

N. VILENKIN

KOMBINATOORIKA

«VALGUS» • TALLINN 1975

Originaali tiitel:

Н. Я. Виленкин
Комбинаторика
Издательство «Наука»
Главная редакция
Физико-математической
литературы
Москва 1969

Vene keelest tõlkinud J. Hion
Kaane kujundanud O. Mellov
Illustratsioonid J. Kerem

EESSÕNA

Kõige erinevamate erialade esindajail tuleb lahendada ülesandeid, kus on tegemist mingite kombinatsioonidega, mis koosnevad tähtedest, numbritest või muudest objektidest. Tsehhiülem peab mitut liiki tööd jaotama olemasolevate tööpinkide vahel, agronoomil tuleb põllukultuurid külvata mitmele põllutükile, kooli õppealajuhataja peab koostama tunniplaani, keemikul tuleb uurida aatomite võimalikke seoseid molekulis, lingvistil on vaja arvestada tundmatu keele tähtede tähenduse erinevaid variante jne. Matemaatikaharu, kus uuritakse, mitu teatud tingimusi rahuldavat kombinatsiooni võib antud elementidest koostada, nimetatakse kombinatoorikaks.

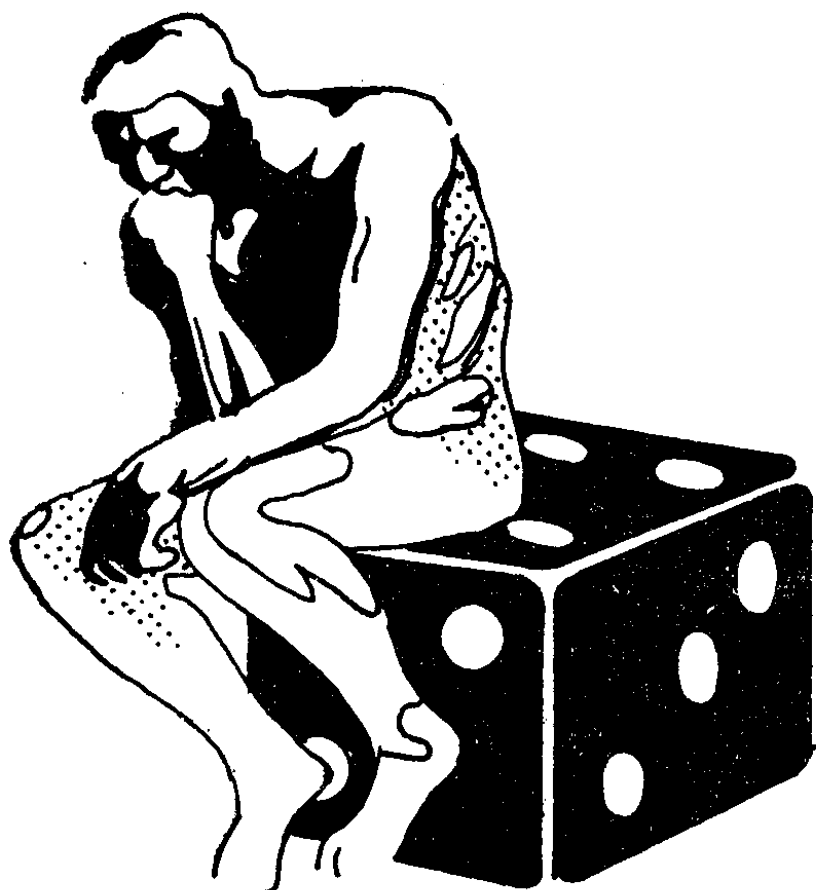
Kombinatorika tekkis XVI sajandil. Tolleaegse ühiskonna privilegeeritud kihtide elus etendasid suurt osa hasartmängud. Kaardi- ja täringumängus võideti ning kaotati kulda ja briljante, losse ja mõisaid, tõuhobuseid ja kalleid ehteid. Väga populaarsed olid igasugused loteriid. Endastmõistetavalt puudutasid kombinatoorikaülesanded esialgu peamiselt hasartmänge, nimelt küsimusi, mitmel viisil võib saada teatud arvu silmi, kui heita kahte või kolme täringut, või mitu võimalust on saada kaks kuningat ühes kaardimängus. Need ja teised probleemid olid arendanud kombinatoorikat ja samaaegselt kujunevat tõenäosusteooriat.

Esimeste seas hakkas täringumängus tekkivate kombinatsioonide loendamisege tegelema itaalia matemaatik Tartaglia. Ta koostas tabeli, mis näitas, mitmel viisil võivad langeda r täringut. Seejuures ei arvestatud aga seda, et ühe ja sama silmade summa võib saada mitmel viisil (näiteks $1+3+4=4+2+2$).

Teoreetiliselt hakkasid kombinatoorikat uurima prantsuse teadlased Pascal ja Fermat. Nende uurimiste lähte-

kohaks olid samuti hasartmängude probleemid. Eriti tähtis oli siinjuures panuse jaotamise ülesanne, mille oli Pascalile andnud tema sõber rüütel de Mairet, kes oli kirglik mängur. Probleem oli järgmine. Kulli ja kirja visati kuue võidetud partii peale. Matš katkestati, kui üks mängija oli võitnud viis ja teine neli partiid. Kuidas jaotada panus? Oli selge, et jaotamine vahekorras 5:4 on ebaõiglane. Pascal lahendas kombinatoorika meetodeid kasutades selle ülesande üldjuhul, kus ühel mängijal jääb võiduni r ja teisel s partiid. Teissuguse lahenduse andis ülesandele Fermat.

Kombinatorika edasine areng on seotud Jakob Bernoulli, Leibnizi ja Euleri nimedega. Kuid ka neid huvitasid eeskätt rakendused mitmesuguste mängude juures (loto jt.). Viimastel aastatel areneb kombinatoorika lausa tormiliselt, mis on seletatav huvi tõusuga diskreetse matemaatika vastu üldse. Kombinatorika meetodeid kasutatakse transpordiülesannete lahendamiseks, muu hulgas sõiduplaanide, tootmis- ja müügiplaanide koostamisel. On kindlaks tehtud seoseid kombinatoorika ja lineaarse planeerimise, statistika ülesannete jne. vahel. Šifrite koostamisel ja dekodeerimisel, samuti teiste informatsiooniteooria probleemide lahendamisel kasutatakse kombinatoorika meetodeid.



Kombinatorsetel meetoditel on oluline osa ka puhtmatemaatilistel aladel: rühmade ja nende esituste teoorias, geomeetria aluste, mitteassotsiatiivsete algebrate jne. uurimisel.

Käesolevas raamatus püütakse jutustada kombinatorika probleemidest köitvalt ja populaarselt. Selle kõrval käsitletakse ka mõningaid võrdlemisi keerukaid ülesandeid, tutvustatakse põgusalt rekurrentsete seoste ja genereerivate funktsioonide meetodeid.

Raamatu esimene peatükk on pühendatud kombinatorika üldreeglitele — summa ja korrutise reeglitele. Teises peatükis uuritakse variatsioonide, permutatsioonide ja kombinatsioonide. Selle kooliõpikust tuttava materjaliga kaasnevad mõned huvipakkuvad näited. Kolmandas peatükis uuritakse kombinatorikaülesandeid, kus ühenditele seatakse mõningad kitsendused. Neljas peatükk sisaldab arvude jaotamise ülesandeid ja seal kõneldakse geomeetristest meetoditest kombinatorikas. Ülesannetele juhusliku ekslemise kohta ja aritmeetilise kolmnurga mitmesugustele modifikatsioonidele on pühendatud viies peatükk, kuna kuuendas kõneldakse rekurrentsetest seostest ja seitsmendas genereerivatest funktsioonidest, sealhulgas ka binoomvalemist. Raamatule on lisatud paarsada kombinatorikaülesannet, mida autor on kogunud erinevatest allikatest.

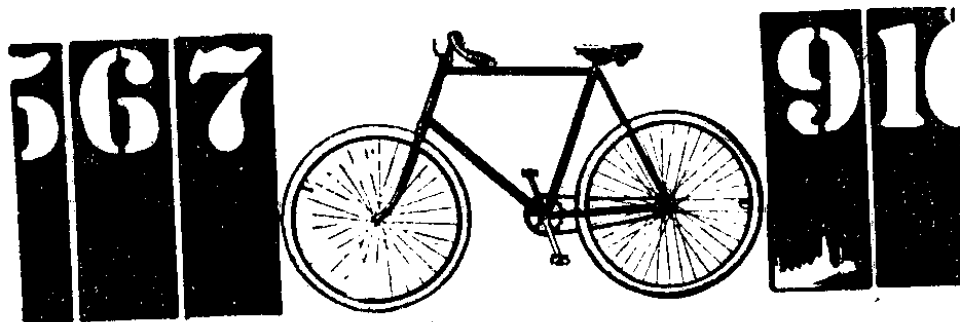
I. KOMBINATOORIKA ÜLDREEGLID

Ebausklikud jalgratturid

«Jälle sõitsin ratta kaheksaks!» hüüatas jalgratturite klubi esimees tuseselt. «Ja mispärast? Sellepärast, et klubisse astumisel anti mulle pilet number 008. Ja nüüd ei möödu kuudki, ilma et kord üks, kord teine ratas kaheksaks läheks. Tuleb pileti numbrit vahetada. Et aga mind ei süüdistataks ebausus, registreerin kõik klubi liikmed ümber. Annan piletid välja ainult selliste numbritega, kus pole ühtki kaheksat.»

Mõeldud, tehtud. Järgmisel päeval vahetaski ta kõik piletid ümber. *Kui palju liikmeid oli klubis, kui on teada, et kasutati ära kõik kolmekohalised arvud, mis ei sisalda kaheksat?* (Näiteks 000 läks käiku, aga 836 mitte.)

Selle ülesande lahendamisel teeme kõigepealt kindlaks, mitu ühekohalist arvu ei sisalda kaheksat. On selge,



et neid on üheksa: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (8 jääb vahele). Nüüd aga leiame kõik kahekohalised arvud, kus pole kaheksaid. Neid võib koostada nii: võtame mistahes ühekohalise arvu ja kirjutame sellele kõrvale ükskõik millise üheksast väljakirjutatud numbrist. Tulemusena saame igast ühekohalisest üheksa kahekohalist arvu. Et aga ka ühekohalisi arve oli üheksa, siis saame $9 \cdot 9 = 81$ kahekohalist ilma kaheksata arvu. Siin need on:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09;
 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19;
 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29;
 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39;
 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49;
 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59;
 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69;
 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79;
 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99.

Niisiis on olemas $9^2=81$ kahekohalist arvu, kus pole numbrit 8. Kuid iga sellise kahekohalise arvu järel võib kirjutada ükskõik millise üheksast lubatavast numbrist. Tulemusena saame $9^2 \cdot 9=729$ kolmekohalist arvu. Järelikult oli klubis 729 jalgratturit. Kui aga võtta mitte kolme-, vaid neljakohalised arvud, siis saame ilma kaheksata arve juba $9^4=6561$.

Teises klubis olid jalgratturid veel ebausklikumad. Et arv 0 sarnaneb loperguse rattaga, siis loobusid nad ka sellest ja ajasid läbi kaheksa numbriga: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. *Mitu liiget oli klubis, kui piletitel olid kolmekohalised numbrid?*

See ülesanne sarnaneb eespool lahendatuga, kuid üheksa asemel on meil nüüd ainult kaheksa numbrit. Seetõttu tuleb vastuses 9 asendada 8-ga ehk teiste sõnadega, klubis oli $8^3=512$ liiget.

Kordumistega variatsioonid

Ülesanne jalgratturitest kuulub järgmisse ülesannete tüüpi. On antud esemed, mis kuuluvad n erinevasse liiki. Neist koostatakse kõikvõimalikud paigutused k -kaupa ehk k -paigutused, nagu me edaspidi lühidalt ütleme. Seejuures võivad paigutusse kuuluda ka ühte liiki esemed. Paigutused loetakse erinevateks, kui neisse kuuluvad eri liiki esemed või esemete järjekord on teine. *Leida paigutuste üldarv.*

Kirjeldatud paigutusi nimetatakse *kordumistega k -variatsioonideks n liiki esemetest* ja kõigi selliste paigutuste arvu tähistatakse sümboliga $\bar{A}_n^k$. Esimeses jalgratturite ülesandes oli elementide liikide arv 9 (me võtsime kõik numbrid peale 8) ja iga paigutus (iga arv) sisaldas kolm elementi. Nagu tõestatud, on sellisel juhul kombinatsioo-

nide arv $\bar{A}_9^3 = 9^3$. On loomulik oletada, et kui liikide arv on n ja igasse variatsiooni kuulub k elementi, siis saab koostada n^k kordumistega variatsiooni.

Niisiis, me tahame tõestada, et kordumistega k -variatsioonide arv n elemendist võrdub

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1)$$

Tõestuseks kasutame matemaatilist induktsiooni variatsiooni elementide arvu k järgi fikseeritud n väärtuse puhul. $k=1$ puhul on vastus selge: iga (kordumistega) variatsioon koosneb ainult ühest elemendist, erinevad variatsioonid saame, kui võtame eri liiki elemendid. Et liikide arv on n , siis on variatsioone n . Niisiis, $\bar{A}_n^1 = n$ vastavalt valemile (1).

Oletame nüüd, et valem $\bar{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$ on juba tõestatud ja vaatleme kordumistega k -variatsioone. Kõik sellised variatsioonid võib saada järgmisel viisil. Võtame mistahes kordumistega $(k-1)$ -variatsiooni $(a_1, \dots, a_{k-1})$ ja kirjutame sellele juurde ühe elemendi a_k olemasolevast n liigist. Me saame mingi k -paigutuse $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. Seejuures on selge, et igast $(k-1)$ -variatsioonist tekib niipalju k -variatsioone, kui palju on elementide liike, s. o. n variatsiooni. On ilmne, et niimoodi toimides ei jäta me vahele ühtki k -variatsiooni ega võta neist ühtki kaks korda (kui $(a_1, \dots, a_{k-1}) \neq (b_1, \dots, b_{k-1})$ või kui $a_k \neq b_k$, siis $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \dots, b_{k-1}, b_k)$). Seepärast on kordumistega k -paigutuste arv n liiki elementidest n korda suurem kui kordumistega $(k-1)$ -variatsioonide arv sama liiki elementidest. Seega $\bar{A}_n^k = n \bar{A}_n^{k-1}$. Kuid me loeme juba tõestatuks, et $\bar{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$. Seepärast

$$\bar{A}_n^k = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Sellega on valem (1) tõestatud k kõigi väärtuste jaoks.

Valemil (1) on mitmeid rakendusi, mõnest teemegi nüüd juttu.

Arvusüsteemid

Arvude kümnendsüsteemi kõrval kasutatakse veel kahend-, kolmend-, kaheksandsüsteemi jne. Arvude n -ndsüsteemis kasutatakse n numbrit. Arvutame, kui palju on n -indsüsteemis naturaalarve, mis kirjutatakse üles k märgi abil.¹ Kui lubada ka nulliga algavaid tähistusi, siis võib iga k -kohalist arvu n -ndsüsteemis vaadelda kordumistega kombinatsioonina, mis on koostatud k numbrist, kusjuures numbroid on n liiki. Valemil (1) järgi saame, et sellise tähistusega arve on n^k .

¹ Mugavuse mõttes arvame siin 0 naturaalarvude hulka.

Kuid naturaalarvude puhul nulliga algavaid tähistusi ei tarvitata. Seepärast tuleb saadud väärtust n^k vähendada nende arvude võrra, mille tähised n -ndsüsteemis algavad nulliga. Kui kõigil neil arvudel esimene number 0 kõrvale heita, saame $(k-1)$ -kohalise arvu (mis võib alata ka nulliga). Selliseid arve on valemi (1) järgi n^{k-1} . k -kohalisi arve on siis n -ndsüsteemis

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n - 1).$$

Näiteks on kümnendsüsteemis $10^3 \cdot 9 = 9000$ neljakohalist arvu; 10 000 seast (0...9999) tuleb välja jätta tuhat arvu ja nimelt arvud 0...999.

Selle valemi võib tuletada ka teisiti. Arvude n -ndsüsteemis kirja pandud k -kohalisel arvul võib ju esimeseks numbriks olla ükskõik milline numbritest 1, 2, ..., $n-1$. Teiseks ja järgnevateks numbriteks võivad olla ükskõik millised numbritest 0, 1, 2, ..., $n-1$. Seega on arvu esimesele numbrile $n-1$ kandidaati, igale ülejäänud $k-1$ kohale aga n kandidaati. Siit järeldame kergesti, et otsitavaid arve peab olema $(n-1)n^{k-1}$.

Salalukk

Rahakappide ja käsipakkide hoiuruumide lukustamiseks kasutatakse salalukke, mis avanevad vaid siis, kui nendel valitakse mingi «salasõna». Seda saab teha ühe või mitme ketta abil, millele on kantud tähed (või numbrid). *Olgu kettale kantud 12 tähte ja salasõna koosnegu 5 tähest. Mitu ebaõnnestunud katset võib teha inimene, kes salasõna ei tea?*

Valemi (1) järgi on variatsioonide üldarv

$$12^5 = 248\,832.$$

Seega võib teha 248 831 ebaõnnestunud katset. Muide, tavaliselt on sefid tehtud nii, et juba pärast esimest ebaõnnestunud katset kostab häiresignaal.

Morsetähestik

Teadete edasiandmiseks telegraafi teel kasutatakse morsetähestikku. Selles märgitakse tähed, numbrid ja kirjavahe-märgid punktide ja kriipsude abil. Seejuures kasutatakse mõnede tähtede jaoks ühte märki (näiteks e), aga teiste

tarvis peab kasutama nelja või viit märki (näiteks $b - \dots$).

Kust on siin saadud arvud 4 või 5? Kas ei saa läbi ajada väiksema märkide arvuga, andes kõik teated edasi kombinatsioonide abil, mis koosneksid mitte rohkem kui neljast märgist? Selgub, et ei saa. Vastuse annab just kordumistega variatsioonide valem. Valemist (1) järeldub, et $\bar{A}_2^1 = 2$. Teiste sõnadega, ühe märgi abil saab edasi anda ainult kahte tähte (e ja t —). Kahe märgiga saab tähistada $2^2 = 4$ tähte, kolmega $2^3 = 8$ ja neljaga $2^4 = 16$ tähte. Seega saab nelja märgiga edasi anda kõige enam

$$2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

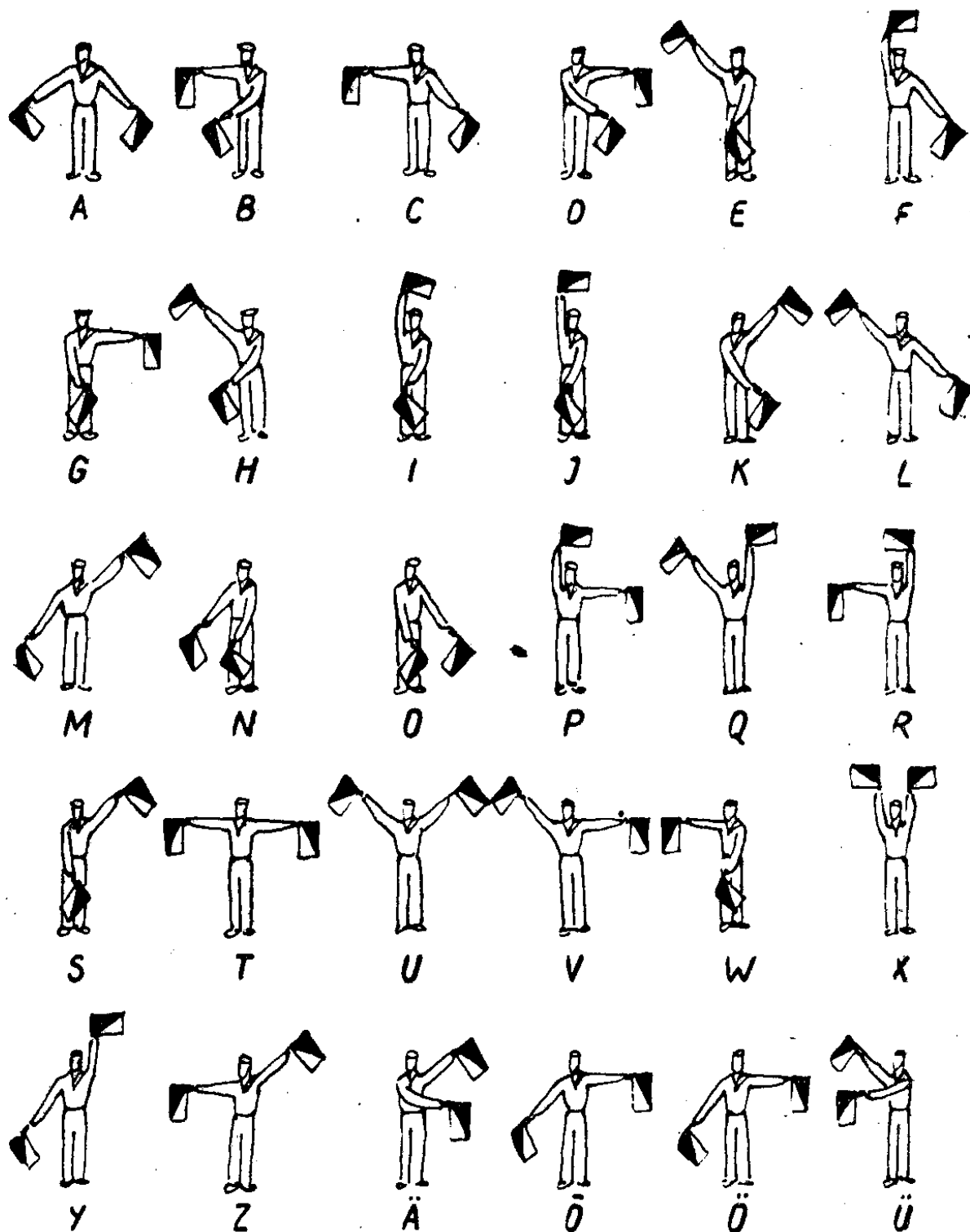
tähte.

Koos võõrtähtedega on aga eesti tähestikus 32 tähte, peale selle tuleb edasi anda veel numbreid ja kirjavahe-märke. Selge, et neljast märgist koostatud sümboleid ei jätku. Kui aga koostada tähiseid viiest märgist, lisandub veel 32 sümbolit. Saadud 62 sümbolist piisab telegrafeeri-miseks täielikult.

Telegrafeerimiseks kasutatakse ka viiemärgilist koodi, milles iga tähte kirjutatakse parajasti viie sümboli abil. Siin kasutatakse punktide ja kriipsude asemel voolu suuna muutmist või vooluga ja vooluta signaali saatmist. Sel-lel koodil on täpselt $2^5 = 32$ kombinatsiooni. Neist jätkub tähtede edasiandmiseks. Numbrite ja kirjavahemärkide edasiandmiseks kasutatakse aga neidsamu kombinatsioone mis tähtede puhulgi. Seepärast on viiekohalise koodiga telegraafiaparaatidel eriseade, mis lülitab aparaadi tähte-delt numbritele ja vastupidi.

Semaforitähestik

Laevastikus kasutatakse tähestiku edasiandmiseks mõni-kord «lipusemafori». Igale tähele vastab seejuures lippude teatav asend. Harilikult paiknevad lipud signalisti keha vastaskülgedel, kuid mõne tähe edasiandmiseks viiakse need kehast ühele poole (B, D, H, K jne.). Miks tuli teha selline erand? Vastuse annab seesama kordumistega variat-sioonide valem. Asi on selles, et kummalgi lipul on viis erinevat asendit: vertikaalselt alla, kaldu alla, horisontaal-selt, kaldu üles ja vertikaalselt üles. Et meil on kaks



Joon. 1

lippu, siis põhiasendite kombinatsioonide üldarvuks kujuneb $\bar{A}_5^2 = 5^2 = 25$. Seejuures tuleb veel kõrvale jätta asend, kus mõlemad lipud on suunatud alla, sest seda kasutatakse sõnade eraldamiseks. Kokku saame 24 kombinatsiooni, nendest aga ei piisa ladina tähestiku edasiandmiseks. Seepärast tuligi mõne tähe puhul lipud suunata ühele poole.

Elektronarvuti

Elektronarvutid võivad lahendada väga erinevaid ülesandeid. Ühe ja sama arvuti abil võib ära mõistatada tundmatus keeles kirjutusi ning teha tammi ehitamiseks vajalikke arvutusi või töödelda raketi liikumisandmeid. Millega seletub niisugune paindlikkus arvuti kasutamisel? Peamiselt sellega, et kõik need ülesanded taanduvad arvutustele, arvudega teostatavatele tehetele. Kuid miks võib arvuti lahendada nii palju ülesandeid ja veel väga erinevate arvuliste andmete korral? Mitu erinevat arvude kombinatsiooni saab masinasse paigutada?

Küsimusele vastamiseks vaatleme näiteks arvutit «Strela». Selle operatiivmälu koosneb 2048 pesast, millest igaühel on 43 kahendkohta. Iga koht võib sisaldada arvu 1 või 0. Kokku on meil $43 \cdot 2048 \approx 87\,000$ erinevat kohta, iga koha võib täita aga kahel viisil (0 või 1). Valemi (1) järgi saame, et arvuti «Strela» (või selle pesad) võib (võivad) olla $2^{87\,000}$ erinevas olekus. Raske on kujutleda, kui suur arv see on. Näiteks kui võtta kera, mille raadius võrdub kaugusega meist kõige kaugema tuntud tähesüsteemini, siis seda kera tihedalt täitvate elektronide arv ei ületa 2^{500} .

Kui võtta üksainus mälupeesa, siis peaks sajatuhandeline masinakirjutajate armee üheksa aastat pidevalt tööd tegema, et trükkida kõik arvud, mis selles pesas esineda võivad (eeldades, et masinakirjutajad töötavad seitse tundi päevas ja kulutavad ühe 43-kohalise arvu trükkimiseks 10 sekundit).

Geneetiline kood

XX sajandi bioloogia tähelepanuväärne avastus oli geneetilise koodi dešifreerimine. Õnnestus välja selgitada, mil viisil pärilik informatsioon järglastele edasi antakse. See informatsioon osutus salvestatuks desoksüribonukleiinhappe (DNA) gigantsetes molekulides. DNA molekulid erinevad üksteisest nelja lämmastikaluse (N-aluse), adeniini, tümiini, guaniini, tsütosiini järjestuse poolest. Need alused määravad aminohapete järjestuse organismi valkudes, kusjuures iga aminohape on šifreeritud kolmest N-alusest koosneva koodi abil.

On kerge mõista, kust tuleb arv 3. Kahe aluse kombinatsioonide abil saaks ju šifreerida vaid $4^2 = 16$ amino-

hapet, kuid sellest ei piisa. Kui aga võtta kolm alust, siis saame $4^3=64$ kombinatsiooni. Sellest jätkub küllaga paarikümne aminohappe šifreerimiseks. Oleks üsna huvitav teada, kuidas looduses seda kombinatsioonide liiasust kasutatakse: kombinatsioonide arv on ju 64, aminohapete arv aga kolm korda väiksem.

Ühes kromosoomis sisaldub mitukümmend miljonit N-alust. Erinevate kombinatsioonide arv, millistes nad võivad üksteisele järgneda, on kujutlematult suur¹. Piisab nende kombinatsioonide tühisest osast, et kindlustada elusa looduse kogu mitmekesisus elu eksisteerimise jooksul Maal. Tuleb muidugi silmas pidada, et vaid üliväike osa teoreetiliselt võimalikest kombinatsioonidest annab eluvõimelisi organisme.

Kombinatorika üldreeglid

Nagu edaspidi näeme, on väga mitmesuguseid kombinatorikaülesandeid. Kuõd enamik neist lahendatakse kahe põhireegli, summa ja korrutise reegli abil.

Tihti õnnestub kõik uuritavad kombinatsioonid jaotada mitmeks klassiks, kusjuures iga kombinatsioon kuulub parajasti ühte klassi. Sel juhul *võrdub kombinatsioonide üldarv kõigis klassides sisalduvate kombinatsioonide arvude summaga*. Seda väidet nimetataksegi summa reegliks. Mõnikord sõnastatakse reegel veidi teisiti:

Kui mingit objekti A saab valida m viisil ja teist objekti B valida n viisil, siis valiku «kas A või B» saab teha $m+n$ viisil.

Kasutades summa reeglit viimases sõnastuses, tuleb jälgida, et ükski objekti A valimisviisidest ei ühtiks ühegagi objekti B valimisviisidest (ehk, nagu varem ütlesime, et ükski kombinatsioon ei satuks korraga kahte klassi). Kui on selliseid kokkulangemisi, siis kaotab summa reegel kehtivuse ja me saame vaid $m+n-k$ valimisviisi, kus k on kokkulangemiste arv.

Teine reegel, mida nimetatakse *korrutise reegliks*, on veidi keerulisem. Tihti on kahe elemendi kombinatsiooni koostamisel teada, mitmel viisil saab valida esimest ja mitmel viisil teist elementi, kusjuures teise elemendi valimisviiside arv ei sõltu sellest, kuidas on valitud esimene. Olgu esimest elementi võimalik valida m ja teist n

¹ See on 4^M , kus M on N-aluste arv kromosoomis (vt. valem (1)).

viisil. Siis saab nende elementide paari valida mn viisil. Teiste sõnadega:

kui objekti A saab valida m viisil ja kui pärast iga sellist valikut saab objekti B valida n viisil, siis on antud järjestusega paari (A, B) võimalik moodustada mn viisil.

Korrutise reegli tõestamiseks märgime, et igaühte objekti A m valimisviisist võib kombineerida objekti B n valimisviisiga. See annabki mn valimisviisi paari (A, B) jaoks.

Korrutise reeglit võib näitlikult esitada järgmise tabeli abil:

Tabel 1

$$\begin{array}{l} (A_1, B_{11}), \dots, (A_1, B_{1n}) \\ (A_2, B_{21}), \dots, (A_2, B_{2n}) \\ \vdots \\ (A_i, B_{i1}), \dots, (A_i, B_{in}) \\ \vdots \\ (A_m, B_{m1}), \dots, (A_m, B_{mn}). \end{array}$$

Siin $A_1, \dots, A_m$ abil on tähistatud objekti A m valimisviisi ja $B_{i1}, \dots, B_{in}$ abil objekti B valimisviisid, kui objekt A on valitud i -ndal viisil. On selge, et see tabel sisaldab paari (A, B) kõik valimisviisid ja koosneb mn elemendist.

Kui objekti B valimisviis ei sõltu sellest, kuidas on valitud objekt A , siis saame tabeli 1 asemel lihtsama tabeli:

Tabel 2

$$\begin{array}{l} (A_1, B_1), (A_1, B_2), \dots, (A_1, B_n) \\ (A_2, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_2, B_n) \\ \vdots \\ (A_m, B_1), (A_m, B_2), \dots, (A_m, B_n). \end{array}$$

Loomulikult võib juhtuda, et meil on vaja moodustada mitte paare, vaid suurema elementide arvuga kombinatsioone. Siis jõuame järgmise ülesandeni.

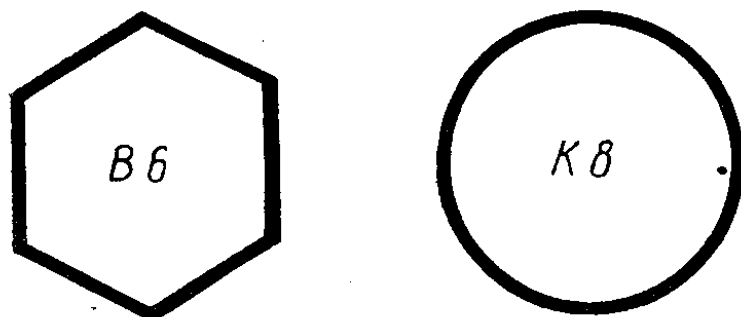
Mitu k -paigutust saab koostada, kui esimene element võib olla n_1 erinevat liiki, teine n_2 liiki, $\dots$, k -s element n_k liiki? Seejuures loetakse kahte paigutust erinevateks, kui neil kas või ühelainsal kohal asetsevad erinevad elemendid.

See ülesanne lahendatakse samuti nagu jalgratturite ülesanne. Esimese elemendi saab valida n_1 viisil. Iga valitud elemendi saab ühendada suvalise teise elemendiga n_2 erinevast liigist, mis annab $n_1 n_2$ paari. Iga paari saab

ühendada ükskõik millise kolmanda elemendiga n_3 liigist, mis annab $n_1 n_2 n_3$ kolmikut. Jätkates saame lõpuks $n_1 n_2 \dots n_k$ otsitavat tüüpi paigutust.

Jalgratturite ülesandes tuli valida kolm elementi (sajaliste, kümneliste ja üheliste number). Igal sammul võisime valida ühe üheksast lubatavast numbrist. Seejärel tuligi välja $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ arvu.

Nüüd aga üks raskem ülesanne.



Joon. 2

Koostatakse märke, mis koosnevad geomeetriakujundist (ringist, ruudust, kolmnurgast või kuusnurgast), tähest ja numbrist. Mitu sellist märki saab koostada?

Esimesel sammul tuleb valida geomeetriakujund. Seda saab teha neljal viisil (meil on kokku neli kujundit). Siis tuleb valida üks täht 32-st ja lõpuks üks number 10-st. Kokku saame $4 \cdot 32 \cdot 10 = 1280$ ühendit.

Doominoülesanne

Keerulisem on lahendada kombinatoorikaülesandeid, kus valikute arv sõltub igal sammul sellest, millised elemendid valiti eelmistel sammudel. Toome näite niisugusest ülesandest.

Mitmel viisil võib 28 doominokivi seast valida kaks kivi nii, et ühe neist võiks panna teise kõrvale (s.o. nii, et mingi silmade arv esineks mõlemal kivil)?

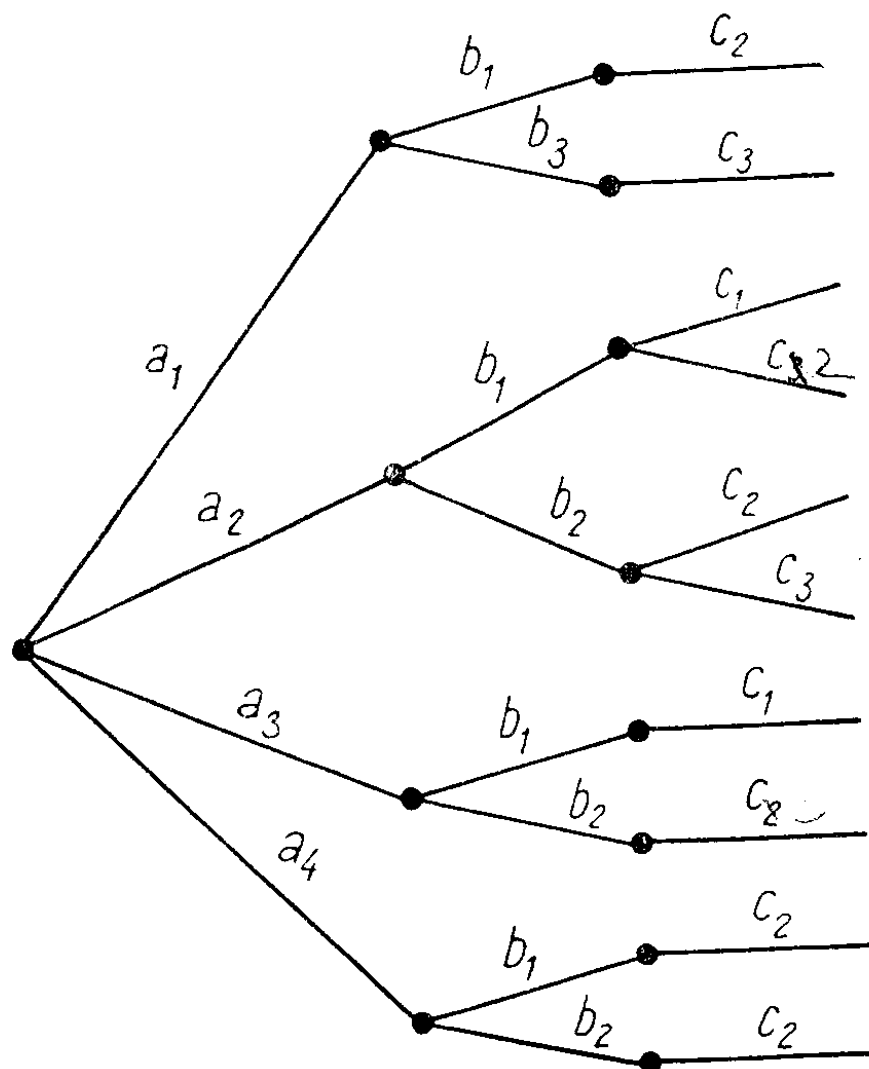
Algul valime ühe kivi. Seda saab teha 28 viisil. Seejuures osutub valitud kivi 7 juhul topeltkiviks, s.o. kiviks 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, ja 21 juhul erineva silmade arvuga kiviks (näiteks 05, 13, jne.). Esimesel juhul saab teise kivi valida 6 viisil (näiteks, kui esimesel sammul valiti 11, siis võib teisel sammul valida ühe kividest 01, 12, 13, 14, 15, 16). Teisel juhul saab teise kivi valida 12 viisil (kivi 35 jaoks sobivad 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 25, 45, 55, 56). Korrutise reegli järgi saame esimesel juhul $7 \cdot 6 =$

$=42$, teisel juhul aga $21 \cdot 12 = 252$ valimisviisi. Seega saame summa reegli järgi $42 + 252 = 294$ paari valimise viisi.

Esitatud arutluses arvestati ka kivide valimise järjekorda. Seetõttu esines iga kivipaar kaks korda (näiteks esimest korda 01 ja 16, teist korda 16 ja 01). Kui valimise järjekorda mitte arvestada, siis saame kaks korda vähem valimisviise, s.o. 147 võimalust.

Kosmoselaeva meeskond

Kui võimalike valikute arv igal sammul sõltub varem valitud elementidest, on ühendite koostamise protsessi mugav kujutada «puu» abil. Algul tõmmatakse mingist punktist niimitu lõiku, kuimitu erinevat valikut saab teha esimesel sammul (seega vastab iga lõik ühele elementidile). Iga lõigu lõpust tõmmatakse niimitu lõiku, kuimitu valikut saab teha teisel sammul, juhul kui esimesel korral valiti antud element jne.



Joon. 3

Niisugune konstruktsioon annab «puu», mille vaatlemisel saame kergesti kätte ülesande lahendite arvu.

Vaatleme järgmist näidet. On teada, et mitmekohaliste kosmoselaevade meeskondade koostamisel tekib kosmonautide psühholoogilise sobivuse probleem. Inimesed, kes eraldi võetult on täiesti kõlblikud, võivad pikema ühise reisi jaoks kõlbmatuteks osutuda. Oletame, et kosmoselaeva meeskonnas peab olema kolm inimest: komandör, insener ja arst. Komandöri kohale on neli kandidaati a_1, a_2, a_3, a_4 , inseneri kohale kandidaadid b_1, b_2, b_3 ja arsti kohale kandidaadid c_1, c_2, c_3 . Kontrollimine näitas, et komandör a_1 sobib psühholoogiliselt inseneridega b_1 ja b_3 ning arstidega c_2 ja c_3 , komandör a_2 inseneridega b_1 ja b_2 ning kõigi arstidega, komandör a_3 inseneridega b_1 ja b_2 ning arstidega c_1 ja c_3 , komandör a_4 — kõigi inseneridega ja arstiga c_2 . Peale selle ei sobi insener b_1 psühholoogiliselt arstiga c_3 , insener b_2 arstiga c_1 ja insener b_3 arstiga c_2 . Mitmel viisil saab nendel tingimustel koostada kosmoselaeva meeskonna?

Vastav puu on kujutatud joonisel 3. Sellest on näha, et leidub vaid 10 lubatavat kombinatsiooni (kui poleks sobivuse kitsendust, siis oleks kombinatsioonide arv korrutise reegli järgi $36=4 \cdot 3 \cdot 3$).

Kabeülesanne

Lahendame järgmise ülesande.

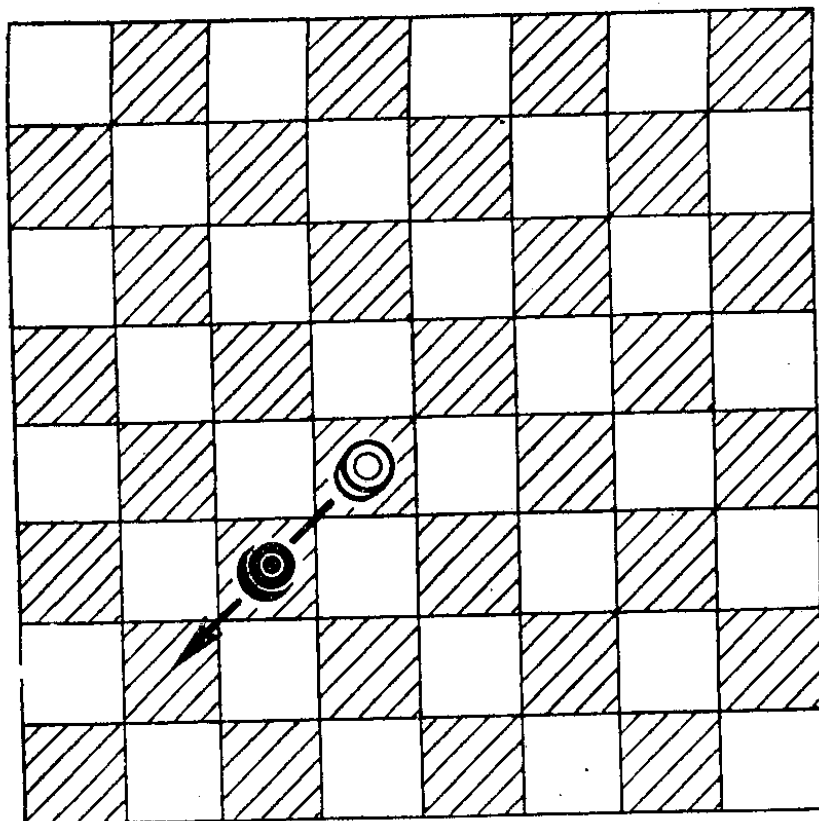
Mitmel viisil saab kabelauale asetada valge ja musta kabendi nii, et valge kabend võiks lüüa musta?

Kabereeglite järgi asetatakse kabendid mustadele väljadele ning üks lööb teist sellest üle hüpates ja järgmisele väljale asudes (joon. 4). Kui aga kabend on jõudnud viimase horisontaalini, muutub ta tammiks ja võib lüüa kõiki temaga ühel diagonaalil paiknevaid kabendeid peale nende, mis seisavad diagonaali otstes.

Ülesande muudab keerukaks see, et valge kabendi erinevate asendite puhul leidub erinev arv välju, kus ta saab musta lüüa. Kui näiteks valge kabend seisab väljal $a1$, siis saab ta musta lüüa ainult ühelt väljalt. Kui aga valge kabend on väljal $c3$, siis on musta kabendi otsitavate asendite arv 4. Lõpuks, kui valge kabend on jõudnud tammiks väljale $h8$, siis saab ta musta lüüa kuuelt väljalt.

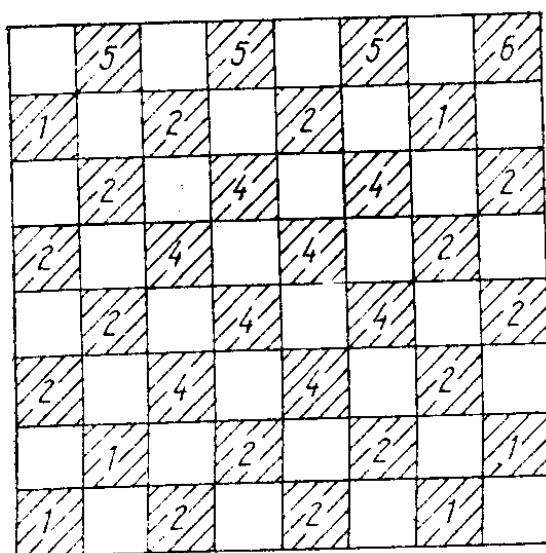
Seepärast on siin kõige lihtsam näidata valge kabendi iga asendi jaoks ära musta võimalike asendite arv ja

Joon. 4

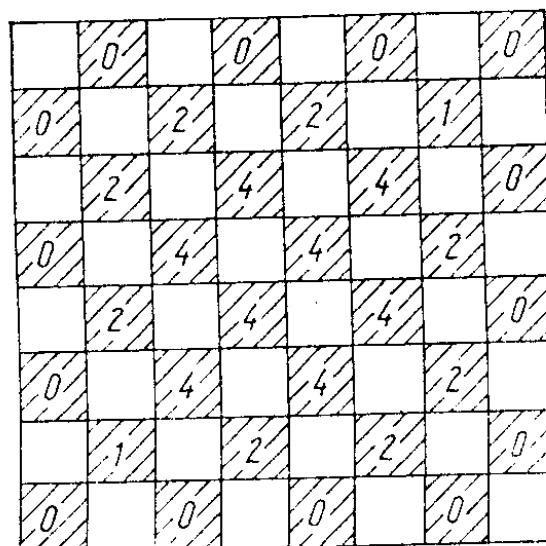


saadud tulemused liita. Joonisel 5, *a* on kujutatud kabelaud koos vastavate arvudega. Neid liites saame 87. Järelikult on 87 võimalikku paigutust.

On selge, et täpselt niisama palju on seise, kus must kabend saab lüüa valget. Seise, kus mõlemad kabendid võivad teineteist lüüa, on aga vähem. Näiteks kui valge seisab kabelaua äärel, siis ei saa must teda lüüa üheltki



a



b

Joon. 5

väljalt. Seetõttu vastab kõigile väljadele laua äärel arv 0. Täpselt samuti leiame arvud, mis vastavad teistele mustadele väljadele. Need on kujutatud joonisel 5, *b*. Liites saame võimalike paigutuste arvuks 50.

Lõpuks leiame musta ja valge kabendi selliste asendite arvu, mille puhul kumbki ei saa teist lüüa. Selle ülesande võiks lahendada samuti nagu eelmisedki, asetades valge kabendi igale mustale väljale ja arvutades, mitmel viisil saab musta kabendit paigutada nii, et kumbki ei saaks teist lüüa. Kuid siin on lihtsam rakendada «teekannu printsiipi»¹ ja taandada küsimus juba lahendatud ülesandele. Selleks leiame algul, mitmel viisil saab valge ja musta kabendi üldse kabelauale seada. Valge kabendi võib paigutada igaühele 32-st mustast väljast. Seejärel jääb musta jaoks 31 musta välja. Järelikult saab neid korrutise reegli põhjal paigutada $32 \cdot 31 = 992$ viisil. Kuid nende paigutamiskiiside seas on 87 kiisugust, kus valge kabend võib lüüa musta, ja 87 kiisugust, kus must võib lüüa valget. Seepärast tuleb kõrvale jätta $2 \cdot 87 = 174$ seisut. On vaja aga arvestada, et nii jäetakse mõned paigutamiskiisid kaks korda välja: üks kord seetõttu, et valge kabend võib lüüa musta, teine kord sellepärast, et must võib lüüa valget. Me nägime, et leidub 50 seisut, milles mõlemad võivad teineteist lüüa. Seepärast on

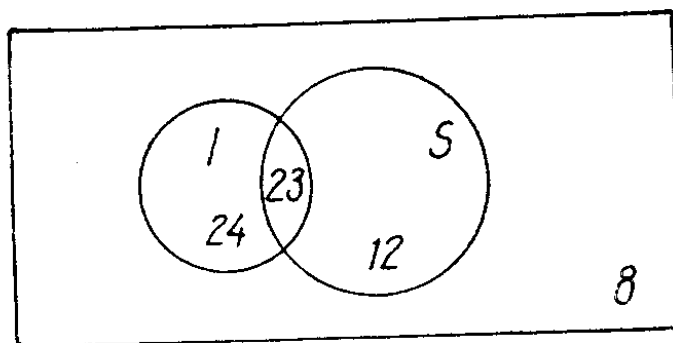
$$992 - 174 + 50 = 868$$

seisut, kus kumbki kabend ei saa teist lüüa.

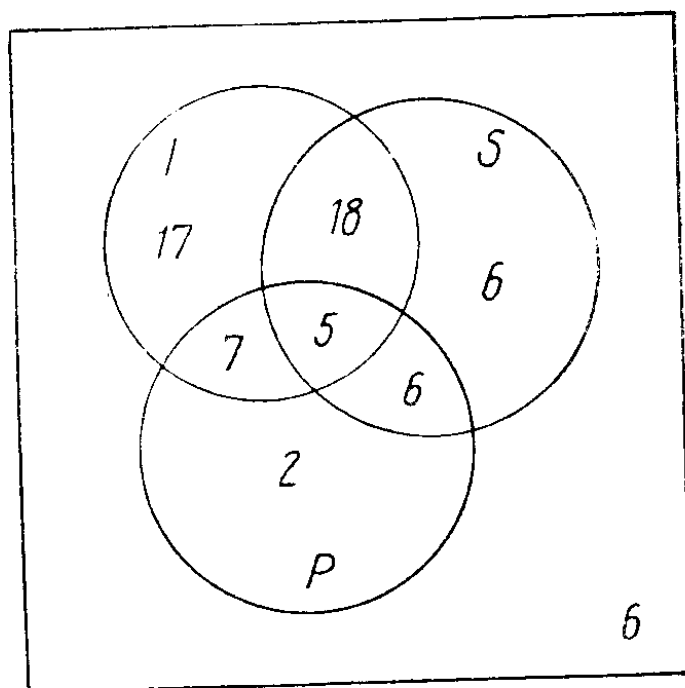
Mitu inimest ei oska võõrkeeli?

Viimase kabeülesande lahendamise meetodit kasutatakse kombinatoorikaülesannete puhul sageli. Vaatleme järgmist näidet.

¹ Räägitakse, et kord küsinud matemaatik füüsikult: «Teie ees on tühi teekann ja süütamata gaasipliit; kuidas vesi keema ajada?» — «Täitke kann veega, süüdake gaas ja pange kann pliidile,» vastanud füüsik. «Õige,» öelnud matemaatik. «Nüüd aga lahendage teine ülesanne. Süüdatud pliidi kõrval seisab täis teekann. Kuidas vesi keema ajada?» — «See on veel lihtsam, teekann tuleb pliidile panna!» — «Mitte midagi taolist!» hüüdnud matemaatik. «Tuli on vaja kustutada, vesi kannust välja valada ja me jõuame eelmise ülesandeni, mida juba oskame lahendada!» Seepärast räägitaksegi naljatades «teekannu printsiibist», kui uus ülesanne taandatakse juba lahendatud ülesandele.



a



b

Joon. 6

Uurimisinstituudis töötab 67 inimest. Neist 47 oskab inglise keelt, 35 saksa keelt ja 23 mõlemat keelt. Mitu inimest instituudis ei oska ei inglise ega saksa keelt?

Ülesande lahendamiseks tuleb kogu instituudi töötajate kollektiiv jaotada osadeks, millel pole ühiseid elemente. Esimese osa moodustavad need, kes oskavad ainult inglise keelt, teise need, kes oskavad üksnes saksa keelt, kolmanda mõlema keele oskajad ja neljanda need, kes ei oska kumbagi keelt (joon. 6).

Mõlema keele oskajaid on andmete järgi 23. Et aga inglise keelt oskab 47 inimest, siis valdab ainult inglise keelt $47 - 23 = 24$ inimest. Täpselt samuti oskab ainult saksa keelt $35 - 23 = 12$ inimest. Siit järeldub, et vähemalt ühte nendest keeltest valdab $23 + 24 + 12 = 59$ inimest. Et aga instituudis töötab 67 inimest, siis tuleb viimase

osa arvele $67 - 59 = 8$ inimest. Niisiis, 8 inimest ei oska kumbagi keelt.

Saadud vastuse võib kirjutada kujul

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12).$$

Kuid me saime 24, lahutades 47-st 23, ja 12, kui lahutasime 35-st 23.

Seepärast

$$8 = 67 - 23 - (47 - 23) - (35 - 23) = 67 - 47 - 35 + 23.$$

Nüüd on seaduspärasus näha: töötajate üldarvust lahutatakse inglise keele ja saksa keele oskajate arvud. Seejuures satuvad mõned töötajad mõlemasse nimekirja ja nad lahutatakse kaks korda. Need on just sellised polüglotid, kes valdavad mõlemat keelt. Liites need juurde, saame niisuguste isikute arvu, kes ei oska kumbagi keelt.

Muudame vaadeldud ülesande keerulisemaks, lisades veel ühe keele. Osaku prantsuse keelt 20 inimest, inglise ja prantsuse keelt 12 inimest, saksa ja prantsuse keelt 11 inimest, kõiki kolme keelt aga 5 inimest. On selge, et siis oskab ainult inglise ja prantsuse keelt $12 - 5 = 7$ inimest, ainult saksa ja prantsuse keelt aga $11 - 5 = 6$ inimest. Seega oskab üksnes prantsuse keelt $20 - 7 - 6 - 5 = 2$ inimest. Need inimesed kuuluvad nende 8 hulka, kes ei valda inglise ega saksa keelt. Järelikult on $8 - 2 = 6$ inimest, kes ei oska ühtki kolmest keelest.

Vastuse võib kirja panna nii:

$$\begin{aligned} 6 &= 8 - 2 = 67 - 47 - 35 + 23 - (20 - 7 - 6 - 5) = \\ &= 67 - 47 - 35 + 23 - 20 + (12 - 5) + (11 - 5) + 5 = \\ &= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5. \end{aligned}$$

Seaduspärasus on nüüd täiesti ilmne. Algul lahutatakse töötajate üldarvust nende arv, kes valdavad ühte keelt (ja võib-olla ka teisi). Seejuures on mõned kaks korda «lahutatud», sest oskavad kahte keelt. Sellepärast liidetakse arvud 23, 12, 11, mis näitavad, mitu inimest valdab kahte keelt (ja võib-olla veel kolmandatki). Kuid isikud, kes valdavad kolme keelt, on algul kolmekordselt «lahutatud» ja siis kolmekordselt «liidetud». Et nad tegelikult tuleb ikkagi lahutada, siis lahutame veel arvu 5.

Juurde- ja mahaarvamise valem

Vaadeldud näited võimaldavad sõnastada üldreegli. Olgu meil N eset, mille seast mõningatel on omadused $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Seejuures ei pruugi mõnel esemel ühtki mainitud omadust olla või tal võib neid olla üks või mitu. Tähistame $N(\alpha_i \alpha_j \dots \alpha_k)$ kaudu nende esemete arvu, millel on omadused $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k$ (ja võib olla veel mõni teine omadus). Kui meil on vaja rõhutada, et võetakse ainult esemed, millel ei ole teatud omadust, siis märgime selle omaduse priimiga. Näiteks $N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_4)$ abil tähistatakse nende esemete arvu, millel on omadused α_1 ja α_2 , kuid pole omadust α_4 (ülejäänud omaduste kehtivus jääb lah-tiseks).

Nende esemete arvu, millel pole ühtki nimetatud omadust, tähistatakse $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n)$ abil. Üldreegel on järgmine:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n) &= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots \\ &\dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + \dots + N(\alpha_1 \alpha_n) + \dots \\ &\dots + N(\alpha_{n-1} \alpha_n) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) - \dots \\ &\dots - N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Siin on algebraline summa võetud üle kõigi kombinatsioonide omadustest $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (nende järjekorda arvestamata), kusjuures märk $+$ pannakse, kui arvesse võetavaid omadusi on paarisarv, ja märk $-$, kui neid omadusi on paaritu arv. Näiteks $N(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_8)$ võetakse märgiga $+$ ja $N(\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{10})$ märgiga $-$. Valem (2) nimetatakse *juurde- ja mahaarvamise valemiks*: algul arvatakse maha kõik esemed, millel on kasvõi üks omadustest $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, siis arvatakse juurde esemed, millel on vähemalt kaks nendest omadustest, seejärel arvatakse maha vähemalt kolme omadusega esemed jne.

Tõestame valemi (2) induktsiooniga omaduste arvu järgi. Ühe omaduse puhul on valem ilmne. Igal esemel see omadus kas on olemas või puudub. Seepärast

$$N(\alpha') = N - N(\alpha).$$

Oletame nüüd, et valem (2) on tõestatud juhu jaoks, kus omaduste arv on $n-1$:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1}) &= N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_{n-1}) + \\ &+ N(\alpha_1 \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1}) - \\ &- N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-3} \alpha_{n-2} \alpha_{n-1}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

See valem kehtib eelduse järgi iga elementide hulga puhul. Muuseas peab ta siis kehtima ka nende elementide hulga $N(\alpha_n)$ korral, millel on omadus α_n . Selle elementide hulga jaoks omandab valem (3) kuju:

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1} \alpha_n) = N(\alpha_n) - N(\alpha_1 \alpha_n) - \dots - N(\alpha_{n-1} \alpha_n) + N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_n) + \dots + N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_n) - \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n) \quad (4)$$

(igal juhul võetakse ainult esemed, millel on omadus α_n).

Lahutame võrduse (4) võrdusest (3). Paremal poolel saame valemi (2) parema poole, mida vajasimegi. Vasakul saame vahe

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1}) - N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1} \alpha_n). \quad (5)$$

Kuid $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1})$ on nende esemete arv, millel pole omadusi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, aga võib olla omadus α_n . $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1} \alpha_n)$ on aga nende esemete arv, millel pole omadusi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, kuid on kindlasti omadus α_n . Järelikult on vahe (5) just võrdne nende esemete arvuga, millel pole ühtki omadustest $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Teiste sõnadega, kehtib võrdus

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1}) - N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1} \alpha_n) = N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{n-1} \alpha'_n).$$

Seega saame pärast lahutamist vasakul valemi (2) vasaku poole ja valem on tõestatud juhu jaoks, kus omaduste arv on n .

Järelikult kehtib seos (2) n omaduse jaoks, niipea kui ta kehtib $n-1$ omaduse korral, $n=1$ puhul on ta aga juba tõestatud; seepärast on selle seose kehtivus tõestatud mistahes lõpliku omaduste süsteemi jaoks.

Valemi (2) võib sümboolsel kujul esitada järgmiselt:

$$N(\alpha' \beta' \dots \omega') = N(1 - \alpha)(1 - \beta) \dots (1 - \omega). \quad (6)$$

Siin tuleb pärast sulgude avamist korrutised $N\alpha\beta \dots \lambda$ kirjutada kujul $N(\alpha\beta \dots \lambda)$. Näiteks, $N\alpha\beta\delta\omega$ asemel kirjutame $N(\alpha\beta\delta\omega)$.

Milles on viga?

Üks klassiorganisaator andis õpilaste kohta järgmised andmed: «Klassis on 45 õpilast, nendest 25 poissi. 30 last õpib neljadele ja viitele, nendest 16 poissi. Spordiga tegeleb 28 õpilast, nendest 18 poissi ja 17 õpilast, kes õpivad neljadele ja viitele. 15 poissi õpib neljadele ja viitele ning tegeleb ühtlasi spordiga.»

Mõne päeva pärast kutsus klassiorganisaatori välja klassijuhataja, kes nagu kiuste õpetas matemaatikat, ja ütles, et andmetes on viga. Katsume välja selgitada, kuidas ta seda teada sai. Selleks arvutame, mitu tüdrukut ei tegele spordiga ning saab aeg-ajalt kolmesid (võib-olla

ka kahtesid). Tähistame kuulumise meessoos hulka α_1 abil, hea õppeedukuse α_2 ja spordiga tegelemise α_3 abil. Leiame, millega võrdub $N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3)$. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) &= 25, & N(\alpha_2) &= 30, & N(\alpha_3) &= 28, \\ N(\alpha_1\alpha_2) &= 16, & N(\alpha_1\alpha_3) &= 18, & N(\alpha_2\alpha_3) &= 17, \\ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) &= 15. \end{aligned}$$

Seega saame juurde- ja mahaarvamise valemi järgi:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) &= 45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 = \\ &= -2. \end{aligned}$$

Kuid vastus ei saa olla negatiivne! Seepärast on andmetes vastuolu ja nad pole õiged.

Eratosthenese sõel

Üks matemaatika suuremaid mõistatusi on algarvude naturaalarvude reas paiknemise seaduspärasused. Mõnikord järgneb üks algarv teisele üle ühe arvu (näiteks 17 ja 19, 29 ja 31), mõnikord tuleb aga järjest miljon kordarvu. Praegu teavad õpetlased juba üsna palju selle kohta, kui palju on esimese N naturaalarvu seas algarve. Nendes arvutustes osutus õige kasulikuks meetod, mis pärineb vanakreeka teadlaselt Eratostheneselt (ta elas III sajandil e.m.a. Aleksandrias).

Eratosthenes tegeles väga paljude erinevate probleemidega: talle kuulub huvitavaid uurimusi matemaatikas, astronoomias ja teistes teadusharudes. Muide, selline mitmekülgsus tegi ta veidi pealiskaudseks. Kaasaegsed nimetasid Eratosthenest naljatades «kõiges teiseks» (teine matemaatik Eukleidese järel, teine astronoom Hipparchose järel jne.).

Matemaatikas huvitas Eratosthenest just probleem, kuidas leida naturaalarvude 1 kuni N seast kõik algarvud.¹ Ta mõtles selleks välja järgmise meetodi. Algul tõmmatakse maha kõik arvud, mis jaguvad kahega (välja arvatud 2 ise). Siis võetakse esimene järelejäänud arvudest

¹ Eratosthenes pidas arvu 1 algarvuks. Praegu peavad matemaatikud arvu 1 eri liiki arvuks, mis ei kuulu ei alg- ega kordarvude hulka.

