_1B_1

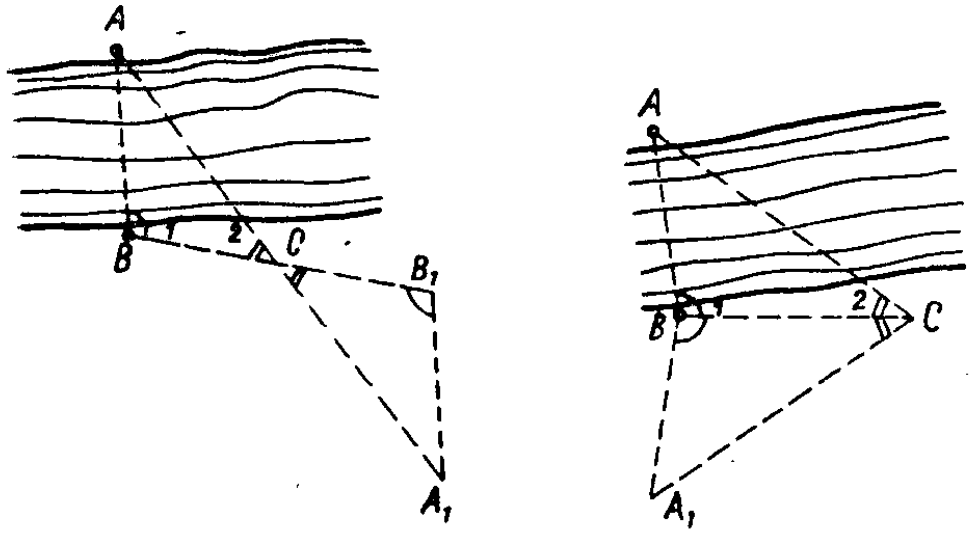


Joon. 135

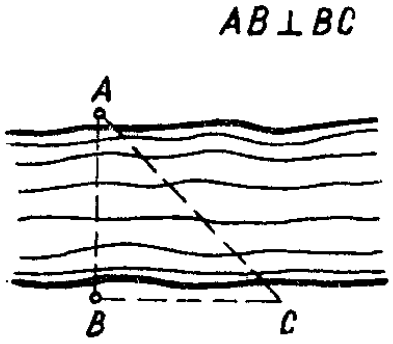


Joon. 136

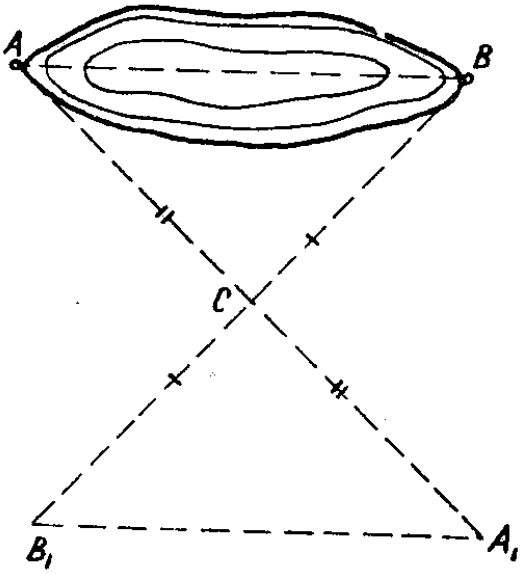
(CA_1B), mis on võrdne kolmnurgaga CAB. Jääb mõõta külg A_1B_1 (A_1B) (joon. 137). Kolmnurga CA_1B_1 (CA_1B) ehitamise asemel maastikul võib, valides sobiva mõõtkava, joonestada paberile kolmnurga A_1B_1C, mõõta joonise järgi lõigu A_1B_1, ning arvestades joonise mõõtkava, arvutada kauguse AB. Võib ka kasutada võrdhaarse täisnurkse kolmnurga omadust (joon. 138). **466.** Maastikul võib ehitada kolmnurga, mis on võrdne kolmnurgaga ABC (joon. 139). (Punkt C valitakse nii, et saaks mõõta külgi AC ja CB.) Jääb mõõta külg A_1B_1. Võib ka kasutada teoreemi kolmnurga kesklõigust. Vaja on mõõta kolmnurga ABC kesklõik, mis on küljega AB paralleelne, ja korrutada saadud pikkus 2-ga. **467.** Võib ehitada maastikul kaks kolmnurka CDA_1 ja CDB_1, mis on võrdsed kolmnurkadega CDA ning