(nimelt 3). Ilmselt on see algarv. Seejärel tõmmatakse maha kõik talle järgnevad arvud, mis jaguvad kolmega. Esimene järelejääv arv on 5. Tõmbame maha kõik talle järgnevad arvud, mis jaguvad viiega jne. Arvud, mis säilivad pärast kõiki neid mahatõmbamisi, ongi algarvud. Et Eratosthenese ajal kirjutati vahatahvlitele ja arve ei tõmmatud maha, vaid torgati läbi, siis meenutas tahvel kirjeldatud protsessi järel sõela. Seepärast sai Eratosthenese meetod nimeks «Eratosthenese sõel».

Teeme kindlaks, mitu arvu jääb alles esimesest sajast, kui me Eratosthenese meetodi järgi tõmbame maha kahe, kolme või viiega jaguvad arvud. Teiste sõnadega, esitame niisuguse küsimuse: mitu arvu esimese saja seast ei jagu ühegagi arvudest 2, 3 ja 5? See ülesanne lahendatakse juurde- ja mahaarvamise valemi järgi.

Tähistame α_1 abil arvu kahega, α_2 abil kolmega ja α_3 abil viiega jaguvuse omaduse. Siis tähendab $\alpha_1\alpha_2$, et arv jagub 6-ga; $\alpha_1\alpha_3$, et ta jagub 10-ga ja $\alpha_2\alpha_3$, et ta jagub 15-ga. Lõpuks tähendab $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, et arv jagub 30-ga. Meil tuleb leida, mitu arvu ühest sajani ei jagu ühegagi arvudest 2, 3 ja 5, s.o. mitmel neist pole ühtki omadustest α_1 , α_2 , α_3 . Valemi (2) järgi saame

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Kuid selleks, et leida, mitu arvu ühest kuni N -ni jagub arvuga n , tuleb N jagada arvuga n ja võtta jagatise täisosa. Seepärast

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) &= 50, & N(\alpha_2) &= 33, & N(\alpha_3) &= 20, \\ N(\alpha_1\alpha_2) &= 16, & N(\alpha_1\alpha_3) &= 10, & N(\alpha_2\alpha_3) &= 6, \\ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) &= 3 \end{aligned}$$

ja järelikult

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = 26.$$

Seega 26 arvu ühest kuni sajani ei jagu arvudega 2, 3 ja 5. Need arvud jäävadki alles pärast Eratosthenese protsessi kolme esimest sammu. Peale selle jäävad järele 2, 3 ja 5 ise. Kokku säilib 29 arvu.

Esimesest tuhandest jääb pärast Eratosthenese protsessi kolme esimest sammu alles 269 arvu, sest sel juhul

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) &= 500; & N(\alpha_2) &= 333, & N(\alpha_3) &= 200, \\ N(\alpha_1\alpha_2) &= 166, & N(\alpha_1\alpha_3) &= 100, & N(\alpha_2\alpha_3) &= 66, \\ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) &= 33. \end{aligned}$$

II. VARIATSIOONID, PERMUTATSIOONID JA KOMBINATSIOONID

Me vaatlesime mõningaid kombinatoorikaülesannete lahendamise üldreegleid. Nende abil saab anda vastused väga erinevat tüüpi probleemidele. Kuid nii nagu geometrias on ebamugav ülesande lahendamist alati aksioomidele taandada ja hoopis hõlpsam on kasutada teoreeme, nii on kombinatoorikaski mugavam kasutada valmis valemeid, selle asemel et lahendada ülesanne üldreeglite järgi. Nimelt esinevad mõned ülesannete tüübid teistest tunduvalt sagedamini. Neis ülesannetes ettetulevatele ühenditele on antud eri nimetused — variatsioonid, permutatsioonid ja kombinatsioonid.

Selliste ühendite arvu jaoks on tuletatud eri valemid, mida kasutataksegi mitmesuguste kombinatoorikaülesannete lahendamisel. Ühega nendest valemitest oleme juba tuttavad: I peatüki algul näitasime, et kordumistega k -variatsioonide arv n tüüpi elementidest on n^k . Nüüd, teeme kindlaks, mitu sellist variatsiooni saab koostada, kui kordumised pole lubatud, s. o. kui kõik variatsioonides sisalduvad elemendid on erinevad. Algul vaatleme järgmist ülesannet.

Jalgpallimeistrivõistlused

NSVL A-klassi jalgpallimeistrivõistluste esimesest alagrupist võtab osa 17 meeskonda. Võistlus käib kuld-, hõbe- ja pronksmedalite pärast. Mitmel viisil võivad medalid jaotuda?

See ülesanne lahendatakse korrutise reegli põhjal. Kuldmedalid võib saada ükskõik milline 17 meeskonnast. Teiste sõnadega on meil siin 17 võimalust. Ent kui mingi

meeskond on kuldmedalid juba saanud, siis jääb vaid 16 hõbemedalite pretendent. Kordumine on välistatud: üks ja sama meeskond ei saa korraga võita nii kuld- kui ka hõbemedaleid.

Kui ka hõbemedalid on kätte antud, siis võib pronksmedalid saada vaid üks ülejäänud 15 meeskonnast. Seega saame korrutise reegli järgi, et medalid võivad jaotuda $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ viisil.

Kordumisteta variatsioonid

Lahendatud ülesanne kuulub nende kombinatoorikaülesannete klassi, kus esinevad kordumisteta variatsioonid. Selliste ülesannete üldine sõnastus on järgmine.

On olemas n erinevat eset. Mitu k -paigutust saab nendest koostada? Seejuures loetakse kahte paigutust erinevaks, kui neis on vähemalt üks erinev element või nad koosnevad ühtedest ja samadest elementidest, ent erinevas järjekorras.

Selliseid paigutusi nimetatakse *kordumisteta variatsioonideks* ja nende arvu tähistatakse A_n^k abil. n eseme kordumisteta k -variatsioonide koostamisel tuleb meil teha k valikut. Esimesel sammul võib valida ükskõik millise olemasolevast n esemest. Kui see valik on juba tehtud, siis tuleb teisel sammul valida $n - 1$ allesjäänud eseme hulgast, sest tehtud valikut korrata ei tohi.¹ Täpselt samuti jääb kolmandal sammul valimiseks $n - 2$ vaba eset, neljandal $n - 3$, ... k -ndal sammul $n - k + 1$ eset. Seepärast saame korrutise reegli järgi, et n eseme kordumisteta k -variatsioonide arv avaldub järgmiselt:

$$A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1). \quad (1)$$

Teaduslik ühing

Kasutame tuletatud valemit järgmise ülesande lahendamiseks.

Teaduslik ühing koosneb 25 inimesest. Tuleb valida ühingu president, asepresident, teaduslik sekretär ja laekur. Mitmel viisil saab seda valikut teha, kui igal ühingu liikmel võib olla vaid üks amet?

¹ Tuletame meelde, et erinevalt kordumistega variatsioonide juhust on meil nüüd vaid üks ese igast liigist.

Antud juhul tuleb leida kordumisteta variatsioonide arv 25 elemendist neljakaupa. Siin on ju olulised nii ühingu juhtkonda valitud isikud kui ka ametite jaotus nende vahel (valik, kus president on Ivanov, asepresident Tatarinov, teaduslik sekretär Timošenko, laekur Aleksejev, erineb valikust, kus president on Timošenko, asepresident Ivanov, teaduslik sekretär Tatarinov, laekur Aleksejev). Seetõttu annab vastuse valem

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

Permutatsioonid

Koostades kordumisteta variatsioone n elemendist k -kaupa, saime paigutused, mis erinevad üksteisest nii elemendilise koosseisu kui ka elementide järjestuse poolest. Kui aga võtta paigutused, millesse kuuluvad kõik n elementi, siis võivad need üksteisest erineda vaid koostiselementide järjestuse poolest. Selliseid paigutusi nimetatakse *n elemendi permutatsioonideks* või lühemalt *n -permutatsioonideks*.

Teiste sõnadega, n -permutatsioonideks nimetatakse selliseid kordumisteta variatsioone n elemendist, millesse kuuluvad kõik elemendid. Võib ka öelda, et n elemendi permutatsioonideks nimetatakse kõikvõimalikke n -paigutusi, millest igaüks sisaldab iga elementi üksainus kord ja mis erinevad üksteisest vaid elementide järjestuse poolest. n -permutatsioonide arvu tähistatakse P_n abil. Valemi P_n jaoks saame otsekohe kordumisteta variatsioonide arvu valemist. Nimelt

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1. \quad (2)$$

Et nüüd teada saada, kui palju permutatsioone on võimalik koostada n elemendist, tuleb omavahel läbi korrutada naturaalarvud 1 kuni n . Seda korrutist tähistatakse $n!$ (loe: n -faktoriaal). Niisiis,

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Seejuures eeldatakse, et $1! = 1$.

Edaspidi esineb tähistus $0!$. Näib, et $0!$ peaks võrduma nulliga. On aga kokku lepitud, et $0! = 1$.

Põhjus on selles, et faktoriaalil on ilmselt järgmine omadus:

$$n! = n(n-1)!$$

See võrdus kehtib $n > 1$ puhul. On loomulik defineerida $0!$ nii, et võrdus jääks kehtima ka $n = 1$ puhul, s. o. nii, et $1! = 1 \cdot 0!$. Kuid siis tuleb võtta $0! = 1$.

Märgime veel, et kordumisteta variatsioonide arvu valemi (1) võib kirja panna järgmiselt:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3)$$

Tõepoolest, kõik tegurid $1, 2, \dots, n-k$ murrus (3) sisalduvad nii lugejas kui ka nimetajas. Pärast taandamist saame $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$, mis on kooskõlas valemiga (1).

Ülesanne vankritest

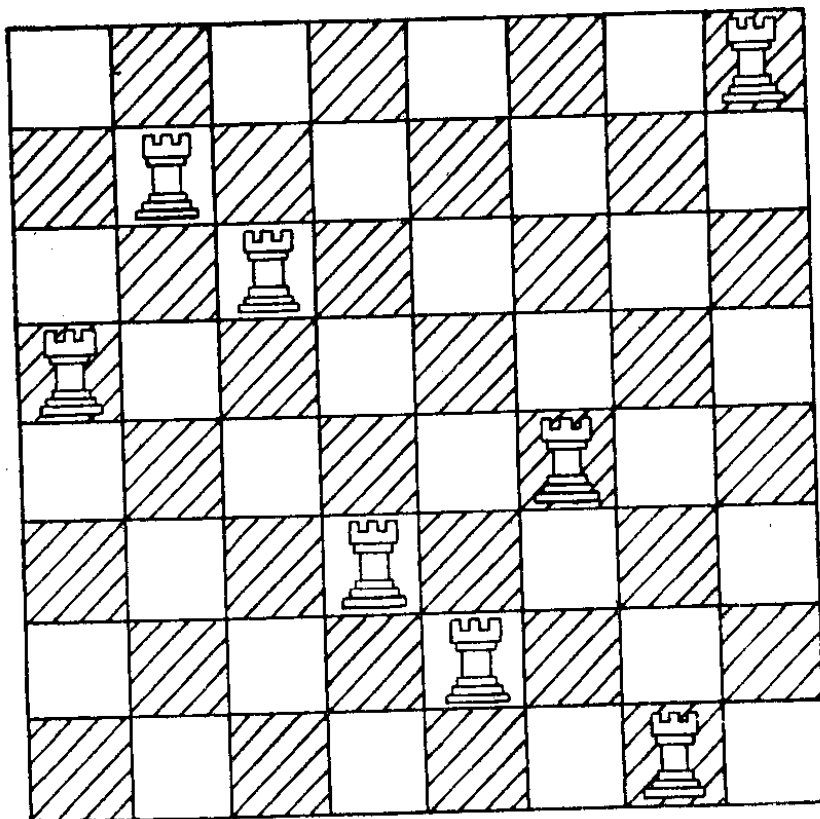
Mitmel viisil võib malelauale paigutada 8 vankrit nii, et nad ei saaks üksteist lüüa?

On selge, et sellise paigutuse korral peab igal horisontaalil ja igal vertikaalil asuma üks vanker. Vaatleme üht niisugust paigutust. Oletame, et esimesel horisontaalil asuv vanker paikneb väljal a_1 , teisel horisontaalil — väljal a_2 , ..., kaheksandal horisontaalil — väljal a_8 . Siis on $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ mingi permutatsioon arvudest $1, 2, \dots, 8$ (arusaadavalt pole arvude $a_1, a_2, \dots, a_8$ seas kahte ühesugust, sest muidu satuksid kaks vankrit samale vertikaalile). Vastupidi, kui $a_1, a_2, \dots, a_8$ on mingi permutatsioon arvudest $1, 2, \dots, 8$, siis vastab talle teatav vankrite paigutus, mille puhul vankrid ei saa üksteist lüüa. Näiteks joonisel 7 on kujutatud niisugune paigutus, mis vastab permutatsioonile $7\ 5\ 4\ 6\ 1\ 3\ 2\ 8$. Seega on otsitavate paigutuste arv võrdne permutatsioonide arvuga arvudest $1, 2, \dots, 8$, s. o. P_8 . Kuid

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\ 320.$$

Seega saab vankreid nõutaval viisil paigutada 40 320 moodi.

Täpselt samuti tõestatakse, et n horisontaalist ja n vertikaalist koosnevale lauale võib vankrid paigutada $n!$ viisil nii, et nad ei saa üksteist lüüa.



Joon. 7

Hoopis teise vastuse oleksime saanud, kui vankrid üksteisest millegipoolt erineksid, oleksid kas eri värvi või nummerdatud. Sel juhul tekib igast nummerdamata vankrite paigutusest $n!$ nummerdatud vankrite paigutust: me saame nad, kui võtame nende n vankri kõikvõimalikud ümberpaigutused samadel hõivatud väljadel. Seepärast oleksime saanud $(n!)^2$ paigutust, kus vankrid ei saa üksteist lüüa.

Sama järelduseni võib jõuda ka teisiti, kasutades otseselt korrutise reeglit. Esimese vankri võib panna ükskõik millisele n^2 väljast. Kui maha tõmmata horisontaal ja vertikaal, kuhu see vanker sattus, jääb $n - 1$ horisontaali ja $n - 1$ vertikaaliga laud, millel on $(n - 1)^2$ välja. Seega saab teise vankri asetada $(n - 1)^2$ viisil. Täpselt samuti võib kolmanda vankri paigutada $(n - 2)^2$ viisil jne. Kokku saame

$$n^2(n - 1)^2 \dots 1^2 = (n!)^2$$

vankrite paigutamise viisi.

Lingvistilised probleemid

Lingvistid (eriteadlased elavate ja surnud keelte alal) peavad tihti mõistatama tundmatus keeles tehtud kirjutusi. Oletame, et nad said teksti, mis on kirja pandud 26 tundmatu märgi abil. Need märgid on tähed, millest igaüks vastab ühele 26 häälikust. *Mitmelt viisil saab häälikud kirjamärkidele vastavusse seada?*

Paigutame kirjamärgid mingisse järjekorda, siis annab iga vastavusse seadmise viis mingi häälikute permutatsiooni. Kuid 26 häälikust saab koostada $P_{26}=26!$ permutatsiooni. See arv on ligikaudu võrdne $4 \cdot 10^{26}$. Loomulikult pole kõigi nende võimaluste kontrollimine arvu- tile jõukohane, rääkimata juba inimesest, sellepärast püütakse võimaluste arvu vähendada. Tihti õnnestub eraldada täishäälikuid tähistavad märgid kaashäälikute märkidest (täishäälikud seisavad kaashäälikute kõrval sagedamini kui täishäälikud täishäälikute või kaashäälikud kaashäälikute kõrval; kõige sagedamini esinevaid märkide kombinatsioone vaadeldes võib täishäälikute märgid eraldada kaashäälikute omadest). Oletame, et õnnestus leida 7 märki täishäälikute ja 19 märki kaashäälikute jaoks. Arvutame, mitmekordselt on vähenenud võimaluste arv. 7 täishäälikute märki saab omavahel ümber paigutada 7! viisil, 19 kaashäälikute märki aga 19! viisil. Kombinatsioonide üldarv on 7!19!. Seega on töö maht vähenenud $\frac{26!}{7!19!} \approx 650\,000$ korda. Muidugi on ülesanne kergemaks läinud, kuid ka 7!19! on tohutult suur arv.

Edasi arvutatakse üksikute märkide esinemissagedused. Võrreldes neid sagedusi tähtede esinemissagedustega antud keelele lähedastes keeltes, võib mõne märgi tähenduse umbkaudu ära arvata. Teised märgid õnnestub leida, kui antud teksti võrreldakse sellesama tekstiga teistes keeltes (vanal ajal armastasid kuningad kuulutada oma «kangelastegudest» mitmes keeles).

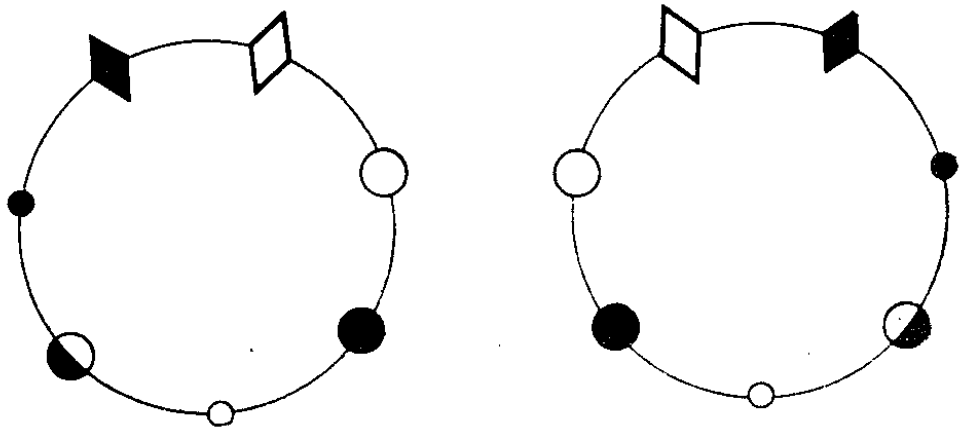
Oletame, et niisuguse töö tulemusena on ära tuntud 4 täishäälikut ja 13 kaashäälikut. Mitu võimalust veel jääb? Ilmselt $3! \cdot 6! = 4320$. Sellise kombinatsioonide arvu saab aga elektronarvuti abil juba läbi kontrollida.

Analoogiliste raskustega puutuvad kokku ka krüptoloogid, koodide (salakirjade) dešifreerimise spetsialistid.

Ringmäng

Seitse neidu mängivad ringmängu. Mitmel erineval viisil võivad nad ringis seista?

Kui nad seisaksid paigal, saaksime $7! = 5040$ permutatsiooni. Et aga mängijad käivad ringi, siis pole nende asend ümbritsevate esemete suhtes oluline, tähtis on vaid nende omavaheline paigutus. Seetõttu tuleb mängijate ringikäimisel üksteiseks üleminevaid permutatsioone lugeda ühesugusteks. Kuid igast permutatsioonist võib ringliikumisel saada veel kuus uut permutatsiooni. Seega tuleb arv 5040 jagada seitsmega. Saame $5040 : 7 = 720$ erinevat neidude paigutust ringmängus.



Joon. 8

Üldse, kui vaadelda permutatsioone ringjoonel paiknevast n esemest ja lugeda ühesugusteks paigutusi, mis lähevad üksteiseks üle pööramise teel, siis on erinevate permutatsioonide arv $(n-1)!$.

Nüüd aga arvutame, mitu keed saab koostada 7 erinevast helmest. Arvestades analoogiat äsja lahendatud ülesandega, võib arvata, et erinevaid keesid on 720. Kuid keed saab peale ringi mööda pööramise ka ümber oma telje pöörata (joon. 8). Seepärast on selle ülesande vastuseks $720 : 2 = 360$.

Kordumistega permutatsioonid

Seni paigutasime omavahel ümber paarikaupa erinevaid esemeid. Kui aga mõned ümberpaigutatavad esemed on ühesugused, siis saame vähem permutatsioone, sest osa permutatsioonidest langeb kokku.

Paigutades näiteks tähti ümber sõnas «talv», saame 24 erinevat permutatsiooni:

talv	tlav	valt	vlat
tavl	tlva	vatl	vlta
tval	tvla	vtal	vtla
atlv	avlt	ltav	lvat
atvl	avtl	ltva	lvta
altv	alvt	latv	lavt

Kui aga sõna «talv» asemel võtta sõna «taat», siis tuleb kõigis väljakirjutatud permutatsioonides asendada *l*-täht *a*-tähega ja *v*-täht *t*-tähega. Seejuures osutuvad mõned meie 24 permutatsioonist ühesugusteks. Näiteks annavad esimese rea permutatsioonid talv, tlav, valt, vlat sellise asenduse puhul ühe ja sama sõna «taat». Täpselt samuti annavad neli teise ritta kirjutatud permutatsiooni sõna «tata». Üldse jagunevad kõik 24 permutatsiooni nelikuteks, mis *l*-tähe asendamisel *a*-tähega ja *v*-tähe asendamisel *t*-tähega annavad ühe ja sama tulemuse. Tabelis asuvad need permutatsioonid ühes reas. Järelikult saab sõnast «taat» koostada üldse $24:4=6$ permutatsiooni. Need on järgmised:

• taat, tata, ttaa, atat, atta, aatt.

Üldine ülesanne sõnastatakse järgmiselt.

On antud k erinevat tüüpi elemente. Mitu permutatsiooni saab koostada n_1 esimest tüüpi, n_2 teist tüüpi, ..., n_k k-ndat tüüpi elemendist?

Elementide arv igas permutatsioonis $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Kui kõik elemendid oleksid erinevad, siis oleks permutatsioonide arv $n!$. Kuid osa elementide ühtumise tõttu saame vähem permutatsioone. Tõepoolest, võtame näiteks permutatsiooni

$$\underbrace{aa \dots a}_{n_1} \underbrace{bb \dots b}_{n_2} \dots \underbrace{xx \dots x}_{n_k}, \quad (4)$$

millel on alguses välja kirjutatud kõik esimest tüüpi elemendid, siis kõik teist tüüpi elemendid, ..., lõpuks kõik *k*-ndat tüüpi elemendid. Esimest tüüpi elemente saab omavahel ümber paigutada $n_1!$ viisil. Et aga kõik need elemendid on ühesugused, siis ei muuda sellised permutat-

sioonid midagi. Täpselt samuti ei muuda midagi $n_2!$ ümberpaigutust teist tüüpi elementidega, ..., $n_k!$ ümberpaigutust k -ndat tüüpi elementidega. Näiteks ei muutu permutatsioon «ttaa», kui me vahetame omavahel esimese ja teise elemendi või kolmanda ja neljanda elemendi kohad.

Esimest tüüpi elementide, teist tüüpi elementide jne. ümberpaigutusi võib teha üksteisest sõltumatult, seepärast saab (korrutise reegli järgi) permutatsiooni (4) muutmata tema elemente omavahel ümber paigutada $n_1!n_2!\dots n_k!$ viisil. Sama kehtib ka nende elementide iga teise järjestuse korral. Seetõttu jaguneb kõigist $n!$ permutatsioonist koosnev hulk osadeks, millest igaüks koosneb $n_1!n_2!\dots n_k!$ ühesugusest permutatsioonist. Niisiis saab antud elementidest koostada

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \quad (5)$$

erinevat kordumistega permutatsiooni (meenutame, et $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

Valemit (5) kasutades on kerge vastata järgmisele küsimusele: *mitu permutatsiooni saab koostada sõna «Mississippi» tähtedest?* Siin on meil üks m -täht, neli i -tähte, neli s -tähte ja kaks p -tähte, kokku 11 tähte. Seega on permutatsioone valemi (5) järgi

$$P(4, 4, 2, 1) = \frac{11!}{4!4!2!1!} = 34\,650.$$

Anagrammid

Kuni XVII sajandini teaduslikke ajakirju peaaegu ei olnud. Õpetlased said oma kolleegide töödest teada kas raamatute või erakirjade kaudu. See tegi uute tulemuste avaldamise väga raskeks: raamatute trükkimine kestis aastaid, aga oma avastusest erakirjas teatada oli riskantne, sest mine tea, äkki keegi kuulutab saavutuse enda omaks ja katsu siis tõestada, et ta seda mitte ise välja ei mõelnud, vaid leidis kirjast. Võis aga juhtuda, et kirja saajagi oli kaua sama küsimuse kallal juurelnud ja lõpuks lahenduse leidnud ning kiri ei teatanud talle midagi uut, sest ta kavatses ise kolleegile analoogilise teate läkitada.

Seetõttu tekkisid tihti vaidlused prioriteedi üle. XVII sajandi lõpul vaidlesid Newton ja Leibniz kaua selle üle, kes avastas esimesena diferentsiaal- ja integraalarvutuse, Newtonil ja Hooke'il olid aga lahkarvamused selles osas, kes sõnastas esimesena üldise gravitatsiooniseaduse jne.

Archimedesel tuli vanasti isegi kavalust kasutada. Mõned Aleksandria teadlased olid Archimedesese kirjadest üht-teist teada saanud ja esitasid need tulemused enda omade pähe. Archimedes saatis neile siis veel ühe kirja, milles sisaldasid väga tähelepanuväärsed valemid mõne kujundi pindala ja ruumala jaoks. Aleksandrialased väitsid jälle, et nad tundvat neid valemeid juba ammu ning Archimedes polevat neile teatanud midagi uut. Kuid nüüd selgus, et Archimedes oli nad lõksu püüdnud: kirjas teatatud valemid olid valed!

Et prioriteet oleks kindlustatud ja tulemused enne-aegu teatavaks ei saaks, sõnastasid teadlased oma avastuse olemuse lühikeses lauses, siis aga paigutasid selles tähed ümber ja saatsid ümberpaigutatud tähtedega kirja kolleegidele. Selliseid ümberpaigutatud tähtedega tekste nimetati anagrammideks. Näiteks sõnad «talv» ja «latv» on anagrammid. Kui avaldati tulemusi üksikasjaliselt esitav raamat, siis selles oli anagramm dešifreeritud. Anagramme kasutati ka poliitilistes vaidlustes. Näiteks pärast Prantsusmaa kuninga Henri IV tapmist koostati tema tapja nimest «frère Jacques Clément» (vend Jacques Clément) anagramm «C'est l'enfer qui m'a créé» (põrgu on mu loonud). Kuninga vastased ei jäänud võlgu ja koostasid tema nimest «Henri de Valois» anagrammi «Vilain Herodés» (nurjatu Herodes). Kui Christiaan Huygens (1629—1695) avastas Saturni rõnga, koostas ta anagrammi

*aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiii, ll, mm,
nnnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, tttt, uuuuu.*

Asetades selles tähed vajalikku järjekorda, saame teksti *Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato* («ümbritsetud õhukesest lamedast rõngast, ei puutu kusagil selle vastu, ekliptika suhtes kaldu»).

Kuid anagrammid ei võimaldanud alati saladust hoida. Kui seesama Huygens avastas Saturni esimese kaaslast (Titaani) ja leidis, et tema planeedi ümber tiirle-

mise aeg on 15 päeva, koostas ta selle kohta anagrammi ja saatis oma kolleegidele. Ent üks neist, J. Wallis, oli suur meister salakirjade dešifreerimises. Ta lahendas anagrammi ja koostas sel puhul oma anagrammi, mille saatis Huygensile. Kui teadlased anagrammide lahendusi vahetasid, tuli välja, nagu oleks Wallis teinud sellesama avastuse veel enne Huygensit. Wallis tunnistas hiljem, et ta olevat naljatanud, soovides tõestada, et anagrammidest pole suurt kasu. Huygens ei osanud niisugust nalja hinnata ja vihastas.

Arvutame, mitu ümberpaigutust tuleks teha, et jõuda Huygensi esimese anagrammi tõelise mõtteni. Selles anagrammis sisaldub 7 *a*-tähte, 5 *c*-tähte, 1 *d*-täht, 5 *e*-tähte, 1 *g*-täht, 1 *h*-täht, 7 *i*-tähte, 3 *l*-tähte, 2 *m*-tähte, 9 *n*-tähte, 4 *o*-tähte, 2 *p*-tähte, 1 *q*-täht, 2 *r*-tähte, 1 *s*-täht, 5 *t*-tähte ja 5 *u*-tähte, kokku 61 tähte. Valemi (5) põhjal saame

61!

7! 5! 1! 5! 1! 1! 7! 3! 2! 9! 4! 2! 1! 2! 1! 5! 5!

permutatsioon. See tohutu arv on võrdne umbes 10^{60} .

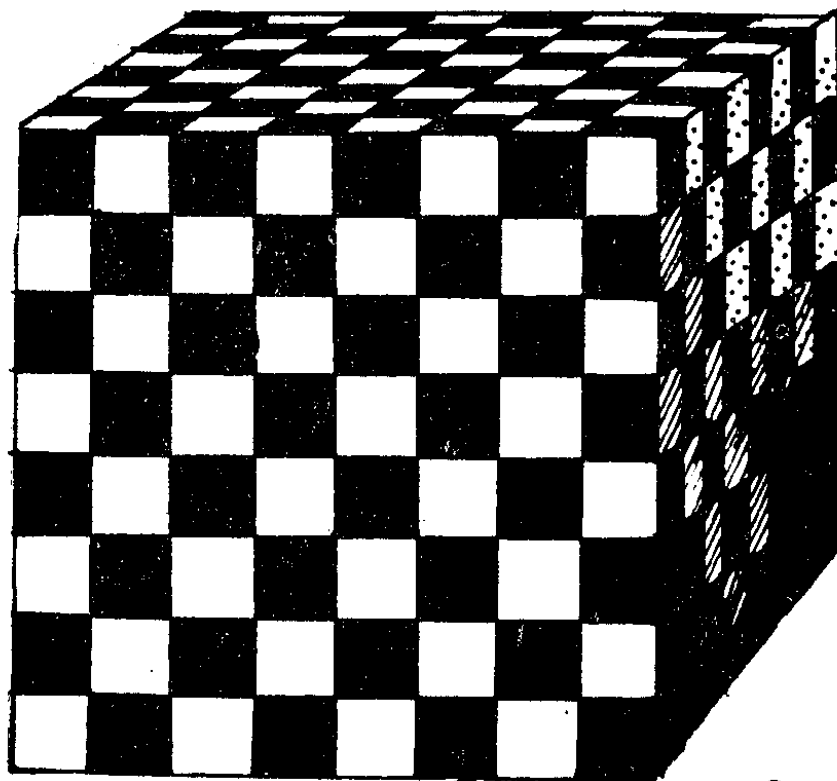
Kõigi nende permutatsioonidega ei tuleks toime ka miljon operatsiooni sekundis sooritav elektronarvuti, isegi juhul, kui ta töötaks kogu Päikesesüsteemi eksisteerimise aja.

Teatud mõttes on inimesel seda ülesannet kergem lahendada kui masinal. Inimene ei vaatle ju mitte kõiki ümberpaigutusi, vaid ainult selliseid, kus tekivad mõttega sõnad, arvestab vormiõpetuse reegleid jne. See vähendab tunduvalt vajalike katsete arvu. Ja peaasi, inimene teab umbes, milliste probleemidega on tema korrespondent tegelnud. Kuid ikkagi tuleb teha tohutu töö.

Kombinatsioonid

Elementide paiknemise järjekord meid alati ei huvita. Näiteks kui Nõukogude Liidu malemeistrivõistluste poolfinaalist võtab osa 20 inimest ja finaali pääseb neist ainult kolm, siis pole esimese kolmiku järjekord oluline: kas või kolmandana, pääseks aga ainult finaali! On ju olnud juhtumeid, kus tšempioniks sai maletaja, kes poolfinaalis ei tulnud sugugi esimeseks.

Täpselt samuti peavad Nõukogude Liidu jalgpallimeistrivõistlustel neljale viimasele kohale tulnud mees-



$$k! C_n^k = A_n^k$$

konnad lahkuma esiliigast (koosneb seitsmeteistkümnest meeskonnast). Ja nõrk lohutus on see, et meeskond tuli 14., aga mitte 17. kohale — nagunii tuleb teisejärguliste meeskondade hulka minna.

Neil juhtudel, kus meid ei huvita elementide järjekord ühendis, vaid ainult ühendi koosseis, räägitakse kombinatsioonidest. Niisiis, *n* elemendi *k*-kombinatsioonideks nimetatakse nende elementide kõikvõimalikke *k*-paigutusi, mis erinevad üksteisest elementide koosseisu, kuid mitte nende järjestuse poolest. Seda *k*-kombinatsioonide arvu, mida saab koostada *n* elemendist, tähistatakse C_n^k abil.

Valemi kombinatsioonide arvu jaoks saame kergesti eespool tuletatud variatsioonide arvu valemist. Tõepoolest, koostame algul kõik *n* elemendi *k*-kombinatsioonid, siis aga paigutame igas kombinatsioonis sisalduvad elemendid kõikvõimalikel viisidel ümber. Seejuures tekivad kõik *n* elemendi *k*-variatsioonid, kusjuures igaüks ainult üks kord. Kuid igas *k*-kombinatsioonis võib teha *k*! ümberpaigutust ja nende kombinatsioonide arv on $C_n^k \cdot k!$. Seega kehtib valem

$$k!C_n^k = A_n^k.$$

Sellest leiame, et

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (6)$$

On tähelepanuväärne, et tuletatud valem ühtib valemiga selliste permutatsioonide arvu jaoks, kus esineb k ühte liiki ja $n-k$ teist liiki elementi:

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teiste sõnadega,

$$C_n^k = P(k, n-k). \quad (7)$$

Selle võrduse võib tõestada ka vahetult, variatsioonide arvu valemit kasutamata. Selleks seame järjekorda kõik n elementi, millest kombinatsioonid koostatakse, ning šifreerime iga kombinatsiooni nullidest ja ühtedest koosneva n -paigutuse abil. Nimelt, kui mingi element kombinatsiooni kuulub, siis kirjutame tema kohale 1, kui ta aga ei kuulu, kirjutame 0. Kui näiteks kombinatsioonid koostatakse tähtedest $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, siis vastab kombinatsioonile a, c, f, h, i paigutus 1010010110, paigutusele 0111001001 aga kombinatsioon b, c, d, g, j . On selge, et seejuures vastab igale k -kombinatsioonile paigutus k ühest ja $n-k$ nullist, igale sellisele paigutusele aga mingi k -kombinatsioon, kusjuures erinevatele paigutustele vastavad k -kombinatsioonid on erinevad. Siit järeldubki, et k -kombinatsioonide arv n elemendist ühtib permutatsioonide arvuga k ühte tüüpi ja $n-k$ teist tüüpi elemendist (vastavalt ühest ja nullist).

Valemit (6) kasutades on kerge lahendada ülesandeid, millest oli juttu käesoleva punkti alguses. Malemeistri-võistluste poolfinaali erinevate lõpptulemuste arvu annab valem

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = 1140.$$

Jalgpallimeistrivõistluste «kurbade» lõpptulemuste arv on aga

$$C_{17}^4 = \frac{17!}{4!13!} = 2380.$$

Toome veel ühe ülesande kombinatsioonide kohta.

Mitmel viisil saab malelauale paigutada 8 vankrit? Erinevalt lk. 30 vaadeldud ülesandest ei seata siin tingimust, et vankrid ei saaks üksteist lüüa. Seepärast tuleb meil lihtsalt malelaua 64 välja seast valida mistahes 8 välja, seda aga saab teha

$$C_{64}^8 = \frac{64!}{8!56!} = 4\,328\,284\,968$$

viisil.

Täpselt samuti tõestatakse, et m horisontaalist ja n vertikaalist koosnevale lauale saab k vankrit paigutada

$$C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{(mn-k)!k!}$$

viisil.

Kui aga paigutada mitte k ühesugust vankrit, vaid k erinevat vigurit, siis on juba oluline, kuhu milline vigur on asetatud. Seepärast tekivad siin mitte kombinatsioonid, vaid variatsioonid ja vastuse annab valem

$$A_{mn}^k = \frac{(mn)!}{(mn-k)!}.$$

Genua loterii

Möödunud sajandeil oli levinud niinimetatud *Genua loterii*, mis mõnel maal on säilinud praegusajani. Loterii põhimõte oli järgmine. Osavõtjad ostsid pileteid, millel olid arvud ühest üheksakümneni. Võis osta ka pileteid, millel oli korraga kaks, kolm, neli või viis arvu. Loosimispäeval võeti sedeleid arvudega 1 kuni 90 sisaldavast kotist viis sedelit. Võitsid need, kelle pileti kõik arvud kuulusid väljavõetud arvude hulka.¹ Näiteks võitis pilet, millel olid

¹ Selle loterii teisendvormiks on lotomäng: siin esinevad samuti «tunnikesed» arvudega 1 kuni 90, aga mängijate kaartidel on trükitud kolm rida arve, viis arvu igas reas.

Genua loteriile on üsna lähedane ka praegu laialt harrastatav spordiloto.

arvud 8, 21, 49, juhul kui välja tulid arvud 3, 8, 21, 37, 49; kui aga välja võeti näiteks arvud 3, 7, 21, 49, 63, siis pilet kaotas, sest arvu 8 ju väljavõetute hulgas ei olnud.

Kui loteriist osavõtja ostis ühe arvuga pileti, sai ta võidu korral 15 korda rohkem pileti hinnast; kui kahe arvuga pileti, siis 270 korda rohkem; kui kolme arvuga, siis 5500 korda rohkem; kui nelja arvuga, siis 75 000 korda rohkem; kui viie arvuga, siis 1 000 000 korda rohkem, kui oli maksnud pileti eest.

Paljud inimesed püüdsid selle loterii abil rikastuda, ostes igal loosimisel kahe või kolme arvuga pileti. Kuid võita ei õnnestunud peaaegu kellelgi: loterii oli nii kavan-
datud, et kasu saama pidid üksnes selle korraldajad.

Et mõista, milles on asi, katsume arvutada, mis-
sugune on loterii «õnnelike» lõpptulemuste suhe lõpptule-
muste üldarvu erinevate mänguviiside puhul. Lõpptule-
muste üldarvu saame valemi (6) järgi. Üheksakümne
sedeliga kotist võetakse ju 5 sedelit, kusjuures nende
järjekorral pole mingit tähtsust. Tekivad kombinatsioonid
90-st elemendist 5-kaupa, neid on

$$C_{90}^5 = \frac{90!}{5!85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Oletame nüüd, et loteriist osavõtja ostis ühe arvuga pileti.
Mitmel juhul ta võidab? Võiduks on tarvis, et üks välja-
võetud arvudest ühtiks pileti arvuga. Ülejäänud neli või-
vad olla suvalised. Kuid need neli valitakse ülejäänud
89 seast. Seetõttu väljendub soodsate kombinatsioonide
arv valemiga

$$C_{89}^4 = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Siit järeldub, et soodsate kombinatsioonide arvu suhe
kombinatsioonide üldarvusse

$$\frac{C_{89}^4}{C_{90}^5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18},$$

tähendab, mängija võidab umbes ühel korral kaheksateist-
kümnest. Teiste sõnadega maksab ta 18 pileti eest, kuid

võidab vaid 15 korda rohkem ühe pileti hinnast, kolme pileti hinna panevad taskusse loterii korraldajad.

Loomulikult ei maksa arvata, et mängija võib igast 18-st korrast täpselt ühel. Mõnikord jääb kahe võidu vahele 20 või 30 loosimist, teinekord aga õnnestub võita ka kahel loosimisel järjest. Jutt on keskmisest võitude arvust pika ajavahemiku või suure osavõtjate arvu puhul. Muidu võib teha samasuguse vea, nagu olevat teinud keegi arst. Ta öelnud patsiendile: «Teil on selline haigus, millest paraneb vaid üks inimene kümnest. Minu eelmised üheksa selle haigusega patsienti surid. Tähendab, teie paranete tingimata!»

Nüüd aga arvutame šansid kahe arvuga piletiga mängimisel. Siin on tarvis, et 2 piletil olevat arvu kuulaksid kotist võetute hulka, ülejäänud 3 võivad aga olla ükskõik millised. Et neid võib valida 88 järelejäänud arvu hulgast, siis on «õnnelike» lõpptulemuste arv niisuguse piletiga mängimisel antud valemiga

$$C_{86}^3 = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

«Õnnelike» lõpptulemuste ja tulemuste üldarvu suhe

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \frac{4 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

Võidu annavad 801 lõpptulemusest ainult kaks. Kuid et võit on vaid 270 korda suurem pileti hinnast, siis panevad loteriikorraldajad iga 801 kahe arvuga pileti hinnast 261 pileti maksumuse oma taskusse. On selge, et kahe arvuga piletiga mängimine on osavõtjatele veel vähem kasulik kui «lihtsa üksikuga» mäng.

Hoopiski ebasoodne on kolme, nelja või viie arvuga piletiga mäng. Esimesel juhul on kasulike ja kõigi lõpptulemuste arvude suhe

$$\frac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11\,748},$$

teisel juhul

$$\frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511\,038}$$

ja kolmandal

$$\frac{1}{C_{90}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43\,949\,268}.$$

Võitjatele makstakse aga vaid 5500, 75 000 ja 1 000 000 korda rohkem. Arvutage ise, kui suured on neil tingimustel loteriist osavõtjate kahjud.

Kookide ostmine

Kondiitriäris müüdi 4 sorti kooke: napooleonikooke, eklääre, aleksandrikooke ja lehttaignakooke. Mitmel viisil saab osta 7 kooki?

Sellel ülesandel on teine kuju kui varem lahendatud ülesannetel. Ta ei ole kordumistega variatsioonide kohta, sest kookide karpi panemise järjekord pole oluline. Seepärast on ta lähem ülesannetele kombinatsioonide kohta. Kuid viimastest erineb ta selle poolest, et ühenditesse kuuluvad elemendid võivad korduda (näiteks võib osta 7 eklääri). Öeldakse, et sellistes ülesannetes esinevad kordumistega kombinatsioonid.

Et meie ülesannet lahendada, talitame järgmiselt. Šifreerime iga ostu nullide ja ühtede abil. Kirjutame algul niimitu ühte, kuimitu napooleonikooki osteti. Siis kirjutame nulli, et eraldada napooleonikooke eklääridest, ja edasi ühed vastavalt eklääride arvule. Seejärel paneme uuesti nulli (kui ühtki eklääri ei ostetud, siis tuleb teineteise järel kaks nulli). Edasi kirjutame niimitu ühte, kuimitu aleksandrikooki osteti, uuesti nulli, ja lõpuks märkime ühtesid vastavalt lehttaignakookide arvule. Näiteks kui osteti 3 napooleonikooki, 1 ekläär, 2 aleksandrikooki ja 1 lehttaignakook, siis saame üleskirjutuse 1110101101. Kui aga osteti 2 napooleoni- ja 5 aleksandrikooki, saame üleskirjutuse 1100111110. On selge, et erinevatele ostudele vastavad seejuures erinevad jadad 7 ühest ja 3 nullist. Vastupidi, igale jadale 7 ühest ja 3 nullist vastab mingi ost. Näiteks vastab jadale 0111011110 kolme eklääri ja nelja aleksandrikoogi ostmine.

Seega on erinevate ostude arv võrdne kordumistega permutatsioonide arvuga, mida saab koostada 7-st ühest ja 3-st nullist. Nagu näidatud lk. 35, on see arv

$$P(7, 3) = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Sama tulemuseni oleksime võinud jõuda ka teisel teel. Paigutame igas ostus koogid sellises järjekorras: napooleonikoogid, ekläärid, aleksandrikoogid, lehttaignakoogid ja siis nummerdame nad. Kuid seejuures liidame eklääride numbritele 1, aleksandrikookide numbritele 2 ja lehttaignakookide numbritele 3 (napooleonikookide numbritele ei liida me midagi). Ostame näiteks 2 napooleonikooki, 3 eklääri, 1 aleksandrikoogi ja 1 lehttaignakoogi. Siis nummerdatakse need koogid nii: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. On selge, et kõige suurem number on siin 10 (viimase lehttaignakoogi number on $7+3=10$), kõige väiksem number aga 1 (selle saab esimene napooleonikook). Seejuures ükski number ei kordu. Vastupidi, igale seitsmeliikmelisele kasvavale jadale arvudest 1 kuni 10 vastab mingi ost. Näiteks vastab jadale 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 nelja eklääri ja kolme aleksandrikoogi ostmine. Et selles veenduda, tuleb antud arvudest lahutada arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Saame 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, s.o. 4 ühte ja 3 kahte. Kuid me liitsime 1 eklääride ja 2 aleksandrikookide numbritele; seega on meil 4 eklääri ja 3 aleksandrikooki.

Saame ainult kasvavad jadad ja järelikult on iga jada täielikult määratud oma liikmetega. Seetõttu võrdub siisuguste jadade arv 7-kombinatsioonide arvuga 10-st arvust (1-st kuni 10-ni). Nende kombinatsioonide arv on aga antud valemiga

$$C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Saime sama tulemuse.

Kordumistega kombinatsioonid

Mainisime juba, et käsitletud ülesanne on kordumistega kombinatsioonide kohta. Niisuguste ülesannete üldine sõnastus kõlab järgmiselt: on olemas n erinevat tüüpi elemente. Mitu k -kombinatsiooni saab neist koostada, kui jätta arvestamata elementide järjekord kombinatsioonis (teiste sõnadega, kombinatsioonid peavad erinema vähemalt ühe elemendi poolest)?

See ülesanne lahendatakse üldkujul täpselt samuti nagu kookide ülesannegi. Nimelt tuleb iga kombinatsioon šifreerida nullide ja ühtede abil: iga tüüpi jaoks kirjutada

ühthesid vastavalt seda tüüpi esemete arvule kombinatsioonis ja eraldada erinevad tüübid üksteisest nullide abil (kui mõnda tüüpi esemeid kombinatsiooni üldse ei kuulu, siis tuleb kirjutada järjest kaks või enam nulli). Siinjuures saame niimitu ühte, kuimitu eset kombinatsiooni kuulub, s.o. k , nullide arv on aga ühe võrra väiksem kui esemete tüüpide arv, seega $n-1$. Järelikult sisaldab kordumistega permutatsioon k ühte ja $n-1$ nulli. Erinevatele kombinatsioonidele vastavad seejuures erinevad kordumistega permutatsioonid, igale kordumistega permutatsioonile aga vastab oma kombinatsioon. Niisiis võrdub kordumistega k -kombinatsioonide arv $\bar{C}_n^k$ n tüüpi elementidest kordumistega permutatsioonide arvuga $P(k, n-1)$ $n-1$ nullist ja k ühest. Kuid

$$P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Seepärast

$$\bar{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Selle valemi võib tõestada ka teisel viisil. Igas kombinatsioonis tuleb elemendid järjestada tüüpide järgi (algul kõik esimest tüüpi, siis teist tüüpi elemendid jne.). Seejärel tuleb kombinatsiooni kõik elemendid nummerdada, kuid teist tüüpi elementide numbritele liita 1, kolmandat tüüpi elementidel 2 jne. Siis tekib igast kordumistega kombinatsioonist kordumisteta kombinatsioon, mis koosneb arvudest 1, 2, ..., $n+k-1$, kusjuures igasse kombinatsiooni kuulub k elementi. Siit järeldub uuesti, et

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (8)$$

Esineb ülesandeid, kus kordumistega kombinatsioonidele seatakse lisatingimus: nad peavad kindlasti sisaldama r fikseeritud tüübi elemente, kus $r \leq n$. Niisuguseid ülesandeid on kerge taandada viimati lahendatule. Selleks et kindlustada antud r tüübi elementide olemasolu, võtame algusest peale igast niisugusest tüübist ühe elemendi. Sellega on r kohta k -kombinatsioonis hõivatud. Ülejäänud $k-r$ kohta võib aga täita mis-

tahes elementidega, mis kuuluvad tingimuse järgi n tüüpi. Seepärast on otsitava kujuga kombinatsioone nii-sama palju, kui on kordumistega kombinatsioone n tüüpi elementidest $(k - r)$ -kaupa, s. o.

$$\bar{C}_n^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r}.$$

Erijuhul, kus $n \leq k$ ja nõutakse, et kordumistega k -kombinatsioonides sisalduks vähemalt üks element igast tüübist, saame C_{k-1}^{k-n} kombinatsiooni.

Uuesti jalgpallimeistrivõistlused

Oleme käsitlenud ülesandeid variatsioonidest, permutatsioonidest ja kombinatsioonidest. Paljudel juhtudel tuleb tegemist teha erinevat tüüpi ühenditega. Vaatleme järgmist ülesannet.

Nimetame kahe jalgpallimeistrivõistluse tulemusi *põhiliselt ühtivateks*, kui ühtivad kuld-, hõbe- ja pronksmedalite omanikud ning samuti neli esiliigast lahkuvat meeskonda. Leida meistrivõistluste *põhiliselt erinevate lõpptulemuste arv* (nagu eespoolgi loeme, et meistrivõistlusest võtab osa 17 meeskonda).

Me teame juba, et medalid võivad jaguneda $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15$ (vt: lk. 28) viisil. Pärast seda jääb 14 meeskonda, kellest neli peavad esiliigast lahkuma. Et väljalangevate meeskondade järjekord pole enam tähtis, saab väljalangemine toimuda

$$C_{14}^4 = \frac{14!}{4! 10!}$$

viisil. Korrutise reegli järgi leiame, et meistrivõistluste põhiliselt erinevaid lõpptulemusi on

$$A_{17}^3 C_{14}^4 = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot \frac{14!}{4! 10!} = \frac{17!}{4! 10!} = 4\,084\,080.$$

Sama tulemuseni võib jõuda ka teisel teel. Meistrivõistluste erinevate lõpptulemuste üldarv $P_{17} = 17!$ (jätame kõrvale juhud, kus toimub ühtede või teiste kohtade jagamine). Kuid neljandast kuni kolmeteistkümnenda ja samuti neljateistkümnendast seitsmeteistkümnenda kohani

tulnud meeskondade ümberpaigutused viivad meistrivõistluste põhiliselt ühtivate tulemusteni. Niisuguseid ümberpaigutusi on $10!4!$. Seega on erinevate lõpptulemuste arv antud valemiga $\frac{17!}{10!4!}$.

Oletame, et meistrivõistluste lõpptulemusest tahetakse teatada k punktist ja kriipsust koosneva telegrammi abil. *Milline on vähim selleks vajalik märkide arv?* Me teame juba, et k punktist ja kriipsust saab koostada 2^k erinevat kordumistega variatsiooni. Seepärast peab nõutava informatsiooni edasiandmiseks vajalikke märke olema vähemalt niipalju, et kehtiks võrratus

$$2^k \geq 4\,084\,080.$$

Selle võrratuse lahendamisel saame $k \geq 22$. Niisiis tuleb meistrivõistluste tulemuste edasiandmiseks punktide ja kriipsude abil kasutada vähemalt 22 märki.

Võistlustulemuste teatamisel niisuguseid arvutusi loomulikult ei tehta. Kuid on kerge kujutleda juhtumit, kus informatsiooni saatmine on seotud suurte tehniliste raskustega ja igal märgil on «kulla kaal» (näiteks fotode üleandmine kosmoselaevalt). Siis tuleb vaadelda mitmeid võimalusi ja valida kõige ökonoomsem. Neid probleeme uurib matemaatikaharu, mida nimetatakse informatsiooni-teooriaks.

Kombinatsioonide omadused¹

Arvudel C_n^k on terve hulk tähelepanuväärseid omadusi. Neid võib tõestada mitmel viisil. Mõnel juhul on kõige mugavam kasutada valemit

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (9)$$

Kuid tihti õnnestub tõestada seoseid kombinatoorsete arutluste abil: arvutame mingit liiki ühendite arvu ja jagame need ühendid ühiste elementideta klassideks. Seejärel leiame, mitu ühendit kuulub igasse klassi. Leitud arve liites

¹ Peatüki lõpu võib esmakordsel lugemisel vahele jätta. Kuid siin tõestatud võrdused $C_n^k = C_n^{n-k}$ ja $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ esinevad edaspidi sageli.

saame jälle kõigi antud liiki ühendite arvu. See annabki otsitava seose.

Alustame kõige lihtsamast seosest:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad (10)$$

mis järeljub otseselt valemist (9). Kui selle nimetajas panna k asemele $n - k$, siis tuleb $n - k$ asemele $n - (n - k) = k$ ja tulemusena vahetavad nimetajas olevad tegurid kohad. Kuid võrdust (10) on kerge tõestada ka kombinatsioonide arvu valemist kasutamata. Kui valida n elemendist mingi k -kombinatsioon, siis jääb üle täiendkombinatsioon $n - k$ elemendist, saadud $(n - k)$ -kombinatsiooni täiendiks on aga esialgne k -kombinatsioon. Nii siis moodustavad k -kombinatsioonid ja $(n - k)$ -kombinatsioonid teineteist täiendavaid paare ja seepärast on neid kombinatsioone ühepalju. Seega, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Peaaegu niisama lihtsalt saab tõestada seose

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \quad (11)$$

Selleks koostame k -kombinatsioonid n elemendist $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ja jaotame nad kaheks klassiks. Esimesse kuuluvad elemendid a_n sisaldavad kombinatsioonid, teise need, mis seda ei sisalda. Kui mistahes esimese klassi kombinatsioonist element a_n välja jätta, siis jääb järele $(k - 1)$ -kombinatsioon, mis koosneb elementidest $a_1, \dots, a_{n-1}$. Niisuguseid kombinatsioone on C_{n-1}^{k-1} . Seepärast kuulub esimesse klassi C_{n-1}^{k-1} kombinatsiooni. Teise klassi kuuluvad k -kombinatsioonid $n - 1$ elemendist $a_1, \dots, a_{n-1}$. Seepärast on neid C_{n-1}^k . Et iga k -kombinatsioon elementidest $a_1, \dots, a_n$ kuulub parajasti ühte klassi ja nende kombinatsioonide üldarv on C_n^k , siis jõuame võrduseni (11).

Seose

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \quad (12)$$

tõestus sarnaneb eelmisega. Tuletame meelde, et 2^n on kõigi kordumistega n -variatsioonide arv kahte tüüpi elementidest. Jaotame variatsioonid klassideks, arvates k -ndasse klassi need, millesse kuulub k esimest ja $n - k$ teist tüüpi elementi. k -nda klassi paigutused pole midagi

muud kui kõikvõimalikud permutatsioonid k esimest ja $n - k$ teist tüüpi elementidest. Me teame, et neid permutatsioonide on $P(k, n - k)$, kuid $P(k, n - k) = C_n^k$ (vt. lk. 35 ja 39). Tähendab, kõigi klasside variatsioonide on kokku $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$. Teiselt poolt on seesama arv võrdne 2^n . Sellega on seos (12) tõestatud.

Täiesti samamoodi tõestatakse, et

$$\sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} P(n_1, n_2, n_3) = 3^n, \quad (13)$$

kus summa on võetud üle arvu n kõigi kolmeks liidetavaks lahutuste (arvestatakse ka liidetavate järjekorda, s. o. summas sisalduvad näiteks nii $P(n_1, n_2, n_3)$ kui ka $P(n_2, n_3, n_1)$). Tõestuseks tuleb vaadelda kõiki n -variatsioonide kolme tüüpi elementidest ja jaotada need ühesuguse koosseisuga klassideks (s. o. võtta variatsioonid, milles on ühepalju esimest, teist ja kolmandat tüüpi elemente).

Üldiselt kehtib võrdus

$$\sum_{n_1 + \dots + n_k = n} P(n_1, \dots, n_k) = k^n, \quad (14)$$

kus summa on võetud üle arvu n kõigi k liidetavaks lahutuste (kusjuures arvestatakse liidetavate järjekorda).

Nüüd aga vaatleme kordumistega m -kombinatsioonide, mis on koostatud $n+1$ tüüpi elementidest, näiteks $n+1$ tähest $a, b, c, \dots, x$. Selliseid kombinatsioonide on $\bar{C}_{n+1}^m = C_{n+m}^m$. Jaotame kõik need kombinatsioonid klassideks, arvates k -ndasse klassi kombinatsioonid, mis sisaldavad a -tähte k korda. Ülejäänud $m - k$ kohta võib täita teiste tähtedega $b, c, \dots, x$, mille arv on n . Seetõttu on k -ndas klassis kombinatsioonide niisama palju kui kordumistega $(m - k)$ -kombinatsioonide n tüüpi elementidest, s. o. $C_{n+m-k-1}^{m-k}$. Järelikult on kõiki kombinatsioonide kokku

$$C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^{m-1} + \dots + C_n^1 + C_{n-1}^0.$$

Teiselt poolt nägime, et see arv on C_{n+m}^m . Seega on tõestatud võrdus

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m. \quad (15)$$

Pannes siin n asemel $n+1$ ja m asemele $m - 1$ ning kasutades võrdust (10), saame

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}. \quad (16)$$

Valemi (16) erijuhtudeks $n=1, 2, 3$ puhul on

$$1+2+\dots+m=\frac{m(m+1)}{2}, \quad (17)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + m(m+1)(m+2) = \\ = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Valemite (17)...(19) abil on kerge leida naturaalarvude 1 kuni m ruutude ja kuupide summasid. Valemi (18) võib ümber kirjutada nii:

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 + 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Kuid valemi (17) järgi

$$1+2+\dots+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

ja seepärast

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 &= \frac{m(m+1)(m+2)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} = \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \end{aligned} \quad (20)$$

Täpselt samuti tuletame valemist (19):

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}. \quad (21)$$

Jätame lugejale võimaluse saada analoogilisel viisil valemid naturaalarvude kõrgemate astmete summade jaoks.

Kordumistega m -kombinatsioone n tüüpi elementidest võib klassifitseerida neisse kuuluvate elementide tüüpide arvu järgi. Näiteks kuuluvad esimesse klassi kombinatsioonid, mis koosnevad ühesugustest elementidest, teise kombinatsioonid kahte tüüpi elementidest, ..., n -ndasse kombinatsioonid kõigist n tüüpi elementidest (muidugi tekib $m < n$ korral ainult m klassi).

Arvutame, mitu kombinatsiooni igasse klassi kuulub. k -ndas klassis sisalduva kombinatsiooni võib valida kahe etapi jooksul. Algul teeme kindlaks, millised k tüüpi elementid just kombinatsiooni kuuluvad. Et tüüpe on üldse n , siis saab selle valiku teha C_n^k viisil. Pärast tüüpide valimist tuleb meil koostada kordumistega m -kombinatsioonid k tüüpi elementidest, kus on esindatud kõik tüübid. Kuid me näitasime (vt. lk. 46), et neid kordumistega kombinatsioonide on $C_{m-1}^{m-k} = C_{m-1}^{k-1}$.

Korrutise reegli järgi järeldub siit, et k -ndasse klassi kuulub $C_n^k C_{m-1}^{k-1}$ kombinatsiooni. Liites kõigi klasside elementide arvud, saame kordumistega m -kombinatsioonide üldarvu n tüüpi elementidest, s. o. C_{m+n-1}^m . Sellega on tõestatud võrdus

$$C_n^1 C_{m-1}^0 + C_n^2 C_{m-1}^1 + \dots + C_n^n C_{m-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m. \quad (22)$$

Kui $m < n$, siis on summa viimaseks liidetavaks $C_n^m C_{m-1}^{m-1}$. Saadud võrdust on mugavam üles kirjutada teisiti, pannes igas liidetavas C_n^k asemele C_n^{n-k} . Saame:

$$C_n^{n-1} C_{m-1}^0 + C_n^{n-2} C_{m-1}^1 + \dots + C_n^0 C_{m-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{n-1}. \quad (23)$$

Vasakul poolel on igas liidetavas ülemiste indeksite summa $n-1$ ja alumistel $n+m-1$. Seejuures on alumised indeksid jäävad, ülemised aga muutuvad. Teisiti võib selle võrduse kirja panna nii:

$$C_p^0 C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + \dots + C_p^m C_{n-p}^0 = C_n^m. \quad (23')$$

Nüüd tuletame analoogilise valemi, milles summeerimisel muutuvad ka alumised indeksid. Selleks võtame p erinevat täishäälikut ja $n-p$ erinevat kaashäälikut ning koostame neist kõikvõimalikud kordumistega m -kombinatsioonid. Jaotame need klassidesse, võttes k -ndasse klassi kombinatsioonid, mis sisaldavad k täis- ja $m-k$ kaashäälikut. Arvutame k -ndasse klassi kuuluvate kombinatsioonide arvu. Iga selle klassi element jaguneb kordumistega k -kombinatsiooniks p täishäälikust ja kordumistega $(m-k)$ -kombinatsiooniks $n-p$ kaashäälikust. Seepärast kuulub k -ndasse klassi $C_{k+p-1}^k C_{m+n-p-k-1}^{m-k}$ kombinatsiooni. Järelikult on vaadeldavaid kombinatsioone üldse

$$C_{p-1}^0 C_{m+n-p-1}^m + C_p^1 C_{m+n-p-2}^{m-1} + \dots + C_{m+p-1}^m C_{n-p-1}^0.$$

Teiselt poolt saame niimoodi kõikvõimalikud kordumistega m -kombinatsioonid n tüüpi elementidest ja seepärast on nende arv C_{m+n-1}^m . Jõuame samasuseni

$$C_{p-1}^0 C_{m+n-p-1}^m + C_p^1 C_{m+n-p-2}^{m-1} + \dots + C_{m+p-1}^m C_{n-p-1}^0 = C_{m+n-1}^m. \quad (24)$$

Kirjutame samasuse ümber nii, et summeerimisel muutuksid vaid alumised indeksid. Selleks tuleb kõigile liikmetele rakendada samasust $C_r^q = C_r^{r-q}$. Saame:

$$C_{p-1}^{p-1} C_{m+n-p-1}^{n-p-1} + C_p^{p-1} C_{m+n-p-2}^{n-p-1} + \dots + C_{m+p-1}^{p-1} C_{n-p-1}^{n-p-1} = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

Selle valemi võib teisiti ümber kirjutada järgmiselt¹:

$$C_p^p C_{m-p}^{n-p} + C_{p+1}^p C_{m-p-1}^{n-p} + \dots + C_{m-n+p}^p C_{n-p}^{n-p} = C_{m+1}^{n+1}. \quad (24')$$

Näeme, et summeerimisel jäävad ülemised indeksid konstantseteks, alumised aga muutuvad, kusjuures ülemiste indeksite summa on n , alumistel m .

Märgime ära varem saadud valemi (23') erijuhu. Kui võtta selles valemis $n - p = m$, siis saame

$$C_p^0 C_m^0 + C_p^1 C_m^1 + \dots + C_p^m C_m^m = C_{p+m}^m. \quad (25)$$

Erijuhul, kui $p = m$, saame võrduse

$$(C_p^0)^2 + (C_p^1)^2 + \dots + (C_p^p)^2 = C_{2p}^p. \quad (26)$$

Saadud samasusi võib üldistada. Selleks vaatleme hulka, mis koosneb q tüüpi elementidest: n_1 esimest tüüpi, n_2 teist tüüpi, ..., n_k k -ndat tüüpi elemendist, kusjuures ühte tüüpi elemendid erinevad üksteisest (näiteks määrab tüübi eseme värvus, ühte värvi esemetel on aga erinev kuju).

Koostame selle hulga elementidest kõikvõimalikud m -kombinatsioonid ja klassifitseerime need koosseisu järgi, s. o. esimest, teist, ..., q -ndat tüüpi elementide arvu järgi. Seega iseloomustavad iga klassi naturaalarvud $(m_1, m_2, \dots, m_q)$, mis rahuldavad võrratusi $0 \leq m_i \leq n_i$. Selle klassi kombinatsioonid sisaldavad m_1 esimest tüüpi, m_2 teist

¹ Oleme siin p asemele pannud $p+1$, n asemele $n+2$ ja m asemele $m-n$.

tüüpi, ..., m_q q -ndat tüüpi elementi, kusjuures $m_1 + m_2 + \dots + m_q = m$. Tähistame niisuguse klassi $A(m_1, m_2, \dots, m_q)$ abil.

Korrutise reeglist järeldub, et klassi $A(m_1, \dots, m_q)$ kuulub $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q}$ kombinatsiooni. Summeerides kombinatsioonide arvud kõigis klassides, saame samasuse

$$\sum C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q} = C_n^m, \quad (27)$$

kus $n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$ ja summa on võetud üle kõigi selliste naturaalarvude jadade $(m_1, m_2, \dots, m_q)$, kus $m_1 + m_2 + \dots + m_q = m$.

Kui võtta kordumistega kombinatsioonid, saame analoogilise samasuse:

$$\sum C_{n_1 + m_1 - 1}^{m_1} C_{n_2 + m_2 - 1}^{m_2} \dots C_{n_q + m_q - 1}^{m_q} = C_{n + m - 1}^m, \quad (28)$$

kus samuti $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$ ja summa võetakse üle samade arvujadade $(m_1, m_2, \dots, m_q)$.

Veel üks kombinatsioonide omadus tõestatakse järgmiselt. Vaatleme samasust

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m. \quad (29)$$

Seda samasust on kerge kombinatoorselt kontrollida. Selleks tuleb võtta n erinevat elementi, valida neist k elementi, ülejäänud $n - k$ elemendi seast aga valida veel $m - k$. Niimoodi tekib m -kombinatsioon n elemendist. Fikseeritud k korral võib seda protsessi teostada $C_n^k C_{n-k}^{m-k}$ viisil. Pole raske kontrollida, et nii saadakse iga m -kombinatsioon (kokku on neid C_n^m) C_m^k viisil. Siit järeldubki võrdus (29).

Kirjutame samasuse (29) üles $k=0, \dots, m$ puhul ja liidame saadud võrdused. Et valemi (12) järgi

$$C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m,$$

siis saame

$$C_n^0 C_n^m + C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m C_{n-m}^0 = 2^m C_n^m$$

ehk

$$C_n^0 C_n^{n-m} + C_n^1 C_{n-1}^{n-m-1} + \dots + C_n^m C_{n-m}^{n-m} = 2^m C_n^m. \quad (30)$$

Juurde- ja mahaarvamise valemi erijuht

Paljud kombinatsioonide omadused tuletatakse juurde- ja mahaarvamise valemi (vt. lk. 23) põhjal. Meie vajame selle valemi ühte erijuhtu. Sõltugu omadusi $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ omavate elementide arv $N(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ mitte neist omadustest endist, vaid ainult omaduste arvust, s. t. olgu

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) &= \dots = N(\alpha_n), \\ N(\alpha_1\alpha_2) &= N(\alpha_1\alpha_3) = \dots = N(\alpha_{n-1}\alpha_n), \\ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) &= N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = \dots = N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) \end{aligned}$$

jne. Siis võrduvad summa $N(\alpha_1) + \dots + N(\alpha_n)$ kõik liidetavad ühe ja sama arvuga, mille tähistame $N^{(1)}$ abil. Et selles summas on n liidetavat, siis on see võrdne $nN^{(1)} = C_n^1 N^{(1)}$. Täpselt samuti tõestatakse, et

$$N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \dots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) = C_n^2 N^{(2)},$$

kus $N^{(2)} = N(\alpha_1\alpha_2)$ ja üldse

$$N(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k) + \dots + N(\alpha_{n-k+1} \dots \alpha_n) = C_n^k N^{(k)} \quad (31)$$

(on selge, et summa (31) on võetud üle kõigi k -kaupa kombinatsioonide n omadusest).

Seepärast omandab juurde- ja mahaarvamise valem vaadeldaval juhul kuju

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \dots + (-1)^n C_n^n N^{(n)}. \quad (32)$$

Kombinatsioonide vahelduvate märkidega summad

Nüüd aga tuletame veel kombinatsioonide omadusi. Need sarnanevad varem tõestatutega, kuid erinevad neist selle poolest, et liidetavate märgid vahelduvad: pärast plussi tuleb miinus, siis uuesti pluss jne.

Lihtsaim niisugustest valemitest on

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (33)$$

See samasus järeldeb võrdusest (11). Tõestamiseks tuleb mees pidada, et $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$. Paneme esimese liidetava asemele C_{n-1}^0 ja arvestame, et valemi (11) järgi $C_{n-1}^0 - C_n^1 = -C_{n-1}^1$. Edasi saame $-C_{n-1}^1 + C_n^2 = C_{n-1}^2$ jne. Lõpuks hävivad kõik liidetavad.

Selle valemi võib tõestada kombinatoorselt. Kirjutame välja kõik kombinatsioonid n elemendist $a_1, \dots, a_n$ ja teeme järgmise teisenduse: kombinatsioonile, mis ei sisalda tähte a_1 , kirjutame selle tähe juurde, teda sisaldavatest kombinatsioonidest aga tõmbame a_1 maha. On kerge kontrollida, et seejuures saame uuesti kõik kombinatsioonid ja igaüks üks kord. Kuid selle teisenduse juures muutuvad kõik paarisarvu elemente sisaldavad kombinatsioonid paaritud arvu elemente sisaldavateks ja vastupidi. Järelikult on kombinatsioone paarisarvu elementidega niisama palju kui paaritu arvu elementidega (me võtame arvesse ka tühja kombinatsiooni, mis elemente üldse ei sisalda). Seda väljendabki valem (33).

Nüüd aga tuletame keerukama valemi:

$$C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \dots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0. \quad (34)$$

Tõestuseks vaatleme m -kombinatsioone n elemendist $a_1, \dots, a_n$. Tähistagu $(a_1, \dots, a_k)$ kombinatsioonide omadust, mis ütleb, et kombinatsiooni kuuluvad kindlasti elemendid $a_1, \dots, a_k$. Selliste kombinatsioonide arv $N(a_1, \dots, a_k)$ on võrdne C_{n-k}^{m-k} (nendes on k kohta hõivatud elementide $a_1, \dots, a_k$ poolt, ülejäänud $m-k$ kohale on aga $n-k$ pretendenti). Üldse on C_n^m kombinatsiooni ning pole olemas kombinatsioone, millel pole ühtki omadust $(a_1), \dots, (a_n)$ (iga kombinatsioon sisaldab mingeid elemente). Seepärast ongi meie juhul $N = C_n^m$, $N^{(0)} = 0$, $N^{(k)} = C_{n-k}^{m-k}$. Asendades need väärtused valemisse (32), jõuame samasuseni (34).

Täpselt samuti tõestatakse seos

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + C_n^2 C_{n+m-3}^{m-2} - \dots \\ \dots + (-1)^n C_n^n C_{m-1}^{m-n} = 0,$$

kui $m \geq n$,

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + \dots + (-1)^m C_n^m C_{n-1}^0 = 0,$$

kui $m < n$.

Vaatleme nimelt kordumistega m -kombinatsioone elementidest, mis kuuluvad n liiki $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tähistame (a_k) abil kombinatsiooni omaduse, mis ütleb, et tema elementide seas on kindlasti a_k liiki elemente (võib olla ka muud liiki elemente). Siis on $N(a_1, \dots, a_k)$ nende kombinatsioonide arv, mis kindlasti sisaldavad $a_1, \dots, a_k$ liiki elemente. Jätame igast niisugusest kombinatsioonist välja ühe elemendi igast liigist $a_1, \dots, a_k$. Tulemusena tekib

mingi $(m - k)$ -kombinatsioon elementidest, mis kuuluvad n liiki $a_1, \dots, a_n$. Vastupidi, kui liita kordumistega $(m - k)$ -kombinatsioonile $a_1, \dots, a_n$ liiki elementidest üks element igast liigist $a_1, \dots, a_k$, saame m -kombinatsiooni, milles $a_1, \dots, a_k$ liiki elemendid on kindlasti esindatud. Siit järeldub, et arv $N(a_1, \dots, a_k)$ võrdub kordumistega $(m - k)$ -kombinatsioonide arvuga n liiki elementidest, s.o. $N(a_1, \dots, a_k) = C_{n+m-k-1}^{m-k}$. Edasi, kordumistega m -kombinatsioone on üldse C_{n+m-1}^m ning pole olemas kombinatsioone, millel pole ühtki omadustest (a_k) , $1 \leq k \leq n$.

Asendades leitud väärtused $N^{(0)} = 0$, $N = C_{n+m-1}^m$, $N^{(k)} = C_{n+m-k-1}^{m-k}$ valemisse (32), jõuame samasuseni (35).

Tõestame lõpuks samasuse

$$\begin{aligned} n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

mis kehtib $m < n$ puhul.

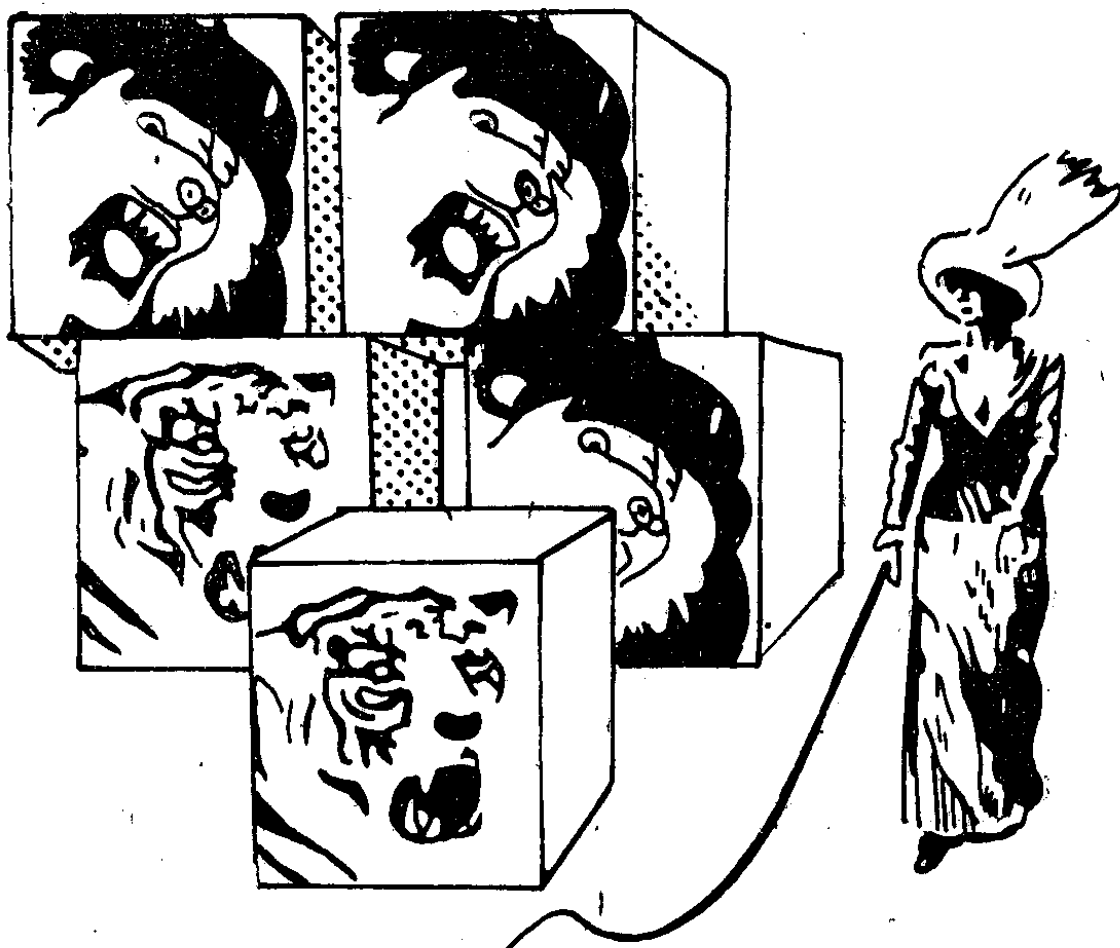
Selleks vaatleme kordumistega m -variatsioone n liiki elementidest ja tähistame (a_k) abil variatsiooni omaduse, mis seisneb selles, et a_k liiki elemendid ei kuulu temasse. Siis on $N(a_1, \dots, a_k)$ nende kordumistega m -variatsioonide arv, mis ei sisalda $a_1, \dots, a_k$ liiki elemente, s.t. on koostatud $n - k$ liiki esemetest $a_{k+1}, \dots, a_n$. Selliste variatsioonide arv on aga $(n - k)^m$. Seega $N^{(k)} = N(a_1, \dots, a_k) = (n - k)^m$. Variatsioone on üldse n^m .

Lõpuks ei leidu variatsioone, millel pole ühtki omadustest $(a_1), \dots, (a_n)$. Tõepoolest, kui variatsioonil pole ühtki omadust (a_k) , siis sisaldab ta elemente kõigist n liigist. See on aga võimatu, sest variatsiooni elementide arv m on väiksem kui n . Seepärast $N^{(0)} = 0$ ja me jõuame samasuseni (36).

Me tõestasime siin mitmed seosed arvude C_n^k jaoks. Neid samasusi võib põhjendada ka teiste meetodite abil. V peatükis jutustame niisuguste seoste geomeetrilisest tõestusviisist, VII peatükis käsitleme aga kõige tõhusamat tõestusmeetodit — genereerivate funktsioonide meetodit. Selle meetodi abil saab põhjendada nii käesolevas peatükis toodud seoseid kui ka tervet rida teisi huvitavaid valemmeid.

III. KITSENDUSTEGA KOMBINATOORIKAÜLESANDED

Seni vaatlesime ülesandeid, milles elementide järjestuse kohta ühendites ei esitatud mingeid lisanõudeid. Neendes oli lubatud kas elementide suvaline järjestus (nagu variatsioonides või permutatsioonides) või ei arvestatud elementide järjekorda üldse (nagu kombinatsioonides). Nüüd käsitleme ülesandeid, milles esitatakse mõningaid kitsendusi elementide järjestuse kohta.



Lõvid ja tiigrid

Loomataltsutaja tahab tsirkuseareenile lasta 5 lõvi ja 4 tiigrit; seejuures ei tohi kaks tiigrit tulla teineteise järel. Mitmel viisil võib ta loomi paigutada?

Paneme alguses kohtadele kõik lõvid, nii et iga kahe lõvi vahele jääks vahe. Seda võib teha $5! = 120$ viisil. Vahede arv on 4. Kui nendele lisada veel kaks kohta — kõikide lõvide ees ja järel —, saame 6 kohta, kuhu võib paigutada tiigrid, kusjuures kaks tiigrit ei satu kunagi kõrvuti. Et tiigrite järjekord on oluline, siis võrdub nende paigutuste arv variatsioonide arvuga 6-st elemendist 4-kaupa, see on $A_6^4 = 360$. Kombineerides iga lõvide paigutamiseviisi ühega tiigrite paigutamiseviisidest, saame $120 \cdot 360 = 43\,200$ viisi kiskjate areenile laskmiseks.

Kui taltsutajal oleks n lõvi ja k tiigrit, saaks ta ülesande lahendada $P_n A_{n+1}^k = \frac{n!(n+1)!}{(n-k+1)!}$ viisil. See on võimalik tingimusel, et $k \leq n+1$, muidu satuvad kaks tiigrit kindlasti kõrvuti.

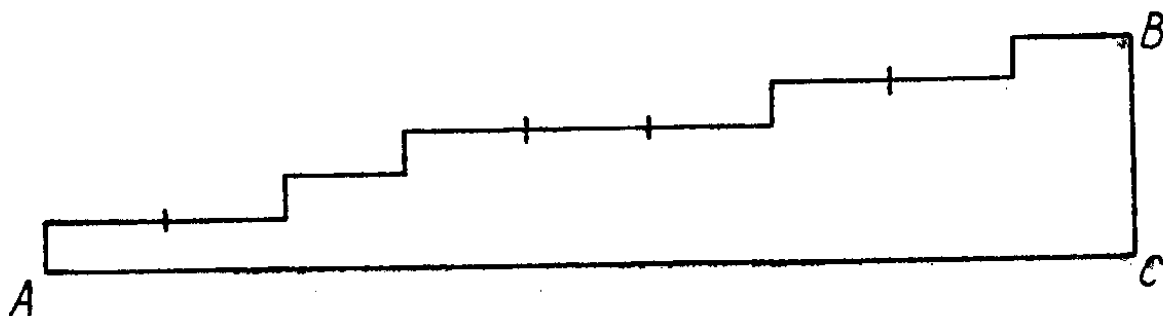
Trepi ehitamine

Ehitatakse treppi, mis viib punktist A punkti B (joon. 9). Kaugus AC on 4,5 m, CB — 1,5 m. Iga astme kõrgus on 30 cm, astme laius on 50 cm täisarvukordne. Mitmel viisil võib trepi ehitada?

Tingimusest on näha, et trepil peab olema 5 astet. Et $4,5 : 0,5 = 9$, siis leidub 10 kohta, kuhu võib teha astme. Järelikult tuleb 10-st kohast välja valida 5. Seda saab teha

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

viisil.



Joon. 9

Üldiselt, kui peab olema k astet ja pikkusele AC mahub n astet, siis võib trepi ehitada C_{n+1}^k viisil.

See ülesanne sarnaneb ülesandega loomataltsutajast: taltsutaja ei tahtnud kahte tiigrit kõrvuti panna, trepiehitaja aga ei tohi teha kahekordse kõrgusega astmeid. Kuid nende kahe ülesande vahel on oluline erinevus. Taltsutajale oli tähtis, millises järjekorras tiigrid lähevad, oli oluline, kas eesotsas on tiiger Šahh või hoopis tiiger Akbar. Trepiehitaja jaoks on aga kõik astmekohad samaväärsed. Peale selle pidi taltsutaja arvestama ka lõvide järjekorda, ehitajale on aga astmetegemise kohad ühesugused. Seepärast on trepiehitajal väiksem valik kui taltsutajal. Kui trepi kõrgus oleks 1,2 m ja pikkus 2,5 m, siis tuleks 4 astet ja 6 võimalikku astmekohta. Vastus oleks $C_6^4 = 15$. Taltsutaja sai aga sel juhul 43 200 varianti. See on ka arusaadav: ta võis 5 lõvi omavahel ümber paigutada $5! = 120$ ja 4 tiigrit $4! = 24$ viisil, kokku aga $120 \cdot 24 = 2880$ viisil. Kuid $15 \cdot 2880 = 43\,200$.

Trepiehitamise ülesande võib sõnastada järgmiselt.

Mitmel viisil võib reastada n nulli ja k ühte, nii et kaks ühte poleks kunagi kõrvuti?

Tõepoolest, iga trepi võib šifreerida nullidest ja ühtedest koosneva jada abil: null tähendab kohta, kust murdjoon läheb paremale, üks aga kohta, kust ta üles läheb. Näiteks joonisel 9 kujutatud trepi jaoks saame jada 10010100010010. Et trepil kahekordse kõrgusega astmeid ei ole, ei tohi jadas olla kahte ühte järjest. Seega on jadasid n nullist ja k ühest, milles kaks ühte pole kunagi kõrvuti, niisama palju kui treppe, s.o. C_{n+1}^k .

Raamaturiiul

Raamaturiiulil on 12 raamatut. Mitmel viisil võib nende hulgast valida 5 raamatut, nii et nende seas poleks kahte kõrvuti seisvat?

See ülesanne taandub äsja lahendatud ülesandele. Šifreerime iga raamatute valiku nullidest ja ühtedest koosneva jada abil. Seame nimelt igale alles jäetud raamatule vastavusse 0 ja väljavõetud raamatule 1. Tulemusena saame jada 5-st ühest ja 7-st nullist. Et kõrvuti seisvaid raamatuid ei tohtinud võtta, siis pole jadas kõrvuti kahte ühte. Kuid kombinatsioonide arv 5-st ühest ja

7-st nullist, milles kaks ühte pole kunagi kõrvuti, on võrdne $C_8^5 = 56$.

Üldiselt, kui riiulil on n raamatut ja valitakse k raamatut nii, et nende seas pole kahte kõrvuti seisvat, siis võib seda teha C_{n-k+1}^k viisil. Siit on näha, et ülesanne lahendub vaid tingimusel $2k - 1 \leq n$.

Kuningas Arthuri rüütlid

Kuningas Arthuri ümmarguse laua taga istub 12 rüütlit. Igaüks neist on oma naabritega sõjajalal. Tuleb valida 5 rüütlit, et vabastada nõiutud printsess. Mitmel viisil saab seda teha, nii et valitud rüütlite seas poleks vaenlasi?

See ülesanne sarnaneb ülesandega raamaturiiulist, kuid rüütlid ei istu mitte reas, vaid ringis. Ent seda on



kerge taandada kõrvuti istuvate rüütlite juhule. Selleks võtame mingi rüütli, näiteks Lanceloti. Kõik valitavad kombinatsioonid jagunevad kahte klassi: need, kus Lancelot sees on, ja need, kus teda ei ole. Arvutame, mitu kombinatsiooni kumbagi klassi kuulub.

Kui Lancelot läheb nõiutud printsessi vabastama, siis sellest retkest ei võta osa ei tema parem- ega vasakpoolne naaber. Jäävad 9 rüütli, kelle seast tuleb valida Lanceloti 4 kaaslast. Et tema naabrid retkest osa ei võta, siis peab vaid jälgima, et valitud 4 rüütli hulgas poleks vaenlasi, see tähendab, poleks naabreid. Kuid Lanceloti ja tema naabrite väljajätmine lõhub rüütlite ahela ja me võime pidada neid mitte ümmarguse laua taga, vaid ühes reas istuvateks. Sel juhul võib 4 rüütli 9 seast nõiutud viisil valida $C_6^4 = 15$ moodi. Seega kuulub esimesse klassi 15 kombinatsiooni.

Nüüd arvutame, mitu kombinatsiooni kuulub teise klassi. Et Lancelot retkest osa ei võta, siis võime ta ümmarguse laua rüütlite seast kohe välja jätta. Siis aga katkeb rüütlite ja nende omavaheliste suhete ahel ja jääb 11 rüütli, kes paiknevad ühes reas. Nende seast tuleb valida 5 retkest osavõtjat nii, et nende hulgas ei oleks kahte kõrvuti istujat. Seda saab teha $C_7^5 = 21$ viisil. Seega on võimaluste üldarv $15 + 21 = 36$.

Üldse, kui ümmarguse laua taga istub n rüütli ja tuleb valida k rüütli nii, et nende hulka ei satuks kahte naabrit, siis saab seda teha $C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k$ viisil.

See väide tõestatakse täpselt samuti nagu eelmine. Kõik rüütlite kombinatsioonid jagatakse kahte klassi sõltuvalt sellest, kas Lancelot kuulub sellesse klassi või mitte. Ta võtab osa C_{n-k-1}^{k-1} kombinatsioonist ning jääb välja C_{n-k}^k juhul. Kerge on kontrollida, et

$$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k.$$

Näiteks $n=12$, $k=5$ puhul saame

$$\frac{12}{7} \cdot C_7^5 = \frac{12}{7} \cdot 21 = 36.$$

Tütarlaps ruttab kohtamisele

Kunagi linastus sellise pealkirjaga kinokomöödia meie maa ekraanidel. Selles jutustati kahe puhkaja äpardustest, kes olid oma passid koju unustanud. Neile otsustati passid postiga järele saata, kuid tütarlaps sidejaoskonnast ruttas kohtamisele ja ajas kiirustades ümbrikud segi, tähendab, passid läksid vahetusse. Hea, et tütarlaps ei pidanud korraga viit kirja saatma: siis oleks mitte kahel, vaid viiel õnnetul tulnud ööbida kõvadel pargipinkidel.

Muide, ta oleks võinud sel juhul mõne passi ka päris kogemata õigesse ümbrikku panna. Arvutame, *mitmel juhul oleks ta põhjustanud täieliku segaduse, s.t. keegi poleks saanud oma passi.*

Ulesande võib sõnastada järgmiselt. *Võetakse kõik permutatsioonid 5-st arvust 1, 2, 3, 4, 5. Mitmes nendest ei seisa ükski arv omal kohal?* Lahendus leitakse juurde- ja mahaarvamise meetodil (vt. lk. 23). Tähistame (α) abil permutatsiooni omaduse, mis ütleb, et arv α seisab omal kohal, ja märgime vastavate permutatsioonide arvu N_α abil. Täpselt samuti tähistame $N_{\alpha\beta}$ -ga nende permutatsioonide arvu, millel on üheaegselt omadused (α) ja (β), s.o. millel nii α kui ka β seisavad omal kohal. Analoogiline tähendus on tähistusel $N_{\alpha\beta\gamma}$ jne. Olgu lõpuks $N^{(0)}$ nende permutatsioonide arv, millel pole ühtki omadustest (1), (2), (3), (4), (5), s.o. milles ükski arv ei seisa omal kohal. Juurde- ja mahaarvamise valemi põhjal saame

$$\begin{aligned} N^{(0)} &= N - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 - N_5 + N_{12} + \dots \\ &\dots + N_{45} - N_{123} - \dots - N_{345} + N_{1234} + \dots \\ &\dots + N_{2345} - N_{12345}, \end{aligned} \quad (1)$$

kus $N = P_5$ on 5 elemendi kõigi permutatsioonide üldarv (vt. lk. 23).

Antud juhul muutub ülesanne seetõttu kergemaks, et omadused (1), (2), (3), (4), (5) on täiesti samaväärsed. Ilmselt on $N_1 = N_2 = \dots = N_5$. Täpselt samuti saame $N_{12} = N_{23} = \dots = N_{45}$, sest on ju ükskõik, kas oma kohtadele jäävad arvud 1 ja 2 või 3 ja 4. Kuid arvudest 1, 2, 3, 4, 5 saab valida C_5^2 paari (omadused (1, 2) ja (2, 1) ühtivad ja seepärast ei huvita meid valitud arvude järjekord paaris).

Täpselt samuti on meil C_5^3 kolmikud, C_5^4 nelikut ja

C_5^5 viisikut. Valemi (1) võib ümber kirjutada nii:

$$N^{(0)} = N - C_5^1 N^{(1)} + C_5^2 N^{(2)} - C_5^3 N^{(3)} + C_5^4 N^{(4)} - C_5^5 N^{(5)}. \quad (2)$$

Siin on lühiduse mõttes tähistatud $N^{(k)}$ abil nende permutatsioonide arv, milles antud k arvu jäävad oma kohtadele. Ülesande lahenduse lõpetamiseks jääb meil leida $N^{(k)}$ väärtused, kus $k=1, 2, 3, 4, 5$.

$N^{(1)}$ tähendab nende permutatsioonide arvu, milles antud arv, näiteks 1, jääb oma kohale. Aga kui 1 jääb paigale, siis saab ülejäänud arve omavahel ümber paigutada $P_4=24$ viisil. Tähendab, $N^{(1)}=P_4$. Täpselt samuti, kui paigale jäävad arvud 1 ja 2, saab ülejäänud kolme arvu omavahel ümber paigutada $P_3=6$ viisil. Sellepärast $N^{(2)}=P_3=6$. Analoogiliselt leiame:

$$N^{(3)}=P_2=2, \quad N^{(4)}=P_1=1 \quad \text{ja} \quad N^{(5)}=P_0=1.$$

Asendades saadud $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}, N^{(5)}$ valemisse (2), leiame, et

$$\begin{aligned} N^{(0)} &= P_5 - C_5^1 P_4 + C_5^2 P_3 - C_5^3 P_2 + C_5^4 P_1 - C_5^5 P_0 = \\ &= 120 - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 44. \end{aligned}$$

Niisiis poleks 44-l juhul 120-st ükski adressaat saanud oma passi.

Just samuti võib leida, mitmel juhul saab oma passi parajasti üks adressaat. Kui selleks õnneseeneks on esimene kirjasaaja, siis ülejäänud 4 saavad võõrad passid. See võib toimuda

$$P_4 - C_4^1 P_3 + C_4^2 P_2 - C_4^3 P_1 + C_4^4 P_0 = 9$$

viisil. Et aga õnneseeneks võib osutuda mistahes adressaat, siis leidub $5 \cdot 9 = 45$ saatmisviisi, mille puhul täpselt üks inimene saab temale adresseeritud kirja.

Kontrollige ise, et parajasti kaks inimest saavad oma kirja 20 juhul, kolm — 10 juhul, neli — 0 juhul, viis — 1 juhul (eelviimase tulemuse mõistmiseks pidage silmas, et kui neli inimest saavad neile läkitatud kirja, siis on ka viimane kiri saadetud õigel aadressil).

Niisiis jagunevad 120 permutatsiooni 5-st elemendist 44 permutatsiooniks, milles ükski element ei jää paigale, 45 permutatsiooniks, kus täpselt üks element ei muuda

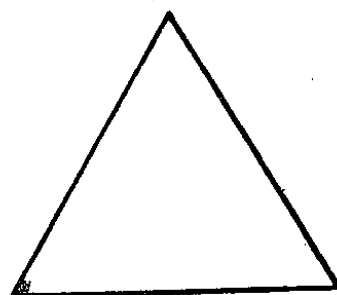
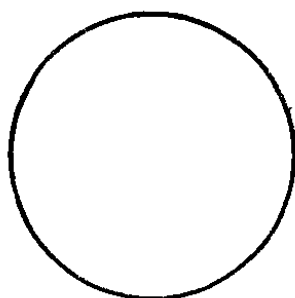
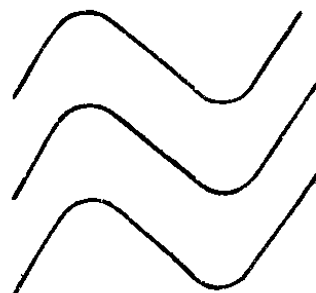
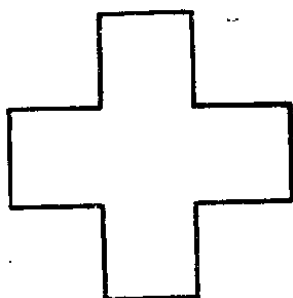
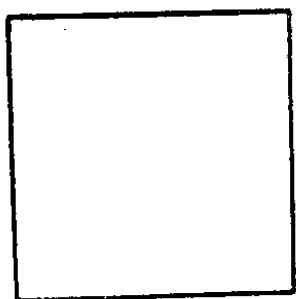
oma asukohta, 20 permutatsiooniks, kus kohta ei muuda kaks elementi, 10 permutatsiooniks, mis ei muuda kolme elemendi asukohti, ja 1 permutatsiooniks, kus kõik elemendid jäävad oma kohtadele.

Telepaatiaseanss

Mõned inimesed väidavad, et nad suudavad eemal olles teiste mõtteid lugeda. Kontrolliks tehti järgmisi katseid. Ühes toas võeti pakist mingis järjekorras nn. Zeneri kujundeid (joon. 10) ja tuli ära arvata, millises järjekorras neid kujundeid võeti.

Eeldame, et kujundeid võeti kordumisteta. Siis on nende kujundite võimalike ümberpaigutuste üldarv $5! = 120$. Seansil valitakse üks nendest permutatsioonidest. Katsealune nimetab mingi teise permutatsiooni ja tema edu on seda suurem, mida lähemal on ta tõelisele permutatsioonile. Lk. 62—63 tehtud arvutustest järeldub, et juhusliku äraarvamise korral oleksid tulemused umbes järgmised: 44 juhul 120-st poleks õigesti öeldud ühtki kujundit, 45 juhul üks kujund, 20 juhul kaks kujundit, 10 juhul kolm kujundit ja ühel juhul kõik viis kujundit. Keskmiselt on juhusliku äraarvamise korral õigesti nimetatud kujundeid

$$\frac{45 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5}{120} = 1,$$



Joon. 10



s.o. arvatakse ära üks kujund viiest. n erineva kujundi korral peaks õigesti öeldama keskmiselt üks kujund n kujundist. Kui aga süstemaatiliselt mõistatakse ära suurem arv kujundeid, tuleb hoolikalt uurida, kas on tegemist pettusega (nagu sageli juhtub) või on antud inimesel tõesti erilised võimed.

Selgitame, kas äramõistatavate kujundite arv muutub, kui lubada kordumisi. Sel juhul on meil permutatsioonide asemel kordumistega variatsioonid. Kuid leidub $(n-1)^n$ variatsiooni n elemendist, kus ükski element ei asetse oma «seaduslikul» kohal. Tõepoolest, esimesel kohal võib olla ükskõik milline element peale esimese, teisel mistahes element peale teise jne. Teisiti öeldes on igale kohale $n-1$ kandidaati. Korrutise reegli põhjal järeldame siit, et ühendite üldarv on $(n-1)^n$.

Leiame, mitmel juhul asetseb omal kohal parajasti üks element. Kui omal kohal on näiteks esimene element, siis jääb täita veel $n-1$ kohta. Seejuures pretendeerib igale kohale $n-1$ kandidaati (kõik elemendid peale selle koha «seadusliku omaniku»). Järelikult leidub $(n-1)^{n-1}$ variatsiooni, milles esimene element ja ainult see asetseb

omal kohal. Et aga oma kohale võib jääda ükskõik milline k elemendist, siis saame $C_n^k (n-1)^{n-k}$ variatsiooni, milles täpselt üks element on paigale jäänud. Täpselt samuti tõestatakse, et parajasti k elementi jääb paigale $C_n^k (n-1)^{n-k}$ variatsioonis.

Näiteks saame viie erineva elemendi korral, et $4^5 = 1024$ kordumistega variatsioonil on kõik elemendid paigalt nihutatud; $5 \cdot 4^4 = 1280$ variatsioonil asetseb täpselt üks element omal kohal; parajasti kaks elementi on jäänud oma kohtadele $10 \cdot 4^3 = 640$ ühendil; kolm elementi on oma kohtadel $10 \cdot 4^2 = 160$ variatsioonil; neli elementi aga $5 \cdot 4 = 20$ variatsioonil ja viis elementi $1 \cdot 4^0 = 1$ variatsioonil. Kokku saame

$$1024 + 1280 + 640 + 160 + 20 + 1 = 3125$$

variatsiooni, mis on kooskõlas valemiga

$$A_5^5 = 5^5 = 3125.$$

Keskmiselt arvatakse juhusliku mõistatamise korral ära

$$\frac{1280 + 640 \cdot 2 + 160 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{3125} = 1$$

kujund. Vastus tuli seesama: juhusliku mõistatamise korral saab ära arvata ühe kujundi viiest, sõltumata sellest, kas kordumised on lubatud või mitte. Kuid äraarvatud kujundite arvu jaotus tuleb juba teistsugune. See on antud järgmises tabelis:

Äraarvatud kujundite arv	Kordumisteta	Kordumistega
0	0,366	0,328
1	0,375	0,410
2	0,167	0,205
3	0,083	0,051
4	0	0,006
5	0,009	0,000

Üldine nihutamisülesanne ¹

Täiesti samamoodi nagu eespool käsitletud ülesanded lahendatakse ka üldine nihutamisülesanne: *leida n elementi permutatsioonide arv D_n , mille puhul ükski element ei jää oma esialgsesse asendisse*. Vastuse annab valem

$$\begin{aligned} D_n &= P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n = \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Lugeja, kes on tuttav ridade teooriaga, tunneb suluavaldises ära arvu e^{-1} arendise osasumma.

Valemi (3) üldistamisel juhule $n=0$ on loomulik lugeda $D_0=1$.

Leidub

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r} \quad (4)$$

permutatsiooni, milles täpselt r elementi jäävad esialgsetele kohtadele ja ülejäänud muudavad oma asendit. Tõepoolest, algul tuleb valida, millised r elementi paigale jäävad. Seda saab teha C_n^r viisil. Ülejäänud $n-r$ elementi võib seejärel suvaliselt ümber paigutada, kuid nii, et ükski neist ei asuks oma esialgsele kohale. Seda on võimalik teha D_{n-r} viisil. Korrutise reegli järgi saame, et nõutavaid permutatsioone on üldse $C_n^r D_{n-r}$.

Jaotame kõik permutatsioonid klassidesse vastavalt sellele, mitu elementi jääb antud permutatsiooni puhul paigale. Et permutatsioonide üldarv on $n!$, siis saame samasuse:

$$n! = \sum_{r=0}^n D_{n,r} = \sum_{r=0}^n C_n^r D_{n-r}. \quad (5)$$

Teine arve $n!$ ja $D_{n,r}$ siduv samasus saadakse järgmiselt. Võtame kõik $n!$ permutatsiooni elementidest $a_1, a_2, \dots, a_n$ ja arvutame, mitu elementi kõigis nendes permutatsioonides kokku paigale jääb. Seda saab teha kahel viisil. Esiteks paneme tähele, et kui näiteks element a_1 asetseb omal kohal, siis saab ülejäänud elemente ümber paigutada $P_{n-1} = (n-1)!$ viisil. Seetõttu asetseb element a_1 esikohal $(n-1)!$ permutatsioonis. Täpselt samuti paikneb a_2 teisel kohal $(n-1)!$ permutatsioonis. Kokku saame $n(n-1)! = n!$ elementi, mis asetsevad oma kohtadel. Kuid nende elementide arvu võib leida ka

¹ Selle punkti võib esmakordsel lugemisel vahele jätta.

teisiti. Leidub $D_{n,r}$ permutatsioonid, milles parajasti r elementi asetsevad oma kohtadel (arvame nad r -ndasse klassi). Iga selline permutatsioon annab r paigalejäävat elementi. Seetõttu on paigalejäävate elementide üldarv r -nda klassi permutatsioonides $rD_{n,r}$ ja kokku saame $\sum_{r=0}^n rD_{n,r}$ paigalejäävat elementi. Sellega on tõestatud samasus

$$n! = \sum_{r=0}^n rD_{n,r} = \sum_{r=0}^n rC_n^r D_{n-r}. \quad (5')$$

Juurde- ja mahaarvamise valem võimaldab lahendada ka sellise ülesande: leida n elemendi nende permutatsioonide arv, milles antud r elementi on paigalt nihutatud (ülejäänud elemendid võivad kas paigalt nihkuda või endistele kohtadele jääda). Vastuse annab valem

$$n! - C_r^1 (n-1)! + C_r^2 (n-2)! - \dots + (-1)^r (n-r)!. \quad (6)$$

Subfaktoriaalid ¹

Mõned autorid nimetavad arve D_n subfaktoriaalideks. Neil arvudel on harilike faktoriaalidega palju ühiseid omadusi. Näiteks kehtib faktoriaalide jaoks võrdus

$$n! = (n-1) [(n-1)! + (n-2)!]. \quad (7)$$

Tõepoolest,

$$(n-1) [(n-1)! + (n-2)!] = (n-1)(n-2)!n = n!.$$

Näitame, et seesama võrdus kehtib ka subfaktoriaalide D_n jaoks, s. o.

$$D_n = (n-1) [D_{n-1} + D_{n-2}]. \quad (8)$$

Selleks asendame D_{n-1} ja D_{n-2} nende avaldistega valemi (3) järgi. Eraldades D_{n-1} avaldises viimase liidetava, saame

$$\begin{aligned} (n-1) [D_{n-1} + D_{n-2}] &= (n-1) [(n-1)! + (n-2)!] \cdot \\ &\cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \right] + \\ &+ (-1)^{n-1} (n-1). \end{aligned}$$

Kuid valemi (7) järgi

$$(n-1) [(n-1)! + (n-2)!] = n!.$$

¹ Selle punkti võib esmakordsel lugemisel vahele jätta.

Peale selle

$$(-1)^{n-1}(n-1) = n! \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Seepärast

$$(n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}] = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] = D_n.$$

Tõestatud seose (8) võib Euleri järgi tuletada ka puhtkombinaatorsete arutluste abil. Vaatleme kõiki permutatsioone, milles kõik elemendid on paigalt nihutatud. Esikohal võib sellistes permutatsioonides olla mistahes element peale esimese. Et ülejäänud elemente on $n-1$, siis jaotuvad D_n permutatsiooni $n-1$ rühmaks sõltuvalt sellest, milline element on esikohal. Arusaadavalt on kõigis rühmades ühepalju elemente.

Arvutame, kui palju elemente on ühes niisuguses rühmas, näiteks selles, kus esikohal on teine element. See rühm jaguneb kaheks osaks: permutatsioonid, milles esimene element asub teisel kohal, ja kõik ülejäänud. Kui esimene element on teisel kohal (teine element aga teatavasti esikohal), siis võib ülejäänud $n-2$ elementi omavahel ümber paigutada mistahes viisil, ainult ükski neist ei tohi asuda oma kohale, Seda saab teha D_{n-2} viisil. Seega koosneb esimene osa D_{n-2} permutatsioonist.

Näitame, et teine osa koosneb D_{n-1} permutatsioonist. Tõepoolest, teise ossa kuuluvad kõik need permutatsioonid, milles esimene element ei ole teisel kohal ja ülejäänud elemendid ei asetse oma kohtadel. Kui esimese elemendi «seaduslikuks» kohaks ajutiselt lugeda teine koht, siis saame, et esimene, kolmas, neljas, ..., n -s element ei asetse oma kohtadel. Et nende elementide arv on $n-1$, siis on teises osas D_{n-1} permutatsiooni. Kuid siis koosneb kogu rühm $D_{n-2} + D_{n-1}$ permutatsioonist. Et kõigi vaadeldavate permutatsioonide hulk koosneb $(n-1)$ -st rühmast, siis kuulub sellesse $(n-1)[D_{n-2} + D_{n-1}]$ permutatsiooni. Sellega on võrdus (8) tõestatud.

Valemist (8) järeldub, et

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}].$$

Seetõttu muudab avaldis $D_n - nD_{n-1}$ indeksi n muutudes ainult märki. Kasutades seda seost mitu korda, saame

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1].$$

Kuid $D_2 = 1$ ja $D_1 = 0$ ning seepärast

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n. \quad (9)$$

See valem meenutab seost $n! = n(n-1)!$ faktoriaalide jaoks.

Kirjutame välja subfaktoriaalide väärtused esimese 12 naturaalarvu jaoks:

n	D_n	n	D_n	n	D_n	n	D_n
1	0	4	9	7	1854	10	1 334 961
2	1	5	44	8	14 833	11	14 684 570
3	2	6	265	9	133 496	12	176 214 841

Karavan kõrbes

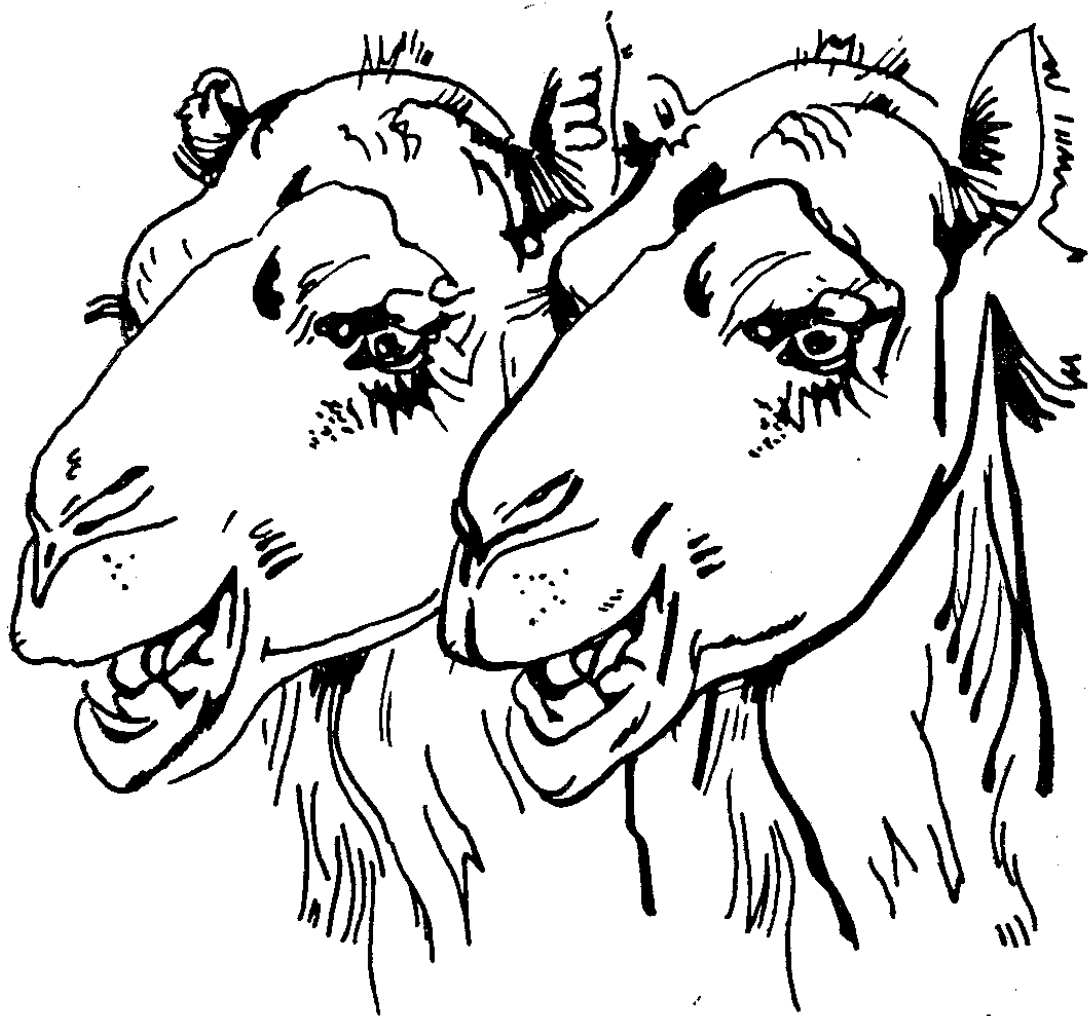
Kõrbes liigub 9 kaamelist koosnev karavan. Teekond kestab palju päevi ja lõpuks on kõik tüdinenud kogu aeg ühe ja sama kaameli nägemisest enda ees. Mitmel viisil saab kaameleid nii ümber paigutada, et iga kaameli ees kõnniks mõni teine kaamel, mitte see, kes algul?

Sellised permutatsioonid on kindlasti olemas. Näiteks võib kõik kaamelid ümber paigutada vastupidisesse järjekorda, nii et viimane osutub esimeseks jne. Araabia kõnekäändki ütleb, et «kui karavan pöörab tagasi, on lonkav kaamel kõige ees».

Ülesande lahendamiseks märgime kaamelid algul karavani lõpust alates arvudega 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Seega saab viimane kaamel numbri üks, eelviimane numbri kaks jne. Meil tuleb leida kõik permutatsioonid arvudest 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, milles ei esine ükski paaridest (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (8,9). Ülesande lahendamiseks kasutame jälle juurde- ja mahaarvamise valemit.

Algul arvutame, mitmes permutatsioonis sisaldub paar (1,2). Me võime nendes permutatsioonides lugeda selle paari üheks elemendiks. Seepärast ei tule seal elementide üldarv mitte 9, vaid 8, ja paari (1,2) sisaldavate permutatsioonide arv on P_8 . Sama tulemuse saame kõigi 8 paari jaoks.

Nüüd vaatleme permutatsioone, mis sisaldavad kahte antud paari. Sel juhul ühendame kummagi paari elemendid. Kui mõlemad paarid sisaldavad ühist elementi (näiteks paarid (1,2) ja (2,3)), siis ühendame kõik kolm elementi. Vastasel juhul (näiteks paaride (1,2) ja (5,6) korral) ühendame elemendid paarikaupa. Mõlemal juhul tekib pärast ühendamist 7 uut elementi (osa neist on esialgsete elementide paarid või kolmikud), mida saab omavahel ümber paigutada P_7 viisil. Kahte paari kaheksast saab aga valida C_8^2 viisil.



Täiesti analoogiliselt näidatakse, et P_{9-k} permutatsiooni sisaldab parajasti k paari. Seejuures on k paari võimalik valida C_8^k viisil. Juurde- ja mahaarvamise valemi järgi saame, et täpselt

$$P_9 - C_8^1 P_8 + C_8^2 P_7 - C_8^3 P_6 + C_8^4 P_5 - C_8^5 P_4 + C_8^6 P_3 - \\ - C_8^7 P_2 + C_8^8 P_1 = 8! \left[9 - \frac{8}{1!} + \frac{7}{2!} - \frac{6}{3!} + \frac{5}{4!} - \frac{4}{5!} + \right. \\ \left. + \frac{3}{6!} - \frac{2}{7!} + \frac{1}{8!} \right] = 148\,329$$

permutatsiooni ei sisalda ühtki antud paaridest.

Samamoodi tõestatakse, et parajasti

$$E_n = P_n - C_{n-1}^1 P_{n-1} + C_{n-1}^2 P_{n-2} - C_{n-1}^3 P_{n-3} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} P_1 = (n-1)! \left[n - \frac{n-1}{1!} + \right. \\ \left. + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \quad (10)$$

permutatsiooni arvudest $1, 2, 3, \dots, n$ ei sisalda ühtki paaridest $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.

Avaldame saadud vastuse subfaktoriaalide kaudu. Selleks lahutame paremal poolel iga liidetava kaheks:

$$\frac{(-1)^k(n-k)}{k!} = \frac{(-1)^kn}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Saame

$$E_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] + \\ + (n-1)! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

(me lisasime mõlemasse suluavaldisse ühe, viimase liikme; ilmselt need hävivad vastastikku, sest annavad pärast sulgude avamist vastavalt $(-1)^n$ ja $(-1)^{n-1}$). Kuid esimene avaldis on parajasti D_n ja teine D_{n-1} . Seepärast

$$E_n = D_n + D_{n-1}. \quad (11)$$

Niisiis, leidub $D_n + D_{n-1}$ permutatsiooni arvudest $1, 2, 3, \dots, n$, mis ei sisalda paare $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.

Täiesti samal viisil tõestatakse, et

$$P_n = C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} + \dots + (-1)^r C_n^r P_{n-r} \quad (12)$$

permutatsiooni n elemendist ei sisalda antud $r \leq n-1$ paari.

Teistsuguse vastuse saame, kui keelatud paaride arv on suurem kui $n-1$. Nõuame näiteks, et permutatsioon ei tohi peale paaride $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ sisaldada ka paari $(n, 1)$. Arutledes täpselt samuti nagu eespool, saame vastuse valemina

$$F_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - (-1)^k C_n^k P_{n-k} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_1 = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = n D_{n-1}. \quad (13)$$

Tõepoolest, sel juhul on keelatud paare n , kuid ükski permutatsioon ei saa sisaldada kõiki n paari. Kui permutatsioonis sisalduvad paarid $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$, siis tema esimeseks elemendiks on ju 1 ja viimaseks n

ning järelikult paar $(n, 1)$ permutatsioonis ei sisaldu. See-
pärast on valemi (13) viimane liige $(-1)^{n-1}C_n^{n-1}P_1$, mitte
aga $(-1)^nC_n^nP_0 = (-1)^n$.

Oleks huvitav, kui saadud vastust $F_n = nD_{n-1}$ õnnes-
tuks põhjendada puhtkombinatoorselt.

Karussellisõit

Karussellil sõidab n last. Nad otsustasid ümber istuda nii, et igaühe ees istuks mõni teine laps. Mitmel viisil saavad nad seda teha?

See ülesanne sarnaneb eespool lahendatud karavani-
ülesandega. Kuid nüüd on keelatud paare n ; peavad puu-
duma paarid $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ ja $(n, 1)$. Peale
selle ei loe me erinevateks permutatsioone, mis saadakse
üksteisest karusselli pöörlemisel. Seepärast saab k ele-
mendist koostada ainult $P_{k-1} = (k-1)!$ oluliselt erinevat
permutatsiooni. Lõpuks võivad uues ülesandes esineda
permutatsioonid, millesse kuuluvad kõik n paari. Selline
on näiteks lähtepermutatsioon. Kõiki neid asjaolusid
arvestades saame juurde- ja mahaarvamise valemi põhjal
otsitavate permutatsioonide arvuks

$$Q_n = P_{n-1} - C_n^1 P_{n-2} + C_n^2 P_{n-3} - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_0 + (-1)^n C_n^n. \quad (14)$$

On kerge kontrollida, et selle avaldise võib kirjutada kujul

$$Q_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \dots + (-1)^{n-3} D_2. \quad (15)$$

Tõepoolest, valemist (14) järeldub võrduse $C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$
tõttu, et $n \geq 1$ puhul

$Q_n + Q_{n-1} = P_{n-1} - C_{n-1}^1 P_{n-2} + C_{n-1}^2 P_{n-3} - \dots + (-1)^n$,
see avaldis aga võrdub D_{n-1} -ga (vt. lk. 67). Seega $Q_n + Q_{n-1} =$
 $= D_{n-1}$. Peale selle järeldub valemist (14), et $Q_2 = 0$. Niisiis saame, et

$$Q_n + Q_{n-1} = D_{n-1}, \\ -Q_{n-1} - Q_{n-2} = -D_{n-2}, \\ Q_{n-2} + Q_{n-3} = D_{n-3}, \\ \vdots \\ (-1)^{n-3} Q_3 = (-1)^{n-3} D_2.$$

Liites need võrdused, jõuame seoseni (15).

Kassajärjekord

Kinokassa juures seisab $m+k$ inimesest koosnev järjekord, kusjuures m külastajal on rublalised ja k inimesel viiekümnekopikalised. Pilet maksab 50 kopikat ja müügi algul kassas vahetusraha ei ole. Mitmel viisil võivad rublaliste ja viiekümnekopikalistega külastajad järjekorras jaotuda nii, et kellelgi ei tuleks peenraha oodata?

Näiteks kui $m=k=2$, siis on soodsad vaid kaks juhtu: $vrvr$ ja $vvr r$, kus v tähendab viiekümnekopikalist ja r rublalist. Neljal juhul ($rrvv$, $rvrv$, $rvvr$ ja $vrrv$) tekib viivitus, sest esimesel kolmel juhul ei saa juba esimene külastaja raha tagasi, viimasel juhul jääb aga kolmas külastaja kassa juurde ootama.

Väikeste m ja k väärtuste korral võib ülesande lahendada kõigi erijuhtude läbivaatamise teel. Ent kui m ja k on suhteliselt suured, siis erijuhtude läbivaatamine ei aita. Erinevate permutatsioonide arv m rublalisest ja k viiekümnekopikalisest on ju teatavasti

$$P(m, k) = \frac{(m+k)!}{m!k!}.$$

Kui näiteks $m=k=20$, siis

$$P(20, 20) = \frac{40!}{20!20!},$$

see arv on aga suurem sajast miljardist.

Tuletame valemi, mis avaldab otsitavate kombinatsioonide arvu m ja k kaudu. Seega tuleb meil leida, mitmel r -tähtedest (tähtede arv m) ja v -tähtedest (tähtede arv k) koostatud permutatsioonil on järgmine omadus: permutatsiooni p esimese liikme seas peab iga p puhul (kus $1 \leq p \leq m+k$) olema v -tähti mitte vähem kui r -tähti (viiekümnekopikalisi peab olema vähemalt niisama palju kui rublalisi, muidu jääks järjekord seisma).

Ilmselt on ülesande lahenduvuseks tarvilik, et oleks täidetud tingimus $m \leq k$, muidu jääb järjekord kindlasti seisma, sest viiekümnekopikalistest ei jätku kõigile rublaliste omanikele tagasiandmiseks. Seepärast oletame, et $0 \leq m \leq k$. Siin on nagu mõningates teisteski kombinatoorikaülesannetes kasulikum otsida «ebasoodsate» juhtude arvu, s. o. nende juhtude arvu, kus järjekord seisma jääb.

Kui oleme selle arvu leidnud, siis saame oma ülesande vastuse, lahutades selle m r -tähest ja k v -tähest koostatud permutatsioonide üldarvust $P(m, k) = C_{m+k}^m$.

Tõestame nüüd järgmise väite: m r -tähest ja k v -tähest koostatud permutatsioonide jaoks on ebasoodsate juhtude arv $P(m-1, k+1) = C_{m+k}^{m-1}$, s. o. võrdub kõigi permutatsioonide arvuga, mis on koostatud $(m-1)$ r -tähest ja $(k+1)$ v -tähest. Seda tõestatakse järgmiselt. Võtame mistahes ebasoodsa permutatsiooni m r -tähest ja k v -tähest. Jäägu järjekord mingil kohal seisma. Siis on selle koha ees v - ja r -tähti ühepalju (kõik viiekümnekopikalised antakse rublaliste omanikele tagasi) ja sellel kohal endal seisab r -täht, muidu läheks järjekord edasi.

Niisiis on peatumiskoha järjenumbril kuju $2s+1$ ning selle koha ees seisab s v -tähte ja s r -tähte. Paneme nüüd järjekorra ette ühe v -tähe (kui järjekord protesteerima hakkab, siis ütleme, et seda tehakse rahavahetamise hõlbustamiseks). Saame permutatsiooni m r -tähest ja $(k+1)$ v -tähest, mille esimene täht on v ning esimese $2s+2$ tähe seas on r - ja v -tähti ühepalju (v -tähti oli s ja r -tähti $s+1$, meie lisasime ühe v -tähe, nii et lõpuks saime kumbagi tähte ühepalju).

Nüüd aga teostame operatsiooni, mis pahandab kõiki rublaliste ja rõõmustab viiekümnekopikaliste omanikke: vahetame esimesel $2s+2$ kohal igal külastajal tema rublalise viiekümnekopikalise ja iga viiekümnekopikalise rublalise. Näiteks kui järjekorral on kuju

$v v r v r v r r v r r v v r v v r$,

siis ta peatub r -tähe kohal. Pärast seda kui v -täht on ette pandud ja tehtud ka kirjeldatud asendus, tekib järjekord kujuga

$r r r v r v r v v r v v v v r v v r$.

Et esimesel $2s+2$ kohal oli rublalisi ja viiekümnekopikalisi ühepalju, siis asendus ei muuda kumbagi liiki rahade arvu ja me saame permutatsiooni m r -tähest ja $(k+1)$ v -tähest, kusjuures esimeseks täheks on nüüd r . Niisiis oleme igale «ebasoodsale» jadale m r -tähest ja k v -tähest vastavusse seadnud r -tähega algava jada m r -tähest ja $(k+1)$ v -tähest.

Näitame, et sellisel viisil võib saada iga r -tähega algava jada $(k+1)$ v -tähest ja m r -tähest. Tõepoolest,

võtame sellise jada. Et eelduse kohaselt $m \leq k$, siis mingis kohas v -tähtede ja r -tähtede arv võrdsustub. Kui asendada algusest kuni selle kohani s (viimane kaasa arvatud) kõik v -tähed r -tähtedega ja r -tähed v -tähtedega ning jätta ära esimene v -täht, siis saame just rublaliste ja viiekümnekopikaliste ebasoodsa paigutuse. Järjekord jääb seisma just sellel kohal s , kus antud järjestuses esmakordselt võrdsustus v - ja r -tähtede arv.

Me tegime kindlaks, et rublaliste ja viiekümnekopikaliste ebasoodsate paigutuste arv järjekorras võrdub kõigi r -tähega algavate permutatsioonide arvuga, mis on koostatud m r -tähest ja $(k+1)$ v -tähest. Kui esimene täht kõrvale jätta, siis saame kõikvõimalikud permutatsioonid $(m-1)$ r -tähest ja $(k+1)$ v -tähest. Niisuguseid permutatsioone on aga

$$P(m-1, k+1) = C_{m+k}^{m-1}.$$

Niisiis on ebasoodsaid permutatsioone C_{m+k}^{m-1} . Et permutatsioonide arv m r -tähest ja k v -tähest on üldse C_{m+k}^m , siis avaldub soodsate permutatsioonide arv valemiga

$$C_{m+k}^m - C_{m+k}^{m-1} = \frac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^m. \quad (16)$$

Erijuhul, kui $k=m$, s. o. järjekorras on ühepalju rublalisi ja viiekümnekopikalisi, liigub järjekord takistusteta $\frac{1}{k+1} C_{2k}^k$ juhul ja jääb seisma $\frac{k}{k+1} C_{2k}^k$ juhul. Seega, mida suurem on k , seda väiksem on soodsate juhtude protsent.