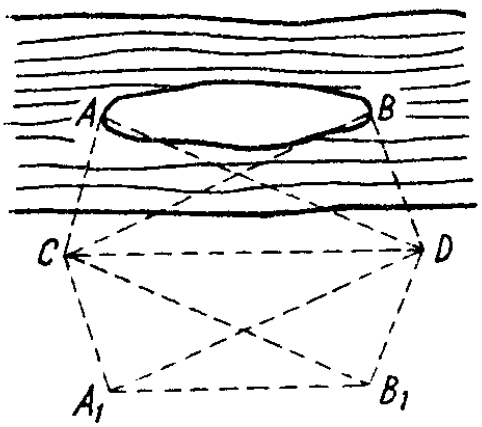
Joon. 137



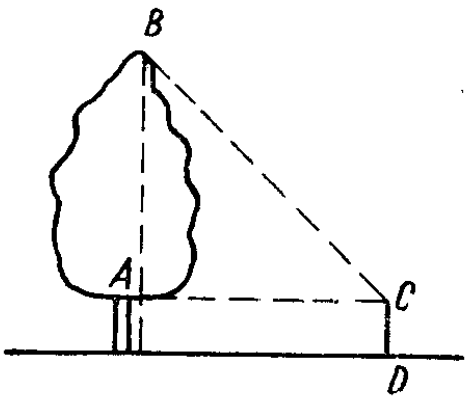
Joon. 138



Joon. 139

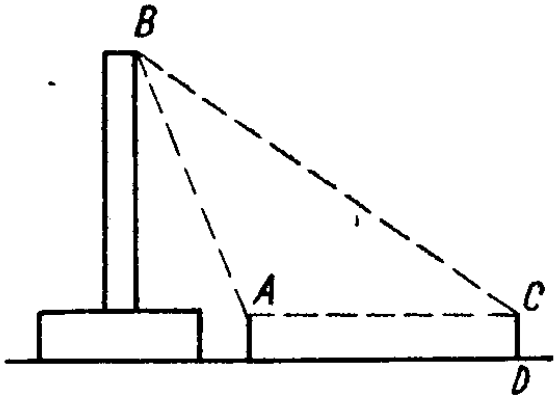


Joon. 140

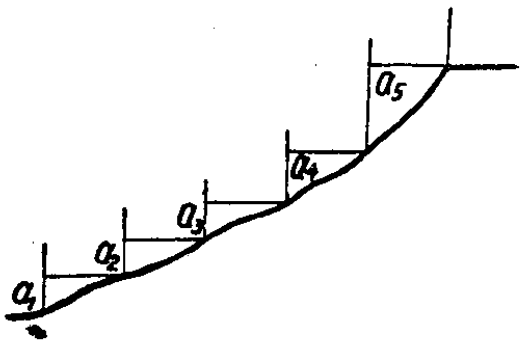


Joon. 141

CDB. Seda saab teha külje *CD* ja tema lähisnurkade järgi (joon. 140). Jääb mõõta nende kolmnurkade tippude A_1 ning B_1 vahemaa. **468.** Maastikul võib ehitada täisnurkse kolmnurga *ABC* kaateti *AC* ja tema lähisteravnurga *ACB* järgi (joon. 141). Teise kaateti ning lõigu *CD* pikkuste summa annab puu otsitava kõrguse. Võib kasutada ka võrdhaarse täisnurkse kolmnurga omadust. **469.** Võib ehitada maastikul külje *AC* ning tema lähisnurkade *A* ja *C* järgi kolmnurga



Joon. 142



Joon. 143

ABC. Tuleb tõmmata selle kolmnurga kõrgus tipust *B*, mõõta see ning liita lõik *CD* (joon. 142). **470.** Võib kasutada detsimeetri- ja sentimeetrijaotustega nivelleerimislatte ning vesiloodi või nivelliiri (nagu näidatud joon. 143). Kalda kõrgus võrdub $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