Meie ülesanne on täielikult lahendatud. Vaatleme nüüd teist, antud ülesandele üsna lähedast ülesannet. Oletame nimelt, et kassapidaja oli ettenägelik ja algul oli kassas q viiekümnekopikalist. *Mitmel juhul liigub takistuseta järjekord, kus m inimesel on rublalised ja k inimesel viiekümnekopikalised?*

On selge, et kui $m \leq q$, siis liigub järjekord kindlasti tõrgeteta: algul kassas olnud viiekümnekopikalistest jätkub, et rahuldada kõiki rublaliste omanikke. Kui aga $m > k+q$, siis jääb järjekord kindlasti seisma: viiekümnekopikaliste üldarvust kassas ja järjekorras ei jätku, et kõigile rublaliste omanikele tagasi anda. Seepärast võime piirduda selle juhu vaatlemisega, kus

$$q < m \leq k + q.$$

Võib eeldada, et q viiekümnekopikalist tulid kassasse nii, et järjekorra algusesse seati q uut inimest viiekümnekopikalistega. Sellepärast võib ülesande sõnastada järgmiselt.

Järjekorras seisab $k+q$ inimest viiekümnekopikalistega ja m inimest rublalistega, kusjuures esimesel q kohal on viiekümnekopikaliste omanikud. Mitmel juhul ei tule kellelgi peenraha oodata?

See ülesanne lahendatakse täpselt samuti nagu eespool vaadeldud erijuht $q=0$. Leiame esmalt ebasoodsate juhtude arvu. Igal sellisel juhul tekib tõrge niisuguse külastaja juures, kellest eespool on ühesugune arv s rublalisi ja viiekümnekopikalisi ja kellel endal on rubla. Paneme järjekorra ette veel ühe inimese viiekümnekopikalise ja asendame esimesel $2s+2$ külastajal rublalised viiekümnekopikalistega ja viiekümnekopikalised rublalistega. Saame permutatsiooni m rublast ja $k+q+1$ viiekümnekopikalise, kusjuures esimesel $q+1$ kohal on rublalised. Seejuures võib iga niisuguse permutatsiooni ühesel viisil saada rublaliste ja viiekümnekopikaliste ebasoodsast paigutusest. Kuid esimesed $q+1$ rublalist võib ära jätta ja siis tekivad kõikvõimalikud permutatsioonid $m-q-1$ rublalistest ja $k+q+1$ viiekümnekopikalistest. Selliste permutatsioonide arv on aga $P(m-q-1, k+q+1) = C_{m+k}^{m-q-1}$. Me näitasime, et vaadeldavas ülesandes on C_{m+k}^{m-q-1} ebasoodsat permutatsiooni. Et aga permutatsioone on üldse C_{m+k}^k , siis annab soodsate permutatsioonide arvu valem

$$C_{m+k}^m - C_{m+k}^{m-q-1}. \quad (17)$$

Eespool kasutatud võtte võimaldab lahendada ka paljusid teisi ülesandeid. Näiteks on selle võtte abil kerge saada järgmised tulemused.

Kui $m < k$, siis leidub

$$C_{m+k-1}^m - C_{m+k-1}^{m-1} = \frac{k-m}{k} C_{m+k-1}^m \quad (18)$$

permutatsiooni m r -tähest ja k v -tähest, millel iga tähe ees (peale esimese) on v -tähti rohkem kui r -tähti. Arutle-

takse täpselt samuti nagu eespool, ainult v -tähte pole tarvis algusesse lisada.

Valem on õige, kui $m < k$. Kui aga $m = k$, on selliste omadustega permutatsioonide $\frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}$. Selles võib veenduda järgmiselt. Iga niisugune permutatsioon peab algama v -tähega ja lõppema r -tähega. Kui need kõrvale jätta, saame permutatsiooni $(k-1)$ r -tähest ja $(k-1)$ v -tähest. On kerge näha, et selle permutatsiooni korral liigub järjekord takistusteta. Vastupidi, olgu permutatsioonis v -tähti ja r -tähti kumbagi $k-1$ ja liikugu sellel korral järjekord takistusteta. Lisades algusse v -tähe ja lõppu r -tähe, saame meile vajaliku omadustega permutatsiooni. Kuid leidub parajasti $\frac{1}{k} C_{2k-1}^{k-1}$ permutatsiooni, kus v -tähti ja r -tähti on kumbagi $k-1$ ja järjekord liigub viivitusteta.

Ülesanne kahest viirust

Kombinatorikas on tihti nii, et kaks esimesel pilgul õige kaugetena tunduvat ülesannet on teineteiseks taandatavad. Vaatleme järgmist ülesannet.

Mitmel viisil saab $2n$ erinevat kasvu inimest rivistada kahte ühepikkusesse viirgu nii, et nad seisaksid mõlemas viirus pikkuse järgi ja iga esimeses viirus seisja oleks tema taga seisjast pikem?

Näitame, et selle ülesande lahendamine taandub juba käsitletud kassajärjekorra-ülesandele. Seame inimesed nõutaval viisil kahte viirgu ja anname kõigile esimeses viirus seisjaile viiekümnekopikalised, teises viirus seisjaile rublalised ning rivistame nad seejärel pikkuse järgi ühte kolonni. Tekib järjekord, kus n inimesel on viiekümnekopikalised ja n inimesel rublalised. Ülesande tingimusest järeldub, et niisugune järjekord liigub takistusteta. Tõepoolest, seisku keegi teises viirus k -ndal kohal. Siis on vaid $k-1$ rublaliste omanikku temast pikemad. Viiekümnekopikaliste omanikest on aga temast pikemad vähemalt k inimest (tema ees seisja ja kõik, kes seisavad tollest paremal). Kui ta kassa juurde jõuab, leidub seal seetõttu vähemalt üks viiekümnekopikaline ja vahetusraha on kindlasti olemas.

Vastupidi, olgu antud mingi paigutus, kus n külasta-

jat on viiekümnekopikalistega ja n inimest rublalistega ning järjekord liigub takistusteta. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kõik $2n$ külastajat seisavad pikkuse järgi. Valime nüüd välja kõik viiekümnekopikaliste omanikud ja rivistame nad kasvu järgi esimesse viirgu ning rublaliste omanikud teise viirgu. Jätame lugeja hooleks kontrollida, et saadud rivistus rahuldab ülesande tingimusi. Siit järeldub, et võimalikke rivistusi on niisama palju kui soodsaid paigutusi n v -tähest ja n r -tähest, s. o.

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Kombinatsioonide uued omadused¹

Eelmistes punktides tuletatud valemid võimaldavad saada kombinatsioonide arvu C_m^k uusi omadusi (vt. lk. 47). Selleks jaotame kõik m r -tähest ja k v -tähest koosnevad «ebasoodsad» permutatsioonid klassidesse. Nägime, et nii-suguste permutatsioonide korral peatub järjekord kohal $2s+1$, kusjuures sellel kohal seisab r -täht, viimase ees on r -tähti ja v -tähti kumbagi s ja kuni antud kohani liigub järjekord takistusteta. Arvame s -ndasse klassi kõik ebasoodsad permutatsioonid, mille puhul järjekord peatub kohal $2s+1$. On selge, et s võib omandada väärtusi $0, 1, 2, \dots, m-1$.

Leiame, mitu permutatsiooni kuulub s -ndasse klassi. Esimesel $2s$ kohal võivad olla mistahes soodsad permutatsioonid s r -tähest ja s v -tähest: kuni kohani $2s+1$ järjekord ju ei peatu. Nagu nägime, on selliste permutatsioonide arv $\frac{1}{s+1} C_{2s}^s$. Edasi tuleb kohal $2s+1$ r -täht ja seejärel mistahes permutatsioon ülejäänud $(m-s-1)$ r -tähest ja $(k-s)$ v -tähest. Selliseid permutatsioone on $P(m-s-1, k-s) = C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$. Järelikult on korrutise reegli põhjal s -ndas klassis

$$\frac{1}{s+1} C_{2s}^s C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$$

ebasoodsat permutatsiooni. Et ebasoodsaid permutatsioone

¹ Selle punkti võib esmakordsel lugemisel vahele jätta.

on üldse C_{m+k}^{m-1} ja klasse $m-1$, siis saame $m \leq k$ puhul seose

$$C_0^0 C_{m+k-1}^{m-1} + \frac{1}{2} C_2^1 C_{m+k-3}^{m-2} + \frac{1}{3} C_4^2 C_{m+k-5}^{m-3} + \dots \\ \dots + \frac{1}{m} C_{2m-2}^{m-1} C_{k-m+1}^0 = C_{m+k}^{m-1}. \quad (19)$$

See seos on erijuht valemist

$$\sum_{s=p}^{m-1} [C_{2s-p}^s - C_{2s-p}^{s-p-1}] C_{m+k+p-2s-1}^{m-s-1} + C_{m+k}^{m-p-1}, \quad (20)$$

kus $p < m \leq p+k$ (esimeses liidetavas loetakse C_s^{-1} võrdseks nulliga). Valem (20) tõestatakse samuti nagu valem (19), jaotades klassidesse need ebasoodsad permutatsioonid m r -tähest ja $(k+p)$ v -tähest, millel on alguses p v -tähte (vt. lk. 77).

Nüüd vaatleme seoseid, mis saadakse k r -tähest ja k v -tähest koostatud soodsate permutatsioonide klassideks jaotamisel. Selliste permutatsioonide arv on $\frac{1}{k+1} C_{2k}^k$.

Pärast kogu järjekorra möödumist pole kassas jälle ühtki viiekümnekopikalist, sest need antakse kõik tagasi. Kuid mõningate soodsate permutatsioonide puhul tekivad ka varem momendid, mil kassas pole viiekümnekopikalisi; järjekord ei peatu vaid seetõttu, et järgmine külastaja annab viiekümnekopikalise. Jaotame soodsad permutatsioonid klassidesse, arvates s -ndasse klassi kõik need permutatsioonid, mille puhul kassas pole esmakordselt viiekümnekopikalisi $2s$ -ndal kohal, $s=1, \dots, k$.

Leiame s -nda klassi permutatsioonide arvu. Iga selline permutatsioon jaguneb kaheks osaks. Esimesed $2s$ tähte moodustavad permutatsiooni s v -tähest ja s r -tähest, kus iga tähe ees on v -tähti rohkem kui r -tähti (muidu toimuks esimene võrdsustumine juba enne $2s$ -ndat kohta).

Nägime, et selliste permutatsioonide arv on $\frac{1}{s} C_{2s-2}^{s-1}$ (vt.

lk. 77). Pärast esimese $2s$ pileti müümist kassas viiekümnekopikalisi ei ole. Et järjekord liiguks takistusteta, peavad viimased $(k-s)$ v -tähte ja $(k-s)$ r -tähte seetõttu moodustama soodsa permutatsiooni. Kuid selliseid permu-

tatsioone on $\frac{1}{k-s+1} C_{2k-2s}^{k-s}$ (vt. lk. 76). Korrutise reegli järgi saame, et klassis on

$$\frac{1}{s(k-s+1)} C_{2s-2}^{s-1} C_{2k-2s}^{k-s}$$

permutatsiooni. Et aga soodsate permutatsioonide üldarv on $\frac{1}{k+1} C_{2k}^k$, siis saame samasuse

$$\sum_{s=1}^k \frac{k+1}{s(k-s+1)} C_{2s-2}^{s-1} C_{2k-2s}^{k-s} = C_{2k}^k. \quad (21)$$

Kui tähistada

$$\frac{1}{s+1} C_{2s}^s = T_s,$$

siis omandab valem (21) järgmise kuju:

$$T_0 T_{k-1} + T_1 T_{k-2} + \dots + T_{k-1} T_0 = T_k. \quad (22)$$

Veel ühe arvude C_n^m vahelise seose saame järgmiselt. Anname ette arvu l ($1 \leq l \leq m$) ja jaotame kõigi soodsate permutatsioonide hulga klassidesse, lugedes s -ndasse klassi kõik need permutatsioonid, mille esimese l elemendi seas on täpselt s r -tähte. Nende l elemendi hulgas on siis $(l-s)$ v -tähte. Et v -tähti ei saa olla vähem kui r -tähti, siis rahuldab s võrratusi $0 \leq 2s \leq l$.

Leiame permutatsioonide arvu s -ndas klassis. Iga selline permutatsioon jaguneb kaheks osaks: üks koosneb l esimesest tähest, teine viimasest $k+m-l$ tähest. Esimesse ossa kuulub $(l-s)$ v -tähte ja s r -tähte. Et kogu permutatsioon on soodus, siis peab ka tema esimesest l tähest koosnev osa olema soodus. Kuid $(l-s)$ v -tähest ja s r -tähest saab koostada $\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s$ sellist permutatsiooni.

Pärast seda kui permutatsiooni esimene osa on kassast möödunud, jääb kassasse $l-2s$ viiekümnekopikalist. Permutatsiooni teine osa koosneb $(k-l+s)$ v -tähest ja $(m-s)$ r -tähest. Leiame nüüd, mitmel juhul järjekorra see osa liigub takistusteta. Nende juhtude arv saadakse

lk. 77 toodud valemi (17) järgi, milles q asemele tuleb panna $l-2s$, m asemele $m-s$ ja k asemele $k-l+s$. Sellest valemist järeldub, et permutatsioonide teise osa võib valida $C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}$ viisil. Korrutise reegli järgi saame, et permutatsioonide arv s -ndas klassis on

$$\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s [C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}].$$

Et soodsaid permutatsioone k v -tähest ja m r -tähest on kokku $\frac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^m$, siis saame samasuse¹

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{E\left(\frac{l}{2}\right)} \frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s [C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}] = \\ & = \frac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^m. \end{aligned} \quad (23)$$

(Siin C_r^p loetakse $p < 0$ korral võrdseks nulliga.) Lugeja tuletab vaevata teisi analoogilisi seoseid, lähtudes mitmesugustest permutatsioonide klassidesse jaotamise meetoditest.

¹ $E\left(\frac{l}{2}\right)$ abil on tähistatud arvu $\frac{l}{2}$ täisosa.

IV. JAOTUSTE KOMBINATOORIKA

Ülesannetes variatsioonide, permutatsioonide ja kombinatsioonide kohta koostati antud elementidest mitmesuguseid ühendeid ja arvutati, mitu sellist ühendit ühtede või teiste kitsenduste puhul saadakse. Nende elementide saatus, mis pärast ühendi väljavalimist järele jäid, meid peaaegu ei huvitanud. Teistsugused on need ülesanded, mille juures me järgnevalt peatume. Neis jaotatakse elemendid kaheks või enamaks rühmaks ning tuleb leida kõik sellise jaotamise viisid.

Seejuures võivad esineda mitmesugused juhud. Mõnikord etendab olulist osa elementide järjekord rühmades: näiteks kui signalist riputab signaallipud mitmele mastile, siis on tema jaoks tähtis mitte ainult see, missugusele mastile üks või teine lipp satub, vaid ka lippude järjekord mastidel. Teistel juhtudel aga pole elementide järjekorral rühmades mingit osa. Kui doominomängija valib hunnikust kive, on talle ükskõik, missuguses järjekorras need tulevad, tähtis on vaid lõpptulemus.

Ülesanded erinevad ka selle poolest, kas rühmade järjekord on oluline või ei. Doominomängus istuvad mängijad kindlas järjekorras ja tähtis pole mitte ainult see, kuidas kivid jaotusid, vaid ka see, kellele millised kivid tulid. Kui ma panen fotod ühesugustesse ümbrikutesse, et neid sõbrale saata, siis on oluline, kuidas fotod ümbrike vahel jaotuvad, kuid ümbrike eneste järjekord pole sugugi tähtis, sest postil aetakse nad nagunii segi.

Tähtis on ka see, kas me eristame omavahel elemente või rühmi, milleks elemendid jaotuvad. Lõpuks võivad osas ülesannetes mõned rühmad olla tühjad, s. o. need ei sisalda ühtki elementi, teistes pole aga niisugused rühmad lubatud. Vastavalt öeldule tekib terve hulk *kombinatoorseid jaotusülesandeid*.

Doominomäng

Doominomängus jaotavad 4 mängijat omavahel võrdselt 28 kivi. Mitmel viisil saavad nad seda teha?

Kivisid võib jaotada järgmiselt. Paigutame algul kõik 28 kivi mingil viisil ritta. Pärast seda võtab esimene mängija esimesed 7 kivi, teine järgmised 7, kolmas järgmised 7 ja neljas ülejäänud. On selge, et niimoodi võib saada kõik kivide jaotused.

Et kõigi 28 elemendi permutatsioonide arv on $28!$, siis võib näida, et jaotamisviiside üldarv on ka $28!$. Kuid see pole õige: esimesele mängijale on ju täiesti ükskõik, kas ta saab alguses kivi 6:6 või 3:4, talle on tähtis vaid lõpptulemus. Seepärast ei muuda ükski esimese 7 kivi ümberpaigutus asja sisu. Seda ei muuda ka teise 7, kolmanda 7 ja viimase 7 kivi mistahes ümberpaigutus. Korrutise reegli põhjal saame $(7!)^4$ kivide ümberpaigutust, mis ei muuda jaotamise tulemust.

Seega jagunevad kivide $28!$ permutatsiooni rühmadeks, $(7!)^4$ permutatsiooni igas rühmas, kusjuures ühe rühma permutatsioonid annavad kivide ühesuguse jaotuse.

Siit järeldub, et kivide jaotamisviise on $\frac{28!}{(7!)^4}$. See arv on umbes $4,7 \cdot 10^{15}$.

Sama tulemuseni võib jõuda ka teisiti. Esimene mängija peab valima 7 kivi 28 hulgast. Et nende kivide järjekord pole oluline, siis on tal C_{28}^7 valikut. Pärast seda peab teine mängija valima 7 kivi ülejäänud 21 seast. Seda saab teha C_{21}^7 viisil. Kolmas mängija valib 14 kivi seast ja tal on seepärast C_{14}^7 valikuvõimalust. Lõpuks jääb neljandale mängijale C_7^7 , s.o. üksainus valik.

Kombinatsioonide korrutise reegli järgi saame, et võimaluste üldarv on

$$C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = \frac{28!}{21! 7!} \cdot \frac{21!}{14! 7!} \cdot \frac{14!}{7! 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Preferansimängus jaotatakse kolme mängija vahel 32 kaarti, igaühele 10 kaarti, ja pannakse kaks kaarti maast juurdevõtmiseks. Täpselt samuti tõestatakse, et erinevaid jagamisi on siin

$$\frac{32!}{10! 10! 10! 2!} = 2\,753\,294\,408\,504\,640.$$

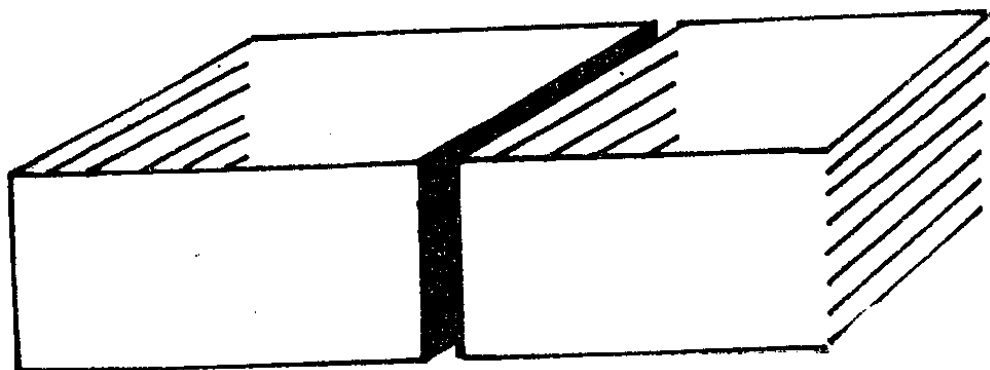
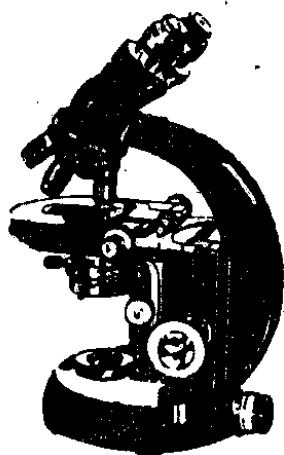
Võib-olla tekib lugejal küsimus, kas tasub üldse kaardimängude uurimiseks jõudu kulutada. Sel puhul tuleme meelde, et just hasartmängude uurimine andis tõuke kombinatorika ja tõenäosusteooria arenguks. Sellised esmaklassilised matemaatikud nagu Pascal, Bernoulli, Euler, Tšebõšev viimistlesid kombinatorika ja tõenäosusteooria ideid ning meetodeid kulli ja kirja, täringu- ja kaardimängu ülesannetel. Paljud mänguteooria ideed kujunesid esialgu välja kaardimängude lihtsaimate mudelite uurimisel (mänguteooria on matemaatika haru, mida majanduses ja sõjaasjanduses laialdaselt rakendatakse).

Kastidesse paigutamine

Doomino- ja preferansiülesanne kuuluvad nende kombinatorikaülesannete hulka, kus käsitletakse esemete paigutamist kastidesse. Nende üldine seade on järgmine:

On antud n erinevat eset ja k kasti. Esimesse kasti tuleb panna n_1 eset, teise n_2 , ..., k -ndasse n_k eset, kus $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Mitmel viisil saab sellist jaotust teha?

Doominoülesandes etendasid kastide osa mängijad ja esemete osa kivid. Üldjuhtudel saame vastuse, arutledes täpselt samuti nagu selleski ülesandes:



esemeid saab kastidesse paigutada

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (1)$$

erineval viisil.

See valem tekkis meil ka eespool niisuguse ülesande lahendamisel, mis esimesel pilgul ei tundu antud ülesandega sugugi sarnane olevat:

on olemas k erinevat tüüpi elementi. Mitu erinevat permutatsiooni saab koostada n_1 esimest tüüpi, n_2 teist tüüpi, ..., n_k k-ndat tüüpi elemendist?

Ka siin andis vastuse valem

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

kus $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ (vt. lk. 35). Et nende kahe ülesande vahelist seost kindlaks teha, nummerdame kõik n kohta, millel meie esemed võivad paikneda. Igale permutatsioonile vastab kohanumbrite jaotus k klassiks. Esimesse klassi satuvad nende kohtade numbrid, millel asuvad esimest tüüpi esemed, teise klassi teist tüüpi esemete kohanumbrid jne. Seega saame üksühese vastavuse kordumistega permutatsioonide ja kohanumbrite «kastidesse» paigutuste vahel. Arusaadavalt osutusid mõlema ülesande lahendusvalemid ühesugusteks.

Lillekimp

Kastidesse paigutamise ülesandes lugesime igasse kasti sattuvate esemete arvu tuntuks (näiteks oli teada kivide arv, mida iga mängija pidi võtma). Enamiku jaotusülesannete puhul neid arve ette ei anta.

Kaks last korjasid 10 karikakart, 15 rukkilille ja 14 meelespealille. Mitmel viisil saavad nad need lilled omavahel jaotada?

On selge, et karikakraid saab jaotada 11 viisil: esimene võib jätta karikakrad võtmata, võtta 1 karikakra, 2 karikakart, ..., kõik 10 karikakart. Täpselt samuti saab rukkililled jaotada 16 viisil ja meelespealilled 15 viisil. Et iga liiki lilli võib jaotada teistest liikidest sõltumatult, siis saame korrutise reegli järgi $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2640$ lillede jaotamise viisi.

Loomulikult on nende jaotamisviiside hulgas ka äärmiselt ebaõiglasid, mille puhul näiteks üks laps ei saa üldse lilli. Lisame seepärast kitsenduse, et kumbki laps peab saama igast liigist vähemalt 3 lille. Siis on karikakarde jaotamiseks vaid viis võimalust: esimene võib võtta endale 3, 4, 5, 6 või 7 õit. Täpselt samuti saab rukkililled jaotada 10 viisil ja meespead 9 viisil. Sel juhul on jaotamisviiside üldarv $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$.

Üldse, kui on olemas n_1 ühte liiki eset, n_2 teist liiki eset, ..., n_k k -ndat liiki eset, siis saab neid kahe inimese vahel jaotada

$$(n_1+1)(n_2+2)\dots(n_k+1) \quad (2)$$

viisil. Erijuhul, kui kõik esemed on erinevad ja nende arv on k , siis on $n_1=n_2=\dots=n_k=1$ ja seepärast on 2^k jaotamisviisi.

Kui aga seada lisakitsendus, et iga jaotusest osavõtja peab saama mitte vähem kui s_1 esimest liiki eset, s_2 teist liiki eset, ..., s_k k -ndat liiki eset, siis avaldub jaotamisviiside üldarv valemiga

$$(n_1-2s_1+1)(n_2-2s_2+1)\dots(n_k-2s_k+1). \quad (3)$$

Me jätame nende väidete tõestamise lugeja hooleks.

Ülesanne jagajate arvu kohta

Valem (2) võimaldab lahendada järgmise arvuteooria ülesande: leida, mitu jagajat on naturaalarvul N . Selleks lahutame arvu N algteguriteks: $N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}$, kus $p_1, p_2, \dots, p_k$ on erinevad algarvud. Näiteks $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Arvu N kaheks teguriks lahutamisel ($N=N_1N_2$) jaotuvad algtegurid N_1 ja N_2 vahel. Kui tegur p_j kuulub arvu N_1 m_j korda, kus $j=1, \dots, k$, siis on lahutusel kuju

$$N=(p_1^{m_1}\dots p_k^{m_k})(p_1^{n_1-m_1}\dots p_k^{n_k-m_k}).$$

Seega taandub arvu N kaheks teguriks lahutamine n_1 esimest liiki, n_2 teist liiki, ..., n_k k -ndat liiki eseme jaotamisele kahte ossa. Valem (2) näitab, et seda saab teha $(n_1+1)\dots(n_k+1)$ viisil. Seega on naturaalarvu $N=p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}$ jagajate arv $(n_1+1)\dots(n_k+1)$. Seda arvu tähistatakse $\tau(N)$ abil.

Õunte korjamine

Kolm last korjasid õunapuult 40 õuna. Mitmel viisil nad saavad neid omavahel jaotada, kui kõiki õunu loetakse ühesugusteks (s.o. meid huvitab vaid see, mitu õuna igaüks saab, mitte aga see, millised õunad ta saab)?

Ülesande lahendamiseks toimime nii: lisame korjatud õuntele 2 ühesugust pirni ning seame siis 40 õuna ja 2 pirni kõikvõimalikel viisidel ritta. Kordumistega permutatsioonide jaoks kehtiva valemi põhjal on selliseid permutatsioone

$$P(40, 2) = C_{42}^2 = \frac{42!}{40! 2!} = 861.$$

Kuid igale permutatsioonile vastab oma õunte jagamise viis. Esimesele lapsele anname kõik õunad, alates esimesest kuni esimese pirnini, teisele kõik õunad esimese ja teise pirni vahelt, kolmandale õunad teise pirni järelt. On selge, et erinevatele permutatsioonidele vastavad seejuures erinevad jaotamisviisid. Seega on jaotamisviiside üldarv 861. Võib juhtuda, et üks (või isegi kaks) jaotusest osavõtjat ei saa midagi. Kui näiteks üks pirn satub permutatsiooni algusse, siis jääb esimene laps õuntest ilma, kui aga lõppu, siis jääb ilma kolmas. Kui mõlemad pirnid asetsevad kõrvuti, siis ei saa teine midagi. Tehke ise selgeks, mis juhtub, kui mõlemad pirnid satuvad algusse või lõppu.

Täiesti samamoodi tõestatakse, et n ühesugust eset saab k isiku vahel jaotada

$$P(n, k-1) = C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1} \quad (4)$$

viisil.

Oletame nüüd, et jaotamist tahetakse õiglasemaks muuta ja on otsustatud, et iga jaotusest osavõtja saab vähemalt r eset. Sel juhul tuleb alguses anda igaühele r eset. Pärast seda jääb $n - kr$ eset, mida võib jaotada juba suvalisel viisil. Kuid nagu nägime, saab seda teha

$$C_{n-kr+k-1}^{k-1} = C_{n-k(r-1)-1}^{k-1} \text{ viisil.}$$

Erijuhul, kui igaüks k osavõtjast peab saama vähemalt ühe eseme, lahendub ülesanne C_{n-1}^{k-1} viisil.

Viimase tulemuseni võib jõuda ka teisiti. Paigutame

antud n eset ritta. Siis eraldab neid $n-1$ vahet. Kui nende seast mistahes $k-1$ vahesse asetada eraldavad vaheseinad, siis jaotuvad kõik esemed k mittetühjaks rühmaks. Seejärel antakse esimene rühm esimesele isikule, teine rühm teisele jne. Et $k-1$ vaheseina saab $n-1$ vahesse paigutada C_{n-1}^{k-1} viisil, siis on jaotamisviise C_{n-1}^{k-1} .

Seente korjamine

Kui jaotatakse eri liiki esemeid, siis tuleb leida jaotamisviiside arv iga liigi jaoks ja saadud arvud korrutada. Lahendame näiteks järgmise ülesande.

Mitmel viisil saab 10 kivipuravikku, 15 kasepuravikku ja 8 haavapuravikku jaotada 4 lapse vahel?

Eelmise punkti tulemusi kasutades saame, et vastusel on kuju

$$C_{13}^3 C_{18}^3 C_{11}^3 = 41\,771\,040.$$

Kui aga iga laps peab saama vähemalt ühe seene igast liigist, siis on vastuseks

$$C_9^3 C_{14}^3 C_7^3 = 1\,070\,160.$$

Juhul kui k isiku vahel jaotatakse n erinevat eset ilma kitsendusteta, saab iga eseme kätte anda k viisil (andes ta ühele jaotusest osavõtjale). Seepärast on lahendite arv k^n .

Näiteks 8 erinevat kooki saab 5 inimese vahel jaotada $5^8 = 390\,625$ viisil.

Fotode saatmine

Ma tahan oma sõbrale saata 8 erinevat fotot. Mitmel viisil saan ma seda teha, kui kasutan 5 erinevat ümbrikku?

See ülesanne sarnaneb eelmise punkti lõpus lahendatuga ja seetõttu näib, et vastus on $5^8 = 390\,625$. Kuid tühje ümbrikke saata ei tohi, seepärast seame uue kitsenduse: ükski ümbrik ei või tühi olla. Et seda kitsendust arvestada, kasutame juurde- ja mahaarvamise valemite (vastus C_{n-1}^{k-1} pole õige, sest fotod on erinevad).

Leiame algul, mitme jaotamisviisi korral on antud r ümbrikku tühjad (ülejäanud aga võivad olla nii tühjad kui ka fotosid sisaldada). Sel juhul pannakse fotod $5-r$ ümbrikku kitsendusteta ja eespool tõestatu põhjal on selliste jaotuste arv $(5-r)^8$. Kuid r ümbrikku saab viie seast valida C_5^r viisil. Siit järeldub juurde- ja mahaarvamise valemit kasutades, et ükski ümbrik pole tühi

$$5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8 = 126\,020$$

jaotamisviisi korral.

Täiesti analoogiliselt tõestatakse, et kui saata n erinevat fotot k erinevas ümbrikus, kusjuures ükski ümbrik pole tühi, siis avaldub jaotamisviiside arv valemiga

$$k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot 1^n. \quad (5)$$

Jätame lugejale uurimiseks järgmise ülesande:

On olemas n_1 esimest liiki, n_2 teist liiki, ..., n_s s-ndat liiki eset. Mitmel viisil saab need jaotada k isiku vahel nii, et igaüks saaks vähemalt ühe eseme?

Vastus on niisugune:

$$\begin{aligned} & C_{n_1+k-1}^{k-1} C_{n_2+k-1}^{k-1} \dots C_{n_s+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2} C_{n_2+k-2}^{k-2} \dots \\ & \dots C_{n_s+k-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3} C_{n_2+k-3}^{k-3} \dots C_{n_s+k-3}^{k-3} - \dots \\ & \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Näiteks kui 8 õuna, 10 pirni ja 7 apelsini jaotatakse 4 lapse vahel ja igaüks peab saama vähemalt ühe puuvilja, siis on jaotamine võimalik

$$C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 - C_4^1 C_{10}^2 C_{12}^2 C_9^2 + C_4^2 C_9^1 C_{11}^1 C_8^1 - C_4^3 = 5\,464\,800$$

viisil.

Lipud mastidel

Seni me ei arvestanud elementide paiknemise järjekorda üksikutes rühmades. Mõningate ülesannete puhul tuleb seda aga teha.

On olemas n erinevat signaallippu ja k masti nende heiskamiseks. Signaali tähendus sõltub lippude heiska-

mise järjekorrast. Mitmel viisil saab lippe heisata, kui kõik lipud tuleb ära kasutada, aga mõned mastid võivad tühjaks jääda?

Iga lippude heiskamisviisi võib saada kahes etapis. Esimesel etapil paigutame n lippu kõikvõimalikel viisidel omavahel ümber. Selleks on $n!$ võimalust. Seejärel võtame mingi kindla viisi n ühesuguse lipu jaotamiseks k masti vahel (meenutame, et nende võimaluste arv on C_{n+k-1}^{k-1}). Olgu näiteks esimesse masti vaja heisata n_1 , teise n_2 , ..., k -ndasse n_k lippu ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$). Võtame antud permutatsiooni n_1 esimest lippu ja heiskame nad saadud järjekorras esimesse masti, järgmised n_2 lippu teise masti jne. On selge, et kui ära kasutada kõik n lipu permutatsioonid ja kõik n ühesuguse lipu jaotamisviisid k masti vahel, siis saame kõik püstitatud ülesande lahendamisviisid. Korrutise reegli järgi leiame, et lippude heiskamisviise on

$$n! C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n. \quad (7)$$

Üldiselt, kui on olemas n erinevat eset, siis saab nad k erinevasse kasti paigutada A_{n+k-1}^n viisil (arvestades elementide järjekorda kastides).

Sama tulemuseni võib jõuda teisel teel. Lisame jaotatavale n esemele $k-1$ ühesugust kera ja vaatleme saadud $n+k-1$ eseme kõiki võimalikke permutatsioone. Iga permutatsioon määrab ühe jaotamisviisi. Esimesse kasti paneme kõik need esemed, mis seisavad permutatsioonis kuni esimese kerani (kui lisatud kera on permutatsioonis esikohal, siis jääb esimene kast tühjaks). Seejärel paneme teise kasti kõik esemed, mis on esimese ja teise kera vahel, ..., k -ndasse kasti esemed, mis tulevad pärast $(k-1)$ -st kera. On selge, et seejuures saadakse kõik nõutud omadustega jaotamisviisid. Kuid n erinevast esemest ja $k-1$ ühesugusest kerast võib koostada

$$P(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ korda}}, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{1! \dots 1! (k-1)!} = A_{n+k-1}^n$$

permutatsiooni.

Analoogiliselt lahendatakse ülesanne juhul, kui igas mastis peab rippuma vähemalt üks lipp (ehk igas kastis

olema vähemalt üks ese). Lk. 88 tuletatud valemist saame, et sel juhul on meil $n!C_{n-1}^{k-1}$ jaotamisviisi. Ka selle tulemuse võib saada, kui valida jaotuspunktid $n-1$ vahekoha seast.

Signaalide üldarv

Seni eeldasime, et signaali edasiandmiseks tuleb kõik lipud ära kasutada. Kuid võib olla ka signaale, mille andmisel kasutatakse vaid osa lippudest, kusjuures on lubatud ka tühjad mastid. *Leiame, kui palju signaale saab edasi anda k masti heisatava n signaallipu abil.*

Jaotame need signaalid kasutatavate lippude arvu põhjal klassidesse.

Valemi (7) järgi saab s lipu abil anda A_{s+k-1}^s signaali (mastide arv on k). Kuid s lipu saab n lipu seast valida C_n^s viisil. Seepärast on s -ndas klassis $C_n^s A_{s+k-1}^s$ signaali. Järelikult annab signaalide üldarvu valem

$$C_n^0 A_{k-1}^0 + C_n^1 A_k^1 + C_n^2 A_{k+1}^2 + \dots + C_n^n A_{n+k-1}^n. \quad (8)$$

Näiteks saab 6 erineva lipu ja 3 masti abil edasi anda

$$1 + C_6^1 A_3^1 + C_6^2 A_4^2 + C_6^3 A_5^3 + C_6^4 A_6^4 + C_6^5 A_7^5 + C_6^6 A_8^6 = \\ = 42\,079$$

signaali.

Kui me aga ei luba tühje maste, siis saame valemi (8) asemel

$$C_n^k C_{k-1}^{k-1} k! + C_n^{k+1} C_n^{k-1} (k+1)! + C_n^{k+2} C_{k+1}^{k-1} (k+2)! + \dots \\ \dots + C_n^n C_{n-1}^{k-1} n! \quad (9)$$

signaliseerimisviisi.

Erinevad statistikad

Esemete kastidesse paigutamise ülesanded on väga tähtsad statistilise füüsika jaoks. See teadus uurib, kuidas jaotuvad osakesed oma füüsikaliste omaduste järgi: näiteks kui suurel osal antud gaasi molekulidest on kindlal

temperatuuril üks või teine kiirus. Seejuures jaotatakse kõigi võimalike olekute hulk elementaarrakukesteks (faasi-olekuteks); nii et rakukeste arv k on suur ja iga osake n osakese seast satub ühte rakukesse.

Millisele statistikale osakesed alluvad, sõltub nende liigist. Maxwelli ja Boltzmanni loodud klassikalises statistilises füüsikas loetakse osakesi omavahel eristatavateks. Niisugusele statistikale alluvad näiteks gaasi molekulid. Me teame, et n erinevat osakest saab k kastikesse paigutada k^n viisil. Kui kõigil nendel k^n võimalusel on antud energia puhul võrdne tõenäosus, siis räägitakse *Maxwelli-Boltzmanni statistikast*.

Selgus, et mitte kõik füüsikalised objektid ei allu sellele statistikale. Footonid, aatomituumad ja paarisarvu elementaarosakesi sisaldavad aatomid alluvad teisele statistikale, mille töötasid välja Einstein ja india teadlane Bose. *Bose-Einsteini* statistikas loetakse osakesi omavahel eristamatuteks. Seepärast on seal oluline, mitu osakest ühte või teise rakukesse satub, mitte aga see, millised osakesed sinna just juhtuvad. Antud ülesanne sarnaneb õunte jaotamise ülesandega (vt. lk. 88). Me teame juba, et sellise lähenemisviisi korral saadakse $C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$ erinevat jaotumisviisi. Bose-Einsteini statistikas peetakse kõigi nende jaotumisviiside tõenäosusi võrdseks.

Kuid paljude osakeste, näiteks elektronide, prootonite ja neutronite korral ei kõlba ka Bose-Einsteini statistika. Nimetatud osakesi ei tohi üheski rakukeses olla üle ühe, kusjuures seda tingimust rahuldavatel erinevatel jaotustel on võrdne tõenäosus. Sel juhul saab olla C_h^n erinevat jaotust. Niisugust statistikat nimetatakse *Diraci-Fermi statistikaks*.

Arvude lahutamine liidetavaiks

Enamikus vaadeldud ülesannetest olid jaotatavad esemed erinevad. Nüüd asume käsitlema ülesandeid, milles kõik jaotatavad esemed on täiesti ühesugused. Sel juhul pole vaja rääkida mitte esemete jaotamisest, vaid naturaalarvude *liidetavateks* lahutamisest (liidetavad peavad muidugi samuti olema naturaalarvud).

Siin tekib palju mitmesuguseid ülesandeid. Osas neist arvestatakse liidetavate järjekorda, osas mitte. Võib vaa-

delda lahutusi ainult paaris- või ainult paaritu arvuks liidetavateks, ainult erinevateks või suvalisteks liidetavateks jne. Lahutusülesannete lahendamisel kasutatakse tavaliselt ülesande taandamist väiksemate arvude või vähema arvu liidetavatega lahutustele.

Panderolli saatmine

*Panderolli saatmise eest tuleb maksta 18 kopikat. Mitmel viisil saab selle raha tasuda 4-, 6- ja 10-kopikaste markidega, kui on oluline ka markide järjekord?*¹

Tähistame $f(N)$ abil arvu, mis näitab, mitmel erineval viisil saab ümbrikule kleepida 4-, 6- ja 10-kopikasi marke, kokku N kopika eest. Siis kehtib $f(N)$ jaoks järgmine seos:

$$f(N) = f(N-4) + f(N-6) + f(N-10). \quad (10)$$

Tõepoolest, olgu mingil viisil kleebitud N kopika eest marke ning neist viimasena 4-kopikane mark. Siis maksavad kõik ülejäänud margid $N-4$ kop.

Vastupidi, kui lisame 4-kopikase margi suvalisele $(N-4)$ -kopikase väärtusega kombinatsioonile, saame N -kopikase hinnaga markide kombinatsiooni. Seejuures saadakse erinevatest $(N-4)$ -kopikastest kombinatsioonidest erinevaid N -kopikasi markide kombinatsioone. Seega leidub $f(N-4)$ otsitavat kombinatsiooni, kus viimasena kleebiti 4-kopikane mark.

Täpselt samuti tõestatakse, et 6-kopikase margiga lõpeb $f(N-6)$ ja 10-kopikase margiga $f(N-10)$ kombinatsiooni. Et iga kombinatsioon lõpeb ühe nimetatud tüüpi margiga, siis saame summa reegli põhjal seose (10).

Valem (10) võimaldab markide kleepimise N kopika eest taandada ülesandele, kus marke tuleb kleepida väiksema summa eest. Kuid väikeste N väärtuste korral on ülesannet kerge vahetult lahendada. Lihtne arvutus näitab, et

$$\begin{aligned} f(0) &= 1; & f(1) &= f(2) = f(3) = 0; & f(4) &= 1; & f(5) &= 0; \\ f(6) &= 1; & f(7) &= 0; & f(8) &= 1; & f(9) &= 0. \end{aligned}$$

Võrdus $f(0)=1$ tähendab, et summa 0 kopikat saab tasuda ühelainsal viisil: pole üldse tarvis marke kleepida. Summasid 1, 2, 3, 5, 7 ja 9 kopikat pole aga 4-, 6- ja 10-kopikaste markide abil üldse võimalik saada. Kasutades

¹ Iga liiki markide tagavara on piiramatult.

$f(N)$ väärtusi $N=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ korral, on kerge leida $f(10)$:

$$f(10) = f(6) + f(4) + f(0) = 3.$$

Seejärel leiame

$$f(11) = f(7) + f(5) + f(1) = 0; \quad f(12) = f(8) + f(6) + f(2) = 2$$

jne. Lõpuks saame väärtuse $f(18) = 8$. Seega saab marke kleepida kaheksal viisil. Need kleepimisviisid on järgmised:

$$\begin{array}{ccccccc} 10, 4, 4; & 4, 10, 4; & 4, 4, 10; & 6, 4, 4, 4; \\ 4, 6, 4, 4; & 4, 4, 6, 4; & 4, 4, 4, 6; & 6, 6, 6. \end{array}$$

Märgime, et $f(N)$ väärtused $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ korral võib saada teisiti, vahetu kontrollita. Asi on selles, et $N < 0$ korral on $f(N) = 0$, sest negatiivset summat ei saa tasuda, kui ümbrikule kleepida mittenegatiivne arv marke. Nagu nägime, on $f(0) = 1$. Seepärast

$$f(1) = f(-3) + f(-5) + f(-9) = 0.$$

Täpselt samuti saame väärtused $f(2) = 0$, $f(3) = 0$. $N=4$ puhul on aga

$$f(4) = f(0) + f(-2) + f(-6) = 1.$$

Üldine margikleepimise ülesanne

Käsitletud ülesanne on erijuht järgmisest üldisest ülesandest.

On olemas margid väärtusega $n_1, n_2, \dots, n_k$ kopikat.¹ Mitmel viisil saab nende abil tasuda summa N kopikat, kui oluline on ka markide järjekord?

Sel juhul kehtib tasumisviiside arvu $f(N)$ jaoks seos

$$f(N) = f(N - n_1) + f(N - n_2) + \dots + f(N - n_k). \quad (11)$$

Seejuures $f(N) = 0$, kui $N < 0$ ja $f(0) = 1$. Seose (11) abil saab $f(N)$ leida iga N jaoks, arvutades üksteise järel $f(1), f(2), \dots, f(N-1)$.

Vaatleme selle ülesande erijuhtu, kui $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k$. Saame arvu N kõikvõimalikud lahutused liide-

¹ Kõik arvud $n_1, \dots, n_k$ on erinevad, markide tagavara aga piiramatult.

tavateks 1, 2, ..., k , kusjuures liidetavate järjekorra poolest erinevaid lahutusi loetakse erinevateks. Tähistame nende lahutuste arvu $\varphi(k; N)$ abil.¹ Seosest (11) järeldeb

$$\varphi(k; N) = \varphi(k; N-1) + \varphi(k; N-2) + \dots + \varphi(k; N-k). \quad (12)$$

Seejuures

$$\varphi(k; 0) = 1 \text{ ja } \varphi(k; N) = 0, \text{ kui } N < 0.$$

Suuruse $\varphi(k; N)$ arvutamist saab lihtsustada, kui arvestada, et

$$\varphi(k; N-1) = \varphi(k; N-2) + \dots + \varphi(k; N-k) + \varphi(k; N-k-1),$$

ja seepärast

$$\varphi(k; N) = 2\varphi(k; N-1) - \varphi(k; N-k-1). \quad (13)$$

On selge, et liidetavad ei saa olla suuremad kui N . Seepärast võrdub $\varphi(N; N)$ arvu N kõigi lahutuste arvuga naturaalarvulisteks liidetavateks («lahutus» $N=N$ kaasa arvatud). Kui liidetavaid on s , siis saame C_{N-1}^{s-1} lahutust (vt. lk. 88). Seepärast

$$\varphi(N; N) = C_{N-1}^0 + C_{N-1}^1 + \dots + C_{N-1}^{N-1} = 2^{N-1}.$$

Seega näitasime, et naturaalarvu N saab liidetavateks lahutada 2^{N-1} viisil. Meenutame, et seejuures arvestatakse ka liidetavate järjekorda.

Näiteks arvu 5 saab liidetavateks lahutada $2^{5-1} = 16$ viisil:

$$\begin{array}{lll} 5=5; & 5=3+1+1; & 5=2+1+1+1; \\ 5=4+1; & 5=1+3+1; & 5=1+2+1+1; \\ 5=1+4; & 5=1+1+3; & 5=1+1+2+1; \\ 5=2+3; & 5=2+2+1; & 5=1+1+1+2; \\ 5=3+2; & 5=2+1+2; & 5=1+1+1+1+1. \\ 5=1+2+2; \end{array}$$

¹ Siin ja edaspidi anname esikohal liidetavate arvu, teisel kohal liidetavateks lahutatava arvu, viimasel aga kitsendused liidetavate suurustele.

Äsja käsitletuga sarnast ülesannet tuleb lahendada informatsiooniteoorias. Oletame, et teade antakse edasi mitut erinevat tüüpi signaalide abil. Esimest tüüpi signaali pikkus olgu t_1 , teist tüüpi signaalil t_2 , ..., k -ndat tüüpi signaalil t_k ajaühikut. *Mitu erinevat teadet saab nende signaalide abil edasi anda T ajaühiku jooksul?* Seejuures arvestatakse ainult «maksimaalseid» teateid (s.o. niisuguseid, millele ei saa ettenähtud aega ületamata lisada ühtki signaali).

Tähistame $f(T)$ abil nende teadete arvu, mida saab edasi anda T ajaühiku jooksul. Arutledes täpselt samuti nagu markide-ülesandes, saame $f(T)$ jaoks seose

$$f(T) = f(T - t_1) + f(T - t_2) + \dots + f(T - t_k). \quad (14)$$

Seejuures on jälle $f(T) = 0$, kui $T < 0$ ja $f(0) = 1$.

Abituriendiprobleem

Kõrgemasse õppeasutusse astuja peab tegema 4 eksamit. Ta arvab, et sissesaamiseks piisab 17 punktist. Mitmel viisil võib ta eksamid sooritada, et kindlasti sisse saada?

Vaadeldav ülesanne sarnaneb markide-ülesandega, kuid erineb viimasest selle poolest, et siin on antud nende «markide» arv, millega tuleb «tasuda 17 punkti». Iga edukalt sooritatud eksami eest saab sisseastuja 3, 4 või 5 punkti. Tähistame $f(k; N)$ abil arvu, mis näitab, mitmel viisil on võimalik saada k eksamist N punkti. Siis kehtib seos $f(k; N) = F(k - 1; N - 3) + F(k - 1; N - 4) + \dots + F(k - 1; N - 5)$, mille tuletamine on täiesti analoogiline valemiga (11) saamisega lk. 95.

Siit saame

$$\begin{aligned} F(4; 17) &= F(3; 14) + F(3; 13) + F(3; 12) = \\ &= F(2; 11) + 2F(2; 10) + 3F(2; 9) + 2F(2; 8) + F(2; 7) = \\ &= 2 + 3F(2; 9) + 2F(2; 8) + F(2; 7), \end{aligned}$$

sest kahe eksamiga ei ole võimalik koguda 11 punkti ja 10 punkti võib koguda ka ainult siis, kui mõlemal eksamil saadakse hinne «5».

Arvutust jätkates saame

$$\begin{aligned} F(4; 17) &= 2 + 3F(1; 6) + 5F(1; 5) + 6F(1; 4) + \\ &+ 3F(1; 3) + F(1; 2). \end{aligned}$$

Kuid $F(1; 6) = F(1; 2) = 0^1$ ja $F(1; 5) = F(1; 3) = 1$. Seejärel $F(4; 17) = 16$. Täpselt samuti leiame, et

$$F(4; 18) = 10, \quad F(4; 19) = 4, \quad F(4; 20) = 1.$$

Kokku saame $16 + 10 + 4 + 1 = 31$ eksamite eduka sooritamise viisi.

Sama tulemuseni võib jõuda teisiti. On kerge kontrollida, et 17 punkti võib saada vaid kahel oluliselt erineval viisil: kas saades 2 viit, 1 nelja ja 1 kolme või pälvides 1 viie ja 3 nelja. Need hinded võivad ainete vahel jaotuda mistahes viisil. Et

$$P(2, 1, 1) + P(1, 3) = \frac{4!}{2! 1! 1!} + \frac{4!}{3! 1!} = 16,$$

siis on 17 punkti võimalik saada 16 viisil. Täpselt samuti arvutatakse 18, 19 ja 20 punkti saamisviiside arv.

Üldiselt, olgu $F(m; N)$ arvu N lahutuste arv m liidetavaks, kus iga liidetav on võetud arvude $n_1, n_2, \dots, n_k$ hulgast. Siis kehtib arvu $F(m; N)$ jaoks seos

$$F(m; N) = F(m-1; N-n_1) + \dots + F(m-1; N-n_k), \quad (15)$$

mis tuletatakse täpselt samuti nagu seos (11). Me jätame selle tuletamise lugejale.

Erijuhul; kui $n_1=1, n_2=2, \dots, n_k=k$, saame arvu N lahutused m liidetavaks, millest igaüks on võrdne ühega arvudest $1, 2, \dots, k$. Tähistame nende lahutuste arvu $F(m; N; k)$ abil. Siis saame $F(m; N; k)$ jaoks seose

$$F(m; N; k) = F(m-1; N-1; k) + \dots + F(m-1; N-k; k). \quad (16)$$

Sellest valemist järeldub nagu lk. 96, et

$$F(m; N; k) = F(m; N-1; k) + F(m-1; N-1; k) - F(m-1; N-k-1; k). \quad (17)$$

Siirdume nüüd selliste jaotusülesannete juurde, kus ainult liidetavate järjekorra poolest erinevad lahutused loetakse ühesugusteks.

¹ Kuut punkti ühel eksamil saada pole võimalik, kahega aga instituuti vastu ei võeta.

Raha maksmine

Rahakotis on 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20-kopikased mündid, igaühte üks. Mitmel viisil saab nende rahadega tasuda 73-kopikase ostu eest?

Selles ülesandes pole rahade järjekord oluline: tähtis on vaid see, milliseid münte maksmisel kasutatakse. Võtame tarvitusele järgmise tähistuse: märgime

$$F(n_1, n_2, \dots, n_m; N)$$

abil N kopika tasumisviiside arvu n_1 -, n_2 -, ..., n_m -kopikaste müntide abil, kus iga väärtusega münne võetakse kõige rohkem üks. Jaotame kõik maksmisviisid kahte klassi sõltuvalt sellest, kas n_m -kopikalist kasutatakse või mitte. Kui seda kasutatakse, siis jääb üle tasuda $N - n_m$ kopikat, n_1 -, n_2 -, ..., n_{m-1} -kopikaste müntide abil. Seda saab aga teha $F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N - n_m)$ viisil. Kui n_m -kopikast raha ei kasutata, siis tuleb kogu summa N kopikat maksta n_1 -, n_2 -, ..., n_{m-1} -kopikaste müntide abil. Kuid seda saab teha $F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N)$ viisil.

Siit järeldub, et kehtib seos

$$F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) = F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N - n_m) + F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N). \quad (18)$$



See valem võimaldab taandada m mündi seast valimise ülesande valimisele $m - 1$ mündi hulgast. Arutlust korra-tes taandame ülesande valimisele $m - 2$ mündi seast jne. kuni jõuame kas nulliga võrdse summa tasumise või ühe mündi seast valimise ülesandeni. Mõlemad ülesanded lahenevad üheselt. Seejuures heidetakse lahenduse käigus paljud liidetavad kõrvale. Kui $n_1 + n_2 + \dots + n_m < N$, siis

$$F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) = 0,$$

sest rahadest ei jätku ostu eest tasumiseks. Peale selle, kui $n_m > N$, siis asendatakse seos (18) valemiga

$$F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) = F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N),$$

sest n_m -kopikane raha ei saa maksmisel esineda.

Kasutame kirjeldatud meetodit meie ülesande lahendamisel. Seosest (11) tuletame algul, et

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) &= \\ &= F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) + \\ &+ F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = \\ &= F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23), \end{aligned}$$

sest $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 + 20 < 73$ ja seepärast

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = 0.$$

Edasi saame:

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) &= F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + \\ &+ F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23). \end{aligned}$$

Kuid

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) &= F(1, 2, 3; 3) = F(1, 2; 0) + \\ &+ F(1, 2; 3) = 1 + F(1; 3) + F(1; 1) = 2. \end{aligned}$$

Arvutame teise liidetava

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) &= F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + \\ &+ F(1, 2, 3, 5, 10; 23) = F(1, 2, 3, 5, 10; 8), \end{aligned}$$

sest $1 + 2 + 3 + 5 + 10 < 23$. Kuid $F(1, 2, 3, 5; 8) = F(1, 2, 3; 3) = 2$.

Lõpuks saame

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4.$$

Seega saab nõutava summa maksta 4 viisil, nimelt 50, 20 ja 3 kopikat, 50, 20, 2 ja 1 kopikat; 50, 15, 5 ja 3 kopikat ja viimaks 50, 15, 5, 2 ja 1 kopikat.

Kompvekkide ostmine

Kaupluses müüakse mitut sorti kompvekke: 3 sorti hinnaga 2 kopikat tükk ja 2 sorti hinnaga 3 kopikat tükk. Mitmel viisil saab osta kompvekke 8 kopika eest, kui ühestki kompvekiliigist ei võeta üle ühe?

Ülesande lahenduse saame järgmistest seostest:

$$\begin{aligned} F(2, 2, 2, 3, 3; 8) &= F(2, 2, 2, 3; 5) + F(2, 2, 2, 3; 8) = \\ &= F(2, 2, 2; 2) + 2F(2, 2, 2; 5) + F(2, 2, 2; 8) = \\ &= F(2, 2, 2; 2) = F(2, 2; 0) + F(2, 2; 2) = \\ &= 1 + F(2; 0) + F(2; 2) = 3. \end{aligned}$$

Seega saab kompvekke osta 3 viisil: võib osta ühe kompveki kummastki 3-kopikasest sordist ja lisaks ükskõik millise 2-kopikase kompveki.

Näib, et niisama palju lahendeid on ka järgmisel ülesandel.

Rahakotis on kolm 2-kopikalist ja kaks 3-kopikalist. Mitmel viisil saab nende rahadega maksta 8 kopikat?

See sõltub kotis leiduvatest müntidest. Kui lugeda 2-kopikalised ja samuti 3-kopikalised eristatavateks, siis ühtib ülesanne eespool käsitletuga ja tasuda saab 3 viisil. Kui aga kõik 2-kopikalised on eristamatud, siis jääb üksainus maksmisviis: kaks 3-kopikalist ja üks 2-kopikaline.

Seega on maksmisülesanded erineva iseloomuga vastavalt sellele, kas ühe ja sama väärtusega mündid on eristatavad või mitte. Eespool käsitletud meetod kõlbab vaid juhul, kui kõik mündid loetakse eristatavateks sõltumatult sellest, kas nad on ühesuguse või erineva väärtusega. Näitame nüüd, kuidas ülesannet lahendada juhul, kui sama väärtusega mündid loetakse eristamatuteks.

Rahakotis on kümme 2-kopikalist ja viis 3-kopikalist. Mitmel viisil saab nende rahadega tasuda 22-kopikase summa, kui sama väärtusega mündid lugeda eristamatuteks?

Tähistame ülesande lahendite arvu $\Phi(10 \cdot 2, 5 \cdot 3; 22)$ abil ($10 \cdot 2$ tähendab, et meil on kümme 2-kopikalist, $5 \cdot 3$ aga, et on viis 3-kopikalist). Jaotame kõik ülesande lahendamisviisid klassidesse sõltuvalt sellest, mitut kolmekopikalist kasutati. Kui näiteks kasutati kahte sellist raha, siis jääb maksta 16 kopikat kahekopikaliste abil, kui aga kasutati ära kõik 5 münti, siis jääb tasuda vaid 7 kopikat. Kui aga kolmekopikalisi üldse ei kasutatud, siis tuleb 22

kopikat tasuda ainult kahekopikalistega. Seega kehtib võrdus

$$\begin{aligned}\Phi(10 \cdot 2, 5 \cdot 3; 22) = & \Phi(10 \cdot 2; 22) + \Phi(10 \cdot 2; 19) + \\ & \Phi(10 \cdot 2; 16) + \Phi(10 \cdot 2; 13) + \Phi(10 \cdot 2; 10) + \\ & + \Phi(10 \cdot 2; 7).\end{aligned}\quad (19)$$

Jätkata pole vaja, sest meil on vaid viis 3-kopikalist. On selge, et kümne 2-kopikalise abil on võimatu tasuda 22-kopikast summat. Seepärast $\Phi(10 \cdot 2; 22) = 0$. Edasi, kahekopikaste müntidega pole võimalik tasuda paaritu-arvulist summat, paarisarvulise summa saab aga maksta ühelainsal viisil. Seepärast järeldub valemist (19), et

$$\Phi(10 \cdot 2, 5 \cdot 3; 22) = 2.$$

On ainult 2 maksmisviisi:

$$22 = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3.$$

Kuidas kümnekopikalist peeneks vahetada?

Lugejal tuleb arvatavasti iga päev mitu korda 10-kopikalisi peeneks vahetada: bussis sõitmiseks on vaja 5-kopikalisi, automaattelefoni kasutamiseks kahekopikalisi, et aga juua klaas gaseeritud vett siirupiga, vajame kolmekopikalist. Tekib küsimus,

mitmel viisil saab 10-kopikalise vahetada 1-, 2-, 3- ja 5-kopikalisteks?

See ülesanne sarnaneb eelmise punkti lõpus lahendatuga, ainult nüüd pole erineva väärtusega müntide arv piiratud. Seepärast tähistame lahendite arvu nii: $\Phi(1, 2, 3, 5; 10)$. Arutledes täpselt samuti nagu eelmises punktis, saame seose

$$\begin{aligned}\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = & \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3; 5) + \\ & + \Phi(1, 2, 3; 0)\end{aligned}\quad (20)$$

(kõik vahetamisviisid on jaotatud klassidesse vastavalt neis esinevate viiekopikaliste arvule). On selge, et $\Phi(1, 2, 3; 0) = 1$, s.t. 0 kopikat saab tasuda ühelainsal viisil.

Et arvutada $\Phi(1, 2, 3; 5)$, jaotame kõik 5-kopikase raha vahetamisviisid 1-, 2- ja 3-kopikaliste vastu klassidesse vastavalt sellele, mitu 3-kopikalist võetakse. Saame

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1, 2; 5) + \Phi(1, 2; 2)$$

(esimene liidetav vastab juhule, kus ei võeta ühtki 3-kopikalist, teine aga juhule, kus võetakse üks selline münt).

Arvutust jätkates saame

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1; 5) + \Phi(1; 3) + \Phi(1; 1) + \Phi(1; 2) + \Phi(1; 0).$$

Kõik need liidetavad võrduvad ühega, sest iga summa saab 1-kopikaliste abil tasuda ühelainsal viisil. Seega $\Phi(1, 2, 3; 5) = 5$. Täpselt samuti arvutame, et $\Phi(1, 2, 3; 10) = 14$. Kokku saame $14 + 5 + 1 = 20$ vahetamisviisi.