SISUKORD

Loe läbi 3

I peatükk. **Aritmeetika**

Suured arvud (miljon, miljard ja teised) 17
Tehete komponentide ja resultaatide vaheline sõltuvus . . . 18
Tekstülesanded 18
Mõned vanaaegsed ülesanded 23
Kas sa tunned protsente 25
Ilma pliiatsi ja paberita (arvuta peast) 27
Numbrilised nuputamisülesanded 29
Arvude maailmas (arvusüsteemid) 32
Mitmesugused küsimused ja ülesanded 33

II peatükk. **Algebra**

Võrrandite abil 36
Kas sa oskad lahendada võrrandeid ja võrratusi 38
Arvuta 39
Mõtle, pliiats käes 40
Tõesta 41
Graafikud 43

III peatükk. **Geomeetria**

Arvuta 50
Tõesta 51
Konstrueeri 53
Konstruktsioonid takistuste ja kitsendustega 55
Pidev joonistamine 56
Nuputamisülesanded tikkudega 57
Geomeetrilised nuputamisülesanded 57
Vasta küsimustele 59
Huvitavad kõverad 60

IV peatükk. **Loogika matemaatikas**

Õpi õigesti arutlema 65
Õiged ja väärad väited 71
Teoreemide koostisosad 72
Teoreemi pöördteoreem ja vastandteoreem 72
Tarvilikud ja piisavad tingimused 74
Mõned teoreemid ja küsimused 75
Ülesanded 75
Täbarad olukorrad 77
Matemaatilised sofismid 80

V peatükk. **Matemaatilised meelelahutused**

Lõbusad küsimused ja ülesanded 92
Matemaatika-alane viktoriin 95
Meelelahutused 97

VI peatükk. **Tutvu, tee, õpi kasutama**

Õpi kasutama ruutjuurte tabeleid 108
«Arvutav joonis» 110
Protsentmall 111
Napieri pulgad 111
Aritmeetiline arvutuslükati 113
Arvutusvahendid ja -masinad 115
Ekker 119
Nurgamõõtja 120
Eklimeeter-nivelliir 121
Mensul 122
Pantograaf 122
Palett 123
Mõõdistamistööd maastikul 124
Ülesanded 127

VII peatükk. **Ülesanded matemaatika olümpiaadideks**

Aritmeetika ja algebra 129
Geomeetria 134
Vastused ja näpunäited 137

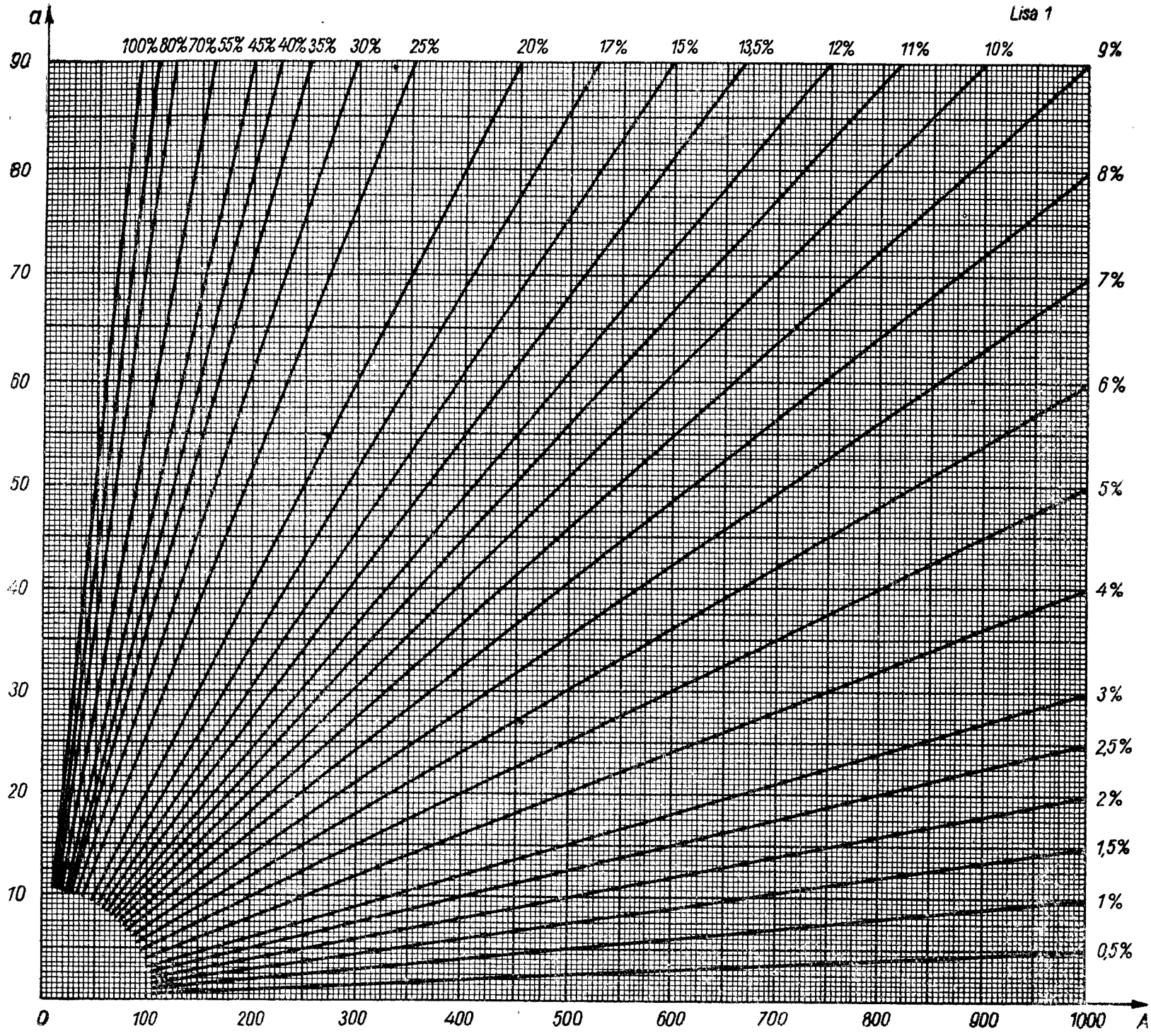
Федор Федорович Нагибин. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКАТУЛКА. На эстонском языке. Перевел с русского О. Кярнер. Художественное оформление Д. Пааламяэ. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