Valemi (20) asemel oleks alguses võinud võtta ka seose

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3, 5; 5).$$

See näitab, et vahetamisviisid jaotuvad sellisteks, kus ei kasutata ühtki 5-kopikalist, ja niisugusteks, kus on kasutatud vähemalt ühte 5-kopikalist.

Üldse, kui tuleb tasuda N -kopikane summa müntides väärtustega $n_1, \dots, n_k$ kopikat, siis kehtib seos

$$\Phi(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k; N) = \Phi(n_1, \dots, n_{k-1}; N) + \Phi(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k; N - n_k). \quad (21)$$

Valem näitab, et me kas ei kasuta ühtki n_k -kopikalist ja siis tuleb kogu summa N tasuda teiste, $n_1, \dots, n_{k-1}$ -kopikaliste abil, või kasutame vähemalt ühte n_k -kopikalist ja siis tuleb ülejäänud $N - n_k$ kopikat maksta $n_1, \dots, n_{k-1}, n_k$ -kopikastes müntides. Kui aga mündid ei tohi korduda (nagu see oli lk. 89), siis asendame seose (21) juba varem esinenud seosega

$$F(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k; N) = F(n_1, \dots, n_{k-1}; N) + F(n_1, \dots, n_{k-1}; N - n_k) \quad (22)$$

(vt. lk. 89).

Arvude liidetavateks lahutamine

Vaatleme rahavahetamisülesande erijuhtu, kus võib kasutada mistahes münte väärtuses 1 kuni n kopikat. Teiste sõnadega, lahendame järgmise ülesande.

Mitmel viisil saab arvu N lahutada liidetavateks, mis kuuluvad kõik arvude $1, 2, \dots, n$ hulka (liidetavate järjekorda ei arvestata).

Tähistame selliste jaotamisviiside arvu Π_N^n abil¹. Siis kehtib seos

$$\Pi_N^n = \Pi_N^{n-1} + \Pi_{N-n}^n. \quad (23)$$

Tõepoolest, kui liidetavana pole kasutatud arvu n , siis on N jaotatud liidetavateks $1, 2, \dots, n-1$ ja seda saab teha Π_N^{n-1} viisil. Kui aga n esineb liidetavana, siis on arv $N-n$ jaotatud liidetavateks $1, 2, \dots, n$, mida saab teha Π_{N-n}^n viisil.

Seame nüüd kitsenduse, et *kõik liidetavad peavad olema erinevad*. Lahendite arvu tähistame sel juhul Φ_N^n abil (seejuures $\Phi_0^n = 1$). Jätame lugeja hooleks näidata, et Φ_N^n jaoks kehtib seos

$$\Phi_N^n = \Phi_N^{n-1} + \Phi_{N-n}^{n-1} \quad (24)$$

(arvu n ei tohi teist korda liidetavana kasutada).

On kerge näha, et $\Phi_1^1 = 1$ ja $N > 1$ puhul $\Phi_N^1 = 0$. See-tõttu saab valemi (24) abil Φ_N^n väärtused iga n ja N korral üksteise järel välja arvutada. Π_N^n jaoks on valemi (23) asemel mugavam võtta seos

$$\Pi_N^n = \Pi_N^{n-1} + \Pi_{N-n}^{n-1} + \Pi_{N-2n}^{n-1} + \dots, \quad (25)$$

mis saadakse valemi (23) korduval rakendamisel. Nüüd aga paneme tähele, et $\Pi_N^1 = 1$ (iga naturaalarvu saab ühesel viisil lahutada ühega võrdseteks liidetavateks). Kasutades seost (25) arvutame üksteise järel Π_N^2 iga N jaoks, siis Π_N^3 jne.

Märgime, et arvu N kõigi liidetavateks lahutuste arv on Π_N^N , arvust N suuremad liidetavad ei saa lahutuses esineda. Täpselt samuti on arvu N erinevateks liidetavateks lahutuste arv Φ_N^N .

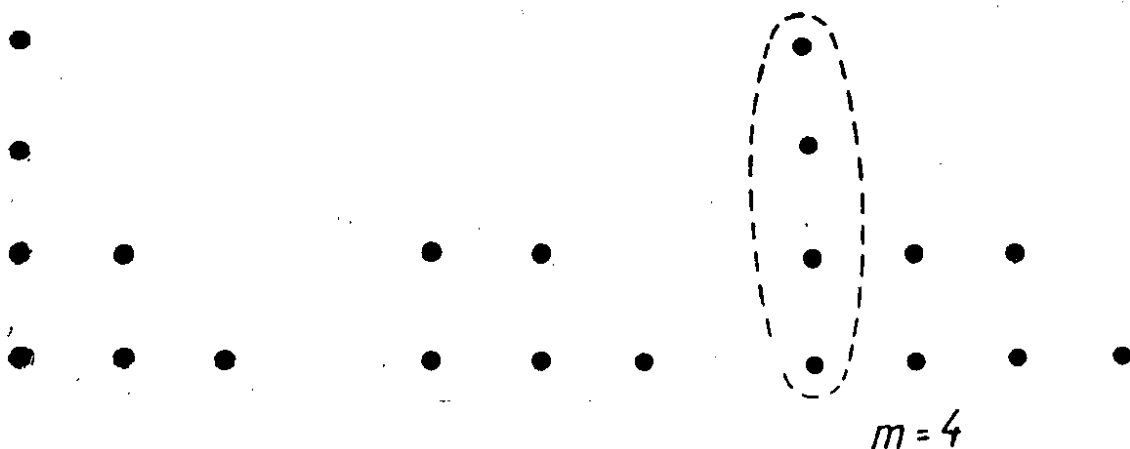
¹ Π_0^n väärtuse võtame võrdseks ühega.

Diagrammitehnika

Meetodid, millega esialgu tõestati teoreeme arvude jaotamisest, olid õige keerukad. Nagu mujalgi matemaatikas lihtsustas geomeetriliste arutluste kasutuselevõtmine kombinatoorika teoreemide tõestusi ja muutis nad näitlikuks.

Arvu N liidetavateks lahutusi saab kujutada diagrammide abil, mille iga rida koosneb niimitmest punktist, kuimitu ühikut sisaldub vastavas liidetavas. Näiteks lahutusele $7=1+1+2+3$ vastab diagramm joonisel 11.

Et liidetavate järjekord lahutuses pole tähtis, siis võib read paigutada nii, et nende pikkused ülalt alla ei vähe- neks. Peale selle märgime iga rea esimesed punktid ühte veergu. Selliseid diagramme nimetame *normaalseteks*.



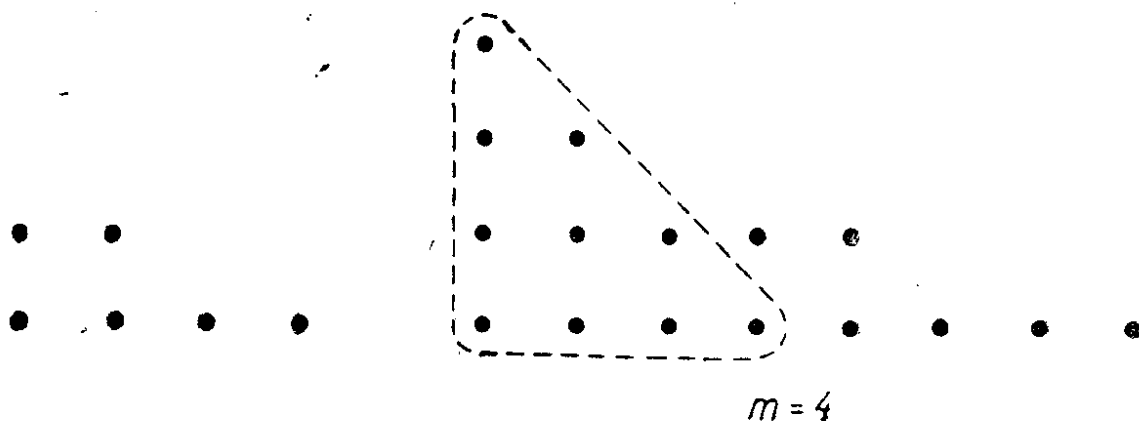
Joon. 11

Joon. 12

Diagrammide abil on kerge tõestada jaotuste mitmesuguseid omadusi. Tõestame näiteks, et arvul N on *nii-sama palju lahutusi ülimalt m liidetavaks kui arvul $N+m$ lahutusi m liidetavaks*. Tõepoolest, diagramm, mis kujutab arvu N lahutust ülimalt m liidetavaks, koosneb N punktist, mis paiknevad mitte rohkem kui m reas. Lisame igale sellisele diagrammile m punktist koosneva veeru (vt. joon. 12, kus see teisendus on kujutatud $N=5$, $m=4$ puhul). Tekib diagramm $N+m$ punktist, mis paiknevad m reas. Vastupidi, kui eemaldada sellise diagrammi esimene veerg, saame diagrammi N punktist, kusjuures ridade arv pole suurem kui m .

Oleme korraldanud üksühese vastavuse kahte liiki diagrammide vahel, millest järeldub, et neid diagramme on ühepalju. Sellega on väide tõestatud.

Veidi keerukamalt tõestatakse järgmine lause (Euleri teoreem).



Joon. 13

Arvul N on niisama palju lahutusi ülimalt m liidetavaks kui arvul $N + \frac{m(m+1)}{2}$ lahutusi m erinevaks osaks.

Arvu N iga jaotus ülimalt m liidetavaks kujutub diagrammina N punktist, mis sisaldab mitte üle m rea. Lisame igale sellisele diagrammile m -realise võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ja viime diagrammi seejärel normaalkujule (vt. joon. 13, kus selline teisendus on kujutatud $N=6$, $m=4$ korral). Et punktide arv kolmnurgas on $\frac{m(m+1)}{2}$, siis saame diagrammi $N + \frac{m(m+1)}{2}$ punktist, mis sisaldab m rida. Seejuures on selle diagrammi kõik read erineva pikkusega. Tõepoolest, lähtediagrammi ridade pikkused ei kahane, kolmnurga ridade pikkused aga suurenevad. Seega tekib pärast kolmnurga lisamist diagramm, mille read muutuvad kogu aeg pikemaks. Järelikult ei saa ühesuguse pikkusega ridu olla.

Vastupidi, igast diagrammist, mis kujutab arvu $N + \frac{m(m+1)}{2}$ jaotust m erinevaks liidetavaks, võib eemaldada m reast koosneva võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ja saada diagrammi, kus N lahutatakse ülimalt m liidetavaks. See vastavus kahte liiki diagrammide vahel näitab, et neid on ühepalju. Sellega on meie väide tõestatud.

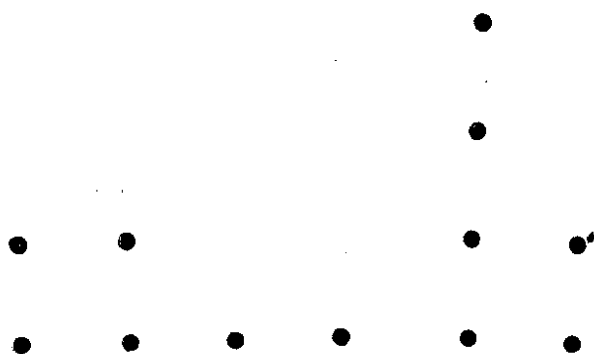
Duaalsed diagrammid

Diagramme võib teisendada nii, et read muutuksid veerudeks ja veerud ridadeks. Selleks pöörame diagrammi 90° võrra ja viime ta normaalkujule. Saadud diagrammi nimetatakse esialgsega duaalseks. Selline diagrammi teisendus on kujutatud joonisel 14.

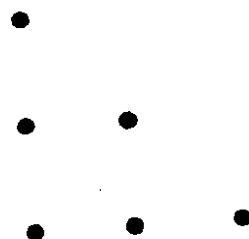
On selge, et kui teisendust korrata, saame uuesti esialgse diagrammi. Seepärast jagunevad kõik diagrammid teineteisega duaalsete diagrammide paarideks (tuleb muidugi silmas pidada, et mõned diagrammid on iseendaga duaalsed, selline on näiteks diagramm joonisel 15).

Diagrammide duaalsust kasutades saab võrrelda kitsendatud liidetavate suurustega lahutusi lahutustega, millel on kitsendatud liidetavate arv. Kehtib näiteks selline väide:

arvu N lahutusi liidetavateks, mis ei ületa arvu n , on niisama palju kui tema lahutusi ülimalt n liidetavaks.



Joon. 14



Joon. 15

Tõepoolest, vastaku diagramm arvu N lahutusele liidetavateks, mis ei ületa arvu n . Siis koosneb see N punkti, kusjuures igas reas on ülimalt n punkti. Järelikult pole selles diagrammis rohkem kui n veergu. Kuid siis on duaalsel diagrammil ülimalt n rida, s.o. ta vastab arvu N lahutusele ülimalt n liidetavaks.

Täpselt samuti tõestatakse, et arvu N lahutusi n -liidetavaks on niisama palju kui tema lahutusi liidetavateks, mis ei ületa arvu n , kusjuures vähemalt üks liidetav võrdub arvuga n .

Vaatleme edasi arvu N lahutusi paarisarvulisteks liidetavateks. Neid lahutusi kujutavad diagrammid, mille kõik read sisaldavad paarisarvu punkte. Kuid siis on

Joon. 16

duaalses diagrammis iga liiki liidetavaid paarisarv (joon. 16). Siit tuletame järgmise väite.

Arvu N lahutusi paarisarvulisteks liidetavateks on niisama palju kui lahutusi, milles iga liidetav esineb paarisarv kordi (loomulikult võivad mõned liidetavad hoopis puududa, sest null on paarisarv).

Täpselt samuti tõestatakse, et

arvu N lahutusi paarituteks liidetavateks on niisama palju kui lahutusi, kus iga liidetav peale suurima esineb paarisarv kordi ja suurim paaritu arv kordi.

Euleri valem ¹

Jaotuste käsitlemisel uuris Euler lõpmatut korrutist ²

$$A = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots (1 - x^n) \dots \quad (26)$$

Avame selles korrutises esimesed 22 sulupaari. Saame avaldise

$$A = [1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \dots] \times \\ \times (1 - x^{23})(1 - x^{24}) \dots (1 - x^n) \dots,$$

kus punktidega on tähistatud liidetavad, mis sisaldavad x kõrgemat astet kui 22. Neid liikmeid me välja ei kirjutanud, sest need teisenevad pärast nurksulgudes oleva avaldise korrutamist teguritega $1 - x^{23}$, $1 - x^{24}$, ... jne. Välja kirjutatud liikmed aga enam ei muutu. Seepärast tekib

¹ Selle punkti võib esmakordselt lugemisel vahele jätta.

² Lõpmatutest korrutistest ja astmeridadest vt. lähemalt VII peatükis.

pärast kõikide sulgude avamist lõpmatu rida, mille esimestel liikmetel on kuju

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \dots \quad (27)$$

On näha, et pärast kahte negatiivset liiget tulevad kaks positiivset, siis uuesti kaks negatiivset jne. Kuid liikmete astendajate seaduspärasust märgata on hoopis raskem. Pikaajalise katsetamise teel sai Euler järgmise reegli:

Kui lõpmatu korrutis

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\dots(1 - x^n)\dots$$

muuta reaks, siis on selles nullist erinevad ainult liidetavad kujuga $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$, kus k on naturaalarv.

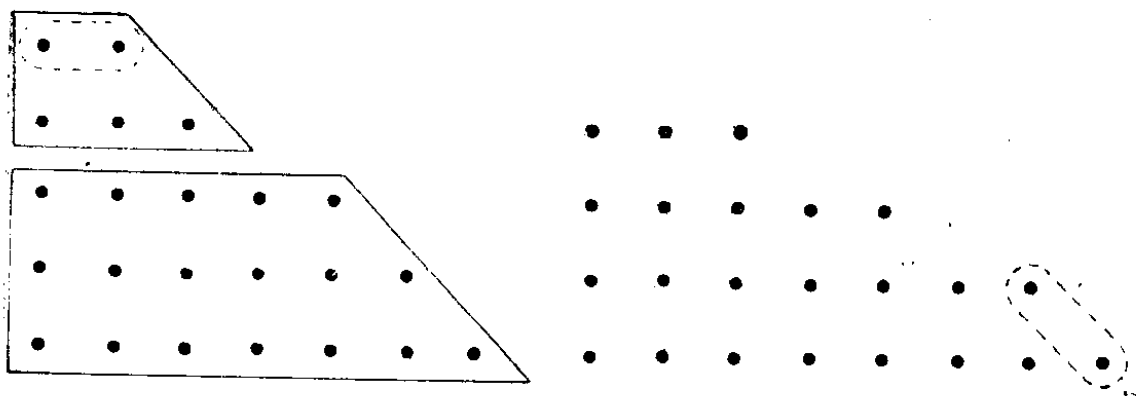
Euleri teoreemil on suur tähtsus mitte ainult arvude liidetavateks lahutamise käsitlemisel, vaid ka elliptiliste funktsioonide teoorias ja matemaatilise analüüsi teistes valdkondades. Kuid enamik selle teoreemi tõestusi on üsna keerukad. Siinkohal toome Euleri teoreemi õige lihtsa geomeetrilise tõestuse. Eelnevalt tuleb see teoreem sõnastada lahutuste teooria keeles.

Avaldise (26) sulgude avamisel esineb liidetav $\pm x^N$ niimitu korda, kuimitmel viisil saab arvu N esitada erinevate liidetavate summana. Seejuures tekib x^N , kui liidetavate arv on paarisarv, ja $-x^N$, kui see arv on paaritu. Näiteks lahutusele $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ vastab liidetav $(-x^5)(-x^4)(-x^2)(-x) = x^{12}$, lahutusele $12 = 5 + 4 + 3$ aga liidetav $(-x^5)(-x^4)(-x^3) = -x^{12}$.

Seega võrdub x^N kordaja avaldises (27) arvu N paarisarvuks ja paaritu arvuks erinevaks liidetavaks lahutuste arvude vahega. Euleri teoreem väidab:

kui arv N pole esitatav kujul $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, siis on tal ühepalju lahutusi paarisarvuks ja paaritu arvuks erinevaks liidetavaks. Juhul kui $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, siis võrdub nende suuruste vahe aga arvuga $(-1)^k$ (s.o. paarisarvulise k korral on ühe võrra rohkem lahutusi paarisarvuks liidetavaks, paaritu k korral aga paaritu arvuks liidetavaks).

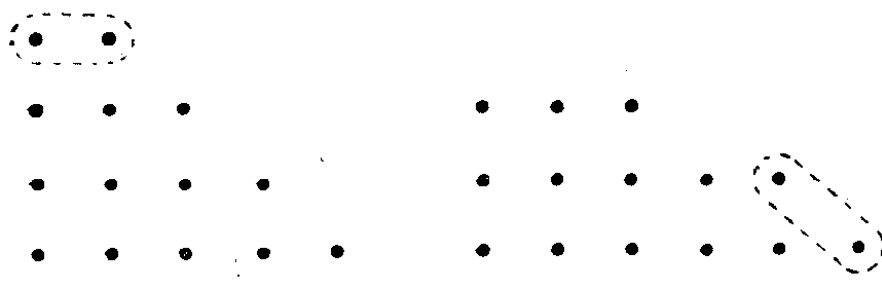
Euleri teoreemi tõestamiseks näitame teisenduse, mis muudab paarisarvu ridu sisaldava diagrammi niisama paljudest punktidest koosnevaks paaritut arvu ridu sisal-



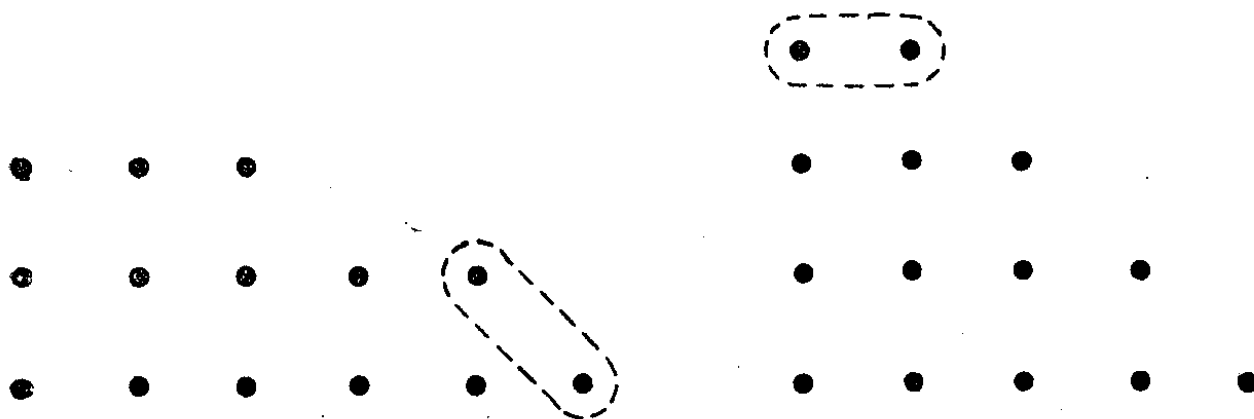
Joon. 17

davaks diagrammiks ja vastupidi. Et me vaatleme ainult erinevateks liidetavateks lahutusi, siis koosnevad nii-suguste lahutuste diagrammid mitmest üksteise kohale asetatud trapetsist. Olgu diagrammi ülemises reas m punkti ja alumisel trapetsil n rida. Joonise 17 vasakul pool on kujutatud diagramm, millel $m=2$, $n=3$.

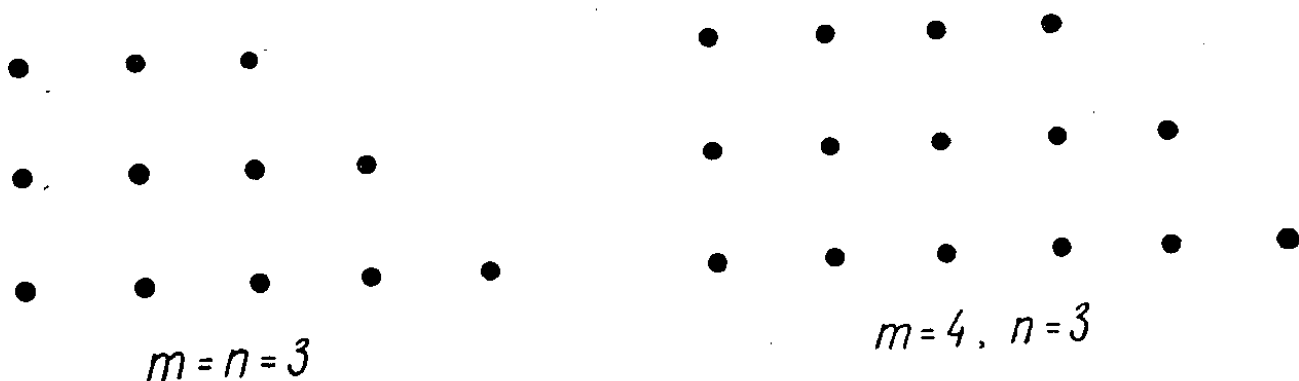
Oletame, et diagramm sisaldab vähemalt kahte trapetsit, kusjuures $m \leq n$. Sel juhul heidame esimese rea kõrvale ja pikendame alumise trapetsi m viimast rida ühe punkti võrra. Tulemusena punktide üldarv ei muutu ja kõigi ridade pikkused jäävad erinevateks, kuid paaris-arvust ridadest on tekkinud paaritu arv ridu ja vastu-



Joon. 18, a



Joon. 18, b



Joon. 19

pidi. Täpselt samasuguse teisenduse saab teha, kui diagramm koosneb ühest trapetsist, kusjuures $m \leq n - 1$. Joonisel 18, *a* on kujutatud diagrammi seesuguse teisenduse tulemus.

Sisaldagu nüüd diagramm vähemalt kahte trapetsit, kusjuures $m > n$. Siis võtame viimase trapetsi igast reast ühe punkti ja koostame neist uue diagrammi esimese rea. Seda saab teha, sest $m > n$ ja seetõttu on koostatud rida lühem lähtediagrammi esimesest reast. Et me võtsime alumise trapetsi kõik read, siis on tekkinud diagrammis kõik read erineva pikkusega. Lõpuks sisaldab uus diagramm niisama palju punkte kui lähtediagrammi, kuid ridade arvu paarsus on muutunud: uues diagrammis on üks rida rohkem. Täpselt samasugune teisendus on teostatav ühest trapetsist koosneva diagrammiga, kus $n \leq m - 2$. Joonisel 18, *b* on kujutatud kirjeldatud teisenduse tulemus. Jooniseid 18, *a* ja 18, *b* võrreldes veendume, et kirjeldatud teisendused on teineteise pöördteisendused: kui teha algul üks neist ja pärast teine, saame uuesti lähtediagrammi.

Vaatleme arvu N selliste lahutuste diagramme, mis lubavad ühte neist teisendustest. Nende diagrammide seas peab paaris- ja paaritu arvu ridadega diagramme olema ühepalju. On jäänud selgitada, missuguste diagrammide puhul pole kirjeldatud teisendus teostatav. Arusaadavalt koosnevad need diagrammid ühest trapetsist, kusjuures nende puhul kas $m = n$ või $m = n + 1$. Esimesel juhul sisaldab diagramm $\frac{3n^2 - n}{2}$, teisel juhul

aga $\frac{3n^2 + n}{2}$ punkti (joon. 19).

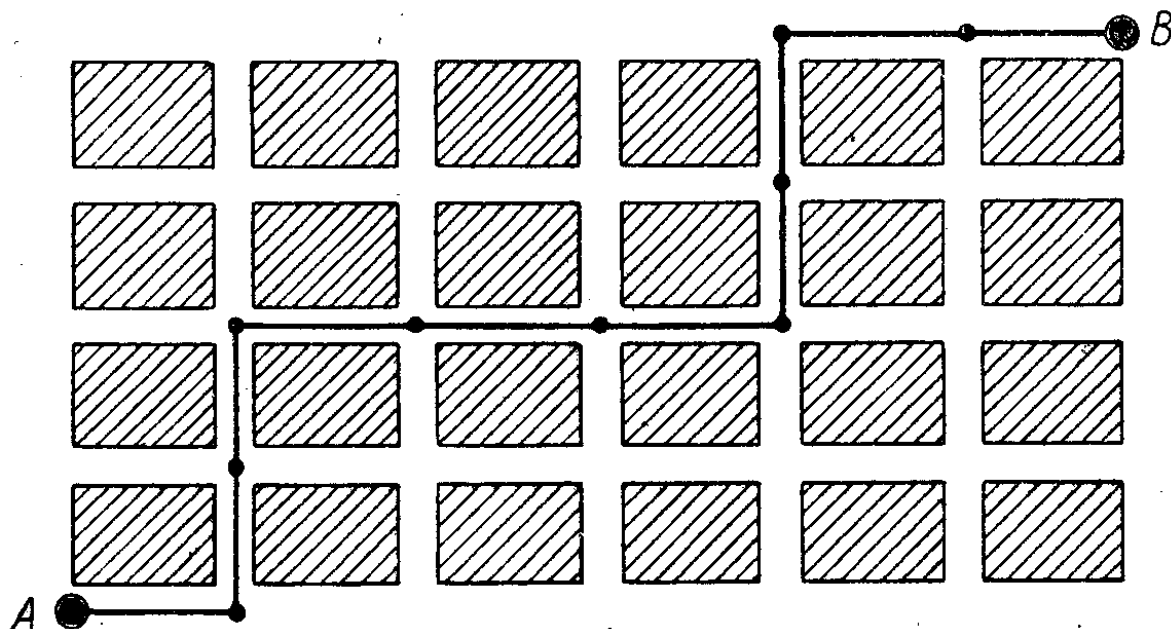
Toodud arutlused näitavad, et kui N pole arv kujuga $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ siis on tal ühepalju lahutusi paaris- ja paaritu arvuks liidetavateks. Kui $N = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ ja n on paarisarv, siis jääb üle üks paarisarvu ridu sisaldav diagramm, millele teisendus pole rakendatav. Seepärast on lahutusi paarisarvuks liidetavateks ühe võrra rohkem kui paarituks arvuks liidetavateks. Kui aga $N = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ ja n on paaritu arv, siis on lahutusi paarituks arvuks liidetavateks ühe võrra rohkem. Teoreem on tõestatud.

V. KOMBINATOORIKA MALELAUAL

Inimene hulgub linnas

Joonisel 20 on kujutatud linna plaan (umbes niimoodi näeb välja Austraalia pealinna Canberra plaan). Selles linnas on $n \cdot k$ ristkülikukujulist kvartalit, mida eraldavad üksteisest $n - 1$ «horisontaalsed» ja $k - 1$ «vertikaalsed» tänavad. Rändur tahab minna punktist A punkti B lühimat teed mööda, s.o. liikudes kogu aeg kas vasakult paremale või alt üles. Mitmel viisil saab ta seda teha?

On selge, et missugust teed mööda rändur ka ei läheks, ta möödub $n + k$ tänavanurgast (A kaasa, B välja arvatud). Igal tänavanurgal võib ta minna kas paremale või üles. Vastavalt sellele jaotame kõik tänava-



Joon. 20

nurgad kahte klassi. Märgime need tänavanurgad, kus ta valib tee paremale, arvuga 0, kus üles, arvuga 1. Et tänavanurkade arv peab esimeses klassis olema k ja teises n (muidu rändur ei jõua punkti B), siis saame k nullist ja n ühest koosneva permutatsioonini. Igale sellisele permutatsioonile vastab omakorda mingi tee A -st B -sse.

Joonisel 20 on kujutatud tee, mis vastab permutatsioonile 0110001100.

Kuid k nullist ja n ühest saab koostada täpselt

$$P(k, n) = C_{n+k}^n = \frac{(n+k)!}{n!k!} \quad (1)$$

permutatsioonini. Sama on ka lühimate teede arv punktist A punkti B .

Aritmeetiline ruut

Ränduri liikumine linnas meenutab malevankri liikumist. Võtame lõputu malelaua, mida piiravad kahest küljest ristuvad kiired, ja paneme vankri selle laua nurka. Oletame, et vanker käib laual kas ülalt alla või vasakult paremale. Neid käike kombineerides võime saada erinevaid teid, mis viivad nurgaväljalt malelaua antud väljale.

Kirjutame malelaua igale väljale selliste teede arvu. Kirjutatav arv sõltub välja koordinaatidest, s.o. sellest, millisel vertikaalil ja horisontaalil ta asetseb.

Mugav on nummerdada vertikaalid ja horisontaalid arvudega $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Sellise numeratsioonih puhul on nurgavälja koordinaadid $(0, 0)$.

Eelmise ülesande tulemust kasutades veendume, et k -nda vertikaali ja n -nda horisontaali lõikekohas asub arv C_{n+k}^k (et sellele väljale sattuda, tuleb teha k käiku paremale ja n käiku alla). Asendame sümbolid C_{n+k}^k nende arväärtustega. Siis saame tabeli 3. Seda tabelit nimetatakse aritmeetiliseks ruuduks.

Tabel 3

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
...	...	...	...	...	...	...

Tutvume lähemalt tema omadustega.

Aritmeetilise ruudu tähelepanelik uurimine näitab, et iga arvu seal võib saada järgmise reegli abil: *see arv võrdub tema kohal seisva arvu ja temast vasakule jääva arvu summaga*. Näiteks arvu $10=4+6$ kohale on kirjutatud 4, temast vasakule aga 6.

Saadud reegel järeldub kergesti varem (vt. lk. 48) tõestatud võrdusest

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Kuid reegli võib tõestada ka vahetult. Tõepoolest vanker võib väljale (k, n) sattuda väljalt $(k-1, n)$ või $(k, n-1)$. Seepärast on väljale (k, n) sattumisvõimaluste arv võrdne väljadele $(k-1, n)$ ja $(k, n-1)$ sattumisvõimaluste arvude summaga. Selles aga meie väide seisnebki.

Seosest

$$C_{n+k}^k = C_{n+k}^n$$

järeldub, et aritmeetiline ruut on sümmeetriline nurka läbiva diagonaali suhtes (viimast nimetame *peadiagonaalliks*). Seda omadust on muide kerge ka geomeetriliselt tõestada: n -nda vertikaali ja k -nda horisontaali või k -nda vertikaali ja n -nda horisontaali lõikekohta jõudmise viise on ühepalju.

Kujundarvud

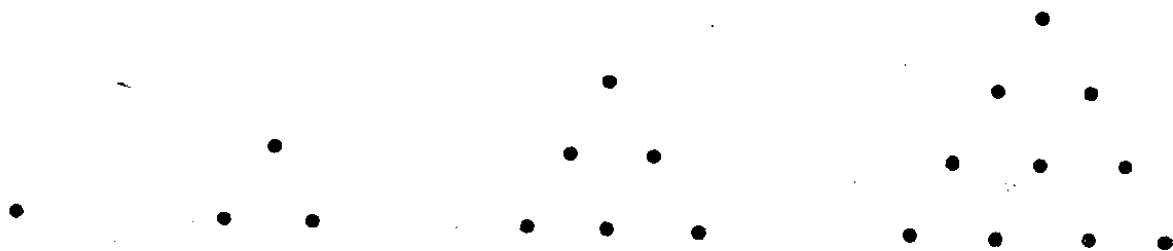
Tabeli 3 elementide arvutamisel kasutasime nii eelmise rea kui ka eelmise veeru elemente. Kuid oleks piisanud eelmise rea elementidest. Tõepoolest, leheküljel 49 tõestatakse valemi (15)

$$C_{n+k}^k = C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^{k-1} + \dots + C_{n-1}^0.$$

See valem näitab, et meie tabeli iga element võrdub eelmise rea elementide summaga, alates esimesest ja lõpetades arvutatava elemendi kohal asetsevaga. Seega saame $(n-1)$ -se rea elemente järjestikku liites n -nda rea elemendid.

Tabeli 3 elementide niisugune saamisviis on seotud vanakreeka matemaatikutelt Pythagoraselt ja Nikomachoselt pärineva kujundarvude õpetusega. Nimelt saab arve 1, 2, 3, ... kujutada ühest, kahest, kolmest jne. punktist koosnevate ridadena, viimased aga ühendada kolmnurkadeks (joon. 21). Punktide arv igas kolmnurgas võrdub vastava arvuga tabeli teises reas.¹ Seepärast nimetatakse arve 1, 3, 6, 10, 15, 21 jne. *kolmnurkarvudeks*; k -s kolmnurkarv on

$$C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)k}{2}.$$



Joon. 21

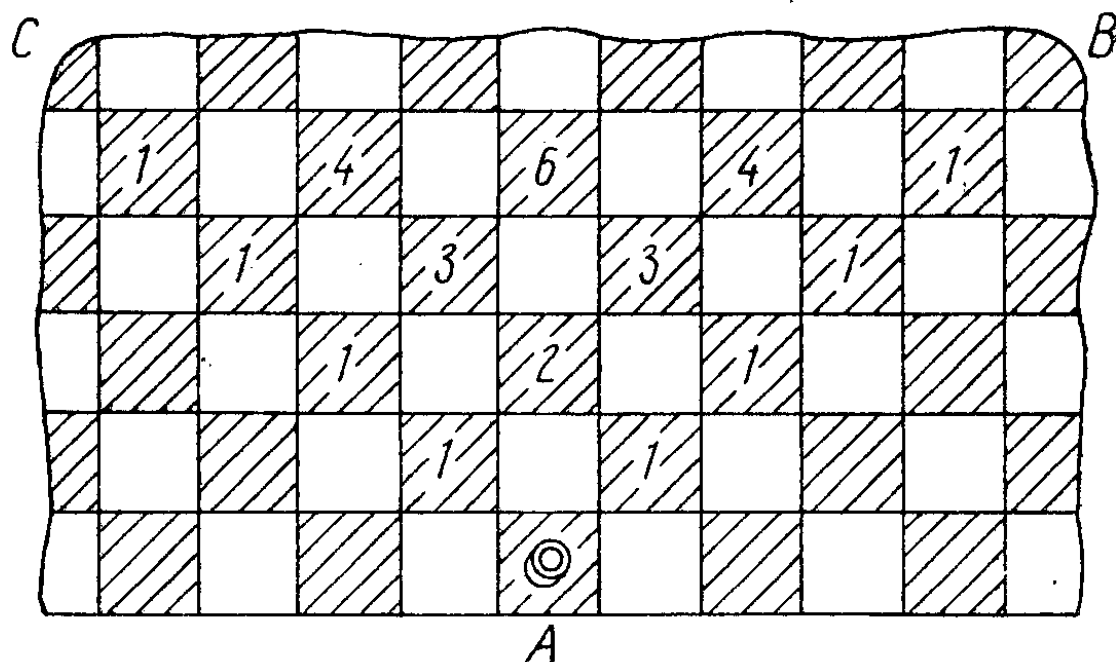
Täpselt samuti võib joonisel 21 kujutatud kolmnurgad ühendada püramiidideks. Punktide arv igas püramiidis võrdub vastava arvuga meie tabeli kolmandas reas. Seepärast nimetatakse arve 1, 4, 10, 20, 35 jne. *püramiidarvudeks*. Nende üldkuju on

$$C_{k+2}^3 = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

¹ Meenutame, et read on nummerdatud arvudega 0, 1, 2, ... ja seepärast on ülemine rida nullis, talle järgnev esimene jne.

Et anda analoogiline tõlgitsus järgmiste ridade arvudele, tuleks siirduda kõrgema dimensiooniga ruumides paiknevatele püramiididele.

Õpetus kujundarvudest köitis matemaatikuid sajandite vältel ja oli omal ajal arvuteooria tähtis osa.



Joon. 22

Aritmeetiline kolmnurk

Võtame ainult ühest küljest piiratud malelaua ja asetame nullhorisontaali väljale A kabendi (joon. 22). Kabemängu reeglite järgi liikudes võib see kabend sattuda misahes väljale sirgetega AB ja AC eraldatud piirkonnas. Kirjutame jälle igale väljale, mitmel viisil meie kabend võib sinna jõuda. Näeme, et kirjutatud arvud ühtivad arvudega aritmeetilisest ruudust, on vaid teisiti paigutatud. See pole ka ime: kui ruutu pöörata 45° võrra, siis liigub kabend mööda horisontaal- ja vertikaaljooni ja saame vankri liikumise ülesande. Arvud joonisel 22 esitatakse harilikult kolmnurga kujul (tabel 4). Siin võrdub iga arv nende kahe eelmise rea arvude summaga, mille vahel ta asub. Seda kolmnurka nimetatakse sageli Pascali kolmnurgaks. Veel enne Pascali (1623—1662) tundis seda itaalia mate-

Tabel 4

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
.	.	.	.	.	.	.	.	.

maatik Tartaglia¹ (1500—1557). Palju aastaid enne Tartagliat esineb see kolmnurk aga araabia matemaatiku Omar Hajjami töodes, seepärast nimetame seda lihtsalt aritmeetiliseks kolmnurgaks.

Aritmeetilise kolmnurga võib üles kirjutada ka tabeli 5 kujul.

Tabel 5

1	0	0	0	0	0	...
1	1	0	0	0	0	...
1	2	1	0	0	0	...
1	3	3	1	0	0	...
1	4	6	4	1	0	...
1	5	10	10	5	1	...
.	.	.	.	.	.	.

Siin paikneb k -nda vertikaali ja n -nda horisontaali lõikekohal arv C_n^k (meenutame, et äärmiste joonte numbrid on nullid). Kolmnurga iga arv võrdub tema kohal seisva arvu ja viimasele eelneva arvu summaga. Näiteks arvu 4 kohal seisab neljandas reas 1 ja selle ees 3 ning $4=1+3$.

Märgime veel ära aritmeetilise kolmnurga järgmised iseärasused: *kõik peadiagonaalist kõrgemal paiknevad elemendid on nullid ja nullis veerg koosneb ühtedest*. Aritmeetilise kolmnurga n -ndas reas seisvad arvud, s.o. arvud C_n^k fikseeritud n korral, esinevad kordajatenä binoomi $(1+x)^n$ arendises x astmete järgi, seetõttu nimetatakse neid ka *binoomkordajateks*. Me peatume sellel lähemalt VII peatükis.

¹ Tartaglia oli silmapaistav matemaatik, kes avastas peale aritmeetilise kolmnurga veel kuupvõrrandi lahendusvalemi. Ta jutustas sellest teisele itaalia matemaatikule G. Cardanole, võttes viimaselt vande, et too ei avalda usaldatud saladust kellelegi. Kuid Cardano avaldas selle peagi oma algebraõpikus ja seepärast nimetatakse kuupvõrrandi lahendusvalemit täiesti ebaõiglaselt Cardano valemiks.

Laiendatud aritmeetiline kolmnurk

Aritmeetiline kolmnurk hõlmab vaid osa tasandist. Laiendame ta kogu tasandile, kasutades eespool sõnastatud reeglit: *iga element võrdub tema kohal seisva ja sellele eelneva elemendi summaga*. Et aritmeetilise kolmnurga nullis veerg koosneb ühtedest, siis täidame ka laiendatud kolmnurgas selle veeru ühtedega.

Rakendades toodud reeglit nullinda veeru elementidele, näeme, et selle veeru ees peab olema nullidega täidetud veerg. Kuid siis koosnevad ka kõik järgmised vasakpoolsed veerud ainult nullidest. Seepärast tuleb vaid kindlaks teha, mis paikneb kolmnurga nullinda rea kohal. Nullinda rea esimesest elemendist kaldu ülal asetseb 1, element ise aga võrdub nulliga. Seepärast tuleb tema kohale kirjutada -1 ($1 + (-1) = 0$). Et saada siis ka esimese rea teises veerus nulli, tuleb meil selle kohale kirjutada 1. Jätkates leiame, et esimese rea kohale tekib uus rida, mis koosneb vaheldumisi arvudest 1 ja -1 . Täpselt samuti täidetakse ülejäänud ülemised read.

Tabel 6

...0	1	-5	15	-35	70	-126...
...0	1	-4	10	-20	35	-56...
...0	1	-3	6	-10	15	-21...
...0	1	-2	3	-4	5	-6...
...0	1	-1	1	-1	1	-1...
...0	1	0	0	0	0	0...
...0	1	1	0	0	0	0...
...0	1	2	1	0	0	0...
...0	1	3	3	1	0	0...
...0	1	4	6	4	1	0...
...0	1	5	10	10	5	1...
...	...	...	...	...	...	...

Tulemusena saame tabeli, millest osa on kujutatud ülal. Tabeli nullindast reast kõrgemal olevat osa vaadeldes veendume, et see erineb lk. 115 toodud aritmeetilisest ruudust vaid liikmete märkide poolest. Nimelt seisab $(-n)$ -nda horisontaali ja k -nda vertikaali lõikekohal arv $(-1)^{k-1}C_{n+k-1}^k$. Enesestmõistetavalt ei tõesta ainult tabeli osa vaatlemine selle väite kehtivust kõigi ridade ja veergude jaoks. Väite õigsuse põhjendamiseks peame silmas, et

$$\begin{aligned}
& (-1)^{k-1} C_{n+k-1}^k + (-1)^{k-2} C_{n+k-2}^{k-1} = \\
& = (-1)^{k-1} [C_{n+k-1}^k - C_{n+k-2}^{k-1}] = (-1)^{k-1} C_{n+k-2}^k
\end{aligned}$$

(vt. valemit (11) lk. 48). Saadud võrdus näitab, et arvudest $(-1)^{k-1} C_{n+k-1}^k$ koostatud tabelis võrdub $(-n+1)$ -se rea k -s element nende elementide summaga, mis seisavad $(-n)$ -ndas reas k -ndal ja $(k-1)$ -sel kohal. Teiste sõnadega, arvudest $(-1)^{k-1} C_{n+k-1}^k$ koostatud tabeli ja laiendatud aritmeetilise kolmnurga ülemise poole täitmise reeglid ühtivad. Et neil tabelitel on peale selle ühesugused veel (-1) -sed read ja nullindad veerud, siis ühtivad neil kõik elemendid.

Esialgses aritmeetilises kolmnurgas asetses n -nda horisontaali ja k -nda vertikaali lõikekohas arv C_n^k . Laiendatud kolmnurgas seisab $(-n)$ -nda horisontaali ja k -nda vertikaali lõikekohas arv $(-1)^{k-1} C_{n+k-1}^k$. Seetõttu saab sümboli C_n^k üldistada n negatiivsete väärtuste juhule, võttes

$$C_{-n}^k = (-1)^{k-1} C_{n+k-1}^k. \quad (2)$$

Nagu näha tabelist 6, on sümboli C_n^k üldistus k negatiivsetele väärtustele triviaalne: $k < 0$ puhul saame $C_n^k = 0$ (vt. samuti lk. 119). Peale selle on $C_n^k = 0$, kui $0 \leq n < k$.

Malekuningas

Aritmeetilise kolmnurga võib saada järgmisel viisil. Paneme malelaua vasakpoolsesse ülemisse nurka «ühepoolse kuninga», s.o. malendi, mis võib käia ainult kas ühe välja allapoole või ühe välja paremale alla. Kirjutame igale väljale arvu, mis näitab, mitmel viisil võib kuningas selleni jõuda. Saame aritmeetilise kolmnurga.

Asendame nüüd «ühepoolse kuninga» harilikuga, pii- rates selle liikumisvabadust vaid ühe tingimusega: kuningas peab liikuma alati ülespoole, järgmisele horisontaalile. Et kuningas saaks oma uusi võimalusi kasutada, tuleb malelauda laiendada ja võtta laud, mis on sirgega piiratud ainult ühest küljest. Joonisel 23 on kujutatud selline malelaud, mille igale väljale on kirjutatud, mitmel viisil võib kuningas väljalt A selleni jõuda.

	1	4	10	16	19	16	10	4	1
		1	3	6	7	6	3	1	
			1	2	3	2	1		
				1	1	1			
					♔				

Joon. 23

Vaatame, kuidas uus tabel on koostatud. Olgu juba leitud, mitmel viisil võib kuninglik rändur sattuda igale $(n - 1)$ -se horisontaali väljale. Leiame, mitmel viisil jõutakse n -nda horisontaali väljadeni. Igaühele neist väljadest võib kuningas sattuda mõnelt $(n - 1)$ -se horisontaali naaberväljalt (otse all, kaldu paremal või kaldu vasakul paiknevalt, vt. joon. 23). Summa reegli järgi saame järgmise tulemuse:

n -nda horisontaali mingile väljale sattumisviiside arv võrdub kolmele $(n - 1)$ -sel horisontaalil paiknevale naaberväljale sattumisviiside arvude summaga.

Seejuures eeldatakse, et kuninga lähteväljale võib sattuda vaid ühel viisil (ei tohi paigast liikuda), nullinda horisontaali teistele väljadele pole aga üldse võimalik sattuda.

Üldistatud aritmeetiline kolmnurk

Kolmnurka jooniselt 23 võib kujutada ka teisiti, nihutades kõik arvud paremale, nii et uus tabel paikneks malelaua kahe ristuva kiirega eraldatud osas. Sel juhul sõnastatakse tabeli iga arvu saamise reegel nii:

iga arv võrdub tema kohal seisva arvu ja selle kahe vasakpoolse naaberarvu summaga. Seejuures asub nurgas arv 1 ja nullinda rea kõik ülejäänud elemendid on nullid.

Näiteks arv 16 neljandas reas on kolmanda rea arvude 3, 6 ja 7 summa.

Täiesti selge, kuidas aritmeetilist kolmnurka edasi üldistada. Võtame mingi naturaalarvu m ja täidame tabeli sellise reegli järgi: vasakusse ülemisse nurka kirjutame arvu 1, nullinda rea kõigile ülejäänud väljadele aga nullid. Seejärel kirjutame esimese rea igale väljale tema kohal seisva nullinda rea arvu ja $m-1$ sellest vasakul seisva arvu summa. On selge, et siis osutuvad esimese rea m esimest elementi võrdseks ühega ja ülejäänud nulliga (kui summa koostamisel tuleb liidetavatest puudu, siis loetakse puuduvad liidetavad nullideks, s.o. tabelit täiendatakse vasakult nullidega (vt. tabel 7)).

Tabel 7

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0
0	0	1	3	6	7	6	3	1	0
0	0	1	4	10	16	19	16	10	4
		.	.	.	.	.	.	.	.

Analoogiliselt täidetakse ülejäänud read: tabeli iga element võrdub otse tema kohal seisva elemendi ja $m-1$ sellest vasakule jääva arvu summaga. Aritmeetiline kolmnurk saadakse erijuhul $m=2$, tabeli 7 kolmnurk $m=3$ korral.

Et eristada üksteisest erineva m väärtusega aritmeetilisi kolmnurki, nimetame neid *m -aritmeetilisteks kolmnurkadeks*. m -aritmeetilise kolmnurga n -nda horisontaali ja k -nda vertikaali lõikekohas seisvat elementi tähistame $C_m(k, n)$ abil. m -aritmeetilise kolmnurga definitsioonist järeldub, et arvud $C_m(k, n)$ rahuldavad seost

$$C_m(k, n) = C_m(k, n-1) + C_m(k-1, n-1) + \dots + C_m(k-m+1, n-1). \quad (3)$$

Seejuures on täidetud tingimused

$$C_m(k, 1) = \begin{cases} 1, & \text{kui } 0 \leq k \leq m-1; \\ 0, & \text{kui } k \geq m. \end{cases}$$

Üldistatud aritmeetiline kolmnurk ja arvude m -ndsüsteem

Suurused $C_m(k, n)$ on seotud arvude m -ndsüsteemiga. Nimelt võrdub $C_m(k, n)$ nende n -kohaliste arvude arvuga m -ndsüsteemis, mille ristsumma (numbrite summa) on k . Seejuures kasutame n -kohalise arvu mõistet laiemas mõttes, lubades ka ühe või mitme nulliga algavaid arve. Näiteks arvu 001215 vaatleme kuuekohalisena, tema ristsumma on 9.

Sõnastatud väite tõestamiseks tähistame sümboliga $B_m(k, n)$ nende n -kohaliste arvude arvu m -ndsüsteemis, mille numbrite summa on k . Näitame, et arvud $B_m(k, n)$ rahuldavad sama seost (3) mis suurused $C_m(k, n)$. Tõepoolest, arvu viimane number m -ndsüsteemis võib olla 0, 1, ..., $m-1$. Vastavalt sellele võib n -kohalisest arvust viimase numbri ärajätmise teel saada $(n-1)$ -kohalise arvu ristsumma olla $k, k-1, \dots, k-m+1$. Summa reegli järgi saame siit

$$B_m(k, n) = B_m(k, n-1) + \dots + B_m(k-m+1, n-1). \quad (4)$$

Peale selle on selge, et $B_m(k, 1)$ võrdub ühega, kui $0 \leq k \leq m-1$, ja nulliga ülejäänud juhtudel ($0 \leq k \leq m-1$ puhul leidub m -ndsüsteemis vaid üks ühekohaline arv ristsummaga k , $k \geq m$ korral ei leidu aga ühtki sellist arvu). Seega ühtib arvude $B_m(k, n)$ tabeli esimene rida arvude $C_m(k, n)$ tabeli vastava reaga. Et ka nende tabelite koostamise seadused (3) ja (4) ühtivad, siis saame: $B_m(k, n) = C_m(k, n)$ iga k ja n puhul.

Arvude $C_m(k, n)$ mõningad omadused

Arvudel $C_m(k, n)$ on rida omadusi, mis meenutavad arvude C_k^n omadusi. Selles pole midagi imelikku, sest aritmeetilise kolmnurga konstrueerimisviisist järeldub, et $C_2(k, n) = C_k^n$. Kõigepealt märgime, et $C_m(k, n)$ erineb nullist vaid $0 \leq k \leq n(m-1)$ puhul. See järeldub otsekohe asjaolust, et m -aritmeetilise kolmnurga iga rida on eelnevast $m-1$ võrra pikem.

Näitame edasi, et arvudel $C_m(k, n)$ on järgmine sümmeetria-omadus:

$$C_m(k, n) = C_m(n(m-1) - k, n). \quad (5)$$

Selleks seame igale n -kohalisele m -ndsüsteemi arvule vastavusse «täiendi», mille saame, kui täiendame arvu iga numbrit $(m-1)$ -ni. Näiteks arvu 3140216 täiendiks 7-ndsüsteemis on 3526450. Kui antud arvu ristsumma oli k , siis on täiendi ristsumma $n(m-1) - k$. Seejärel on n -kohalise arve ristsummaga k niisama palju kui arve ristsummaga $n(m-1) - k$. Kuid seda väljendabki võrdus (5).

Et n -kohalise arve on m -ndsüsteemis m^n (vt. lk. 9), siis kehtib seos

$$C_m(0, n) + C_m(1, n) + \dots + C_m(n(m-1), n) = m^n. \quad (6)$$

Tõestame nüüd valemi

$$C_m(0, l)C_m(k, n-l) + C_m(1, l) \cdot C_m(k-1, n-l) + \dots \\ \dots + C_m(k, l)C_m(0, n-l) = C_m(k, n), \quad (7)$$

kus $0 \leq l \leq n$. Selleks jaotame kõik n -kohalised arvud ristsummaga k klassidesse. s -ndasse klassi paigutame arvud, millel esimese l numbrilise summa on s . Siis on viimase $n - l$ numbrilise summa $k - s$.

Korrutise reegli järgi saame, et s -ndasse klassi kuulub $C_m(s, l) C_m(k - s, n - l)$ arvu. Et ristsummat k omavaid n -kohalisi arve on üldse $C_m(k, n)$, siis saame summa reegli põhjal seose (7).

Erijuhul, kui $l = 1$, annab seos (7) võrduse (3) (sest $C_m(k, 1) = 1$, kui $0 \leq k \leq m - 1$ ja $C_m(k, 1) = 0$, kui $k \geq m$).

Näitame lõpuks, et kehtib võrdus

$$C_n^0 C_{m-1}(k - n, n) + C_n^1 C_{m-1}(k - n + 1, n - 1) + \dots + C_n^s C_{m-1}(k - n + s, n - s) + \dots + C_n^n C_{m-1}(k, 0) = C_m(k, n). \quad (8)$$

Selleks jaotame kõik m -ndsüsteemi n -kohalised arvud ristsummaga k klassidesse. s -ndasse klassi kuuluvaiks ($0 \leq s \leq n$) loeme arvud, mille tähis m -ndsüsteemis sisaldab parajasti s nulli.

Leiame, mitu arvu kuulub s -ndasse klassi. Iga arvu s -ndast klassist saab valida kahes etapis. Algul valime kohad, kus seisavad nullid. Et vaatlеме n -kohalisi arve ja nulle on s , siis saab seda teha C_n^s viisil. Seejärel tõmbame kõik nullid maha ja vähendame iga allesjäänud numbrit 1 võrra. Saame $(n - s)$ -kohalise arvu, mis on kirjutatud numbritega $0, 1, \dots, m - 2$ (s. o. $(m - 1)$ -ndsüsteemis), selle ristsumma on $k - (n - s) = k - n + s$. Selliseid arve on $C_{m-1}(k - n + s, n - s)$. Toodud arutlusest on näha, et s -ndasse klassi kuulub $C_n^s C_{m-1}(k - n + s, n - s)$ arvu. Et ristsummat k omavaid n -kohalisi arve on üldse $C_m(k, n)$, siis saame summa reegli põhjal seose (8).

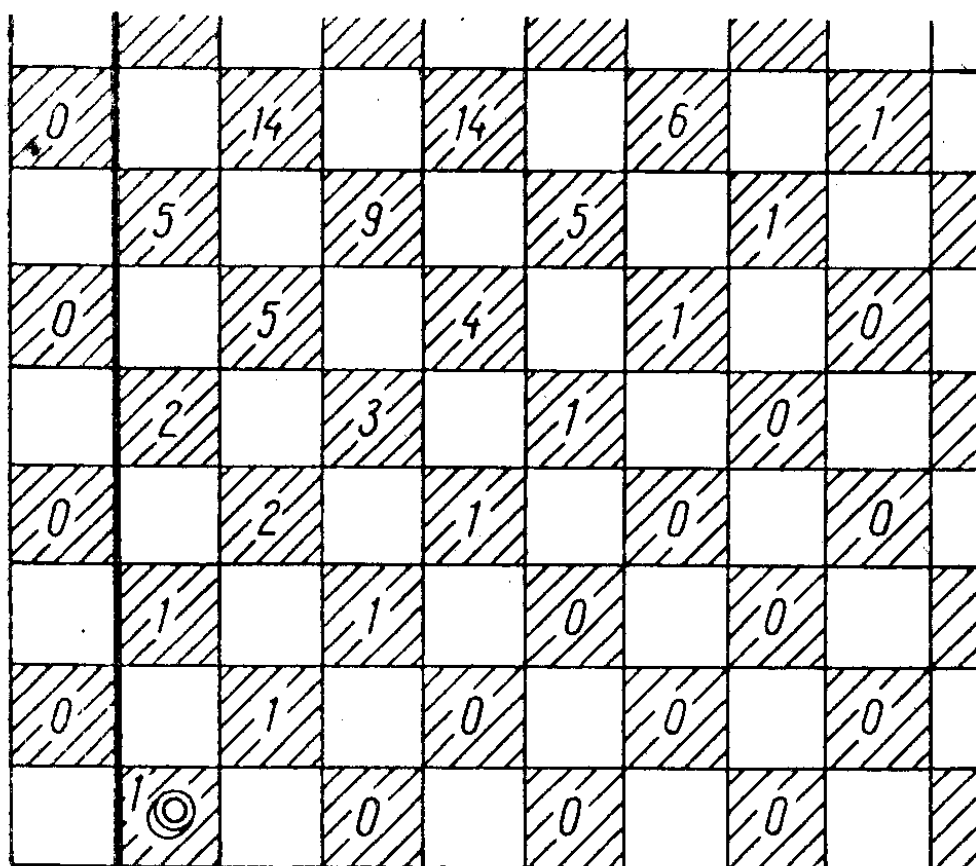
Et $C_2(k, n) = C_k^n$, siis järeldub valemist (8), et

$$C_3(k, n) = C_n^0 C_{k-n}^n + C_n^1 C_{k-n+1}^{n-1} + \dots + C_n^n C_k^0.$$

Valemit (8) korduvalt kasutades saame arvud $C_m(k, n)$ avaldada binoomkordajate kaudu.

Ülesanne nurgas paiknevast kabendist

Võtame uuesti kahe kiirega piiratud lõpmatu malelaua ja asetame selle nurga kabendi (joon. 24). Laua igale väljale kirjutame arvu, mis näitab, mitmel viisil võib kabend selle väljani jõuda. Tulemus erineb varem saadust, kus malelauda piiras vaid üks sirge (vt. lk. 117), sest nüüd ei tohi kabend ületada vertikaalset piiri. Seejärel jääb antud väljale sattumisviiside arv väiksemaks: sellele väljale minnes ei tohi kabend liiga vasakule kalduda. Näiteks piiriäärsetele väljadele võib ta sattuda ainult ühelt, aga mitte kahelt väljalt nagu leheküljel 117.



Joon. 24

Lk. 117 märkisime, et iga mustale väljale kirjutatud arv võrdub kahele mustale naaberväljale ülemisel horisontaalil kirjutatud arvude summaga. Et see seadus ka nüüd jõusse jääks, tuleb piirjoonest vasakul võtta veel üks vertikaal ja selle igale mustale väljale kirjutada null (niisugusele väljale pole võimalik jõuda.).

Arvutame, mitmel viisil võib tehtud kitsendust arvestades mingi väljani jõuda. Iga teekonna võib kirja panna nullidest ja ühtedest koosneva jadana: null tähendab käiku vasakule ja üks käiku paremale. Seejuures määrab nullide ja ühtede arvu ainult väli, milleni kabend peab jõudma. Näiteks igasugune 4 nullist ja 6 ühest koosnev teekond viib väljale teise vertikaali ja kümnenda horisontaali lõikekohal (me loeme nagu varemgi, et äärmiste liinide numbriteks on nullid).

Kuid mitte igasugune nullide ja ühtede järjestus jadas pole lubatav. Näiteks nullist ei tohi alustada: see käik viib kabendi kohe malelaualt välja. Lubatavatel järjestustel jadas on järgmine iseloomulik omadus: ühegi koha ees pole ühtesid vähem kui nulle, sest liikumise ühelgi hetkel ei tohi käikude arv paremale olla väiksem kui vasakule, muidu läheks kabend malelaualt välja.

0		14		20		15		6		1	
	4		10		10		5		1		
0		4		6		4		1		0	
	1		3		3		1		0		
0		1		2		1		0		0	
	0		1		1		0		0		
0		0		1		0		0		0	

Joon. 25

Seega tuleb meil leida, mitmel k nullist ja m ühest koosneval jadal on järgmine omadus: jada igale kohale eelnevate ühtede arv pole väiksem nullide arvust. Kuid selle ülesande oleme lk. 76 juba lahendanud (ainult seal võtsime nullide ja ühtede asemel tähed r ja v). Me näitasime, et niisuguseid jadasid on $\frac{m-k+1}{m+1} C_{m+k}^k$. See arv tulebki kirjutada $(m+k)$ -nda horisontaali ja $(m-k)$ -nda vertikaali lõikekohta.

Paigutame nüüd kabendi mitte nurka, vaid nullinda horisontaali q -ndale väljale (erinevalt kabereeglitest võib see väli olla ka valge). See juht vastab lk. 77 vaadeldud ülesandele, kus kassapidaja oli eelnevalt varunud q viiekümnekopikalist. Seal saadud vastust kasutades tuleme järgmisele järeldusele: kui kabend vajab antud väljani jõudmiseks k käiku vasakule ja m paremale ($0 \leq k \leq m+q$), siis võib sellele väljale sattuda $C_{m+k}^k - C_{m+k}^{k-q+1}$ erineval viisil. Joonisel 25 on toodud juhul $q=3$ tekkiv tabel.