*

Toimetaja M. Soosaar. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja L. Krikmann. Korrektorid H. Kull ja M. Pall. Laduda antud 16. V 1968. Trükkida antud 3. II 1969. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 54×84/16. Trükipoognaid 10,5 + 3 lisa. Tingtrükipoognaid 9,17. Arvestuspoognaid 8,76. Trükiarv 12 000. Tellimuse nr. 3197. Hans Heidemanni nim. Trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19, I.

Hind 40 kop.

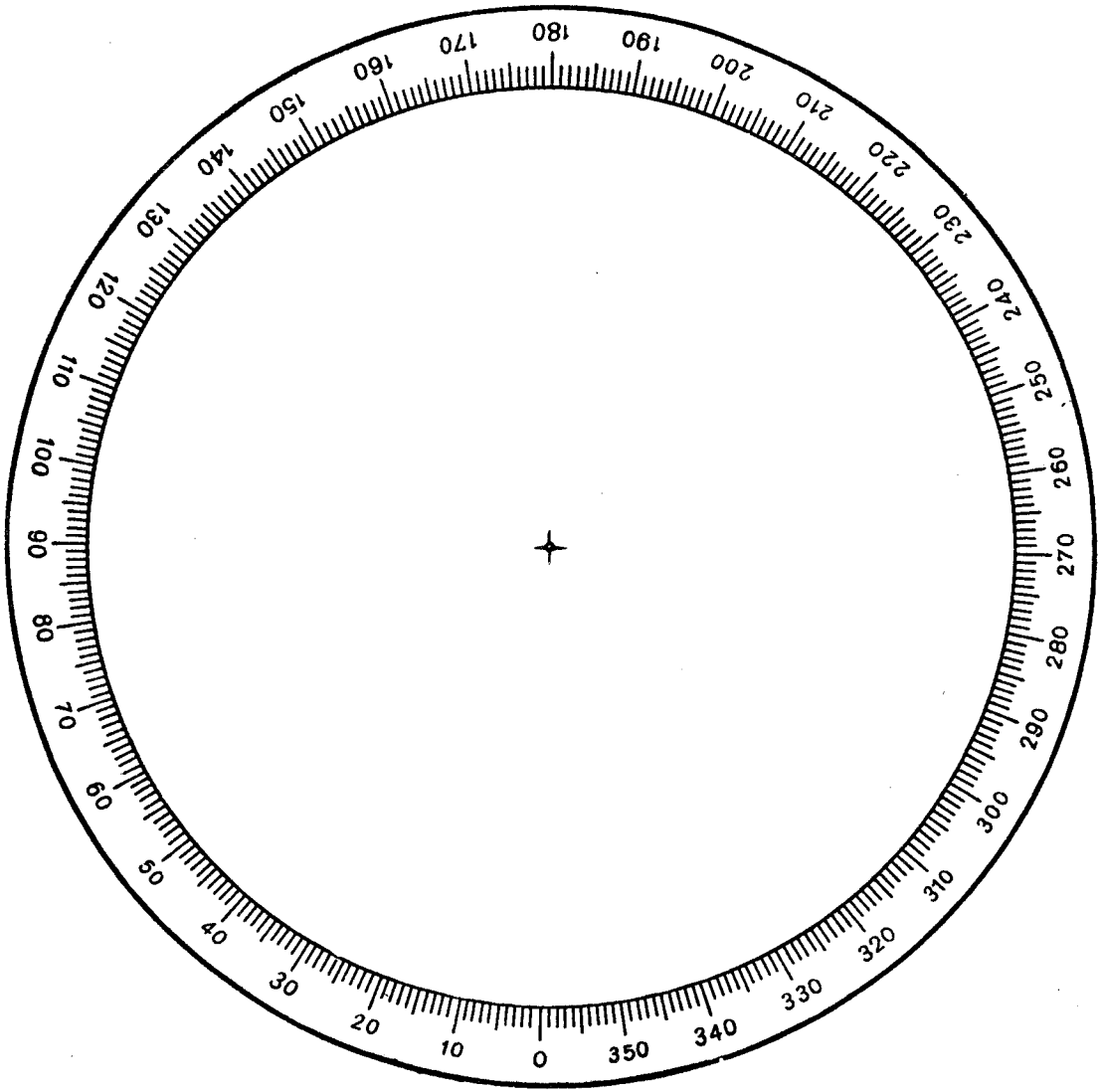
Lisa 1


a
100% 80% 70% 55% 45% 40% 35% 30% 25% 20% 17% 15% 13,5% 12% 11% 10% 9%
90
80
70
60
50
40
30
20
10
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2,5%
2%
1,5%
1%
0,5%
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
A

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100
	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	123	126	129	132	135	138	141	144	147	150
	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250
	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	222	228	234	240	246	252	258	264	270	276	282	288	294	300
	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280	287	294	301	308	315	322	329	336	343	350
	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240	248	256	264	272	280	288	296	304	312	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392	400
	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	369	378	387	396	405	414	423	432	441	450
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130	132	134	136	138	140	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	182	184	186	188	190	192	194	196	198	200