Aritmeetiline viisnurk

Pöörame malelauda 45° võrra. Siis liigub kabend mööda vertikaal- ja horisontaalsirgeid ja laua ääred on nende sirgete suhtes kaldu 45 -kraadise nurga all. Seetõttu omandab ülesanne nurgas paiknevast kabendist järgmise kuju.

Malelaua nurgas seisab vanker. Mitmel viisil võib ta jõuda väljani (m, k) , kui ta liigub lühimat teed pidi ega ületa malelaua diagonaali (diagonaali väljadele võib vanker minna)?

Eespool tõestatust järeldub, et $k \leq m$ puhul on väljale sattumise viise $\frac{m-k+1}{m+1} C_{m+k}^k$ ja $k > m$ puhul null.

Kui aga diagonaal q välja võrra paremale viia, siis omandab vastus järgmise kuju: $0 \leq k \leq m+q$ puhul on sattumise viise $C_{m+k}^k - C_{m+k}^{k-q-1}$ ja $k > m+q$ korral null.

Kui malelaud on lõplik, siis täidavad vastava tabeli nullist erinevad arvud viisnurga (joon. 26). Seda nimetatakse *aritmeetiliseks viisnurgaks*. Sama nimetust kasutatakse ka tabeli jaoks, mis tekib kahe ristuva kiirega piiratud lõpmatul malelaual.

1	1	1	1	0	0	0
1	2	3	4	4	0	0
1	3	6	10	14	14	0
1	4	10	20	34	48	48

Joon. 26

Aritmeetilisel viisnurgal on samasugune põhiomadus nagu aritmeetilisel ruudul: selle iga arv võrdub tema kohal oleva arvu ja temast vasakul seisva arvu summaga. Aritmeetiline viisnurk ja aritmeetiline ruut erinevad selle poolest, et viisnurgal koosneb peadiagonaalist q ühiku võrra kõrgemal paiknev diagonaal nullidest (selles osas meenutab viisnurk lk. 119 vaadeldud aritmeetilist kolmnurka).

Võtame nüüd kahe ristuva kiirega piiratud malelauda ja vaatleme sellel mitte ühte, vaid kahte peadiagonaali paralleelset joont: ühte sellest q ühiku võrra kõrgemal ja teist s ühiku võrra madalamal. Loeme, et mõlemad jooned on vankrile «keelatud» ja kirjutame igale väljale arvu, mis näitab, mitmel viisil võib vanker selleni jõuda. Saadud tabel kannab aritmeetilise kuusnurga nime. Joonisel 27 on kujutatud selline tabel $q=4$, $s=3$ korral.

1	1	1	1	1	0	0
1	2	3	4	5	5	0
1	3	6	10	15	20	20
1	4	10	20	35	55	75
0	4	14	34	69	124	199
0	0	14	48	117	241	340

Joon. 27

Aritmeetilist kuusnurka võib tõlgitseda ka järgmiselt. Võtame malelauda, mida piiravad $s+q$ välja pikkune lõik ja kaks sellega ristuvat kiirt, ning paigutame kabendi väljale, mille kaugus ühest nurgast on s ja teisest q välja. Kirjutame igale väljale arvu, mis näitab, mitmel viisil võib kabend sellele sattuda. Tabelit 45° võrra pöörates saame aritmeetilise kuusnurga.

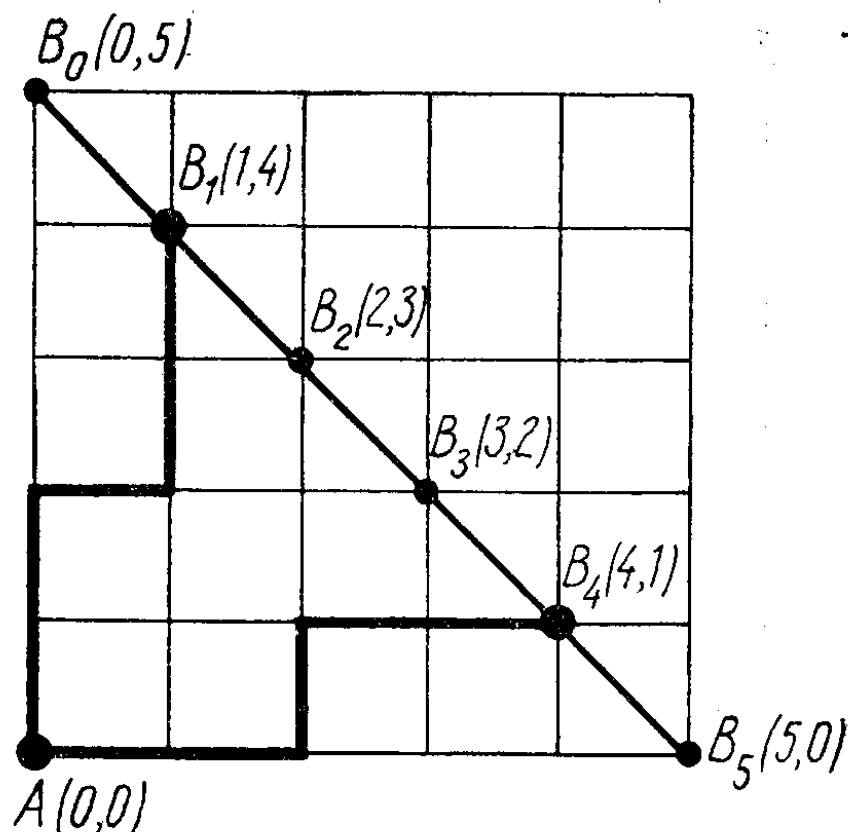
Geomeetriline viis kombinatsioonide omaduste tõestamiseks

Teises peatükis tõestasime mõned kombinatsioonide omadused. Vaatame nüüd, kuidas neid geomeetriliste arutluste abil näitlikult põhjendada.

Algul näitame, kuidas tuletada seost

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (9)$$

Joon. 28



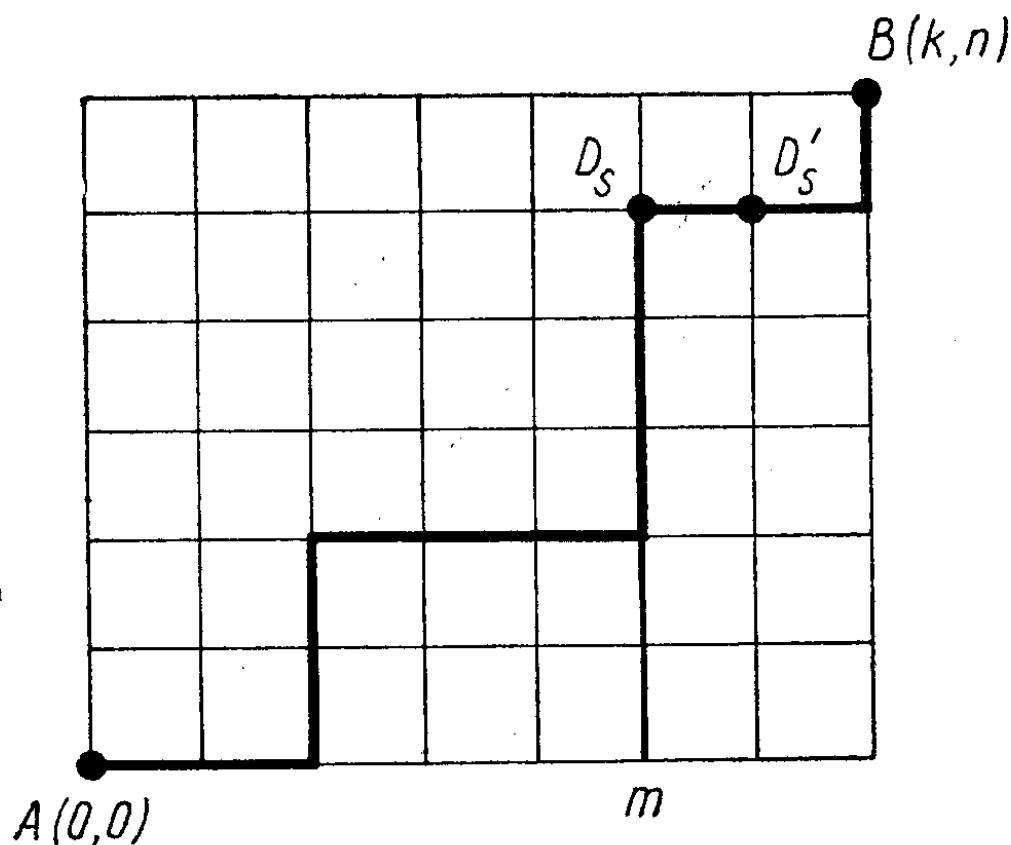
Selleks vaatleme kõiki teid, mis viivad punktist $A(0,0)$ punktidesse $B_k(k, n-k)$, $0 \leq k \leq n$ (joon. 28).

Need teed jagunevad klassidesse vastavalt sellele, millises punktis B_k , $0 \leq k \leq n$ nad lõpevad. Punkti B_k läheb $P(k, n-k) = C_n^k$ teed. Meil jääb üle kindlaks teha vaadeldavate teede üldarv. Iga sellise tee pikkus on n . Seda võib šifreerida nullidest ja ühtedest koosneva n -liikmelise jada abil, seades horisontaalsetele lõikudele vastavusse nullid ja vertikaalsetele ühed. Kuid kõigi ühtedest ja nullidest koosnevate n -liikmeliste jadade arv on 2^n . Sellega on seos (9) tõestatud.

Võrduste $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ ja $C_n^k = C_n^{n-k}$ geomeetriaalse põhjenduse andsime juba lk. 115.

Sel viisil saab tõestada ka keerukamaid võrdusi. Tõmbame vertikaalsirge abstsissiga m , $0 \leq m \leq k$ (joon. 29). Iga tee punktist $A(0,0)$ punkti $B(k,n)$ lõikab seda sirget, kusjuures ta võib osaliselt kulgeda mööda seda sirget. Jaotame kõik punktist A punkti B viivad teed klassidesse, kusjuures s -ndasse klassi arvame teed, mille viimane ühispunkt sirgega $x=m$ on $D_s(m,s)$.

Arvutame nüüd, mitu punkte A ja B ühendavat teed kuulub s -ndasse klassi. Iga selline tee koosneb punkte A



Joon. 29

ja D_s ühendavast teest, punkte $D_s(m, s)$ ja $D'_s(m+1, s)$ ühendavast lõigust (D_s on ju sirge $x=m$ viimane punkt sellel teel!) ning punkte $D'_s(m+1, s)$ ja $B(k, n)$ ühendavast teest. Valemi (1) järgi viib punktist $A(0, 0)$ punkti $D_s(m, s)$ $P(m, s)$ teed. Punkte $D_s(m+1, s)$ ja $B(k, n)$ ühendab aga $P(k-m-1, n-s)$ teed (et jõuda punktist D'_s punkti B , tuleb minna $k-m-1$ ühiklõiku paremale ja $n-s$ ülespoole). s -nda klassi teede üldarv on korru-tise reegli järgi

$$P(m, s)P(k-m-1, n-s).$$

Punkte A ja B ühendavaid teid on aga kokku $P(k, n)$, seepärast saame summa reegli järgi

$$\begin{aligned} P(k, n) = & P(m, 0)P(k-m-1, n) + \\ & + P(m, 1)P(k-m-1, n-1) + \dots + \\ & + P(m, n)P(k-m-1, 0). \end{aligned}$$

Selle võrduse võib kirja panna nii

$$\begin{aligned} C_{n+k}^k = & C_m^m C_{n+k-m-1}^{k-m-1} + C_{m+1}^m C_{n+k-m-2}^{k-m-1} + \dots + \\ & + C_{m+n}^m C_{k-m-1}^{k-m-1} \end{aligned} \quad (10)$$

(vrd. valemiga (24) lk. 52).

Erijuhul $m=k-1$ saame seose:

$$C_{n+k}^k = C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \dots + C_{k+s-1}^{k-1} + \dots + C_{k+n-1}^{k-1}. \quad (11)$$

Märgime, et seosed (10) ja (11) võib tuletada, kasutades korduvalt seost

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Tõestage iseseisvalt geomeetrilisel teel valem (23) leheküljelt 51:

$$C_{n+k}^n = C_{n+k-s}^n C_s^0 + C_{n+k-s}^{n-1} C_s^1 + \dots + C_{n+k-s}^{n-m} C_s^m + \dots + C_{n+k-s}^{n-s} C_s^s, \quad (12)$$

kus $0 \leq s \leq k$, $0 \leq s \leq n$.

Selleks tuleb tõmmata sirge läbi punktide $D(k-s, n)$ ja $E(k, n-s)$ ning jaotada kõigi punktist $A(0,0)$ punkti $B(k, n)$ viivate teede hulk klassidesse vastavalt sellele, missugust selle sirge punkti nad läbivad. Valem (12) erineb valemist (23) leheküljel 51 vaid tähistuste poolest.

Sellisel geomeetrilisel viisil võib tõestada veel mitmeid seoseid arvude C_{n+k}^k jaoks, jaotades punktist $A(0,0)$ punkti $B(k, n)$ viivad teed sobival viisil klassidesse.

Selleks et analoogiliselt tõestada seoseid arvude $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ vahel (vt. valemid (27), (28) leheküljel 53), tuleks kasutada mitmemõõtmelist geomeetriat. Me ei hakka seda siin tegema.

Märgime, et ka lehekülgedel 79–82 tuletatud seosed arvude C_n^k vahel lubavad end geomeetriliselt tõlgitseda. Selleks tuleb võtta malelaud, millel on tõmmatud peadiagonaaliga paralleelne joon, ja vaadelda ainult selliseid teid, mis seda joont ei lõika (kuid võivad omada temaga ühiseid punkte). Jaotades nende teede hulga erineval viisil klassidesse, jõuame III peatükis tuletatud valemiteni.

Kassajärjekorra-ülesande lahendust võib väga lihtsalt geomeetriliselt tõlgitseda. Järjekorra liikumisprotsessi võib kujutada graafiliselt, seades igale viiekümnekopikalisele vastavusse horisontaalse ja rublalisele vertikaalse lõigu. Ülesande tingimusest on selge, et saadud graafik ei tohi lõikuda peadiagonaaliga. Lahendamisel tehtud teisendused (ühe viiekümnekopikalist omava inimese lisa-

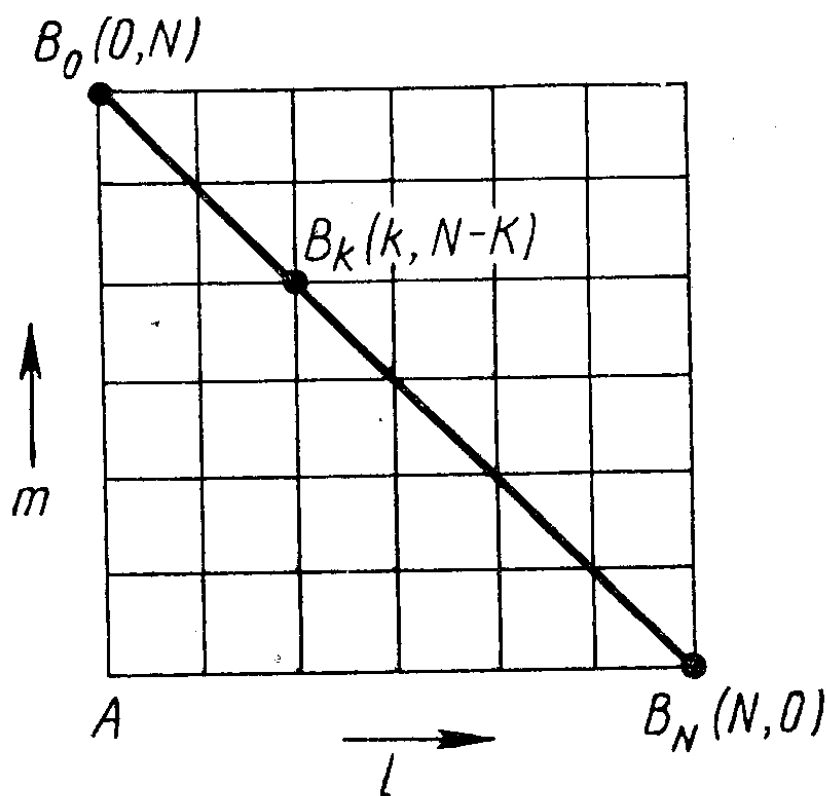
mine järjekorda ning viiekümnekopikaliste asendamine rublalistega ja vastupidi) saavad lihtsa geomeetrilise tähenduse: nad taanduvad sellele, et järjekorra liikumisgraafikut peegeldatakse peadiagonaaliga paralleelse ja viimasest ühe ühiku kaugusel paikneva sirge suhtes. Jätame selle ülesande lahendamisel kasutatud arutluste tõlkimise «geomeetria keelde» lugeja hooleks.

Juhuslik ekslemine

Eespool käsitletud ülesanded malendite liikumise kohta on tihedalt seotud juhusliku ekslemise probleemidega, mis on tähtsad füüsikas. Vaatleme järgmist ülesannet, mis anti lahendada Moskva VIII matemaatikaolümpiaadil 1945. a.

On antud teedevõrk (joon. 30). Punktist A väljub 2^N inimest. Pooled neist lähevad B_0 suunas ja pooled B_N suunas. Esimese teeristini jõudes jaguneb kumbki rühm: pooled lähevad B_0 suunas, pooled B_N suunas. Samasugune jagunemine toimub igal teeristil. Kus on need inimesed pärast N lõigu läbimist ja mitu inimest on siis igal teeristil?

Et iga inimene käib läbi N lõiku, siis on ilmne, et nad kõik satuvad punktidesse B_k koordinaatidega $(k, N - k)$,



Joon. 30

kus k omandab väärtusi $0, 1, \dots, N$. Kõik need punktid paiknevad punkte $B_0(0, N)$ ja $B_N(N, 0)$ läbival sirgel (vt. joon. 30).

Nüüd tuleb leida, mitu inimest jõuab punkti $B_k(k, N - k)$. Selleks šifreerime kõik punktist $A(0, 0)$ punktidesse $B_k(k, N - k)$ viivad teed nullide ja ühtede abil. Saame kõikvõimalikud nullidest ja ühtedest koosnevad N -liikmelised jaded. Nagu teame, on selliseid jadasid 2^N , s.o. niisama palju kui inimesi, kes väljusid punktist A . Siit järeldub, et iga tee käib läbi parajasti üks inimene. Seepärast tuleb igasse punkti $B_k(k, N - k)$ täpselt niisama palju inimesi, kuipalju lühimaid teid viib sinna punktist A . Nende lühimate teede hulga oleme aga juba arvutanud:

$$P(k, N - k) = C_N^k = \frac{N!}{k!(N - k)!}.$$

Seega tuleb punkti $B_k(k, N - k)$ $\frac{N!}{k!(N - k)!}$ inimest. See arv võrdub aritmeetilise kolmnurga N -nda rea k -nda elemendiga.

Browni liikumine

Eespool lahendatud ülesandele saab anda järgmise, sisult samaväärse kuju.

Punktist O x -teljel väljub 2^N inimest. Neist pooled lähevad paremale ja pooled vasakule. Tunni aja pärast jaguneb kumbki rühm uuesti pooleks ning pooled lähevad paremale ja pooled vasakule. Selline jagunemine toimub iga tunni järel. Mitu inimest tuleb igasse punkti N tundi pärast väljumist?

Eeldame, et inimesed läbivad tunni jooksul pool pikkusühikut. Arutledes täpselt samuti nagu eelmise ülesande lahendamisel, saame järgmise tulemuse: N tunni pärast asetsevad jalutuskäigust osavõtjad punktides $B_k\left(k, \frac{N}{2}\right)$, $k=0, 1, \dots, N$ (punkt O on võetud koordinaatide alguseks). Seejuures tuleb punkti B_k $C_N^k = \frac{N!}{k!(N - k)!}$ inimest.

On vähe tõenäoline, et inimesed liiguksid ülalkirjeldatud viisil (muide, selle ülesande rahvapärases variandis paikneb punktis O õllebaar...). Kuid mõningates füüsikaülesannetes tekib taoline ekslemine loomulikult viisil. Selline ekslemine on ainult lihtsaim mudel Browni liikumisest, mida osakesed sooritavad molekulide löökide mõjul.

Vaatleme osakesi, mis võivad liikuda ainult mööda sirget. Et molekulide löögid on juhuslikud, siis võib esimeses lähenduses lugeda, et pooled osakesed nihkuvad ajaühiku jooksul poole pikkusühiku võrra paremale, pooled aga niisama palju vasakule (tegelikult on protsess palju keerukam ja liikumine võib toimuda erinevate löökude võrra). Seetõttu, kui võtta 2^N osakest, mis alguses paiknevad punktis O , siis liiguvad nad umbes nii, nagu meie ülesandes kirjeldatud. Sellist osakeste levimist nimetatakse füüsikas *difusiooniks*. Inimhulga juhusliku ekslemise kohta lahendatud ülesanne lubab leida difundeervate osakeste jaotuse mõni aeg pärast difusiooni algust. Nimelt jaotuvad osakesed N ajaühiku järel sellise seaduse järgi: punktis $B_k \left(k - \frac{N}{2} \right)$ paikneb $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ osakest.

Nagu juba öeldud, on arvud C_N^k aritmeetilise kolmnurga N -nda rea elemendid. Difusiooni teistsuguse iseloomu puhul tekivad m -aritmeetilise kolmnurga N -nda rea elemendid. Olgu algul punktis O m^N osakest. Jaotame selle hulga m võrdseks osaks ja paigutame osad m erinevasse x -telje punkti, kusjuures naaberpunktide vaheline kaugus on 1 ja punktid paiknevad O suhtes sümmeetriliselt. Seejärel jaotatakse iga osa samasugusel viisil edasi (kui jaotatakse punktis B paiknevat osa, siis paigutatakse osakesed muidugi m punkti, mis on sümmeetrilised B suhtes). N sammu järel asetsevad osakesed punktides B_k koordinaatidega $k - \frac{m-1}{2}N$, kus $k = 0, 1, \dots, (m-1)N$. Seejuures on punktis B_k $C_m(N, k)$ osakest.

Suurte N väärtuste puhul muutub osakeste arvu leidmine igas punktis liiga keeruliseks. Kuid matemaatikas on sageli nii, et keerukuse kasvades hakkab jaotumisseadus lähenema piirjuhiks olevale lihtsale seaduspärasusele, kusjuures viimane kirjeldab osakeste jaotumist seda täpsemalt, mida suurem on osakeste arv ja mida keerukam on täpne seaduspärasus.

Tõenäosusteoorias näidatakse, et suurte N väärtuste korral paikneb lõigus $\left[x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2} \right]$, kus a on arvuga N võrreldes väike, umbes

$$\frac{12am^N}{\sqrt{2\pi N(m^2-1)}} \exp \left[-\frac{72x^2}{N^2(m^2-1)^2} \right]$$

osakest.¹ Seda väidet võib tõlgitseda järgmiselt. Konstrueerime treppjoone, mille kõrgus punktis $B_k \left(k - \frac{m-1}{2} N \right)$ on $C_m(N, k)$. Vähendame saadud joonel abstsisse $\frac{N(m^2-1)}{12}$ korda ja ordinaate $\frac{12am^N}{N(m^2-1)}$ korda. Kui nüüd N on suur, saame treppjoone, mis väga vähe erineb funktsiooni

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

graafikust.

Selle funktsiooni võttis tõenäosusteoorias kasutusele suur saksa matemaatik C. F. Gauss ja seda nimetatakse Gaussi funktsiooniks. Ta etendab tähtsat osa nii gaaside difusiooni käsitlemisel kui ka soojusjuhtivuse teoorias, vigade teoorias ja mujalgi.

Šemahha keisrinna juures

Vaatleme uuesti inimhulga ekslemist x -teljel, ainult loeme nüüd, et alguspunkti O vasakul asetsevad valdused kuuluvad Šemahha keisrinnale, kes etendas nii kurba osa saamatu tsaar Dodoni ja tema poegade saatuses. Lugeja arvatahvasti mäletab, et need, kes Šemahha keisririiki satusid, ei tulnud enam tagasi. Meie eeldame samuti, et need, kes satuvad telje vasakpoolsesse ossa, jäävadki sinna. Tuleb kindlaks teha, mitu inimest jääb Šemahha keisrinna juurde ja kus asetsevad ülejäänud, kui nende väljumisest on möödunud N tundi.

Osutub, et see ülesanne taandub eespool vaadeldud kassajärjekorra-ülesandele. Tõepoolest, vaatleme mingi punkti O väljunud inimese liikumist. Selle võib ette anda arvudest 1 ja -1 koosneva jada abil: igale paremale poole liikumisele vastab arv 1 , vasakule aga -1 . Kui sellises jadas on k ühte, siis liigub inimene k korda

¹ $\exp x$ tähendab siin e^x .

$$\underbrace{B_0\left(-\frac{N}{2}\right) \quad B_1\left(1-\frac{N}{2}\right) \quad O_1\left(-\frac{N}{2}\right) \quad O=B_{\frac{N}{2}}(0) \quad B_{\frac{N}{2}+1}(1)}_{\text{Šemahha keisririik}} \quad B_N\left(\frac{N}{2}\right)$$

Joon. 31

paremale ja $N-k$ korda vasakule. Lõpptulemusena peaks ta jõudma punkti $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$.¹ Ent nii on see vaid juhul, kui meie rändur ei satu Šemahha keisririiki. Sinna aga jõuab ta siis, kui on mingiks ajamomendiks liikunud vasakule rohkem kordi kui paremale.

Kui paremale ja vasakule liikumiste asemel vaadelda inimesi viiekümnekopikaliste või rublalistega, siis võib öelda, et Šemahha keisrinna juurde sattumine vastab juhule, kus kassajärjekord seisma jääb. Järelikult võrdub punkti $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ jõudnud inimeste arv nende juhtude arvuga, mil k viiekümnekopikalise omanikust ja $N-k$ rublalise omanikust koosnev järjekord takistusteta edasi liigub. Me teame aga, et see arv erineb nullist vaid siis, kui $k \geq N-k$. Sel korral on nende juhtude arv

$$A(N-k, k) = C_N^{N-k} - C_N^{N-k-1} = \frac{N!(2k-N+1)}{(N-k)!(k+1)!}$$

(vt. lk. 76).

Niisiis, N tundi pärast 2^N inimese väljumist jõuab punktist O punkti $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ (kus $2k \geq N$) $C_N^{N-k} - C_N^{N-k-1}$

inimest. Nüüd pole enam raske arvutada, mitu inimest satub Šemahha keisririiki. Selleks liidame algul suurused $C_N^{N-k} - C_N^{N-k-1}$, andes indeksile k väärtused arvust $k =$

$= E\left(\frac{N}{2}\right) + 1^2$ arvuni N . Saame, et $C_N^{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}$ inimest ei sattunud Šemahha keisririiki. Et aga punktist O väljus kokku 2^N inimest, siis sattus keisrinna valdustesse $2^N - C_N^{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}$ inimest.

¹ Meenutame, et ta liigub iga kord poole pikkusühiku võrra.

² Vaata märkust lk. 82.

Kui Šemahha keisririik algaks mitte punktist O , vaid punktist $O_1\left(-\frac{q}{2}\right)$ ja jääks sellest vasakule (punkt O_1 sinna veel ei kuulu), saaksime veidi teistsuguse tulemuse. Osutuks nimelt, et punktidesse $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ (kus $k \geq \frac{N-q}{2}$) tuleks $C_N^{N-k} - C_N^{N-k-q-1}$ inimest, ülejäänud satuksid Šemahha keisrinna valdustesse. See järeldub otsekohe lk. 77 lahendatud ülesande tulemusest.

Neelav membraan

Me juba rääkisime, et ülesanded juhuslikust ekslemisest on füüsika jaoks väga tähtsad: nad on osakeste difusiooni lihtsaimad mudelid. Ülesandel Šemahha keisrinnast on samuti lihtne füüsikaline tõlgendus: punktist O vasakul paikneb osakesi neelavast materjalist membraan. Kui membraan ulatub otse punktini O , siis tekib algul vaadeldud juht. Kui aga membraan on punktist O $\frac{q}{2}$ pikkusühiku kaugusel, saame eelmise punkti lõpul lahendatud ülesande. Neil aegadel, kui kombinatoorika ja tõenäosusteooria peamiseks praktiliseks rakenduseks oli hasartmängude teooria, sõnastati neeldumisega juhusliku ekslemise ülesanne teisiti: kõneldi «mängudest laostumiseni». Kujutleme kahte inimest, kes mängivad näiteks kulli ja kirja. Pärast iga partiid maksab kaotaja võitjale ühe rubla. Mängija, kes on oma raha kaotanud, lõpetab mängu. Tuli välja arvutada mängu erinevate lõpptulemuste tõenäosused, kui alguses oli ühel mängijal p rubla ja teisel q rubla. Ilmselt on see ülesanne seotud osakeste difusiooni ülesandega niisuguse piirkonna kohta, mis on kahelt poolt piiratud neelava membraaniga.

Ekslemine lõpmatul tasandil

Seni vaatlesime niisuguse malevankri ekslemist, mis võis liikuda vaid üles või paremale. See on tegelikult samaväärne ekslemisega lõpmatul sirgel. Uurime nüüd juhtu, kus vanker liigub lõpmatul malelaua mistahes suunas, s. t. lahendame järgmise ülesande.

Esiialgu paikneb malevanker igas suunas lõpmatu malelaua väljal $(0,0)$. Mitmel viisil võib ta N käiguga jõuda väljale $A(p,q)$ (eeldame, et vanker liigub ühe käiguga ainult naaberväljale)?

Sümmeetriakaalutluste tõttu piisab, kui vaadelda juhtu, kus $p \geq 0$, $q \geq 0$. Kui vanker liiguks lühimat teed mööda, jõuaks ta väljani $A(p,q)$ $p+q$ käiguga. Seetõttu peab kehtima võrratus $N \geq p+q$. N -käigulise tee erinevus lühimast seisneb selles, et N -käigulise tee kasutamisel teeb vanker mõned üksteist annulleerivad käigud ning on ilmne, et neid käike ($N - p - q$) peab olema paarisarv. Seepärast tähistame

$$N - p - q = 2k.$$

Nummerdame kõik vankri poolt tehtud käigud arvude $1, 2, \dots, N$ abil. Tähistame X abil nende käikude järjenumbrite hulga, kus vanker liikus vasakule või alla. Koosnevu hulk Y nende käikude numbritest, kus vanker liikus paremale või alla. Kui teame hulki X ja Y , siis on vankri liikumine meile täielikult teada: mõlemasse hulka kuuluvad numbrid tähendavad käike alla, hulka X kuuluvad ja hulka Y mittekuuluvad numbrid annavad käigud vasakule, hulgas Y sisalduvad ja hulgas X mitteesinevad numbrid tähendavad käike paremale. Lõpuks need numbrid, mis ei kuulu kumbagi hulka, annavad käigud üles.

Järelikult taandub väljale $A(p,q)$ sattumisviiside arvu leidmine sellele, et tuleb arvutada, mitmel viisil saab valida hulgad X ja Y . Kuid iga käigu alla või vasakule peab annulleerima mõni teine käik. Sisaldugu hulgas X k elementi. Et vanker peab jõudma väljani $A(p,q)$, siis peab parempoolseid käike olema p võrra rohkem kui vasakpoolseid. Et käigud alla sisalduvad mõlemas hulgas, siis peab hulgas Y olema p elementi rohkem kui hulgas X , s. o. $p+k$ elementi. Pole raske näha, et kui esimese N naturaalarvu seast valida suvaliselt hulk X (k elementi) ja hulk Y ($p+k$ elementi), siis vastab neile hulkadele vankri teekond väljalt O väljale A . Nimelt, kui neil hulkadel on s ühist elementi, siis tuleb teha s käiku alla, $q+s$ üles, $k-s$ vasakule ja $k-s+p$ paremale, millega vanker jõuabki väljale A . Kuid hulga X saab valida C_N^k viisil ja hulga Y C_N^{p+k} viisil. Kokku saame korrutise reegli järgi $C_N^k C_N^{p+k}$ võimalust hulkade X ja Y valimiseks. Järelikult on punkti $A(p,q)$ saavutamisviise üldse $T = C_N^k C_N^{p+k}$.

Üldine malevankrite ülesanne

Siirdume malelauaga seotud kombinatoorikaülesannete uue tsükli juurde. Nendes ülesannetes tuleb leida kahe malendi (kahe kuninga, lipu jne.) selliste asendite arv, mille puhul nad teineteist lüüa saavad. On selge, et sellega määratakse ka nende asendite arv, mille puhul need malendid teineteist lüüa ei saa: kahe malendi paigutuste üldarvu saab kohe variatsioonide arvu valemist.

Mõne niisuguse ülesande oleme juba lahendanud — leheküljel 30 käsitlesime ülesannet 8-st vankrist harilikul malelaual. Üldistame seda ülesannet ja võtame $m \times n$ -laua, s.o. malelaua m horisontaalist ja n vertikaalist. Me tahame teada, mitmel viisil saab $m \times n$ -lauale paigutada k vankrit nii, et nad ei saaks üksteist lüüa.

Selge, et ülesande lahenduvuseks peavad kehtima tingimused $k \leq m$ ja $k \leq n$, sest muidu satuvad mingisugused kaks vankrit ühele horisontaalile või vertikaalile. Olgu need tingimused täidetud. Vankreid võib nii paigutada kahes etapis. Algul valime horisontaalid, millel vankrid paiknevad. Et horisontaalide üldarv on m ja valida tuleb neid k , siis saab valiku teha C_m^k viisil. Samuti saab C_n^k viisil valida vertikaalid, millel paiknevad vankrid. Et vertikaalide valik ei sõltu horisontaalide valikust, siis saame korrutise reegli järgi $C_m^k C_n^k$ viisil valida need liinid, millel paiknevad vankrid.

Kuid sellega pole asi veel lõppenud. k horisontaali ja k vertikaali lõikuvad ju k^2 väljal. Nihutades neid välju vajaduse korral kokku, saame uue malelaua k horisontaalist ja k vertikaalist. Kuid me teame juba, et niisugusele lauale saab k vankrit paigutada $k!$ viisil (nii et nad ei saaks üksteist lüüa). Seetõttu on vankrite nõutud paigutuste üldarv

$$C_m^k C_n^k k! = \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} \quad (13)$$

Näiteks 3 vankrit saab harilikule malelauale paigutada

$$\frac{8!8!}{3!5!5!} = 18\,816$$

viisil

$k=m=n$ korral annab valem (13) vastuse $n!$ kooskõlas leheküljel 30 öelduga.

Kui eemaldada kitsendus, et vankrid ei tohi üksteist lüüa, siis oleks vastus teistsugune. Nimelt tuleks meil siis $m \times n$ välja seast valida mistahes k välja, seda saab aga teha

$$C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{k!(mn-k)!}$$

viisil. Kui k vankrit üksteisest erineksid, siis tuleks saadud vastused korrutada arvuga $k!$.

Sümmeetrilised paigutused

Muudame nüüd vankrite-ülesande keerulisemaks ja nõuame, et vankrid ei lööks üksteist ja paikneksid malelaua sümmeetriliselt. Seejuures tekib palju ülesandeid vastavalt sellele, milline sümmeetriatingimus püstitakse.

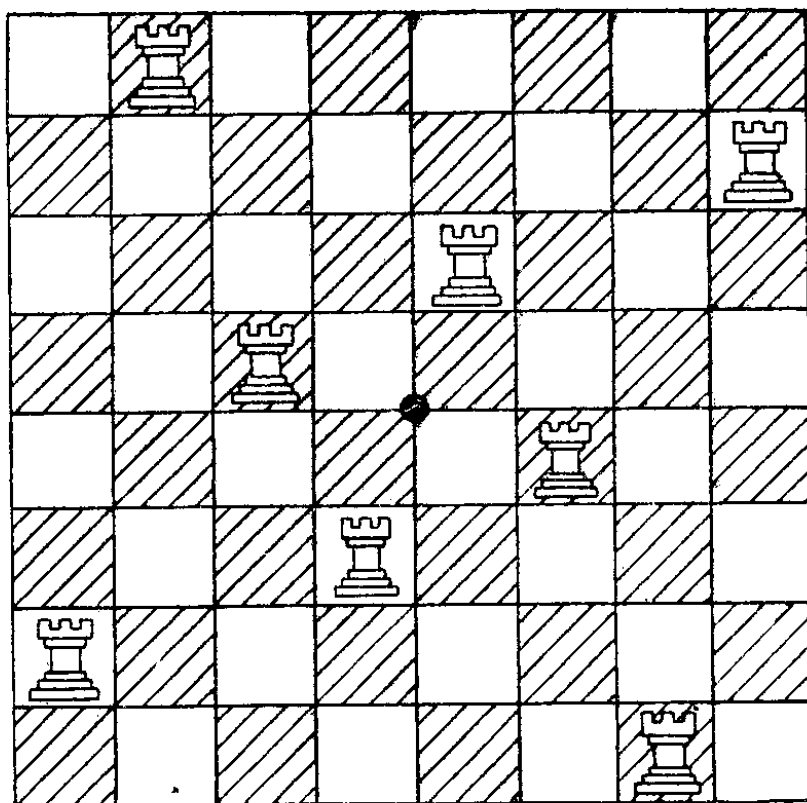
Kõige lihtsam on juht, kus vankrid asetsevad sümmeetriliselt malelaua keskpunkti suhtes. Tähistame G_n abil ülesande lahendite arvu juhul, kus n vankrit paiknevad n horisontaalist ja n vertikaalist koosneval laual. Näitame nüüd, et

$$G_{2n} = 2n G_{2n-2}. \quad (14)$$

Koosnegu malelaud $2n$ horisontaalist ja $2n$ vertikaalist. Esimesel vertikaalil asetsev vanker võib hõivata ükskõik millise selle vertikaali $2n$ väljast. Ülesande tingimuse põhjal on sellega määratud viimasel vertikaalil asetseva vankri asukoht: ta peab paiknema esimesega laua keskpunkti suhtes sümmeetriliselt. Kustutame esimese ja viimase vertikaali ning vankrite poolt hõivatud horisontaalid (et horisontaale on paarisarv, siis ei saa vankrid seista samal horisontaalil). Tekib malelaud, mis koosneb $2n-2$ vertikaalist ja $2n-2$ horisontaalist. On selge, et vankrite igale sümmeetrilisele paigutusele vanal laual vastab sümmeetriline paigutus uuel laual. Siit järeldubki, et $G_{2n} = 2n G_{2n-2}$ (meenutame veel kord, et esimene vanker võib hõivata ükskõik millise $2n$ väljast sellel vertikaalil).

Valemit (14) kasutades leiame, et $G_{2n} = 2^n n!$.

Nüüd aga vaatleme $2n+1$ vertikaalist ja $2n+1$ horisontaalist koosnevat lauda. Sel juhul laua tsentraalväljal ei ole sümmeetrilist välja ja seal peab kindlasti seisma vanker. Kui tsentraalse vertikaali ja horisontaali maha



Joon. 32

tõmbame, saame $2n$ vankri sümmeetrilise paigutuse $2n \times 2n$ -laual. Seega kehtib võrdus

$$G_{2n+1} = G_{2n} = 2^n n!. \quad (15)$$

Vaatleme nüüd veidi keerukamat ülesannet paigutustest, mis ei muutu malelaua pööramisel 90° võrra (joonisel 32 on kujutatud üks selline paigutus 8×8 -laual). Olgu laual $4n$ vertikaali ja $4n$ horisontaali ning vankrite arv samuti $4n$. Sel juhul võib esimesel vertikaalil seisev vanker asuda ükskõik millisele väljale peale nurgaväljade, s.o. suvalisele $4n - 2$ väljast (nurgaväljale ei tohi vankrit panna, sest pärast pööret 90° võrra saaksime kaks vankrit, mis teineteist löövad). Sellele vankrile vastavad veel kolm vankrit, mis seisavad viimasel horisontaalil, viimasel vertikaalil ja esimesel horisontaalil (need saadakse paigutatud vankrist pööretega 90° , 180° ja 270° võrra). Kui kustutame horisontaalid ja vertikaalid, millel need vankrid seisavad, saame samasuguse sümmeetriaga vankrite paigutuse $(4n - 4) \times (4n - 4)$ -laual. Seepärast kehtib võrdus

$$R_{4n} = (4n - 2) R_{4n-4},$$

kus R_n on ülesande lahendite arv $n \times n$ -laua jaoks. Seetõttu on selge, et

$$R_{4n} = 2^n (2n - 1) (2n - 3) \dots 1. \quad (16)$$

Ülesande lahendite arv $(4n+1) \times (4n+1)$ -laua puhul on sama mis $4n \times 4n$ -laua jaoks: $(4n+1) \times (4n+1)$ -laua puhul asetseb ju üks vanker kindlasti tsentris ning tsentraalse horisontaali ja vertikaali võib kustutada. Seepärast

$$R_{4n+1} = R_{4n}. \quad (17)$$

Kuid $(4n+2) \times (4n+2)$ - ja $(4n+3) \times (4n+3)$ -laudade korral võrdub lahendite arv nulliga. Tõepoolest, iga vankri puhul võib esineda kaks juhtu: vanker seisab kas laua tsentris või mitte. Teisel juhul kuulub vanker nelikusse, milles vankrid teisenevad üksteiseks laua pööramisel 90° võrra. Seepärast peab vankrite üldarvul olema kuju $4n$ (kui laual pole tsentraalvälja) või $4n+1$. Seega oleme näidanud, et $R_{4n+2} = R_{4n+3} = 0$.

Leiame lõpuks, kui palju on n vankri paigutusi, mis on sümmeetrilised diagonaali suhtes.¹ Tähistame selliste paigutuste arvu $n \times n$ -laual Q_n abil. Siis kehtib seos

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1) Q_{n-2}. \quad (18)$$

Tõepoolest, esimesel vertikaalil seisev vanker on kas vasakpoolses alumises nurgas või mitte. Esimesel juhul kustutame esimese vertikaali ja esimese horisontaali ning saame $n-1$ vankri sümmeetrilise paigutuse $(n-1) \times (n-1)$ -laual. Selliseid paigutusi on Q_{n-1} . Teisel juhul leidub antud vankri jaoks temaga diagonaali suhtes sümmeetriline vanker. Kustutame need horisontaalid ja vertikaalid, kus nimetatud vankrid seisavad. Saame $n-2$ vankri sümmeetrilise paigutuse $(n-2) \times (n-2)$ -laual. Et niisuguseid paigutusi on Q_{n-2} ja vankri võib panna esimese vertikaali $(n-1)$ -le väljale, siis saame $(n-1) Q_{n-2}$ paigutamiseviisi. Siit järeldebki seos (18).

Kehtib võrdus

$$Q_n = 1 + C_n^2 + \frac{1}{1 \cdot 2} C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \dots \quad (19)$$

Selle saab tuletada, kui vankrite paigutused klassidesse jaotatakse: s -ndasse klassi arvatakse paigutused, kus s paari vankreid ei asetse diagonaalil.

¹ Me võtame diagonaali, mis läheb läbi alumise vasakpoolse nurgavälja.

Vaatleme nüüd n vankri paigutusi $n \times n$ -lauale, kus vankrid asetsevad sümmeetriliselt mõlema telje suhtes ning ei löö üksteist. Just samuti näidatakse, et selliste paigutuste arv B_n rahuldab tingimusi

$$B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n-2)B_{2n-4}, \quad B_{2n+1} = B_{2n}.$$

Kaks ratsut

Mitmel viisil saab $m \times n$ -lauale paigutada valge ja musta ratsu nii, et nad ei saaks teineteist lüüa?

Ülesande lahendamise muudab keerukaks asjaolu, et ratsul on malelaua eri väljadel erinev arv käike: kui $m \geq 5$ ja $n \geq 5$, siis on ratsul nurgas ainult kaks käiku, ühtedel ääreväljadel 3, teistel 4, laua keskosas aga 8 käiku. Põhjuseks on ratsu käikude mitmekesisus: ta võib minna ühe välja edasi ja kaks üles või kaks välja tagasi ja ühe alla jne. Kokku on ratsul 8 liiki käike, mida saab ette anda, näidates, mitu välja ratsu käib horisontaal- ja mitu vertikaalsuunas. Need käigud on seega järgmised: $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$.

Tekkinud raskuse ületamiseks vaatleme ratsut 8 malendi ühendina, kus igal malendil on ainult ühte tüüpi käigud. Uurime, mitmel viisil saab malelauale paigutada $(2, 1)$ -ratsu nii, et ta hoiaks mingit välja tule all. Selge, et ta võib seista mistahes vertikaalil peale kahe viimase ja suvalisel horisontaalil peale viimase. Seega võib vertikaali valida $n-2$ viisil ja horisontaali $m-1$ viisil, kokku saame valge $(2, 1)$ -ratsu jaoks $(m-1) \cdot (n-2)$ paigutamisviisi. Sümmeetria tõttu on selge, et niisama palju on võimalusi asetada suvaline valge $(\pm 2, \pm 1)$ ratsu nii, et ta saaks lüüa musta ratsut. Valgete $(\pm 1, \pm 2)$ -ratsude jaoks on paigutamisviiside arv aga $(m-2) \cdot (n-1)$. Siit järeldub, et üldse saab valge ja musta ratsu paigutada

$$4[(m-1)(n-2) + (m-2)(n-1)] = \\ = 2[(2m-3)(2n-3) - 1]$$

viisil, nii et nad teineteist löövad. Kui asetaksime malelauale sama värvi ratsud, nii et nad saaksid teineteist kaitsta, tuleks poole vähem paigutamisviise (sest ratsud

võib ära vahetada). Kaks erinevat värvi ratsut saab paigutada

$$m^2n^2 - 9mn + 12m + 12n - 16$$

viisil, nii et nad teineteist ei löö (üldse saab kaks ratsut $m \times n$ -lauale asetada $mn(mn - 1)$ viisil).

Maleülesannete koostajad võtavad mõnikord kasutusse «muinasjutumalendid», mis käivad teisiti kui harilikud. Defineerime meiegi uue malendi, mille nimetame (p, q) -ratsuks, $p \geq 0$, $q \geq 0$. Seega malend liigub igal käigul p välja võrra horisontaalsiis ja q välja võrra vertikaalsiis. Harilik ratsu on näiteks $(1, 2)$ -ratsu ja $(2, 1)$ -ratsu ühend. Arutleme nüüd täpselt samuti nagu varem, eeldades, et $0 < p \leq n$, $0 < q \leq m$. Selgub: $m \times n$ -lauale saab kaks eri värvi (p, q) -ratsut paigutada $4(n - p) \cdot (m - q)$ viisil nii, et nad teineteist löövad. Kui aga p või q võrdub nulliga, saame poole vähem asetamisviise. Võimaluste arv väheneb kahekordselt ka siis, kui ratsud on ühte värvi.

Mistahes malendit võib tõlgitseda mitme (p, q) -ratsu ühendina, kus võivad esineda erinevad p ja q väärtused. Näiteks kuningas on $(0, 1)$ -, $(1, 0)$ - ja $(1, 1)$ -ratsu ühend. Seetõttu saab kaks eri värvi kuningat $m \times n$ -lauale asetada

$$2[n(m - 1) + (n - 1)m + 2(n - 1)(m - 1)] = \\ = 8mn - 6m - 6n + 4$$

viisil, nii et nad saaksid teineteist lüüa. Järelikult on $m^2n^2 - 9mn + 6m + 6n - 4$ võimalust paigutada nad nii, et nad teineteist ei lööks.

Oda on $(1, 1)$ -, $(2, 2)$ -, ..., (p, p) -ratsu ühend, kus p on vähim arvudest $m - 1$, $n - 1$. Oletame konkreetseuse mõttes, et $m \leq n$. Siis $p = m - 1$ ja kaks eri värvi oda saab

$$4[(n - 1)(m - 1) + (n - 2)(m - 2) + \dots + \\ + (n - m + 1) \cdot 1]$$

viisil asetada nii, et nad saaksid teineteist lüüa. Avame sulud ja kasutame valemeid naturaalarvude 1 kuni $m - 1$ summa ja nende ruutude summa jaoks. Võimaluste arvu saab kirjutada kujul

$$\frac{2m(m - 1)(3n - m - 1)}{3};$$

$m \geq n$ korral tuleb m ja n osad vahetada. Erijuhul $m = n$ saame

$$\frac{2m(m-1)(2m-1)}{3}$$

asetamisviisi.

Vankrite jaoks on paigutamisviiside arvu lihtsam määrata teisiti. Valge vankri võib asetada ükskõik millisele mn väljast. Ta hoiab tule all $m+n-2$ välja, millest suvalisele võib paigutada musta vankri. Seetõttu saame kokku $mn(m+n-2)$ paigutamisviisi, mille puhul vankrid saavad teineteist lüüa.

Et lippu võib vaadelda vankri ja oda ühendina, siis on $m \leq n$ puhul

$$\frac{2}{3}m(m-1)(3n-m-1) + mn(m+n-2)$$

võimalust paigutada kaks lippu $m \times n$ -lauale nii, et nad teineteist lööksid. Kui $m = n$, omandab see avaldis kuju

$$\frac{2}{3}m(m-1)(5m-1).$$

Jätame lugeja arvutada, mitmel viisil võib need malendid paigutada nii, et nad teineteist ei lööks.

VI. REKURRENTSED SEOSSED

Me oleme paljude kombinatoorikaülesannete lahendamisel kasutanud meetodit, mis taandab antud ülesande väiksema esemete arvuga ülesandeks. Sel moel tuletasime näiteks valemi kordumistega variatsioonide jaoks (lk. 9), samal viisil lahendasime peaaegu kõik jaotamisülesanded IV peatükist. Väiksema esemete arvuga analoogilisele ülesandele taandamise meetodit nimetatakse rekurrentsete seoste meetodiks (lad. k. *recurrere* — tagasi pöörduma). Rekurrentset seost kasutades saab ülesande n eseme kohta taandada ülesandele $n - 1$ esemest, siis ülesandele $n - 2$ esemest jne. Esemete arvu järk-järgult vähendades jõuame ülesandeni, mida on juba kerge lahendada. Paljudel juhtudel õnnestub rekurrentsest seosest saada valem, mis kombinatoorikaülesande otseselt lahendab.

Näiteks II peatükis (vt. lk. 29) tuletasime n elemendi permutatsioonide arvu valemi $P_n = n!$, kasutades valemit kordumisteta variatsioonide arvu jaoks. Kuid sellesama valemi võib tuletada ka teisiti, leides algul arvude P_n jaoks rekurrentse seose.

Olgu meil n eset $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$. Nende mistahes permutatsiooni võib saada sel teel, et võtta mingi esemete $a_1, \dots, a_{n-1}$ permutatsioon ja lisada sellele element a_n . On selge, et element a_n võib asuda erinevatele kohtadele. Me võime ta asetada päris algusse, permutatsiooni esimese ja teise elemendi vahele, teise ja kolmanda vahele, võime ta asetada aga ka päris lõppu. Element a_n võib asuda n erinevale kohale ja seepärast saame esemete $a_1, \dots, a_{n-1}$ igast permutatsioonist n elementide $a_1, \dots, \dots, a_{n-1}, a_n$ permutatsiooni. Kuid see tähendab, et n eseme permutatsioone on n korda rohkem kui $n - 1$ ele-

mendi permutatsioonide. Sellega on tuletatud rekurrentne seos

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Seda seost kasutades leiame järk-järgult, et

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = n(n-1)\dots 2P_1.$$

Kuid $P_1 = 1$, sest ühest elemendist saab teha ainult ühe permutatsiooni. Seepärast

$$P_n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!.$$

Oleme uuesti saanud valemi $P_n = n!$.

Meil esines palju rekurrentseid seoseid, kui lahendasime jaotusülesandeid, ülesandeid malenditest malelaua jne. Nüüd vaatleme veel mõningaid selliseid ülesandeid ja peatüki lõpus peatume rekurrentsete seoste üldisel teoorial.

Fibonacci arvud

Itaalia matemaatikult Fibonaccilt ilmus 1202. aastal teos «Liber Abaci», kus ta paljude teiste ülesannete seas esitas järgmise.

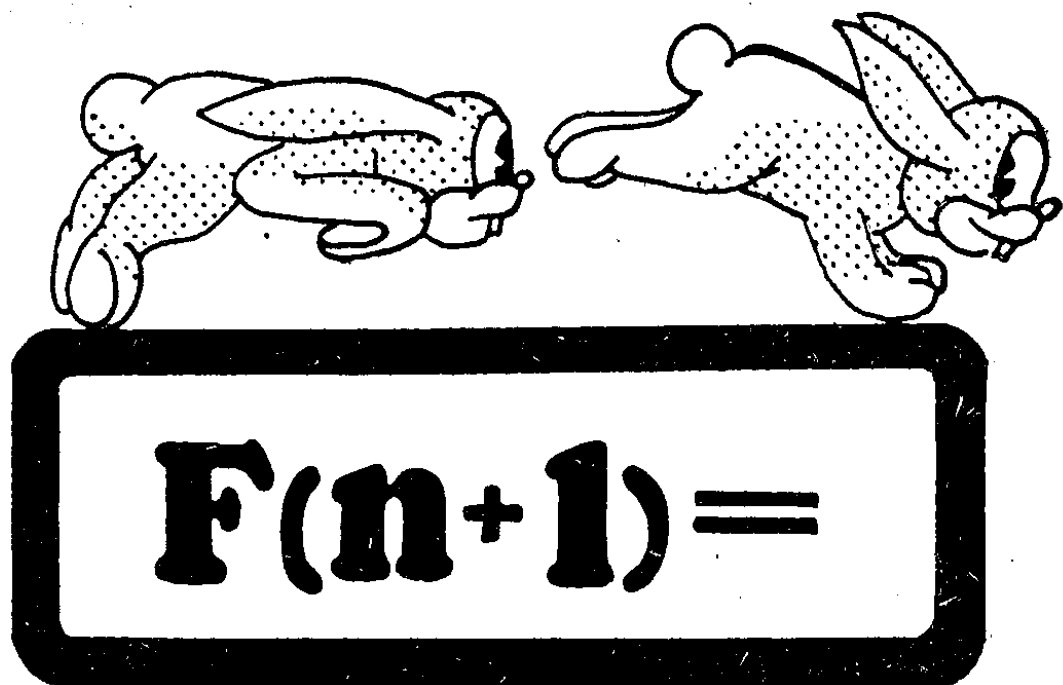
Küülikupaar sünnitab kord kuus kaks poega (emase ja isase), kusjuures vastsündinud küülikud toovad kahe kuu pärast juba järglasi. Kui palju on küülikuid aasta pärast, kui aasta algul oli üks paar küülikuid?

Ülesande tingimusest järeldub, et kuu aja pärast on kaks paari küülikuid. Kahe kuu pärast annab järglasi ainult esimene küülikupaar ja saame 3 paari. Veel kuu aja pärast annab aga järglasi nii lähtepaar kui ka kaks kuud tagasi sündinud paar. Seepärast on siis kokku 5 paari küülikuid.

Tähistame $F(n)$ kaudu küülikupaaride arvu n kuu möödumisel aasta algusest. Me nägime, et $n+1$ kuu pärast on olemas need $F(n)$ paari ja veel vastsündinud paare niisama palju, kui oli küülikupaare $(n-1)$ -se kuu lõpul, s.o. veel $F(n-1)$ paari. Teiste sõnadega, kehtib rekurrentne seos

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1). \quad (1)$$

Et tingimuste järgi $F(0) = 1$, $F(1) = 2$, siis leiame järk-järgult



$F(2) = 3, F(3) = 5, F(4) = 8$ jne.

Erijuhul $F(12) = 377$.

Arve $F(n)$ nimetatakse *Fibonacci arvudeks*. Neil on terve rida tähelepanuväärseid omadusi. Me tuletame nüüd nende arvude avaldised binoomkordajate C_m^k kaudu. Selleks leiame seose Fibonacci arvude ja järgmise kombinatoorikaülesande vahel.

Leida nullidest ja ühtedest koosnevate n -liikmeliste jadade arv, milles kaks ühte pole kusagil kõrvuti.

Selle seose leidmiseks võtame suvalise niisuguse jada ja seame talle vastavusse küülikupaari järgmise reegli põhjal: võtame paari nii, et tema enda ja tema «esivanemate» sünnikuud vastaksid kohtadele, kus jadas seisavad ühed, kõik ülejäänud kuud aga kohtadele, kus jadas on nullid (on kerge näha, et selline paar leidub). Näiteks jada 010010100010 määrab järgmise «sugupuu»: paar ise sündis 11-nda kuu lõpul, tema vanemad 7-nda kuu lõpul, «vanaisa» 5-nda kuu lõpul ja «vanavanaisa» teise kuu lõpul. Küülikute lähtepaar šifreeritakse seejuures jada 000000000000 abil.

Arusaadavalt ei või üheski jadas olla kaks ühte järjest: vastsündinud paar ei saa tingimuse kohaselt kuu aja pärast järglasi anda. Peale selle vastavad toodud reegli korral erinevatele jadadele erinevad paarid ja vastupidi, kahel erineval küülikupaaril on alati erinev «sugupuu», sest ülesande tingimuse põhjal toob emaküülik ainult ühe paari järglasi.

Leitud seos näitab, et nõutud omadusega n -liikmelisi jadasid on $F(n)$.

Tõestame nüüd, et

$$F(n) = C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-p+1}^p, \quad (2)$$

kus $p = \frac{n+1}{2}$, kui n on paaritu, ja $p = \frac{n}{2}$, kui n on paarisarv. Teiste sõnadega on p arvu $\frac{n+1}{2}$ täisosa (edaspidi tähistame arvu α täisosa $E(\alpha)$ kaudu; seega $p = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$).

Tõepoolest, $F(n)$ on kõigi nullidest ja ühtedest koosnevate n -jadade arv, milles kaks ühte ei asetse kunagi kõrvuti. Samasuguste jadade arv, milles on parajasti k ühte ja $n-k$ nulli, on võrdne C_{n-k+1}^k (vt. lk. 59). Et seejuures peab kehtima võrratus $k \leq n-k+1$, siis k muutub nullist kuni arvuni $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Summa reeglit rakendades jõuame seoseni (2).

Võrduse (2) võib tõestada ka teisiti. Tähistame

$$G(n) = C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-p+1}^p,$$

kus $p = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Võrdusest $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ on kerge järeldada, et

$$G(n) = G(n-1) + G(n-2). \quad (3)$$

Peale selle on ilmselt $G(1) = 2 = F(1)$ ja $G(2) = 3 = F(2)$. Et mõlemad jadad $F(n)$ ja $G(n)$ rahuldavad rekurrentset seost

$$\begin{aligned} X(n) &= X(n-1) + X(n-2), \text{ siis saame} \\ G(3) &= G(2) + G(1) = F(2) + F(1) = F(3) \end{aligned}$$

ja üldiselt

$$G(n) = F(n).$$

Teine tõestusmeetod

Eelmises punktis leidsime vahetult seose Fibonacci ülesande ja n -liikmeliste jadade kohta käiva kombinatorika-ülesande vahel. Selle seose oleks võinud kindlaks teha ka teisiti, tõestades otseselt, et kombinatorikaülesande lahendite arv $T(n)$ rahuldab sedasama rekurrentset seost

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) \quad (4)$$

mis Fibonacci arvudki.

Tõepoolest, võtame suvalise $(n+1)$ -liikmelise jada nullidest ja ühtedest, kus pole kõrvuti kahte ühte. See võib lõppeda kas nulliga või ühega. Kui ta lõpeb nulliga, siis jätame selle nulli ära ja saame meie tingimust rahuldava n -liikmelise jada. Vastupidi, kui võtame mistahes n -liikmelise jada nullidest ja ühtedest, kus ei esine kahte ühte järjest, ja lisame sellele nulli, saame samasuguse omadusega $(n+1)$ -liikmelise jada. Sellega oleme tõestanud, et nulliga lõppevate «heade» jadade arv on $T(n)$.

Lõppegu nüüd jada ühega. Et kahte ühte järjest olla ei või, siis seisab selle ühe ees null. Teiste sõnadega, jada lõpeb numbritega 01. Pärast 0 ja 1 ärajätmist tekkiv jada võib olla suvaline, kui vaid temas pole kahte ühte järjest. Seetõttu on ühega lõppevate «heade» jadade arv $T(n-1)$. Kuid iga jada lõpeb kas nulliga või ühega. Summa reegli põhjal saame, et $T(n+1) = T(n) + T(n-1)$.

Seega saime sama rekurrentse seose. Siit ei järeldu veel, et arvud $T(n)$ ja $F(n)$ ühtivad. Näiteks faktoriaalide ja subfaktoriaalide puhul (vt. lk. 68) kehtis üks ja sama rekurrentne seos:

$$X(n+1) = n[X(n) + X(n-1)]. \quad (5)$$

Kuid faktoriaalide jada esimesed liikmed on $0! = 1$, $1! = 1$, subfaktoriaalide korral aga $D(0) = 1$, $D(1) = 0$. Seetõttu osutusid erinevateks ka nende jadade kolmandad ja neljandad ja üldse kõik ülejäänud liikmed.

Et tõestada arvude $T(n)$ ja $F(n)$ kokkulangevust, tuleb veel näidata, et $T(1) = F(1)$ ja $T(2) = F(2)$, siis saame juba rekurrentse seose põhjal $T(3) = F(3)$, $T(4) = F(4)$ jne. Leidub kaks 1-liikmelist jada, mis rahuldavad esitatud tingimust (0 ja 1) ning kolm 2-liikmelist jada (00, 01 ja 10). Seepärast $T(1) = 2 = F(1)$ ja $T(2) = 3 = F(2)$. Sellega on väide tõestatud.