153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	183	186	189	192	195	198	201	204	207	210	213	216	219	222	225	228	231	234	237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285	288	291	294	297	300
204	208	212	216	220	224	228	232	236	240	244	248	252	256	260	264	268	272	276	280	284	288	292	296	300	304	308	312	316	320	324	328	332	336	340	344	348	352	356	360	364	368	372	376	380	384	388	392	396	400
255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500
306	312	318	324	330	336	342	348	354	360	366	372	378	384	390	396	402	408	414	420	426	432	438	444	450	456	462	468	474	480	486	492	498	504	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600
357	364	371	378	385	392	399	406	413	420	427	434	441	448	455	462	469	476	483	490	497	504	511	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581	588	595	602	609	616	623	630	637	644	651	658	665	672	679	686	693	700
408	416	424	432	440	448	456	464	472	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632	640	648	656	664	672	680	688	696	704	712	720	728	736	744	752	760	768	776	784	792	800
459	468	477	486	495	504	513	522	531	540	549	558	567	576	585	594	603	612	621	630	639	648	657	666	675	684	693	702	711	720	729	738	747	756	765	774	783	792	801	810	819	828	837	846	855	864	873	882	891	900
510	520	530	540	550	560	570	580	590	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800	810	820	830	840	850	860	870	880	890	900	910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000

Nurgamõõtja limbi skaala



Nivelliiri-eklimeetri skaala