Järkjärgulise jaotamise protsess

Kombinatorikaülesannete lahendamiseks kasutatakse sageli eelmises punktis rakendatud meetodit. Antud ülesande jaoks leitakse rekurrentne seos ja näidatakse, et see langeb kokku teise ülesande rekurrentse seosega, mille lahend on meile juba teada. Kui seejuures langeb kokku ka küllaldane arv jadade esimesi liikmeid (hiljem peatume lähemalt sellel, mitu liiget peab ühtima), siis on mõlemal ülesandel ühesugused lahendid.

Kasutame kirjeldatud võtet järgmise ülesande lahendamiseks. Olgu antud mingi hulk n esemest, mis asetsevad kindlas järjekorras. Jaotame selle hulga kaheks mittetühjaks osaks nii, et üks osa paikneks teisest vasakul (s.o. üks osa sisaldab elemendid esimesest kuni m -ndani, teine aga $m+1$ -sest kuni n -ndani). Pärast seda jaotame kummagi osa samasugusel viisil kaheks mittetühjaks osaks (kui üks osa koosneb ühestainsast esemest, siis teda edasi ei jaotata). Seda protsessi jätkatakse seni, kuni saadakse osad, mis koosnevad kõik ühest elemendist. *Mitu sellist jaotamisprotsessi on olemas* (kahte protsessi loetakse erinevateks, kui nad annavad kas või ühel sammul erineva tulemuse)?

Tähistame $n+1$ elemendist koosneva hulga jaotamisviiside arvu B_n abil. Esimesel sammul saab seda hulka jaotada n viisil (esimene osa võib sisaldada ühe elemendi, kaks elementi, ..., n elementi). Vastavalt sellele jaguneb kõigi jaotamisprotsesside hulk n klassiks: s -ndasse klassi kuuluvad protsessid, mille esimene osa koosneb s esemest.

Leiame protsesside arvu s -ndas klassis. Siin sisaldub esimeses osas s eset. Seetõttu saab seda edasi jaotada B_{s-1} erineva protsessi abil. Teine osa sisaldab aga $n-s+1$ eset ja seda saab edasi jaotada B_{n-s} protsessi abil. Korrutise reegli järgi saame, et klass s koosneb $B_{s-1}B_{n-s}$ erinevast protsessist, summa reegli järgi järel-
dub siit aga, et

$$B_n = B_0B_{n-1} + B_1B_{n-2} + \dots + B_{n-1}B_0. \quad (6)$$

Saime rekurrentse seose B_n jaoks. See seos esines meil juba, kui lahendasime ülesannet kinokassa järjekorra kohta (vt. lk. 81). Seal näitasime, et seost (6) rahuldavad arvud

$$T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Et tõestada võrdust

$$B_n = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n, \quad (7)$$

jääb näidata, et jadade $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ ja $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ esimesed liikmed T_0 ja B_0 ühtivad.

Kehtib võrdus $T_0 = C_0^0 = 1$. Teiselt poolt $B_0 = 1$, sest ühest elemendist koosneva hulga saab jaotada ühelainsal viisil. Niisiis, $B_0 = T_0$. Kuid rekurrentse valemi järgi saame $B_1 = B_0^2 = 1$. Et T_1 rahuldab sama rekurrentset valemit, siis $T_1 = T_0^2 = 1$. Edasi teeme kindlaks, et

$$B_2 = B_0 B_1 + B_1 B_0 = 2 \text{ ja } T_2 = T_0 T_1 + T_1 T_0 = 2$$

jne. Niisiis ühtivad kummagi jada kõik vastavad liikmed. Seega oleme jõudnud allpool sõnastatud tulemusele.

Kui $n+1$ elemendist koosneva hulga elemendid paiknevad mingis järjekorras, siis on selle hulga järkjärguliste jaotamisprotsesside arv

$$T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Arvude korrutamine ja jagamine

Olgu antud n arvu $a_1, a_2, \dots, a_n$, mis paiknevad kindlas järjekorras. Korrutamise assotsiatiivsuse seaduse tõttu võib nende arvude korrutise arvutada mitmel viisil (säilitades tegurite järjestuse). Näiteks kolme arvu saab korrutada kahel viisil: $(ab)c = a(bc)$, nelja arvu viiel viisil jne. Tuleb leida n antud järjestuses oleva arvu korrutamiskiiside arv.

On selge, et iga korrutamiskiis taandub antud n arvu ühest arvust koosnevateks osadeks jaotamise protsessile.

Näiteks nelja arvu korrutamine valemi $(ab)(cd)$ järgi taandub jaotamisprotsessiks $a|b|c|d$, samade arvude korrutamine valemi $((ab)c)d$ järgi jaotusprotsessiks $a|b|c|d$. Seepärast on erinevaid korrutamiskiise niisama

palju kui n elemendist koosneva hulga erinevaid jaotamisprotsesse, s. o. $T_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$.

Kuid korrutamisel on peale assotsiatiivsuse omaduse ka kommutatiivsuse omadus. Selle arvestamisel suureneb korrutamisviiside arv $n!$ korda; n arvu võib ju omavahel ümber paigutada $n!$ viisil, ümberpaigutatud arve seejärel aga ühel või teisel kombel jaotada. Siit järeldub, et antud n arvu korrutamise viiside arv on üldse $(n-1)! C_{2n-2}^{n-1}$.

Selle tulemuseni võib jõuda ka vahetult, jaotusprotsesside arvu valemiga kasutamata. Vastav tuletuskäik annab uue meetodi nii jaotusprotsesside arvu kui ka kassajärjekorra-ülesande valemiga saamiseks (tingimusel, et rublalisi on järjekorras niisama palju kui viiekümnekopikalisi).

Vahetu tuletuskäik on järgmine. Oletame, et oleme juba leidnud n arvu korrutamise viiside arvu $\Phi(n)$. Lisame veel ühe teguri a_{n+1} ja selgitame, mitmel viisil saab selle teguri lisada ühele arvude $a_1, \dots, a_n$ korrutisest.

Arvu a_{n+1} saab korrutada kogu korrutisega kas esimese või teise tegurina. See annab kaks lisamisviisi. Kuid teguri a_{n+1} võib lisada ka mõnel vahepealsel etapil. n arvu korrutamine taandub ju $(n-1)$ -le järjestikusele korrutamisele, kus igaühes korrutatakse kaks arvu. Igale sellisele korrutisele võib arvu a_{n+1} juurde võtta 4 viisil: korrutades ta esimese teguriga kas esimese või teise tegurina või korrutades ta teise teguriga esimese või teise tegurina. Et üldse on $n-1$ korrutist, millele saab lisada a_{n+1} , siis saame kokku $4n-4$ lisamisviisi. Võttes juurde kaks eespool nimetatud lisamisviisi, saame, et arvude $a_1, \dots, a_n$ igale korrutamise viisile (neid on $\Phi(n)$) saab teguri a_{n+1} lisada $4n-2$ viisil. Siit järeldub, et

$$\Phi(n+1) = (4n-2)\Phi(n).$$

Kuid $\Phi(1) = 1$. Seepärast $\Phi(n) = 2 \cdot 6 \dots (4n-6) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)$.

Vastus ühtib varem saaduga, sest

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \\ &= (n-1)! C_{2n-2}^{n-1}. \end{aligned}$$

Vaatleme nüüd jagamist. Paneme kirja avaldise

$$\frac{\frac{a_1}{\frac{a_2}{\frac{a_3}{\vdots \frac{a_n}{\vdots}}}}}{\vdots} \quad (8)$$

Sel üleskirjutusel pole mõtet, kui pole näidatud järjekord, milles jagamised tuleb sooritada. Selgitame, mitmel viisil saab sellele avaldisele tähenduse omistada. Selleks peame silmas, et iga jagamiste järjekorra näitamise viisi võib vaadelda ka n elemendist koosneva hulga üheelemendilisteks osadeks jaotamise protsessina, mida on kirjeldatud eespool. Kuid me nägime, et selliseid protsesse on

$$\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

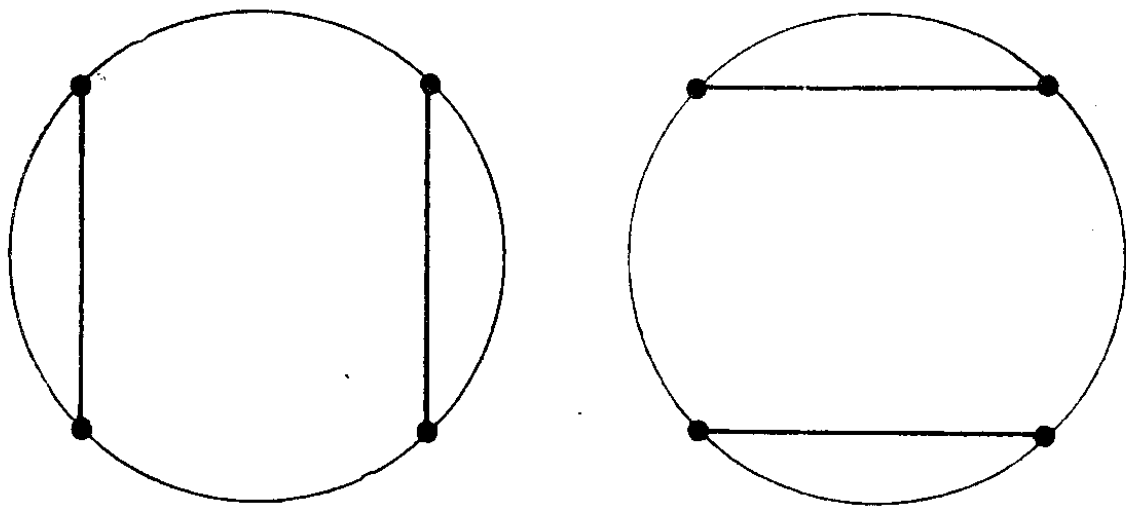
Tähendab, avaldisele (8) saab mõtte omistada

$$\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} \text{ viisil.}$$

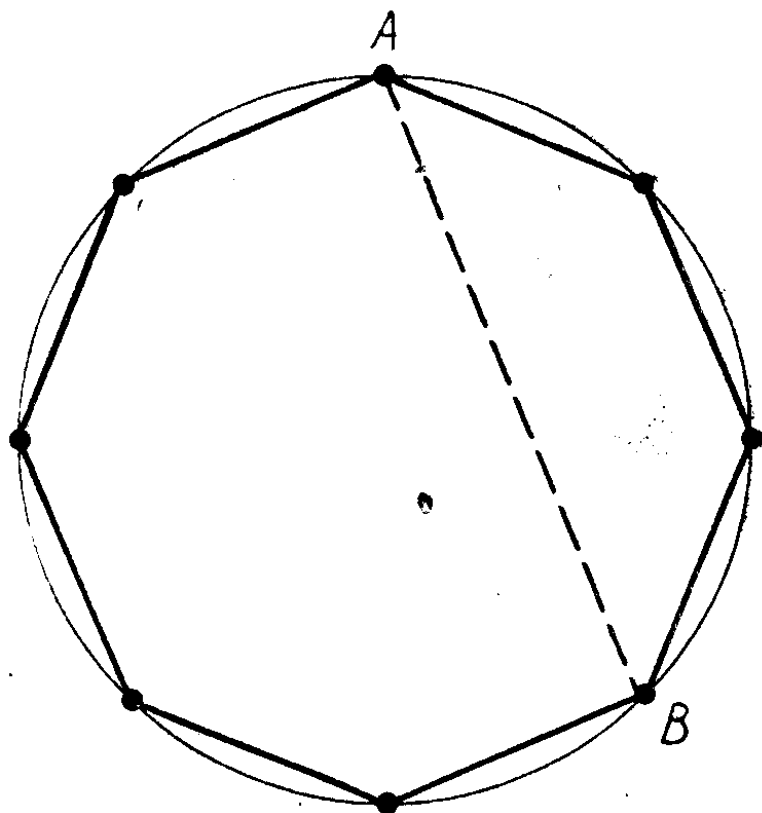
Ülesanded hulknurkadest

Mõningate kvantkeemia probleemide käsitlemisel tekib järgmine ülesanne.

Ringi sisse on joonestatud korrapärane $2n$ -nurk. Mitmel viisil saab tema tipud paariviisi ühendada n lõiguga nii, et tekkivatel lõikudel poleks ühiseid punkte?



Joon. 33



$$n=4, s=2$$

Joon. 34

$n=1$ puhul on olemas üks sellise ühendamise viis.¹ $n=2$ puhul saame kaks ühendamisviisi, mis on kujutatud joonisel 33. Et leida ühendamisviiside arvu $F(n)$ suvalise n korral, tuletame $F(n)$ jaoks rekurrentse seose. Valime hulknurga ühe tipu A . Nõutava ühendamisviisi puhul peab A olema ühendatud parajasti ühe tipuga B (suurema arvu tippudega ta ühendatud olla ei või, sest muidu leiduks vastavatel lõikudel ühispunkt A , samuti ei saa A jääda ühendamata, sest siis tuleks lõike vähem kui n). Edasi peab A ja B vahele jääma paarisarv tippe (vt. joon. 34). Tõepoolest, vastasel juhul jääks lõigust AB vasakule (ja ka paremale) paaritu arv tippe, mida saab ühendada ainult omavahel (muidu omaks mõni lõik ühiseid punkte lõiguga AB). Kuid paaritut arvu tippe ei saa ühendada nii, et igast punktist lähtuks parajasti üks lõik. Vastavalt öeldule jagunevad kõik tippude ühendamisviisid klassidesse sõltuvalt sellest, mitu tippu jääb punktist A tõmmatud lõigust vasakule.

Kui vasakule jääb $2s$ tippu, siis jääb neid paremale $2(n-s-1)$. Seega jaguneb $2n$ -nurk $2s$ -nurgaks ja $2(n-s-1)$ -nurgaks. Kuid $2s$ -nurgas saab $F(s)$ viisil tõmmata lõigud nii, et neil poleks ühiseid punkte. $2(n-s-1)$ -nurgas saab seda teha $F(n-s-1)$ viisil.

¹ Diameetrit loeme siin «korrapäraseks kaksnurgaks».

Korrutise reegli järgi saame, et s -ndasse klassi kuulub $F(s)F(n-s-1)$ ühendamisviisi.

Seega on kõikide ühendamisviiside üldarv

$$F(0)F(n-1) + F(1)F(n-2) + \dots + F(n-1)F(0).$$

Oleme saanud rekurrentse seose

$$F(n) = F(0)F(n-1) + F(1)F(n-2) + \dots + F(n-1)F(0).$$

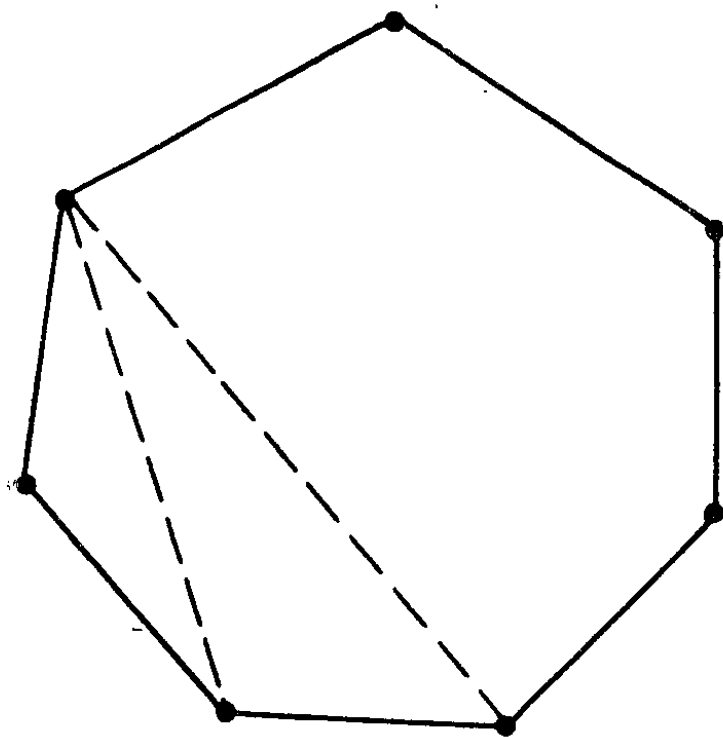
See on sama seos, mida rahuldavad arvud $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$. Et $F(0) = T_0 = 1$, siis saame iga n puhul

$F(n) = T_n$. Niisiis saab $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ viisil ühendada $2n$ -nurga tipud n lõiguga nii, et lõikudel pole ühiseid punkte.

Samasugune vastus on järgmisel ülesandel.

Mitmel viisil saab kumera $(n+2)$ -nurga jaotada kolmnurkadeks diagonaalide abil, mis ei lõiku hulknurga sees?

Tähistame jaotamisviiside arvu $\Phi(n)$ abil. Valime hulknurga ühe külje ja klassifitseerime kõik jaotamisviisid selle järgi, missugune hulknurga tipp on sellise jaotusse kuuluva kolmnurga tipuks, mille aluseks on valitud külge (joon. 35). Kui see kolmnurk eemaldada, siis jaguneb hulknurk $(s+2)$ -nurgaks ja $(n-s+1)$ -nurgaks.



$n = 5$

Joon. 35

Jaotades need hulknurgad kolmnurkadeks ja kombineerides neid jaotusi üksteisega, saame kõik lähtehulknurga jaotused, mis sisaldavad eemaldatud kolmnurka. Siis aga saame korrutise ja summa reeglit kasutades rekurrentse seose

$$\Phi(n) = \Phi(0)\Phi(n-1) + \Phi(1)\Phi(n-2) + \dots + \Phi(n-1)\Phi(0),$$

kus $\Phi(0) = 1$. Jätame lugeja hooleks selle seose abil veenduda, et $\Phi(n) = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Kojaülem raskustes

On kombinatoorikaülesandeid, kus tuleb koostada mitte üksainus rekurrentne seos, vaid mitut jada ühendav seoste süsteem. Need seosed avaldavad jadade $(n+1)$ -sed liikmed kõigi jadade eelmiste liikmete kaudu.

Kord avastas kuningas Arthuri kojaülem, et lõunale ümmarguse laua taha on kutsutud 6 paari vaenujalal seisvaid rüütleid. Mitmel viisil saab neid istuma panna nii, et vaenlased kõrvuti ei istuks?

Kui leiame mingi rüütlite paigutamise viisi, siis saame sellest rüütleid ringi mööda ümber tõstes veel 11 paigutamisviisi. Me ei loe praegu erinevateks selliseid paigutamisviise, mis saadakse üksteisest niisuguse tsükli- lise ümberistumise teel.

Võtame kasutusele järgmised tähistused. Olgu rüütlite arv $2n$. Leidugu nende jaoks täpselt A_n paigutamisviisi, kus vaenlased kõrvuti ei istu, B_n paigutamisviisi, kus istub kõrvuti parajasti üks paar vaenlasi, ja C_n paigutamisviisi, kus on täpselt kaks paari vaenulikke naabreid.

Tuletame algul valemi, mis avaldab A_{n+1} arvude A_n , B_n ja C_n kaudu. Olgu $n+1$ paari rüütleid paigutatud nii, et kuskil pole kahte vaenlast kõrvuti. Loeme, et kõik vaenulike rüütlite paarid on nummerdatud. Palume $(n+1)$ -se paari rüütlitel laua tagant püsti tõusta. Siis võib esineda kolm juhtu: laua taha jäänute seas pole ühtki paari

vaenujalal naabreid, on üks või kaks sellist paari (lahkunud rüütlid võisid need paarid lahutada).¹

Selgitame nüüd, mitmel viisil võib lahkunud rüütlid uuesti lauda istuma panna, et pärast poleks enam ühtki paari vaenulikke naabreid.

Kõige lihtsam on seda teha, kui lauas istub kaks paari vaenujalal naabreid. Sel juhul istub üks tulijatest esimese, teine teise rüütlite paari vahele. Seda saab teha kahel viisil. Kuid kuna $2n$ rüütli saab paigutada C_n viisil nii, et kaks paari naabreid osutuksid vaenlasteks, siis saame kokku $2C_n$ paigutamisi.

Istugu nüüd kõrvuti ainult üks paar vaenlasi. Üks tulijatest peab istuma nende vahele. Siis on lauas $2n+1$ rüütli, kelle vahel on $2n+1$ kohta. Neist kahele kohale (äsja istet võtnud külalise kõrvale) on teisel rüütli istumine keelatud ja talle jääb $2n-1$ kohta. Et esimesena võib siseneda ükskõik kumb kahest lahkunud rüütlist, siis saame $2(2n-1)$ paigutamisi. Kuid on B_n juhtu, kus $2n$ rüütli istuvad nii, et kõrvuti on parajasti üks paar vaenlasi. Seetõttu saame külalised nõutud viisil paigutada $2(2n-1)B_n$ moodi.

Oletame lõpuks, et vaenlased ei istu kuskil kõrvuti. Sel juhul istub esimene rüütel mistahes kahe külalise vahele. Ta saab seda teha $2n$ viisil. Seejärel jääb tema vaenlasele $2n-1$ kohta: ta võib asuda suvalisele kohale peale kahe koha äsja istet võtnud rüütli kõrval. Seega, kui $2n$ rüütli juba istusid nõutaval viisil, siis saab tagasitulnud külalised istuma panna $2n(2n-1)$ moodi. Kokku saame sel juhul aga $2n(2n-1)A_n$ paigutamisi.

Nagu juba märkisime, on vaadeldud juhtudega kõik võimalused ammendatud. Seepärast kehtib rekurrentne seos

$$A_{n+1} = 2n(2n-1)A_n + 2(2n-1)B_n + 2C_n. \quad (9)$$

Sellest seosest ei piisa A_n leidmiseks kõigi n väärtuste korral. Vaja on veel teada, kuidas avalduvad B_{n+1} ja C_{n+1} arvude A_n , B_n , C_n kaudu.

Oletame, et $2n+2$ ($n > 1$) rüütli seas on parajasti üks paar vaenulikke naabreid. Me teame, et see võib aset leida B_{n+1} juhul. Tüli vältimiseks palume vihamehi lauast lahkuda. Siis jääb järele $2n$ rüütli ja on üks võimalus

¹ Siin ja edaspidi loeme, et $n > 1$. $n = 1$ puhul järgnevad arutlused ei kehti.

kahest: nende seas kas pole vaenlastest naabreid või on neid üksainus paar (rüütliid istusid teine teisel pool lahkunud paari ja sattusid nüüd kõrvuti). Teisel juhul saab lahkujad tagasi panna ainult vanadele kohtadele, muidu satub teine paar vaenlasi kõrvuti. Kuid kuna $2n$ rüütli saab B_n viisil paigutada nii, et oleks ainult üks paar vaenujalal naabreid, siis saame $2B_n$ varianti (rüütliid võivad tagasi tulles kohad vahetada). Esimesel juhul võime lahkujad paigutada mistahes kahe rüütli vahele, s.o. $2n$ viisil, et nad aga võivad veel omavahel kohad vahetada, siis saame $4n$ paigutamiseviisi. Kombineerides neid n paari rüütliite kõigi paigutamisevõimalustega, kus vaenlased ei istu kõrvuti, saame $4nA_n$ paigutamiseviisi. Lõpuks võis lahkunud ning tagasitulnud rüütli paari number olla ükskõik milline ühest kuni $(n+1)$ -ni. Siit järeldub, et rekurrentne seos B_{n+1} jaoks omab kuju

$$B_{n+1} = 4n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \quad (10)$$

Käsitleme viimaks juhtu, kus $2n-2$ rüütli seas oli kaks paari vaenulikke naabreid. Nende paaride numbrid saab valida $C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ viisil. Asendame kummagi paari ühe uue rüütliga ja loeme kaks uut rüütli vaenlasteks. Siis istub laua taga $2n$ rüütli ning nende seas pole ühtki paari vaenujalal naabreid (kui uued rüütliid ei istu kõrvuti) või neid on ainult üks paar.

Esimene variant võib esineda A_n juhul. Esialgse seltskonna võime tagasi saada 4 viisil just seetõttu, et igas paaris võib rüütliite järjekorda muuta. Seetõttu annab esimene variant $4C_{n+1}^2 A_n = 2n(n+1)A_n$ võimalust.

Teine variant võib aset leida $\frac{1}{n}B_n$ juhul.¹ Siin on esialgse seltskonna taotlemiseks samuti 4 võimalust ja me saame kokku $2(n+1)B_n$ paigutamiseviisi. Siit järeldub, et $n \geq 1$ puhul

$$C_{n+1} = 2n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \quad (11)$$

Oleme saanud rekurrentsete seoste süsteemi

$$A_{n+1} = 2(2n-1)(nA_n + B_n) + 2C_n; \quad (9)$$

¹ Leidub B_n juhtu, kus mõni vaenlaste paar istub kõrvuti. Kui ära näidata, milline paar nimelt peab kõrvuti istuma, saame n korda vähem juhte.

$$B_{n+1} = 2(n+1)(2nA_n + B_n); \quad (10)$$

$$C_{n+1} = 2(n+1)(nA_n + B_n), \quad (11)$$

mis kehtivad $n \geq 2$ puhul. Kuid lihtne arvutus näitab, et $A_2=2$, $B_2=0$, $C_2=4$. Seetõttu järeldeb seostest (9) ... (11), et $A_3=32$, $B_3=48$, $C_3=24$. Jätkates leiame, et külalised saab nõutaval viisil laua taha paigutada $A_6=12\,771\,480$ viisil.

Käsitletud ülesanne sarnaneb järgmisega, mida nimeatakse sageli «külaliste-ülesandeks».

Mitmel viisil saab ümmarguse laua taha paigutada n abielupaari nii, et mehed ja naised istuksid vaheldumisi ja abikaasad ei istuks kusagil teineteise kõrval?

See ülesanne lahendatakse umbes samuti nagu koja-ülema-ülesanne. Algul pannakse istuma naised. Kui kohad nummerdada, siis on kõik naised paaris- või kõik paaritu-arvulistel kohtadel. Kuid paarisarvulisi kohti on n ja naised saavad neil istuda $n!$ viisil. Niisama palju võimalusi on neil paarituarvuliste kohtade täitmiseks. Seega saab naised istuma panna $2(n!)$ viisil. Siis aga vaadeldakse juhte, kus ükski mees ei istu oma naise kõrval või istub kõrvuti üks või kaks abielupaari. Jätame vastava rekurrentse seoste süsteemi koostamise lugejale.

Õnnepiletid

Mõned inimesed peavad trollibussipiletite kuuekohalisi numbreid «õnnelikeks», kui neil paarisarvulistel kohtadel seisvate numbrite summa võrdub paaritutel kohtadel seisvate numbrite summaga. Näiteks piletit 631752 loetakse «õnnelikuks», sest $6+1+5=3+7+2=12$. Tuleb leida «õnnelike» numbrite arv piletist 000000 kuni piletini 999999.

Leiame algul, mitmel kolmekohalisel arvul on antud ristsumma N (seejuures loeme kolmekohaliste hulka ka arvud kujuga 075 ja isegi 000). See ülesanne on analoogiline leheküljel 98 lahendatuga: liidetavate arv on 3, nende summa N ja liidetakse arve nullist üheksani. Tähistame ülesande lahendite arvu $F(3, 9; N)$ abil. Siit kehtib rekurrentne seos

$$\begin{aligned} F(3, 9; N) = & F(2, 9; N) + F(2, 9; N-1) + \\ & + F(2, 9; N-2) + F(2, 9; N-3) + F(2, 9; N-4) + \\ & + F(2, 9; N-5) + F(2, 9; N-6) + F(2, 9; N-7) + \\ & + F(2, 9; N-8) + F(2, 9; N-9). \end{aligned}$$

Täpselt samuti

$$F(2, 9; N) = F(1, 9; N) + F(1, 9; N-1) + \dots + F(1, 9; N-9).$$

On selge, et $F(1, 9; N) = 1$, kui $0 \leq N \leq 9$, vastasel juhul $F(1, 9; N) = 0$. Neid seoseid kasutades täidame vaevata järgmise tabeli.

Tabel 8

$N \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75	75	73	69	63	55	45

$N \backslash k$	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	36	28	21	15	10	6	3	1

Et nüüd leida «õnnelike» piletite arvu, tuleb kolmanda rea arvud ruutu tõsta ja tulemused liita. Tõepoolest, igal «õnnelikul» piletil on üks ja seesama paaris- ja paaritutel kohtadel seisvate numbrite summa. Olgu see summa N . Tabeli kolmandas reas N -ndal kohal seisev arv näitab, mitmel kolmekohalisel arvul on ristsumma N . Teisiti öeldes näitab ta, mitmel viisil võib valida paaris-kohtadel seisvaid numbreid (s.o. teist, neljandat ja kuudentat). Niisama palju võimalusi on ka paaritutel kohtadel (esimesel, kolmandal ja viiendal) seisvate numbrite valimiseks. Et need valikud teineteisest ei sõltu, siis leidub korrutise reegli järgi $[F(N)]^2$ «õnnelikku» numbrit, millel paariskohtadel seisvate numbrite summa on N . Siis on aga «õnnelike» numbrite üldarv summa reegli põhjal

$$2(1^2 + 3^2 + 6^2 + 10^2 + 15^2 + 21^2 + 28^2 + 36^2 + 45^2 + 55^2 + 63^2 + 69^2 + 73^2 + 75^2).$$

Selle summa välja arvutanud, saame vastuseks 55.252.

Rekurrentsed tabelid

Kombinatorikas esineb sageli suurusi, mis sõltuvad mitmest arvust. Näiteks sõltub suurus C_n^k nii arvust n kui ka arvust k . Kui vaadeldav suurus $F(n, k)$ sõltub kahest naturaalarvust n ja k , siis saab tema väärtused esitada tabeli kujul, paigutades $F(n, k)$ n -nda rea ja k -nda veeru lõikekohta. Niisuguste suurustega kohtusime korduvalt juba V peatükis: aritmeetiline ruut, tavalised ja üldistatud aritmeetilised kolmnurgad olid just selliste tabelite kujul.

Seejuures esinesid kõigis V peatükis uuritud näidetes tabeli elementide vahel sõltuvused. Need võimaldasid arvutada tabeli n -nda rea elemente eelmise rea elementide ja mõnikord ka n -nda rea mõne esimese elemendi kaudu. Seepärast, kui oli antud tabeli esimene rida ja teiste ridade esimesed elemendid, siis sai kõik ülejäänud read üksteise järel välja arvutada. Sellised tabelid meenutavad rekurrentseid jadasid ja edaspidi nimetamegi neid *rekurrentseteks*.

Aritmeetilise ruudu korral oli rekurrentsel seosel kuju

$$F(n, k) = F(n - 1, k) + F(n, k - 1), \quad (12)$$

ääretingimused anti aga ette nii: $F(n, 0) = 1$, $F(0, k) = 0$, kui $k > 0$ (tuletame meelde, et aritmeetilise ruudu puhul ei räägita mitte esimesest, vaid nullindast reast või veerust).

Aritmeetilise viisnurga ja kuusnurga jaoks on rekurrentne seos samuti kujuga (12). Need tabelid tekkisid ju siis, kui arvutasime, mitmel viisil võib vanker jõuda mingi väljani, kui ta liigub kahe ristuva kiire ja ühe või kahe peadiagonaaliga paralleelse sirge abil piiratud malelaua. Kuid vanker võib jõuda väljale (n, k) kas väljalt $(n - 1, k)$ või väljalt $(n, k - 1)$. Millised ka poleks liikumise kitsendused, seos (12) kehtib alati. Kitsendused viivad aga selleni, et tabeli mõned elemendid peavad kindlasti võrduma nulliga. Aritmeetilisel viisnurgal on sellisteks elementideks need, mis paiknevad kõrgemal peadiagonaaliga paralleelsest sirgest, aritmeetilisel kuusnurgal aga elemendid väljaspool piirkonda, mille eraldavad kaks peadiagonaaliga paralleelset sirget.

Teissuguse kujuga on rekurrentne seos aritmeetilise ja m -aritmeetilise kolmnurga jaoks. m -aritmeetilise kolmnurga puhul

$$F(n, k) = F(n-1, k-m+1) + \\ + F(n-1, k-m+2) + \dots + F(n-1, k). \quad (13)$$

Seejuures $F(0, 0) = 1$ ja $F(0, k) = 0$, kui $k > 0$.

Kojaülema-probleemi teine lahendus

Veel ühe näitena rekurrentsete tabelite kasutamise kohta toome kojaülema probleemi (vt. lk. 157) teise lahenduse. Nagu lugeja mäletab, oli jutt sellest, mitmel viisil võib $2n$ rüütli ümmarguse laua taha nii istuma panna, et vaenlased ei istuks kuskil kõrvuti ($2n$ rüütli seas oli n paari vaenlasi).

Tähistame $F(m, n)$ abil nende paigutamisviiside arvu, mille puhul parajasti m paari vaenlasi kõrvuti istub. Tuleb näüid rekurrentse valem, mis avaldab $F(m, n+1)$ arvude $F(k, n)$ kaudu, kus $k = m-1, m, m+1, m+2$.

Eeldame, et algul oli lauas n paari rüütleid, siis aga tuli ja istus lauda $(n+1)$ -ne paar. Arvutame, mitmel juhul satub näüid laua taha m paari vaenulikke naabreid. Selline olukord võib tekkida järgmiselt.

a) Lauas oli kõrvuti $m-1$ paari vaenlasi. See võis aset leida $F(m-1, n)$ viisil. Et lauas oleks näüid m paari vaenujalal naabreid, peab uus paar istuma kõrvuti, lahutamata ühtki olemasolevat vaenulike naabrite paari. Kuid $2n$ rüütli vahel on $2n$ vahekohta ja $m-1$ vahesse istuda ei tohi. Juurdetulnud rüütlitele jääb istumiseks $2n - m + 1$ kohta. Et igasse vahekohta võib istuda kahel viisil (tulnukad võivad kohad vahetada), siis saame kokku

$$2(2n - m + 1)F(m - 1, n) \quad (14)$$

paigutamisviisi.

b) Lauas oli m paari kõrvuti istuvaid vaenlasi. Sel juhul võivad uustulnukad valida ühe kahest: kas istuda eraldi, lahutamata ühtki vaenulike naabrite paari, või istuda kõrvuti kahe vaenuliku naabri vahele. On kerge arvutada, et esimese otsuse võib ellu viia $(2n - m) \cdot (2n - m - 1)$ viisil ja teise $2m$ viisil, seega kokku $(2n - m)^2 - 2n + 3m$ viisil. Et n paari rüütleid võib $F(m, n)$ viisil istuda nii, et kõrvuti oleks m paari vaenlasi, siis saame kokku

$$[(2n - m)^2 - 2n + 3m]F(m, n) \quad (15)$$

paigutamisviisi.

c) Vaatleme edasi juhtu, kus $2n$ rüütli seas istus kõrvuti $m+1$ paari vaenlasi (see saab toimuda $F(m+1, n)$ viisil). Sel juhul peab üks uustulnukatest istuma ühe vaenulike naabrite paari vahele, teine aga istet võtma nii, et ta ei lahutaks ühtki sellist paari. Esimene on võimalik $m+1$ ja teine $2n - m - 1$ viisil. Kokku saame $2(m+1) \cdot (2n - m - 1)$ võimalust (tegur 2 tekib seepärast, et kumbki uustulnukatest võib istuda vaenlaste vahele). Järelikult annab vaadeldav juht üldse

$$2(m+1)(2n - m - 1)F(m+1, n) \quad (16)$$

võimalust.

d) Oletame lõpuks, et oli $m+2$ paari vaenulikke naabreid. See võib esineda $F(m+2, n)$ juhul. Et jääks ainult m paari vaenulikke naabreid, peab kumbki juurdetunud rüütel ühe sellise paari lahutama. Esimene rüütel võib istet võtta $m+2$ viisil, seejärel jääb teisele ainult $m+1$ kohta. Kokku saame

$$(m+1)(m+2)F(m+2, n) \quad (17)$$

võimalust.

On kerge näha, et oleme ammendanud kõik võimalused, mille puhul $2n+2$ rüütli seas leidub m paari vaenulikke naabreid. Seepärast rahuldab $F(m, n)$ järgmist rekurrentset seost:

$$\begin{aligned} F(m, n+1) = & 2(2n - m + 1)F(m - 1, n) + \\ & + [(2n - m)^2 - 2n + 3m]F(m, n) + \\ & + 2(m+1)(2n - m - 1)F(m+1, n) + \\ & + (m+1)(m+2)F(m+2, n). \end{aligned} \quad (18)$$

Vahetu arvutamine näitab, et

$$F(0, 2) = 2, \quad F(1, 2) = 0, \quad F(2, 2) = 4$$

(me ei loe erinevateks paigutamiseviise, mis saadakse üksteisest tsüklilise ümberpaigutuse teel).

Valemit (18) kasutades leiame, et $F(0, 12) = 12\,771\,840$.

Rekurrentsete seoste lahendamine

Me ütleme, et rekurrentse seose järk on k , kui ta võimaldab avaldada $f(n+k)$ arvude $f(n)$, $f(n+1)$, ..., $f(n+k-1)$ kaudu. Näiteks

$$f(n+2) = f(n)f(n+1) = 3f^2(n+1) + 1$$

on teist järku,

$$f(n+3) = 6f(n)f(n+2) + f(n+1)$$

aga kolmandat järku rekurrentne seos.

Kui on antud k -ndat järku rekurrentne seos, siis rahuldab teda lõpmata palju jadasid. Asi on selles, et jada esimesed k elementi võib ette anda täiesti suvaliselt, sest pole nõutud, et nende vahel kehtiksid mingid seosed. Ent kui esimesed k elementi on antud, siis on kõik ülejäänud elemendid määratud täiesti üheselt: element $f(k+1)$ avaldub rekurrentse seose põhjal $f(1), \dots, f(k)$ kaudu, element $f(k+2)$ avaldub $f(2), \dots, f(k+1)$ kaudu jne.

Rekurrentset seost ja esimesi liikmeid kasutades võib jada liikmed üksteise järel välja kirjutada, kusjuures me saame varem või hiljem jada mistahes liikme. Ent seejuures tuleb meil välja kirjutada ka kõik eelnevad liikmed, sest neid teadmata ei saa järgnevaid liikmeid leida. Kuid paljudel juhtudel tahame leida vaid jada ühe kindla liikme ning ülejäänud liikmeid pole meile vaja. Siis on mugavam, kui on teada valem otse jada n -nda liikme jaoks. Vaatleme rekurrentset seost võrrandina. Me ütleme, et mingi jada on antud rekurrentse võrrandi *lahend*, kui jada asendamisel rekurrentsesse seosesse on seos samaselt rahuldatud. Näiteks on jada

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

üks rekurrentse võrrandi

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$$

lahenditest. Tõepoolest, selle jada üldliikmel on kuju $f(n) = 2^n$. Täheleb, $f(n+2) = 2^{n+2}$, $f(n+1) = 2^{n+1}$. Kuid iga n puhul kehtib samasus $2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n$. Seepärast on astmete 2^n ($n = 0, 1, \dots$) jada nimetatud võrrandi lahendiks.

k -ndat järku rekurrentse võrrandi lahendit nimetatakse üldlahendiks, kui ta sõltub k suvalisest konstandist $C_1, \dots, C_k$ ja neid konstante valides võib saada antud võrrandi mistahes lahendi. Näiteks võrrandi

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n) \quad (19)$$

üldlahend on

$$f(n) = C_1 2^n + C_2 3^n. \quad (20)$$

Tõepoolest, on kerge kontrollida, et jada (20) muudab seose (19) samasuseks, seepärast tuleb meil ainult näidata, et meie võrrandi suvalise lahendi võib esitada kujul (20). Kuid võrrandi (19) mistahes lahend on määratud väärtustega $f(1)$ ja $f(2)$. Seetõttu tuleb meil tõestada, et mistahes arvude a ja b jaoks leiduvad sellised C_1 ja C_2 väärtused, et

$$2C_1 + 3C_2 = a$$

ja

$$2^2 C_1 + 3^2 C_2 = b.$$

Kuid on kerge näha, et süsteemil

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = a, \\ 4C_1 + 9C_2 = b \end{cases} \quad (21)$$

on lahend suvaliste a ja b väärtuste korral. Seepärast on (20) tõepoolest võrrandi (19) üldlahend.

Lineaarsed konstantsete kordajatega rekurrentsed võrrandid

Üldiselt ei leidu universaalseid reegleid rekurrentsete võrrandite lahendamiseks. Kuid on olemas üsna sageli esinev rekurrentsete võrrandite klass, kus lahendamine toimub ühtse meetodi järgi. Sellesse klassi kuuluvad rekurrentsed võrrandid kujuga

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n), \quad (22)$$

kus $a_1, a_2, \dots, a_k$ on antud arvud. Selliseid võrrandeid nimetatakse *lineaarseteks konstantsete kordajatega rekurrentseteks võrranditeks*.

Algul vaatleme, kuidas lahendatakse selliseid võrrandeid $k=2$ puhul, s. o. uurime võrrandeid

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \quad (23)$$

Nende lahendamine toetub järgmisele kahele väitele.

1) Kui $f_1(n)$ ja $f_2(n)$ on rekurrentse võrrandi (23) lahendid, siis on jada $f(n) = A f_1(n) + B f_2(n)$ suvaliste arvude A ja B korral samuti selle võrrandi lahend.

Tõepoolest, eelduse järgi kehtib

$$f_1(n+2) = a_1 f_1(n+1) + a_2 f_1(n)$$

ja

$$f_2(n+2) = a_1 f_2(n+1) + a_2 f_2(n).$$

Korrutame need võrdused vastavalt arvudega A ja B ja liidame tulemused. Saame

$$A f_1(n+2) + B f_2(n+2) = a_1 [A f_1(n+1) + B f_2(n+1)] + a_2 [A f_1(n) + B f_2(n)].$$

See aga tähendabki, et $A f_1(n) + B f_2(n)$ on võrrandi (23) lahend.

2) Kui arv r_1 on ruutvõrrandi

$$r^2 = a_1 r + a_2$$

lahend, siis on jada

$$1, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{n-1}, \dots$$

rekurrentse võrrandi

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$$

lahendiks.

Tõepoolest, kui $f(n) = r_1^{n-1}$, siis $f(n+1) = r_1^n$ ja $f(n+2) = r_1^{n+1}$. Asendades need väärtused võrrandisse (23), saame

$$r_1^{n+1} = a_1 r_1^n + a_2 r_1^{n-1}.$$

See võrdus kehtib, sest eelduse järgi $r_1^2 = a_1 r_1 + a_2$.

Märgime, et koos jadaga $\{r_1^{n-1}\}$ on ka suvaline jada kujuga

$$f(n) = r_1^{n+m}; \quad n=1, 2, \dots$$

võrrandi (23) lahend. Tõestuseks piisab väitest 1), kui võtta selles $A = r_1^{m+1}$, $B = 0$.

Väidetest 1) ja 2) järeldub järgmine reegel teist järku lineaarsete konstantsete kordajatega rekurrentsete võrrandite lahendamiseks.

Olgu antud rekurrentne võrrand

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \quad (23)$$

Koostame ruutvõrrandi

$$r^2 = a_1 r + a_2, \quad (24)$$

mida nimetatakse antud võrrandi karakteristikuks võrrandiks. Kui sellel võrrandil on kaks erinevat lahendit r_1 ja r_2 , siis võrrandi (23) üldlahendil on kuju

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}.$$

Selle reegli tõestamiseks märgime algul, et väite 2) järgi on $f_1(n) = r_1^{n-1}$ ja $f_2(n) = r_2^{n-1}$ meie võrrandi lahendid. Siis aga on väite 1) järgi selle lahendiks ka $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$. Tuleb ainult näidata, et võrrandi (23) mistahes lahendi võib kirjutada sellisel kujul. Et teist järku võrrandi suvaline lahend on määratud väärtustega $f(1)$ ja $f(2)$, siis piisab, kui näidata, et võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = b \end{cases}$$

leidub lahend mistahes a ja b väärtuse korral. Kontrollige, et lahendiks on

$$C_1 = \frac{b - ar_2}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2}.$$

Juhtu, kus võrrandi (24) mõlemad juured ühtivad, vaatleme veidi hiljem. Praegu toome aga näite tõestatud reegli rakendamise kohta.

Fibonacci arve uurides jõudsimme rekurrentse võrrandini

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2). \quad (25)$$

Selle karakteristik võrrand on

$$r^2 = r + 1.$$

Ruutvõrrandi juured

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Seepärast on Fibonacci võrrandi üldlahendil kuju

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (26)$$

(oleme kasutanud eespool tehtud märkust ja võtnud astendajaks $n-1$ asemel n).

Me nimetasime Fibonacci arvudeks võrrandi (25) lahendeid, mis rahuldavad algtingimusi $f(0) = 1$ ja $f(1) = 2$, s. o. jada 1, 2, 3, 5, 8,

13, ... Tihti on mugavam lisada selle jada algusse arvud 0 ja 1, s. o. vaadelda jada 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... On selge, et see jada rahuldab sama rekurrentset seost (25) ja algtingimusi $f(0)=0$, $f(1)=1$. Võttes valemis (26) $n=0$ ja $n=1$, saame C_1 ja C_2 jaoks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(C_1 - C_2) = 1. \end{cases}$$

Siit leiame, et $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja seepärast

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (27)$$

Esimesel pilgul näib imelikuna, et selle avaldise väärtused on iga naturaalarvulise n puhul täisarvud.

Juht, kus karakteristliku võrrandi juured on võrdsed

Peatume nüüd juhul, kus karakteristliku võrrandi mõlemad juured ühtivad: $r_1 = r_2$. Sel korral pole avaldis $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$ enam üldlahend. Võrduse $r_1 = r_2$ tõttu võib selle lahendi kirjutada kujul

$$f(n) = (C_1 + C_2) r_1^{n-1} = C r_1^{n-1}.$$

Jääb ainult suvaline konstant C ja seda pole üldiselt võimalik valida nii, et oleksid rahuldatud algtingimused $f(1)=a$, $f(2)=b$.

Seepärast tuleb meil leida mingi teine lahend, mis erineb jadast $f_1(n) = r_1^{n-1}$. Osutub, et selliseks lahendiks on $f_2(n) = n r_1^{n-1}$. Tõepoolest, kui ruutvõrrandil $r^2 = a_1 r + a_2$ on kaks ühtivat juurt, siis saame Vieta teoreemi põhjal $a_1 = 2r_1$, $a_2 = -r_1^2$. Seepärast saab meie võrrandi kirjutada järgmiselt:

$$r^2 = 2r_1 r - r_1^2.$$

Siis on aga rekurrentsel võrrandil kuju

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n). \quad (28)$$

Kontrollime, kas $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ on tõepoolest võrrandi lahend. Saame $f_2(n+2) = (n+2) r_1^{n+1}$ ja $f_2(n+1) = (n+1) r_1^n$. Asetades need avaldised seosesse (28), saame ilmse samasuse

$$(n+2) r_1^{n+1} = 2(n+1) r_1^{n+1} - n r_1^{n+1}.$$

Seega on $n r_1^{n-1}$ meie võrrandi lahend.

Nüüd me teame juba antud võrrandi kahte lahendit $f_1(n) = r_1^{n-1}$ ja $f_2(n) = n r_1^{n-1}$. Võrrandi üldlahendi võib kirja panna nii:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 n r_1^{n-1} = r_1^{n-1} (C_1 + C_2 n).$$

Nüüd saab C_1 ja C_2 sobiva valikuga juba igasuguseid algtingimusi rahuldada.

Lineaarseid konstantsete kordajatega rekurrentseid võrrandeid, mille järk on suurem kahest, lahendatakse samasugusel viisil. Olgu võrrandil kuju

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n). \quad (29)$$

Koostame karakteristiku võrrandi

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \dots + a_k.$$

Kui selle k -nda astme algebralise võrrandi kõik juured $r_1, \dots, r_k$ on erinevad, siis on võrrandi (29) üldlahend

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \dots + C_k r_k^{n-1}.$$

Kui aga näiteks $r_1 = r_2 = \dots = r_s$, siis vastavad sellele juurele rekurrentse võrrandi (29) lahendid

$$f_1(n) = r_1^{n-1}, \quad f_2(n) = n r_1^{n-1}, \quad f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}, \dots$$

$$\dots, \quad f_s(n) = n^{s-1} r_1^{n-1}.$$

Üldlahendis vastab sellele juurele liidetav

$$r_1^{n-1} [C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_s n^{s-1}].$$

Koostades sellised avaldised kõigi juurte jaoks ja liites need, saame võrrandi (29) üldlahendi.

Lahendame näiteks rekurrentse võrrandi

$$f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n).$$

Karakteristlik võrrand on

$$r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0.$$

Lahendades selle, saame juured

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 2, \quad r_4 = -1.$$

Seega on meie võrrandi üldlahend järgmine:

$$f(n) = 2^{n-1} [C_1 + C_2 n + C_3 n^2] + C_4 (-1)^{n-1}.$$

Rekurrentsete võrrandite rakendamine informatsiooniteoorias

Me vaatlesime juba (vt. lk. 97) ülesannet erinevate teadete arvu kohta, mida saab edasi anda T ajaühiku jooksul, kui üksikute signaalide edasiandmise aeg on teada. Jõudsimme rekurrentse seoseni

$$f(T) = f(T-t_1) + f(T-t_2) + \dots + f(T-t_n), \quad (30)$$

kus $f(0) = 1$ ja $f(T) = 0$, kui $T < 0$.

Eeldame, et $T, t_1, \dots, t_n$ on täisarvud ja tähistame seose (30) karakteristliku võrrandi juured $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ abil.

Võrrandi üldlahend on siis

$$f(T) = C_1 \lambda_1^T + \dots + C_k \lambda_k^T.$$

Olgu karakteristliku võrrandi juured kõik erinevad ja λ_1 suurim juur. Siis on suurte T väärtuste korral kõik ülejäänud liidetavad esimesega

võrreldes nii väikesed, et nad võib erilise veata kõrvale jätta ja me saame

$$f(T) \sim C_1 \lambda_1^T.$$

See võrdus lubab ligikaudselt hinnata nende erinevate teadete arvu, mida saab teatud signaalide süsteemi abil edasi anda T ajaühiku jooksul.

Kojaülema-ülesande kolmas lahendus

Mõlemad kojaülema-ülesande lahendused, millega eespool tutvusime, viisid meid rekurrentsete seosteni. Nüüd tuleb nende seoste kui võrrandite lahendid, s.o. valem, mis võimaldab korraga kindlaks teha rüütlite paigutamiskiiside arvu. Selleks kasutame juurde- ja mahaarvamise valemit. Tähistame α_k kaudu sündmuse, mis tähendab, et k -s vaenulike rüütlite paar istub kõrvuti. Arvutame, millega võrdub $N(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, s.o. mitmel juhul istub kõrvuti k paari vaenlasi. Esimese paari saab laua taha paigutada $4n$ viisil (ühele saame koha valida $2n$ viisil, teise paigutame kellaosuti liikumise suunas järgmisele kohale ning arvestame, et nad võivad kohti vahetada). Ülejäänud rüütlite jaoks jääb $2n - 2$ kohta, kusjuures need tulevad täita nii, et teine, kolmas, ..., k -s vaenlaste paar satuks kõrvuti. Loeme kõik need $k - 1$ paari uuteks «objektideks». Neid $k - 1$ rüütlipaari ja $2n - 2k$ ülejäänud rüütli saab omavahel ümber paigutada $(2n - k - 1)!$ viisil. Kui võtta üks selline permutatsioon ning paigutada paarid ja rüütlid järjekorras vabadele kohtadele, siis osutub, et kõigis meie poolt valitud $k - 1$ paaris istuvad vaenlased kõrvuti. See tingimus jääb kehtima ka siis, kui mõned vaenulikud naabrid vahetavad kohad. Et selliseid ümberistumisi võib teha 2^{k-1} viisil, siis saame kokku $4n2^{k-1}(2n - k - 1)!$ paigutamiskiisi. Seega

$$N(\alpha_1 \dots \alpha_k) = 2^{k+1}n(2n - k - 1)!.$$

Me tahame leida, mitmel juhul pole ükski vaenlaste paar kõrvuti, s.o. arvutada $N(\alpha'_1 \dots \alpha'_n)$. Võttes arvesse, et k paari võib valida C_n^k viisil, saame juurde- ja mahaarvamise valemi järgi

$$\begin{aligned} A_n = N(\alpha'_1 \dots \alpha'_n) &= (2n)! - C_n^1 2^2n(2n - 2)! + \\ &+ C_n^2 2^3n(2n - 3)! - \dots + (-1)^k C_n^k 2^{k+1}n(2n - k - 1)! + \\ &+ \dots + (-1)^n 2^{n+1}n!. \end{aligned}$$

VIII. KOMBINATOORIKA JA READ

Rekurrentsete seoste meetod võimaldab lahendada paljusid kombinatoorikaülesandeid. Kuid mitmel juhul on rekurrentseid seoseid üsna raske koostada ja veel raskem lahendada. Sageli õnnestub neist raskustest mööda minna genereerivaid funktsioone kasutades. Et genereeriva funktsiooni mõiste on seotud lõpmatute astmeridadega, siis tuleb meil algul nendega tutvuda.

Polünoomide jagamine

Lugeja teab muidugi, kuidas ühte polünoomi (hulkliiget) teisega jagada. Kui on antud kaks polünoomi $f(x)$ ja $\varphi(x)$, siis leiduvad alati polünoomid $q(x)$ (jagatis) ja $r(x)$ (jääk), nii et $f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$, kusjuures $r(x)$ aste on madalam kui $\varphi(x)$ oma või $r(x) = 0$. Seejuures nimetatakse polünoomi $f(x)$ *jagatavaks* ja $\varphi(x)$ *jagajaks*. Kui me aga tahame, et jagamine toimuks jäägita, siis tuleb lubada jagatistena kasutada mitte ainult polünoome, vaid ka astmeridu. Jagatise saamiseks on vaja polünoomid korrastada x kasvavate astmete järjekorras ja jagada tavalisel viisil, kuid alates madalama astmega liikmetest. Vaatleme näiteks 1 jagamist polünoomiga $1 - x$. Saame

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 \mp 1 \pm x \\
 \hline
 x \\
 \mp x \pm x^2 \\
 \hline
 x^2 \\
 \mp x^2 \pm x^3 \\
 \hline
 x^3 \dots
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 1 - x \\
 \hline
 1 + x + x^2 + \dots
 \end{array}$$

On selge, et jagamisprotsess ei lõpe kunagi (samuti nagu murru $\frac{1}{3}$ muutmisel lõpmatuks kümnendmurruks). Induktiooni abil on kerge veenduda, et kõik jagatise kordajad võrduvad ühega. Seetõttu saame jagatiseena lõpmatu rea

$$1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

Üldse, kui $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on kaks polünoomi:

$$f(x)=a_0+\dots+a_nx^n, \quad \varphi(x)=b_0+\dots+b_mx^m,$$

kusjuures polünoomi $\varphi(x)$ vabaliige b_0 erineb nullist ($b_0 \neq 0$), siis tekib $f(x)$ jagamisel polünoomiga $\varphi(x)$ lõpmatu rida

$$c_0+c_1x+\dots+c_hx^h+\dots \quad (1)$$

Näiteks kui võtta samad eespool toodud polünoomid $f(x)=6x^3-2x^2+x+3$ ja $\varphi(x)=x^2-x+1$, siis saame uue jagamisviisi abil

$$\begin{array}{r|l} 3+x-2x^2+6x^3 & 1-x+x^2 \\ \hline \mp 3 \pm 3x \mp 3x^2 & 3+4x-x^2+x^3+2x^4+\dots \\ \hline 4x-5x^2+6x^3 & \\ \mp 4x \pm 4x^2 \mp 4x^3 & \\ \hline -x^2+2x^3 & \\ \pm x^2 \mp x^3 \pm x^4 & \\ \hline x^3+x^4 & \\ \mp x^3 \pm x^4 \mp x^5 & \\ \hline 2x^4-x^5 & \\ & \dots \end{array}$$

Samasugust pilti näeme kõigil juhtudel, kus $b_0 \neq 0$ ja $r(x) \neq 0$. Vaid juhul, kui $f(x)$ jagub polünoomiga $\varphi(x)$ jäägita, katkeb rida (1) ja me saame polünoomi.

Algebralised murrud ja astmerealad

Polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $\varphi(x)$ saime lõpmatu astmerea. Tekib küsimus, kuidas on see rida seotud algebralise murruga $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, s.o. missuguse sisu võib omistada kirjutisele

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n+\dots \quad (2)$$

Vaatleme näiteks arendist

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots \quad (3)$$

Me ei kirjuta siin võrdusmärki, sest me ei tea, missugune tähendus on paremal poolel seisval lõpmata paljude liidetavate summal. Et seda välja selgitada, proovime asendada seose (3) mõlemasse poolde konkreetseid x väärtusi.

Võtame algul $x=\frac{1}{10}$. Siis omandab vasak pool väärtuse $\frac{10}{9}$, parem pool aga muutub lõpmatuks arvureaks

$$1+0,1+0,01+\dots+0,000\dots01+\dots$$

Et me ei oska liita lõpmata palju liidetavaid, katsume võtta algul ühe, siis kaks liidetavat, siis kolm jne. Saame sellised summad:

$$1; 1,1; 1,11; \dots; \underbrace{1,111\dots1}_{n \text{ ühte}}; \dots$$

On selge, et n kasvades lähenevad need summad väärtusele $\frac{10}{9}=1,11\dots$, mille omandab $x=\frac{1}{10}$ puhul seose

(3) vasak pool.

Samasuguse tulemuse saame, kui paneme võrduse (3) mõlemasse poolde x asemele arvu $\frac{1}{2}$. Seose vasak pool omandab väärtuse 2, parem pool aga muutub lõpmatuks arvureaks

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

Võttes üksteise järel ühe, kaks, kolm, neli, ... liidetavat, saame arvud $1; 1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}; 1\frac{7}{8}; \dots; 2-\frac{1}{2^n}$. On selge, et n kasvades lähenevad need arvud arvule 2.

Kui aga võtta $x=4$, siis omandab võrduse (3) vasak pool väärtuse $-\frac{1}{3}$ ja paremal poolel saame rea

$$1+4+4^2+\dots+4^n+\dots$$

Kui selle rea liikmeid järjest liita, saame summad 1; 5; 21; 85; Need summad kasvavad piiramatult ega lähene arvule $-\frac{1}{3}$.

Meil on seega tegemist kahe juhuga. Et neid eristada, defineerime suvalise arvurea koonduvuse ja hajuvuse mõisted. Olgu antud lõpmatu arvurida

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (4)$$

Öeldakse, et rida *koondub* arvuks b , kui vahe $b - (a_1 + \dots + a_n)$ läheneb n piiramatul kasvamisel nullile. Teiste sõnadega, millise arvu $\varepsilon > 0$ me ka ette ei annaks, summa $a_1 + \dots + a_n$ hälve arvust b osutub teatud indeksist N alates väiksemaks kui ε :

$$|b - (a_1 + \dots + a_n)| < \varepsilon, \text{ kui } n \geq N.$$

Sel korral nimetatakse arvu b lõpmatu rea $a_1 + \dots + a_n + \dots$ summaks ja kirjutatakse

$$b = a_1 + \dots + a_n + \dots$$

Kui ei leidu arvu b , milleks antud rida (4) koondub, siis nimetatakse seda rida *hajuvaks*.

Eespool tehtud uurimine näitab, et

$$\frac{10}{9} = 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + 0,00\dots 01 + \dots,$$

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

samal ajal kui rida

$$1 + 4 + 16 + \dots + 4^n + \dots$$

on hajuv.

Hoolikam uurimine näitab, et kui $|x| < 1$, siis rida $1 + x + \dots + x^n + \dots$ koondub arvuks $\frac{1}{1-x}$, kui aga $|x| \geq 1$, siis see rida hajub.

Selle väite tõestamiseks piisab, kui tähele panna, et

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ning et $n \rightarrow \infty$ puhul avaldis x^{n+1} läheneb nullile, kui $|x| < 1$, ja lõpmatusele, kui $|x| \geq 1$. Võrduse $x = \pm 1$ puhul saame hajuvad arvuread $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ ja $1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$.

Niisiis, kui $|x| < 1$, siis

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots \quad (5)$$

Märgime, et võrdus (5) on koolikursusest tuntud valem lõpmatu kahaneva geomeetrilise progressiooni summa arvutamiseks.

Seega oleme välja selgitanud kirjutise

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

tähenduse. See valem näitab, et parempoolne rida koondub arvuks $\frac{1}{1-x}$ teatud piirkonda kuuluvate x väärtuste korral (nimelt $|x| < 1$ puhul). Öeldakse, et funktsioon $\frac{1}{1-x}$ on $|x| < 1$ puhul arendatav astmereaks $1 + x + \dots + x^n + \dots$.

Nüüd võib anda vastuse ka üldisemale küsimusele. Tekkigu polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $\varphi(x)$ astmerida

$$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots \quad (6)$$

Osutub, et rida (6) koondub küllalt väikeste x väärtuste korral arvuks $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Koonduvuspiirkonna suurus sõltub nimetaja juurtest, s.o. arvudest, mille puhul nimetaja omandab väärtuse null. Nimelt, kui need arvud on $x_1, \dots, x_k$ ja r on vähim arvudest $|x_1|, \dots, |x_k|$, siis rida koondub piirkonnas $|x| < r$. Näiteks funktsioon $\frac{1}{1-x}$ saab nulliks $x=1$ korral ja seepärast on avaldise $\frac{1}{1-x}$ arendis rakendatav vaid $|x| < 1$ korral. Funktsioon $\frac{x-1}{x^2-7x+10}$ saab nulliks aga $x_1=2, x_2=5$ puhul ja seetõttu koondub murru $\frac{x-1}{x^2-7x+10}$ arendis $|x| < 2$ puhul.

Märgime, et nimetaja ükski juur pole null, sest meie eelduse kohaselt on nimetaja vabaliige nullist erinev ja seepärast $\varphi(0) = b_0 \neq 0$.

Teiste sõnadega, alati leidub piirkond $|x| < r$, milles kehtib võrdus

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots \quad (7)$$

Astmeridadeks saab peale algebraliste murdude arendada ka paljusid teisi funktsioone. Näiteks tõestatakse matemaatilises analüüsis, et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (8)$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (9)$$

Meile pakub huvi arendis

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (10)$$

Valemist (10) on näha, et

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (11)$$

Võttes reast (11) küllalt palju liikmeid, saame e väärtuse kui-
tahes suure täpsusega. Arvu e esimesed kümnendkohad on
2,7182818289045...

Read (8), (9) ja (10) koonduvad x kõigi väärtuste puhul.

Esitame veel järgmise tähtsa väite:

funktsioonil $f(x)$ ei saa olla kahte erinevat arendist astmereaks.

Teiste sõnadega, kui

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

ja

$$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots,$$

siis

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$$

Tehed astmeridadega

Siirdume nüüd astmeridadega sooritatavate tehete juurde. Olgu funktsioonid $f(x)$ ja $\varphi(x)$ arendatud astmeridadeks

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (12)$$

ja

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots \quad (13)$$

Siis

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots).$$

Osutub, et võrduse paremal poolel võib liidetavad ümber paigutada ja rühmitada x ühesuguste astmete järgi (see

väide pole sugugi nii ilmne, nagu esimesel pilgul tundub: paremal poolel on ju lõpmatud summad, siisugustes summades ei tohi aga liidetavaid kaugeltki mitte alati ümber paigutada). Pärast siisugust ümberrühmitamist saame

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots \quad (14)$$

Võrduse (14) paremal poolel seisvat rida nimetatakse astmeridade (12) ja (13) summaks.

Vaatame nüüd, kuidas funktsioonide $f(x)$ ja $\varphi(x)$ korrutist astmereaks arendada. Kehtib

$$f(x)\varphi(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots). \quad (15)$$

Samuti nagu polünoomide juhul, võib võrduse (15) paremal poolel seisvad read korrutada liikmeti (selle väite tõestuse jätame ära). Leiame rea, mis tekib pärast liikmeti korrutamist. Selle rea vabaliige on a_0b_0 . Suurust x sisaldavad liikmed tekivad kahel korral: a_0 korrutamisel liikmega b_1x ja a_1x korrutamisel liikmega b_0 . Need annavad

$$a_0b_1x + a_1b_0x = (a_0b_1 + a_1b_0)x.$$

Täpselt samuti arvutame x^2 sisaldavad liikmed:

$$a_0b_2x^2 + a_1b_1x^2 + a_2b_0x^2 = (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2.$$

Üldiselt on x^n kordajaks

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0.$$

Seega,

$$f(x)\varphi(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_0b_n + \dots + a_nb_0)x^n \dots \quad (16)$$

Võrduse (16) paremal poolel olevat rida nimetatakse *ridade* (12) ja (13) *korrutiseks*.

Tõstes rea (12) ruutu, saame

$$f^2(x) = a_0^2 + 2a_0a_1x + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + 2(a_0a_3 + a_1a_2)x^3 + \dots \quad (17)$$

Vaatleme nüüd, kuidas ühte astmerida teisega jagada. Erinegu rea (13) vabaliige nullist. Näitame, et leidub astmerida

$$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots, \quad (18)$$

nii et

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots)(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (19)$$

Tõestuseks korrutame omavahel võrduse vasakul poolel seisvad read. Saame rea

$$b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots + (b_0c_n + \dots + b_nc_0)x^n + \dots$$

Selle rea ühtumiseks reaga (12) on tarvilik ja piisav, et kehtiksid võrdsed

$$b_0c_0 = a_0,$$

$$b_0c_1 + b_1c_0 = a_1,$$

$$\dots \dots \dots b_0c_n + \dots + b_nc_0 = a_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

Need võrdsed annavad kordajate $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ leidmiseks lõpmatu võrrandisüsteemi. Süsteemi esimesest võrrandist saame $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$. Asõtame saadud väärtuse teise võrrandisse. Saame võrrandi

$$b_0c_1 = a_1 - \frac{b_1a_0}{b_0},$$

millest leiame, et $c_1 = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0^2}$. Üldiselt, kui kordajad $c_0, \dots, c_{n-1}$ on juba leitud, siis on meil c_n leidmiseks võrrand

$$b_0c_n = a_n - b_1c_{n-1} - \dots - b_nc_0.$$

See võrrand on lahenduv, sest $b_0 \neq 0$.

Niisiis oleme tõestanud, et eksisteerib rida (18), mis rahuldab tingimust (19). Rida (18) nimetatakse ridade (12) ja (13) jagatiseks. Saab tõestada, et ta tekib funktsiooni $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ reaksarendamisel. Seega võib astmeridu liita, korrutada ja jagada (viimast tingimusel, et jagaja vabaliige erineb nullist). Need tehted vastavad tehetele reaksarendatavate funktsioonidega.

Märgime, et nüüd võime arendise

$$\frac{a_0 + \dots + a_nx^n}{b_0 + \dots + b_mx^m} = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots \quad (20)$$

tähendust tõlgitseda teisiti. See arendis tähendab, et rida $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots$ saadakse lõpliku astmerea $a_0 + \dots + a_nx^n$ jagamisel lõpliku reaga $b_0 + \dots + b_mx^m$. Teiste sõnadega, see võrdus tähendab, et

$$(b_0 + \dots + b_mx^m)(c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots) = a_0 + \dots + a_nx^n, \quad (21)$$

kus vasakul asuv korrutis on defineeritud valemiga (16).

Astmeridade kasutamine samasuste tõestamiseks

Astmeridade abil saab tõestada palju samasusi. Selleks võetakse mingi funktsioon ja arendatakse ta kahel viisil astmerekaks. Et funktsiooni saab astmerekana esitada vaid ühelainsal viisil, siis peavad x ühesuguste astmete kordajad mõlemas reas ühtima. See viibki tõestatava samasuseni.

Vaatleme näiteks meile tuntud arendist

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Tõstes selle valemi mõlemad pooled ruutu, saame

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots \quad (22)$$

Kui asendada siin x suurusega $-x$, leiame

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \dots + (-1)^n(n+1)x^n + \dots \quad (22')$$

Korrutame võrdsed (22) ja (22'), saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 + [1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1]x + \\ &+ [1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1]x^2 + \dots + [1 \cdot (-1)^n(n+1) + \\ &+ 2 \cdot (-1)^{n-2}n + \dots + (-1)^n(n+1) \cdot 1]x^n + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Kordajad x paaritute astmete ees on ilmselt nullid (iga liidetav esineb nende kordajate avaldistes kaks korda vastupidiste märkidega). Kordaja x^{2n} ees on aga

$$1(2n+1) - 2 \cdot 2n + 3(2n-1) - \dots + (2n+1).$$

Kuid funktsiooni

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$$

võib astmerekaks arendada ka teisiti. Nimelt

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

Arendise murru $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ jaoks saame arendisest (22), kui asendada selles x suurusega x^2 :

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = 1 + 2x^2 + 3x^4 + \dots + (n+1)x^{2n} + \dots \quad (24)$$

Me teame, et ühelgi funktsioonil ei saa olla kahte erinevat arendist astmerekaks. Seepärast peab x^{2n} kordaja avaldises (23) võrduma x^{2n} kordajaga arendises (24). Siit tuleneb järgmine samasus:

$$1(2n+1) - 2 \cdot 2n + 3(2n-1) - \dots + (2n+1) \cdot 1 = n+1.$$

Genereerivad funktsioonid

Nüüd võime siirduda selle peatüki põhiteema, genereeriva funktsiooni mõiste juurde. Olgu antud mingi arvujada $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Moodustame astmerea

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

Kui see rida koondub mingis piirkonnas funktsiooniks $f(x)$, siis nimetatakse seda funktsiooni arvujada $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ *genereerivaks funktsiooniks*. Näiteks valemist

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

järeldub, et jada $1, 1, \dots, 1, \dots$ genereerivaks funktsiooniks on $\frac{1}{1-x}$. Valem (22) näitab, et jada $1, 2, 3, 4, \dots$

$\dots, n, \dots$ genereerivaks funktsiooniks on $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Meid huvitavad genereerivad funktsioonid selliste jadade jaoks, mis nii või teisiti on seotud kombinatoorika-

ülesannetega. Genereerivate funktsioonide abil õnnestub tõestada nende jadade väga mitmekesiseid omadusi. Peale selle uurime, kuidas on genereerivad funktsioonid seotud rekurrentsete võrrandite lahendamisega.

Newtoni binoomvalem

Leiame nüüd genereeriva funktsiooni lõpliku arvude jada $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ jaoks (täpsemalt, jada $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n, 0, \dots$ jaoks).

Elementaaralgebrast on teada, et

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

ja

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Need võrdused on erijuhud üldisemast valemist, mis annab astme $(a+x)^n$ arendise. Kirjutame $(a+x)^n$ kujul

$$(a+x)^n = \underbrace{(a+x)(a+x)\dots(a+x)}_{n \text{ korda}}. \quad (25)$$

Avame selle võrduse paremal poolel sulud, kusjuures kirjutame kõik tegurid sellises järjekorras, nagu nad meil ette tulevad. Näiteks $(a+x)^2$ kirjutame kujul

$$(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = aa + ax + xa + xx \quad (26)$$

ja $(a+x)^3$ kujul

$$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)(a+x) = aaa + aax + axa +
+ axx + xaa + xax + xxa + xxx. \quad (27)$$

Näeme, et valemis (26) sisalduvad kõik kahekaupa ja valemis (27) kõik kolmekaupa kordumistega variatsioonid tähtedest x ja a . Sama kehtib ka üldjuhul: pärast sulgude avamist valemis (25) saame kõikvõimalikud n -kaupa kordumistega variatsioonid tähtedest x ja a .

Võtame nüüd sarnased liikmed kokku. Sarnasteks on liikmed, mis sisaldavad ühesugusel arvul x -tähti (siis on neis ka sama arv a -tähti). Leiame, mitmes liikmes on k x -tähte ja järelikult $(n-k)$ a -tähte. Need liikmed on kordumistega permutatsioonid k x -tähest ja $(n-k)$ a -tähest. Seepärast on neid (II peatüki valemi (5) järgi)

$$P(k, n-k) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siit järeldub, et pärast sarnaste liikmete kokkuvõtmist tuleb liige $x^k a^{n-k}$ kordajaga $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Seega oleme näidanud, et

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + \dots + C_n^k a^{n-k}x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (28)$$

Võrdust (28) nimetatakse Newtoni binoomvalemiks. Kui võtta selles võrduses $a=1$, siis saame

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (29)$$

Näeme, et funktsioon $(1+x)^n$ on arvude C_n^k , $k=0, 1, \dots, n$ genereeriv funktsioon.

Selle genereeriva funktsiooni abil saab võrdlemisi lihtsalt tõestada arvude C_n^k paljud omadused, mis saadi eespool üsna teravmeelsete arutluste abil.

Tõestame algul, et

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (30)$$

Selleks piisab võrduse (29) mõlema poole korrutamisest teguriga $1+x$. Saame

$$(1+x)^{n+1} = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n) \cdot (1+x).$$

Võrduse vasakul poolel seisvat avaldist arendame edasi Newtoni binoomvalemi järgi. Valemis peab ainult n asendama arvuga $n+1$. Seepärast tuleb x^k kordajaks C_{n+1}^k . Paremal poolel tekib pärast sulgude avamist astet x^k sisaldav liige kahel korral: $C_n^k x^k$ korrutamisel arvuga 1 ja $C_n^{k-1} x^{k-1}$ korrutamisel suurusega x . Seepärast on x^k kordaja paremal poolel $C_n^k + C_n^{k-1}$. Kuid vasakul ja paremal peab seisma seesama polünoom. Seepärast peavad x^k kordajad vasakul ja paremal poolel olema ühesugused. See tõestabki, et

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Me tõestasime selle võrduse leheküljel 48. Kuid seal vajasime kombinatoorseid arutlusi. Leheküljel 48 näidati samuti võrdlemisi keerukalt, et

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n. \quad (31)$$

Valemi (29) abil saame tõestuse otsekohe: piisab, kui võtta $x=1$. Kui aga võtta selles valemis $x=-1$, siis saame

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots \\ \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Teiste sõnadega, binoomkordajate C_n^k summa üle k paarisarvuliste väärtuste ja summa üle k paaritu arvuliste väärtuste on võrdsed:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2m} + \dots \\ \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2m+1} + \dots \quad (32)$$

Mõlemad summad on lõplikud ning katkevad, kui $2m$ (vastavalt $2m+1$) saab suuremaks kui n .

Huvitava tulemuse saame, kui võtame võrduses (29) $x=i$, $n=4m$. Lihtne arvutus näitab, et $(1+i)^4 = -4$. Seepärast $(1+i)^{4m} = (-4)^m$. Seega saame võrduse

$$(-4)^m = C_{4m}^0 + C_{4m}^1 i + C_{4m}^2 i^2 + C_{4m}^3 i^3 + C_{4m}^4 i^4 + \dots \\ \dots + C_{4m}^{4m} i^{4m} = C_{4m}^0 + C_{4m}^1 i - C_{4m}^2 - C_{4m}^3 i + \\ + C_{4m}^4 + \dots + C_{4m}^{4m}.$$

Eraldades selles võrduses imaginaar- ja reaalosa, jõuame samasusteni

$$C_{4m}^1 - C_{4m}^3 + C_{4m}^5 - \dots - C_{4m}^{4m-1} = 0, \quad (33)$$

$$C_{4m}^0 - C_{4m}^2 + C_{4m}^4 - \dots + C_{4m}^{4m} = (-4)^m. \quad (34)$$

Uurige ise, missugused samasused tekivad, kui võtta $n=4m+1$, $4m+2$, $4m+3$.

Genereeriva funktsiooni abil on kerge tõestada ka võrdust

$$C_{n+m}^s = C_n^0 C_m^s + C_n^1 C_m^{s-1} + \dots + C_n^k C_m^{s-k} + \dots \\ \dots + C_n^n C_m^{s-n} \quad (35)$$

($s-k < 0$ puhul on siin võetud $C_m^{s-k} = 0$; seepärast muutub k tegelikult nullist kuni vähimani arvudest m, n).

Tõestuseks tuleb võtta arendised

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n$$

ja

$$(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + \dots + C_m^s x^s + \dots + C_m^m x^m$$

ning nende vasakud ja paremad pooled läbi korrutada. Saame

$$(1+x)^{n+m} = [C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n] \cdot [C_m^0 + C_m^1 x + \dots + C_m^s x^s + \dots + C_m^m x^m].$$

Nüüd rakendame võrduse vasakule poolele Newtoni binoomvalemit (astendaja $n+m$ korral), paremal poolel aga avame sulud. Kui võrrelda x^s kordajaid võrduse vasakul ja paremal poolel, saame just võrduse (35). Selle võrduse erijuht on

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 \quad (35')$$

(meenutame, et $C_n^k = C_n^{n-k}$).

Polünoomvalem

Newtoni valemit kasutades võib arendada ka keerukamaid avaldisi, näiteks selliseid nagu $(x+y+z)^4$. Nimelt,

$$(x+y+z)^4 = [(x+y)+z]^4 = (x+y)^4 + C_4^1 (x+y)^3 z + C_4^2 (x+y)^2 z^2 + C_4^3 (x+y) z^3 + C_4^4 z^4.$$

Arendame nüüd $(x+y)^4$, $(x+y)^3$ ja $(x+y)^2$ uuesti Newtoni binoomvalemi järgi. Saame

$$(x+y+z)^4 = x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4x^3z + 4xy^3 + 4y^3z + 4xz^3 + 4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2. \quad (36)$$

Kuid selline arendamisviis on liiga keeruline ja raske on kohe vastata küsimusele, millise kordajaga esineb $(x+y+z)^9$ arendises liige $x^2y^4z^3$. Seepärast oleks soovitatav tuletada valem, mis annaks otsekohe avaldise

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n \quad (37)$$

arendise. Selle valemi kuju pole raske ära arvata. Newtoni binoomvalemit tõestades nägime, et liige $x^k a^{n-k}$ on avaldise $(a+x)^n$ arendises kordajaga $P(k, n-k)$. Võib oletada, et liikme $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ kordajaks avaldise $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ arendises tuleb $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Tõestame nüüd, et see ongi nii.

Tõepoolest, kirjutame avaldise $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ n teguri korrutisena ja avame sulud, kirjutades kõik tegu-

rid välja sellises järjekorras, nagu nad ette tulevad. Selge, et seejuures saame kõikvõimalikud n -kaupa kordumistega variatsioonid tähtedest $x_1, x_2, \dots, x_m$. Kuid mõned nendest variatsioonidest on sarnaste liikmetega. See on nii, kui iga täht sisaldub ühes variatsioonis sama arv kordi kui teises. Seetõttu tuleb liikme $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ kordaja leidmiseks arvutada, kui mitmes kordumistega variatsioonis on k_1 x_1 -tähte, k_2 x_2 -tähte, $\dots$, k_m x_m -tähte. On selge, et iga selline variatsioon on kordumistega permutatsioon k_1 x_1 -tähest, k_2 x_2 -tähest, $\dots$, k_m x_m -tähest. Selliste permutatsioonide arvu oleme tähistanud $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ abil. Niisiis on liikme $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ kordajaks avaldise (37) arendises tõepoolest $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ (kus muidugi $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, sest arendise igasse liikmesse kuulub ju üks element igast sulust, korrutatavaid sulgusid on aga n).

Tõestatud valemi võib üles kirjutada nii:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \quad (38)$$

kus summa on võetud üle arvu n kõikvõimalike lahutuste $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ m mittenegatiivseks täisarvuliseks liidetavaks. Tuletame meelde, et

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!}. \quad (39)$$

On selge, et kui arvud $s_1, s_2, \dots, s_m$ saadakse arvude $k_1, \dots, k_m$ ümberpaigutamise teel, siis $P(s_1, \dots, s_m) = P(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Seepärast on näiteks arendises (36) liikmete $x^2 y z$ ja $x y z^2$ kordajad ühesugused. Niisugune tähelepanek hõlbustab arendise (37) liikmete väljakirjutamist. Piisab, kui leida kordajad selliste liidetavateks lahutuste jaoks, kus $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$, ja hiljem astendajad arendi liikmetes kõikvõimalikel viisidel ümber paigutada.

Arvutame näiteks $(x + y + z)^5$. Kui liidetavate järjekorda ei arvestata, siis võib arvu 5 lahutada kolmeks liidetavaks viiel viisil

$$5 = 5 + 0 + 0, \quad 5 = 4 + 1 + 0, \quad 5 = 3 + 2 + 0, \quad 5 = 3 + 1 + 1, \\ 5 = 2 + 2 + 1.$$

Kuid $P(5, 0, 0) = 1$, $P(4, 1, 0) = 5$, $P(3, 2, 0) = 10$, $P(3, 1, 1) = 20$, $P(2, 2, 1) = 30$. Seepärast

$$(x+y+z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5x^4y + 5xy^4 + 5x^4z + 5xz^4 + 5y^4z + 5yz^4 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 10x^3z^2 + 10x^2z^3 + 10y^3z^2 + 10y^2z^3 + 20x^3yz + 20xy^3z + 20xyz^3 + 30x^2y^2z + 30x^2yz^2 + 30xy^2z^2.$$

Valem (38) võimaldab kergesti tõestada arvude $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ mõningaid omadusi. Näiteks kui võtta selles valemis $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$, siis saame

$$m^n = \sum P(k_1, \dots, k_m). \quad (40)$$

Siin on summa võetud üle arvu n kõigi lahutuste m mitte-negatiivse täisarvulise liidetava summaks: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, kus arvestatakse ka liidetavate järjekorda.

Edasi, kui korrutada võrduse (38) mõlemad pooled teguriga $x_1 + x_2 + \dots + x_m$, rakendada vasakule poolele valemit (38) ja avada paremal poolel sulud, siis saame suuruste $P(k_1, \dots, k_m)$ jaoks järgmise rekurrentse seose:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = P(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) + P(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \dots + P(k_1, k_2, \dots, k_m - 1). \quad (41)$$

Kui aga läbi korrutada arendiste

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

ja

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^s = \sum P(l_1, l_2, \dots, l_m) x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_m^{l_m}$$

mõlemad pooled ja võrrelda liikme $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_m^{r_m}$ kordajaid tekkinud avaldistes, siis saame samasuse

$$P(r_1, r_2, \dots, r_m) = \sum_{k_p + l_p = r_p} P(k_1, k_2, \dots, k_m) P(l_1, l_2, \dots, l_m). \quad (42)$$

Paremal poolel on summa võetud üle selliste mittenegatiivsete täisarvude $k_1, k_2, \dots, k_m$; $l_1, l_2, \dots, l_m$, et $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, $l_1 + l_2 + \dots + l_m = s$ ja $k_1 + l_1 = r_1$, $k_2 + l_2 = r_2$, $\dots$, $k_m + l_m = r_m$. Jätame üksikasjalised arvutused lugeja hooleks.

Loomulikult oleksime valemid (40) ... (42) võinud saada ka genereerivat funktsiooni (38) kasutamata. Kuid sel juhul oleks tulnud arutleda nii nagu leheküljel 130,

kuid mitte tasandi, vaid n -mõõtmelise ruumi kohta. Geneeriva funktsiooni kasutamine võimaldab aga saada need samasused automaatselt, lihtsate algebraliste teisenduste abil.

Newtoni rida

Me nimetasime valemi avaldise $(a+x)^n$ jaoks *Newtoni binoomvalemiks*, nagu seda tavaliselt koolis tehakse. See nimetus on matemaatika ajaloo seisukohalt ebaõige. Valemite astme $(a+x)^n$ jaoks tundsid hästi Kesk-Aasia matemaatikud, nagu Omar Hajjam jt. Lääne-Euroopas teadis Blaise Pascal seda valemit ammu enne Newtonit. Newtoni teene oli selles, et tal õnnestus üldistada see valem juhule, kus astendajad ei tarvitse olla täisarvud. Ta näitas nimelt, et *kui a on positiivne arv ja $|x| < a$, siis kehtib iga reaalarvu α korral võrdus*

$$\begin{aligned} (x+a)^\alpha = & a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} a^{\alpha-2}x^2 + \dots \\ & \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} a^{\alpha-k}x^k + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Ainult nüüd ei teki mitte lõplik arv liidetavaid, vaid lõpmatu rida. Juhul kui n on naturaalarv, muutub suluavaldis $(n-n)$ nulliks. Kuid see suluavaldis kuulub kõigi liikmete kordajatesse alates liikmest $n+2$, seetõttu on arendise kõik need liikmed nullid ja rida (43) muutub naturaalarvulise n puhul lõplikuks summaks.

Me ei hakka valemit (43) tõestama kõigi α väärtuste jaoks, vaid vaatleme juhtu, kus α on negatiivne täisarv, $\alpha = -n$. Sel korral on tõestataval valemil järgmine kuju:

$$\begin{aligned} (x+a)^{-n} = & a^{-n} - na^{-n-1}x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^{-n-2}x^2 - \\ & - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-n-3}x^3 + \dots \\ & \dots + (-1)^k \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} a^{-n-k}x^k + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Teisiti võib seda vördust kirjutada nii:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-n} &= 1 - C_n^1 \left(\frac{x}{a}\right) + C_{n+1}^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \\ &- C_{n+2}^3 \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots + (-1)^k C_{n+k-1}^k \left(\frac{x}{a}\right)^k + \dots \quad (44') \end{aligned}$$

$$\left(\text{sest } C_{n+k-1}^k = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} \right).$$

Meil on mugavam asendada $\frac{x}{a}$ arvuga $-t$ ja tões-
tada valemi (44') asemel järgmine vördus:

$$(1-t)^{-n} = 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + \dots + C_{n+k-1}^k t^k + \dots \quad (45)$$

Töestame vörduse induktsiooniga n järgi. $n=1$ korral
saame $C_{n+k-1}^k = C_k^k = 1$ ja töestatav valem omandab kuju

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^k + \dots \quad (46)$$

Kuid see on tuntud valem lõpmatu kaheneva geomeetri-
lise progressiooni summa jaoks (tuletame meelde, et $|t| =$
 $= \left| \frac{x}{a} \right| < 1$).

Oletame nüüd, et vördus (45) on juba töestatud ja
näitame, et sellest järeldub vördus

$$(1-t)^{-n-1} = 1 + C_{n+1}^1 t + C_{n+2}^2 t^2 + \dots + C_{n+k}^k t^k + \dots \quad (47)$$

Selleks korrutame töestatava vörduse (47) mõlemad poo-
led vahega $1-t$. (Saab nimelt näidata, et kui kaks astme-
rida annavad korrutamisel ühe ja sama nullist erineva
avaldisega vördse tulemuse, siis peavad nad ka ise olema
vördsed.) Kuid pärast vörduse (47) korrutamist avaldi-
siga $1-t$ saame vasakul

$$(1-t)^{-n}$$

ja paremal

$$\begin{aligned} [1 + C_{n+1}^1 t + C_{n+2}^2 t^2 + \dots + C_{n+k-1}^{k-1} t^{k-1} + \\ + C_{n+k}^k t^k + \dots] (1-t). \end{aligned}$$

Avame teises avaldises sulud ja võtame sarnased liikmed
kokku. Astet t^k sisaldav liige tekib kahel korral: kui

$C_{n+k}^h t^h$ korrutatakse 1-ga ja kui $C_{n+k-1}^{h-1} t^{h-1}$ korrutatakse liikmega $-t$. Seetõttu tuleb t^h kordaja teises avaldises

$$C_{n+k}^h - C_{n+k-1}^{h-1} = C_{n+k-1}^h$$

(vt. valemit (11) leheküljel 48).

Kuid eelduse järgi võrdub astme t^h kordaja avaldise $(1-t)^{-n}$ arendises just arvuga C_{n+k-1}^h . Et me saime pärast vahega $1-t$ korrutamist võrdsed avaldised, siis kehtib ka tõestatav võrdus (45).

Kui lugeja ei soovi tõestatavalt võrduselt juba tuntud seostele minna, vaid eelistab vastupidist teed, siis tuleb võrduse (45) mõlemad pooled korrutada seose (46) vastavate pooltega. Saame

$$(1-t)^{-n-1} = (1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + \dots + C_{n+k-1}^h t^h + \dots) (1 + t + t^2 + \dots + t^h + \dots).$$

Nüüd aga tuleb avada sulud ja kasutada samasust

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+k-1}^h = C_{n+k}^h$$

(vt. lk. 49). Tulemusena jõuame tõestatava seoseni (47).

Niisiis on võrdus (45) tõestatud. Tuletame veel kord meelde, et see kehtib vaid $|t| < 1$ puhul. Kui ettevaatamatu lugeja proovib võrduse mõlemal poolel võtta $t = -1$ ja tuletab selle põhjal «tähelepanuväärse» valemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &= 1 - C_n^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+2}^3 + \dots \\ &\dots + (-1)^h C_{n+h-1}^h + \dots, \end{aligned} \quad (48)$$

siis teeb ta tõsise vea: paremal poolel on ju täisarvude summa, mis ei saa kuidagi anda murdu $\frac{1}{2^n}$.

XVIII sajandil, kui lõpmatute ridade teooriat polnud veel üksikasjaliselt uuritud, tegid selliseid vigu ka tuntud matemaatikud. Oli vaja aastakümneid kestvaid pingelisi uurimisi, et täpselt mõista, mis on lõpmatu rea summa, millal see on olemas ja millal mitte. Tuleb öelda, et XIX sajandi lõpul üldistati lõpmatu rea summa mõistet tunduvalt ning leidub selliseid rea summa definitsioone, mille puhul valem (48) kehtib. Kuid need küsimused ulatuvad meie raamatu piiridest välja.

Võrdleme tõestatud arendist

$$(1+t)^{-n} = 1 - C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 - \dots + (-1)^k C_{n+k-1}^k t^k + \dots \quad (49)$$

valemiga

$$(1+t)^n = 1 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \dots + C_n^k t^k + \dots + t^n. \quad (50)$$

Me jõuame uuesti järeldusele, et sümbolite C_n^k üldistamisel n negatiivsetele väärtustele tuleb defineerida

$$C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$$

(vt. lk. 120). Suuruse k negatiivsete väärtuste korral aga $C_n^k = 0$, sest arendised (49) ja (50) ei sisalda t negatiivsete astmetega liikmeid. Samadest kaalutlustest saame, et $C_n^k = 0$, kui $0 \leq n < k$.

Ruutjuurte leidmine

Oleme tõestanud Newtoni valemi kõigi täisarvuliste astendajate puhul. Kuid nagu juba öeldud, kehtib see valem ka murruliste (ja isegi irratsionaalsete) astendajate korral. Me ei hakka valemit nende astendajate jaoks tõestama ning kirjutame välja vaid arendised $n = \frac{1}{2}$ ja

$n = -\frac{1}{2}$ puhul.

$n = \frac{1}{2}$ korral omandab Newtoni valem kuju

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \\ &+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ &\dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{1 \cdot 2 \dots k}x^k + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Seda avaldist teisendades saame

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$\dots + (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \dots 2k} x^k + \dots$$

Täpselt samuti tuletame $n = -\frac{1}{2}$ korral, et

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} x^k + \dots \quad (52)$$

Saadud valemid võib teisiti kirja panna. Selleks paneme tähele, et

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^k.$$

Seepärast

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^2} C_2^1 x + \frac{1}{2^4} C_4^2 x^2 - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2k}^k x^k + \dots \quad (53)$$

Täpselt samuti saame

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^5} C_4^2 x^3 - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k + \dots \quad (54)$$

Leitud avaldised koonduvad piirkonnas $|x| < 1$. Nende abil saab mistahes täpsusega ruutjuuri arvutada. Näiteks

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{25+5} = 5 \sqrt[3]{1+0,2} = 5(1+0,2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot 0,2^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 0,2^3 - \dots \right] =$$

$$= 5,4775 \dots$$

Kuid meid ei huvita mitte nimetatud valemite rakendused ruutjuurte leidmisel, vaid saadud arendistest tulenevad

seosed binoomkordajate vahel. Et neid seoseid saada, tõstame valemi (53) mõlemad pooled ruutu. Astmeridade korrutamise reegli järgi saame, et x^k kordaja paremal poolel on

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}} \left[C_{2k}^k + C_2^1 C_{2k-2}^{k-1} + C_4^2 C_{2k-4}^{k-2} + \dots + C_{2k}^k \right].$$

Võrduse vasakul poolel saame

$$[(1+x)^{-\frac{1}{2}}]^2 = \frac{1}{1+x}.$$

Kuid me teame, et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k + \dots$$

Võrreldes x^k kordajaid võrduse mõlemal poolel, jõuame samasuseni

$$C_{2k}^k + C_2^1 C_{2k-2}^{k-1} + C_4^2 C_{2k-4}^{k-2} + \dots + C_{2k}^k = 2^{2k}. \quad (55)$$

Analoogiliste arutluste rakendamine valemi (54) puhul annab samasuse

$$\begin{aligned} & \frac{C_{2k-4}^{k-2}}{1 \cdot (k-1)} + \frac{C_2^1 C_{2k-6}^{k-3}}{2(k-2)} + \frac{C_4^2 C_{2k-8}^{k-4}}{3(k-3)} + \dots + \frac{C_{2k-4}^{k-2}}{(k-1) \cdot 1} = \\ & = \frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k}, \end{aligned} \quad (56)$$

mis kehtib $k \geq 2$ puhul.

Edasi saame arendisi (53) ja (54) liikmeti korrutades:

$$\begin{aligned} 1 &= \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^5} C_4^2 x^3 - \dots + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k + \dots \right] \cdot \\ & \cdot \left[1 - \frac{1}{2^2} C_2^1 x + \frac{1}{2^4} C_4^2 x^2 + \dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2k}^k x^k + \dots \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Avame selle võrduse parempoolses osas sulud. Saame astmerea, kusjuures valemist (57) järeldub, et selle rea kõik kordajad (peale vabaliikme) on nullid. Siit saame samasuse

$$C_{2k-2}^{k-1} + \frac{1}{2} C_2^1 C_{2k-4}^{k-2} + \frac{1}{3} C_4^2 C_{2k-6}^{k-3} + \dots + \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} = \\ = \frac{1}{2} C_{2k}^k, \quad (58)$$

mis on kehtiv $k \geq 1$ puhul.
Paneme lõpuks tähele, et

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-1} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Siit järeldub, et

$$\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k + \dots \right) (1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ \dots + (-1)^k x^k + \dots) = 1 - \frac{1}{2^2} C_2^1 x + \frac{1}{2^4} C_4^2 x^2 - \dots \\ \dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2k}^k x^k + \dots$$

Avades võrduse mõlemal poolel sulud ja võrreldes kumagi poole kordajaid, jõuame samasuseni

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 2^2} C_2^1 - \frac{1}{3 \cdot 2^4} C_4^2 - \dots - \frac{1}{k \cdot 2^{2k-2}} C_{2k-2}^{k-1} = \\ = \frac{1}{2^{2k-1}} C_{2k}^k. \quad (59)$$

Genereerivad funktsioonid ja rekurrentsed seosed

Märkisime juba, et genereerivate funktsioonide teooria on tihedalt seotud rekurrentsete seostega. Pöördume uuesti tagasi polünoomide jagamise juurde. Olgu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

ja

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

kaks polünoomi, kusjuures $b_0 \neq 0$. Peale selle eeldame veel, et $n < m$, s.o. murd $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ on lihtmurd (vastasel juhul võime alati eraldada tema täisosa).

Me teame, et kui

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots, \quad (60)$$

siis

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \cdot (c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots).$$

Avame selle võrduse parempoolses osas sulud ja võrdleme ühesuguste astmete kordajaid vasakul ja paremal. Algul saame m seost:

$$\begin{aligned} b_0c_0 &= a_0, \\ b_0c_1 + b_1c_0 &= a_1, \\ b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 &= a_2, \\ &\vdots \\ b_0c_{m-1} + b_1c_{m-2} + \dots + b_{m-1}c_0 &= a_{m-1} \end{aligned} \quad (61)$$

(kui $n < m - 1$, siis loeme, et $a_{n+1} = \dots = a_{m-1} = 0$). Edasi on aga kõigil seostel üks ja sama kuju:

$$b_0c_{m+k} + b_1c_{m+k-1} + \dots + b_mc_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (62)$$

(polünoomil $f(x)$ pole ju liikmeid, mis sisaldaksid x^m , x^{m+1} jne.). Seega rahuldavad rea (60) kordajad $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$ rekurrentset seost (62). Selle seose kordajad sõltuvad ainult murru nimetajast. Murru lugeja on aga vajalik rekurrentse jada esimeste liikmete $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ leidmiseks.

Vastupidi, kui on antud rekurrentne seos (62) ja jada liikmed $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$, siis arvutame algul valemite (61) järgi $a_0, \dots, a_{m-1}$ väärtused. Siis on aga jada $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$ genereerivaks funktsiooniks murd

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}. \quad (63)$$

Esimesel pilgul näib, et rekurrentse seose asendamisel genereeriva funktsiooniga oleme vähe võitnud. Nagunii tuleb ju lugeja nimetajaga jagada, see aga viib sama rekurrentse seoseni (62). Kuid asi on selles, et murruga (63) saab teha mõningaid algebralisi teisendusi, mis hõlbustab arvude c_k leidmist.

Osamurdudeks lahutamine

Näitame nüüd, kuidas on genereeriva funktsiooni algebralise teisendamise abil võimalik rekurrentseid võrrandeid lahendada. Oletame, et murru (63) nimetaja on lahutatud esimese astme teguriteks

$$\varphi(x) = b_m(x - \alpha_1)^r \dots (x - \alpha_k)^s.$$

Märgime, et selleks tuleb eelnevalt lahendada võrrand $b_0 + \dots + b_m x^m = 0$, s. o. võrrand, mis erineb seose (62) karakteristlikust võrrandist kordajate vastupidise järjekorra poolest.

Siis võib näidata, et murdu (63) on võimalik saada sel teel, kui tuua ühisele nimetajale järgmised osamurrud:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)^r} & , & \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^{r-1}} & , & \dots & , & \frac{A_{1,r-1}}{x - \alpha_1} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \frac{A_{k1}}{(x - \alpha_k)^s} & , & \frac{A_{k2}}{(x - \alpha_k)^{s-1}} & , & \dots & , & \frac{A_{k,s-1}}{x - \alpha_k} \end{array}$$

Teiste sõnadega, peab kehtima valem

$$\begin{aligned} \frac{a_0 + \dots + a_{m-1}x^{m-1}}{b_m(x - \alpha_1)^r \dots (x - \alpha_k)^s} &= \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)^r} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{1,r-1}}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_{k1}}{(x - \alpha_k)^s} + \dots + \frac{A_{k,s-1}}{x - \alpha_k}. \end{aligned} \quad (64)$$

Me ei tea siin vaid kordajaid $A_{11}, \dots, A_{k,s-1}$. Nende leidmiseks tuleb võrduse (64) mõlemad pooled korrutada nimetajaga $(x - \alpha_1)^r \dots (x - \alpha_k)^s$, avada sulud ja võrrelda kordajaid x ühesuguste astmete ees. Saadud võrrandisüsteemist leiamegi otsitavad kordajad.

Mõnikord õnnestub ka võrrandisüsteemi lahendamata läbi saada. Olgu näiteks vaja osamurdudeks lahutada murd

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Et

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2), \end{aligned}$$

siis peab sellel lahutusel olema kuju

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

Ühisele nimetajale tuues saame

$$x^3 - 2x^2 + 6x + 1 = A(x+1)(x-2)(x+2) +$$

$$+ B(x-1)(x-2)(x+2) + C(x-1)(x+1)(x+2) +$$

$$+ D(x-1)(x+1)(x-2).$$

See võrdus peab kehtima kõigi x väärtuste korral. Kuid $x=1$ puhul muutuvad paremal poolel kõik liidetavad peale esimese nullideks ja me saame $-6A=6$. Seepärast $A=-1$. Võttes $x=-1$, $x=2$, $x=-2$, leiame täpselt samuti, et $B=-\frac{4}{3}$, $C=\frac{13}{12}$, $D=\frac{9}{4}$. Seega

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 - 5x^2 + 4} = -\frac{1}{x-1} - \frac{4}{3(x+1)} +$$

$$+ \frac{13}{12(x-2)} + \frac{9}{4(x+2)}. \quad (65)$$

Kuju $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$ omavaid murde saame reaks arendada Newtoni valemi põhjal. Näiteks

$$\frac{13}{12(x-2)} = -\frac{13}{24} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} =$$

$$= -\frac{13}{24} \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\right].$$

Rakendades sellist reaksarendust kõigi murdude puhul võrduses (65), saame

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 - 5x^2 + 4} = (1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots) -$$

$$- \frac{4}{3}(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots) -$$

$$- \frac{13}{24} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\right) +$$

$$+ \frac{9}{8} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} x^n + \dots\right).$$

Võttes kokku x ühesuguste astmetega liikmed, leiame, et kordaja x^n juures avaldub valemiga

$$c_n = 1 - \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{13}{24 \cdot 2^n} + \frac{9(-1)^n}{8 \cdot 2^n}.$$

Me teame juba, et algebralise murru astmereaks arendamise ülesanne on samaväärne teatud rekurrentse võrrandi lahendamisega antud algtingimustel. Seega saab lineaarseid konstantsete kordajatega rekurrentseid võrrandeid lahendada, kui lahutada vastavad murrud algul osamurdudeks ja arendada saadud murrud hiljem astmeridadeks.

Niisiis, kui on antud rekurrentne seos (62) ja $c_0, \dots, c_{m-1}$ väärtused, siis tuleb algul valemite (61) järgi leida $a_0, \dots, a_{m-1}$ väärtused. Need arvud annavad murru

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots$$

lugejas seisva polünoomi kordajad. Murru nimetajaks on aga $b_0 + \dots + b_mx^m$.

Leitud murd $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tuleb lahutada osamurdudeks ja seejärel arendada iga osamurd Newtoni valemi järgi astmereaks. x^k kordaja selles reas annabki c_k väärtuse.

Lahendame näiteks rekurrentse võrrandi

$$c_{k+2} - 5c_{k+1} + 6c_k = 0 \quad (66)$$

algtingimustel $c_0 = 1, c_1 = -2$. Siin $b_0 = 1, b_1 = -5, b_2 = 6$. Valemist (61) saame

$$a_0 = b_0c_0 = 1, \quad a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = -7.$$

Seepärast on murru

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots$$

lugeja $1 - 7x$. Murru nimetaja saame aga kohe seosest (66), see on $1 - 5x + 6x^2$. Seega tuleb meil lahendi leidmiseks arendada murd

$$\frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2}$$

astmereaks. Kuid $6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ja seepärast

$$\begin{aligned}\frac{1-7x}{6x^2-5x+1} &= \frac{1-7x}{6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \\ &= \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Nimetajast vabanedes saame

$$1-7x = 6A\left(x-\frac{1}{3}\right) + 6B\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Võttes $x = \frac{1}{3}$, leiame, et $B = \frac{4}{3}$, ja võttes $x = \frac{1}{2}$, saame

$A = -\frac{5}{2}$. Järelikult,

$$\begin{aligned}\frac{1-7x}{6x^2-5x+1} &= -\frac{\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{5}{2x-1} + \frac{4}{3x-1} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x} = \\ &= 5(1+2x+\dots+2^n x^n+\dots) - 4(1+3x+\dots \\ &\quad \dots+3^n x^n+\dots).\end{aligned}$$

Seepärast

$$c_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n.$$

Ühest mittelineaarsest rekurrentsest seosest

Lahendades ülesannet hulga järkjärgulise jaotamise kohta, jõudsimme rekurrentse võrrandini

$$T_n = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_0, \quad (67)$$

kus $T_0 = 1$ (vt. lk. 151). Selle võrrandi lahendasime väga kunstlikult: me taandasime vastava ülesande järjekorra-ülesandele (vt. lk. 81), mida juba oskasime lahendada. Kuid järjekorraülesande lahendus ise oli üsna keeruline.

Näitame nüüd, kuidas võrrandit (67) vahetult lahendada. Selleks koostame genereeriva funktsiooni

$$f(x) = T_0 + T_1x + T_2x^2 + \dots + T_nx^n + \dots \quad (68)$$

Tähistame

$$F(x) \equiv xf(x) = T_0x + T_1x^2 + \dots + T_nx^{n+1} + \dots \quad (69)$$

ja tõstame rea $F(x)$ ruutu. Saame

$$F^2(x) = T_0^2x^2 + (T_0T_1 + T_1T_0)x^3 + \dots + (T_0T_{n-1} + \dots + T_{n-1}T_0)x^{n+1} + \dots$$

Kuid rekurrentse seose (67) järgi

$$T_0T_{n-1} + \dots + T_{n-1}T_0 = T_n.$$

Tähendab,

$$F^2(x) = T_1x^2 + T_2x^3 + \dots + T_nx^{n+1} + \dots$$

Saadud rida pole midagi muud kui $F(x) - T_0x$, et aga $T_0 = 1$, siis võrdub ta reaga $F(x) - x$. Niisiis,

$$F^2(x) = F(x) - x. \quad (70)$$

Saime ruutvõrrandi funktsiooni $F(x)$ määramiseks. Seda lahendades leiame, et

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Me võtsime juure ees miinusmärgi, sest vastasel juhul saaksime $x=0$ korral $F(0)=1$, kuid arendisest (69) on näha, et $F(0)=0$.

Valemi (54) põhjal saame

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2x - \frac{2}{2} C_2^1 x^2 - \\ &- \frac{2}{3} C_4^2 x^3 - \dots - \frac{2}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \dots \end{aligned}$$

Seega,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - 2x - \dots - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{2}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \dots \right) \right] = \\ &= x + C_2^1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (71)$$

Valemeid (69) ja (71) võrreldes saame, et $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

See vastab täielikult eespool kombinatoorsel meetodil saadud lahendile (vt. lk. 152).

Genereerivad funktsioonid ja arvude jaotamine

IV peatükis lahendasime mitmesuguseid kombinatoorikaülesandeid arvude jaotamise kohta. Neid on väga lihtne lahendada genereerivate funktsioonide abil. Tähistame arvu n jaotamisviiside arvu a_n abil ja moodustame rea

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

Paljudel juhtudel õnnestub koostada selline algebraline avaldis $f(x)$, et pärast sulgude avamist saame parajasti a_n korda liidetava x^n . Siis kehtib

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

ja järelikult on $f(x)$ jada $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ genereeriv funktsioon.

Vaatleme näiteks arvu N jaotamist liidetavateks, millest igaüks võrdub ühega arvudest $n_1, \dots, n_k$. Seejuures ei tohi liidetavad summas korduda, nende järjekord pole aga oluline.

Ülesande lahendamiseks moodustame avaldise

$$(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\dots(1+x^{n_k}). \quad (72)$$

Sulgude avamisel saame liidetavad kujuga $x^{m_1+\dots+m_s}$, kus $m_1, \dots, m_s$ on mõned arvude $n_1, \dots, n_k$ seast. Seepärast esineb x^N summas niimitu korda, kui mitmel viisil saab arvu N nõutud tingimustel liidetavateks lahutada.

Kui on näiteks vaja leida, mitmel viisil saab tasuda 78 kopikat, võttes igas suuruses münte mitte üle ühe, siis tuleb koostada avaldis

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^{10})(1+x^{15}) \cdot (1+x^{20})(1+x^{50}), \quad (73)$$

avada sulud ja leida kordaja x^{78} ees.

Nüüd aga lahendame genereerivate funktsioonide abil järgmise ülesande.

Mitmel viisil saab 3- ja 5-kopikaliste abil tasuda 29 kopikat?

Selles ülesandes tuleb leida, mitmel viisil saab arvu 29 lahutada liidetavateks, mis võrduvad arvudega 3 ja 5, kusjuures liidetavate järjekord pole tähtis. Teiste sõnades tuleb meil leida võrrandi $3m+5n=29$ mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite arv. Selleks koostame avaldise

$$f(x) = (1+x^3+x^6+\dots+x^{3m}+\dots) \cdot (1+x^5+x^{10}+\dots+x^{5n}+\dots). \quad (74)$$

Muutuja x astendajad omandavad esimeses suluavaldises kõik kolmega jaguvad, teises aga kõik viiega jaguvad mittenegatiivsed väärtused. On selge, et pärast sulgude avamist tuleb aste x^N sellise kordajaga, mis võrdub võrrandi $3m+5n=N$ lahendite arvuga. Erijuhuna annab astme x^{29} kordaja meie ülesande vastuse.

Sulgude avamise asemel võib toimida nii. Kasutame lõpmatu geomeetrilise progressiooni summa valemit. Siis saab avaldise (74) kirjutada kujul

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{1-x^3-x^5+x^8}.$$

Nüüd aga jagame lugeja nimetajaga polünoomide jagamise reegli järgi (ainult järjestame liikmed mitte astmete kahanemise, vaid kasvamise järjekorras). Jagamise algus on niisugune:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{x^3+x^5-x^8} \quad \left| \frac{1-x^3-x^5+x^8}{1+x^3+x^5+x^6+x^8+\dots} \right. \\ \hline x^5+x^6-x^{11} \\ \hline x^6+x^8+x^{10}-x^{11}-x^{13} \\ \hline x^8+x^9+x^{10}-x^{13}-x^{14} \end{array}$$

Jagamist jätkates leiame otsitava kordaja x^{29} juures.

Üldine ülesanne on siin selline:

leida mitmel viisil saab arvu N lahutada liidetavateks, mis võrduvad vastavalt arvudega $a, b, \dots, m$, kusjuures liidetavate järjekorda ei arvestata.

Sel juhul on genereerivaks funktsiooniks

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^a+x^{2a}+\dots+x^{ta}+\dots)(1+x^b+x^{2b}+\dots \\ &\dots+x^{sb}+\dots) \cdot \dots \cdot (1+x^m+x^{2m}+\dots+x^{qm}+\dots) = \\ &= \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\dots(1-x^m)}. \end{aligned} \quad (75)$$

Näiteks kümnekopikalise peeneksvahetamise ülesandes (vt. lk. 102) tuleb koostada genereeriv funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}.$$

Kui murru nimetajas olevad tegurid läbi korrutame, saame

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}.$$

Jagamisel leiame

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11} \\ \hline 1+x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots \\ \hline x+x^2 \quad -x^4 \quad -x^7 \quad +x^9+x^{10}-x^{11} \\ \hline 2x^2+x^3-x^4-x^5 \quad -x^7-x^8+x^9+2x^{10} \quad -x^{12} \\ \hline 3x^3-x^4-x^5-x^6-x^7-x^8-x^9+2x^{10}+2x^{11}+x^{12}-2x^{13} \end{array}$$

Astme x^{10} kordaja annabki vastuse.

Siin on harilikul viisil jagada muidugi üsna keeruline. Selle asemel võime toimida teisiti. Kirjutame jagamise tulemuse määramata kordajatega rea kujul

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}} = \\ & = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots \end{aligned}$$

Korrutame võrduse mõlemad pooled nimetajaga. Siis osutub x^n kordajaks paremal poolel

$$A_n - A_{n-1} - A_{n-2} + A_{n-4} + A_{n-7} - A_{n-9} - A_{n-10} + A_{n-11}.$$

Vasakul poolel on aga x^n kordaja $n \geq 1$ puhul null. Seepärast peavad kordajad A_n tingimuse $n \geq 1$ korral rahuldama rekurrentset seost

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-4} - A_{n-7} + A_{n-9} + A_{n-10} - A_{n-11}.$$

Algtingimused on: $A_n = 0$, kui $n < 0$, ja $A_0 = 1$. Neid tingimusi kasutades on kerge leida kõik kordajad. Vaatleme näiteks abituriendiprobleemi (vt. lk. 97). Seal tuli leida, mitmel viisil saab arvu 17 esitada 4 liidetava summana, kusjuures liidetavad võisid omada väärtusi 3, 4, 5 ja oli oluline nende järjekord. Selle ülesande korral tuleb genereerivaks funktsiooniks võtta $(x^3+x^4+x^5)^4$. Pärast sulgude

avamist avaldises $f(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4$ esineb liidetav x^N ju niimitu korda, kuimitmel viisil saab arvu N lahutada neljaks liidetavaks suurusega 3, 4 või 5. Seejuures esineb ka liikmeid, mis saadakse üksteisest astendajas olevate liidetavate ümberpaigutamise teel (näiteks $x^3x^4x^5x^3$ ja $x^4x^3x^3x^5$).

Sulud võib avaldises $(x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^{12}(1 + x + x^2)^4$ avada näiteks polünoomvalemi järgi. Kuid lihtsam on teine viis. Paneme tähele, et $1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$. Seepärast võib $f(x)$ kirjutada kujul

$$f(x) = \frac{x^{12}(1 - x^3)^4}{(1 - x)^4} = x^{12}(1 - x^3)^4(1 - x)^{-4}.$$

Kuid Newtoni binoomvalemi järgi saame

$$(1 - x^3)^4 = 1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}$$

ja Newtoni rea valemi järgi

$$(1 - x)^{-4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots \\ \dots + \frac{4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

Seepärast

$$f(x) = x^{12}(1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}) \cdot (1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + \dots).$$

Neid arendisi liikmeti korrutades leiame, et kordaja x^{17} ees on 16. Järelikult saab arvu 17 lahutada liidetavateks 16 viisil.

Üldiselt, kui on tarvis leida, mitmel viisil saab lahutada arvu N k liidetavaks suurustega $n_1, \dots, n_s$, kusjuures arvestatakse liidetavate järjekorda, siis on genereeriv funktsioon

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \dots + x^{n_s})^k. \quad (76)$$

Ülesanne lihtsustub, kui arvud $n_1, \dots, n_s$ moodustavad aritmeetilise progressiooni: sel korral moodustavad astmed $x^{n_1}, \dots, x^{n_s}$ geomeetrilise progressiooni, mis võimaldab $f(x)$ avaldist lihtsustada.

Leiame näiteks, mitmel viisil võib seitset täringut heites saada 25 silma. Siin tuleb koostada genereeriv funktsioon

$$f(x) = (x + x^2 + \dots + x^6)^7. \quad (77)$$

Geomeetrilise progressiooni summa valemi põhjal võib selle funktsiooni üles kirjutada järgmiselt:

$$f(x) = \frac{x^7(1-x^6)^7}{(1-x)^7} = x^7(1-x^6)^7(1-x)^{-7}.$$

Arendame nüüd avaldise $(1-x^6)^7$ Newtoni binoomvalemi ja avaldise $(1-x)^{-7}$ Newtoni rea valemi järgi. Saame

$$f(x) = x^7(1-7x^6+21x^{12}-35x^{18}+35x^{24}-21x^{30}+7x^{36}-x^{42})(1+7x+28x^2+84x^3+210x^4+462x^5+\dots).$$

Neid arendisi korrutades arvutame vaevata välja astme x^{25} kordaja. See annabki ülesande vastuse.

Analoogiliselt lahendatakse genereerivate funktsioonide abil ka teised IV peatükis käsitletud ülesanded.

KOKKUVÕTE

1. n erinevat eset saab jaotada r eristatavaks rühmaks (lubatud on ka tühjad rühmad) r^n viisil.

2. n erinevat eset saab jaotada r eristatavaks rühmaks (ükski rühm pole tühi)

$$r^n - \frac{r}{1}(r-1)^n + \frac{r(r-1)}{2}(r-2)^n - \dots$$

viisil. Jaotamisviiside arv võrdub teguri $n!$ ja astme x^n kordaja korrutisega (kordaja on võetud funktsiooni $(e^x-1)^r$ arendisest astmereaks).

3. Kui rühmad samas ülesandes pole eristatavad, saame $r!$ korda vähem jaotamisviise.

4. n ühesugust eset saab jaotada r eristatavaks rühmaks (ükski neist pole tühi) C_{n-1}^{r-1} viisil.

5. Kui samas ülesandes on lubatud ka tühjad rühmad, saame C_{n+r-1}^{r-1} jaotamisviisi.

6. Kui iga rühm sisaldab samas ülesandes vähemalt q eset, siis on jaotamisviise $C_{n-1-r(q-1)}^{r-1}$.

7. Kui iga rühma elementide arv samas ülesandes on q ja $q+s-1$ vahel, siis võrdub jaotamisviiside arv astme x^{n-rq} kordajaga funktsiooni $\left(\frac{1-x^s}{1-x}\right)^r$ arenduses astmereaks.

8. Olgu n ühesugust eset parajasti Π_n^r viisil jaotatavad r eristamatuks rühmaks (ükski neist pole tühi). Siis kehtib rekurrentne valem

$$\Pi_n^r = \Pi_{n-1}^{r-1} + \Pi_{n-r-1}^{r-1} + \Pi_{n-2r-1}^{r-1} + \dots$$

On õige võrdus

$$\Pi_n^r = \Pi_{n-1}^{r-1} + \Pi_{n-r}^r.$$

Tingimuse $n - r < r$ puhul saame $\Pi_n^r = \Pi_{n-1}^{r-1}$.

Koos hulkade jaotustega vaadeldakse hulkade järjestamisi, mille puhul on oluline nii rühmade järjekord kui ka elementide järjekord rühmades.

9. n erinevat eset saab järjestada r eristatavaks rühmaks (on lubatud ka tühjad rühmad)

$$r(r+1)\dots(r+n-1)$$

viisil.

10. Kui ükski rühm samas ülesandes ei tohi olla tühi, siis on järjestamisviise

$$n! C_{n-1}^{r-1} = \frac{n!(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}.$$

Kui aga rühmad on eristamatud (nende järjekord pole oluline), siis on järjestamisviiside arv $\frac{n!}{r!} C_{n-1}^{r-1}$.

11. n erinevast elemendist saab r järjestatud rühma koostada

$$n! \left[\frac{1}{n!} + \frac{r}{1!(n-1)!} + \frac{r(r+1)}{2!(n-2)!} + \dots \right]$$

viisil (kõigi elementide kasutamine pole nõutav, tühjad rühmad on lubatud ja oluline on ka rühmade järjekord). See avaldis võrdub $n!$ ja x^n kordaja korrutisega (viimane on võetud funktsiooni $e^x(1-x)^{-r}$ astmereaks arendusest).

12. Kui samas ülesandes pole tühjad rühmad lubatud, siis annab vastuse teguri $n!$ ja astme x^{n-r} kordaja korrutis (viimane on võetud sama funktsiooni reaksarendusest).

ÜLESANDED

1. Linnast *A* viib linna *B* viis teed, viimasest linna *C* kolm teed. Mitmel viisil saab linnast *A* sõita *B* kaudu linna *C*?
2. Kahes spordiühingus on kummaski 100 vehklejat. Võistlustele tuleb mõlemast ühingust saata üks vehkleja. Mitmel viisil võib neid sportlasi valida?
3. Peetril on viit liiki margita ümbrikke ja nelja erinevat liiki neljakopikasi marke. Mitmel viisil saab Peeter valida kirja jaoks ümbriku ja margi?
4. Mitmel viisil saab sõnast «lendur» valida tähepaare, mis koosneksid ühest täis- ja ühest kaashäälikust?
5. Sama ülesanne sõna «hobune» puhul.
6. Visati kuuetahtulist täringut ja pandi pöörlema kaheksatahtuline vurr. Mitmel erineval viisil võivad nad peatuda?
7. Mäetippu viib viis teed. Turist tõuseb märke ja laskub mäest alla. Mitmel viisil võib ta seda teha? Sama küsimus, kuid tõus ja langus peavad toimuma erinevaid teid pidi.
8. Farmis on 20 lammast ja 24 siga. Mitmel viisil saab valida ühe lamba ja ühe sea? Mitut moodi saab sellise valiku teha ülejäänud loomade hulgast, kui üks niisugune valik on juba tehtud?
9. Mitmel viisil saab malelaual valida valge ja musta ruudu? Aga ruudupaari, värvist olenemata?
10. Mitmel viisil saab malelaual valida valge ja musta ruudu, mis ei asetse ühel horisontaalil ega ühel vertikaalil?
11. Karbist, kus on 12 punast, 9 sinist ja 10 lillat pliiatsit, tuleb valida üks pliiats igast värvist. Mitmel viisil saab seda teha?
12. On olemas 6 paari erineva suurusega kindaid. Mitmel viisil saab valida ühe vasaku ja teise parema käe kinda nii, et nad oleksid erineva suurusega?

- 13.** Riiulilt, kus on 3 algebra-, 7 geomeetria- ja 7 trigonomeetriaõpikut, tuleb valida üks õpik igast sordist. Mitmel viisil saab seda teha?
- 14.** Antikvariaadis on I. Turgenevi romaan «Rudin» 6 eksemplaris, «Aadlipesa» 3 ning «Isad ja pojad» 4 eksemplaris. Peale selle on 5 kogutud teoste köidet romaanidega «Rudin» ja «Aadlipesa» ning 7 köidet romaanidega «Aadlipesa» ja «Isad ja pojad». Mitmel viisil saab neid raamatuid osta, kui iga romaani tahetakse saada ühes eksemplaris?
- 15.** Sama ülesanne lisaeeldusel, et kaupluses on kolm köidet romaanidega «Rudin» ning «Isad ja pojad».
- 16.** Korvis on 12 õuna ja 10 apelsini. Tiit valib endale õuna või apelsini. Seejärel võtab Mai endale nii õuna kui ka apelsini. Kummal juhul on Mail rohkem valikuvõimalusi, kas siis, kui Tiit võttis õuna, või siis, kui ta võttis apelsini?
- 17.** Pöörlevad kolm vurri, millel on vastavalt 6, 8 ja 10 tahku. Mitmes erinevas asendis võivad nad peatuda? Sama küsimus juhul, kui on teada, et vähemalt kaks vurri kukkusid tahkudele, millel on number 1.
- 18.** Mitmel viisil saab viiest värvist valida kolm erinevat?
- 19.** Mitmel viisil saab valmistada kolmevärvilise triibulise lipu, kui on olemas 5 erinevat värvi riidet? Sama ülesanne lisaeeldusel, et üks triip peab olema punane.
- 20.** Mitu sõnaraamatut tuleb välja anda, et oleks võimalik tõlkida vene, inglise, prantsuse, saksa ja itaalia keelest ükskõik missugusesse neist keeltest?
- 21.** Mitu sõnaraamatut oleks juurde tarvis, kui erinevate keelte arv oleks 10?
- 22.** Mitmel viisil saab tervest kaardipakist (52 kaarti) valida ühe kaardi igast mastist? Sama ülesanne tingimusel, et väljatõmmatud kaartide hulgas pole ühtegi paari ühenimelisi, s.t. kahte kuningat, kahte kümmet jne.
- 23.** Mitmel viisil võib tervest kaardipakist valida ühe kaardi igast mastist nii, et punaste ja mustade mastide kaardid oleksid ühenimelised (näiteks poti ja risti üheksad ning ruutu ja ärtu sõdurid)?
- 24.** Inglastel on kombeks panna oma lastele mitu nime. Mitmel viisil võivad nad lapsele nime anda, kui nimesid on kokku 300 ning lapsele ei panda rohkem kui kolm nime?
- 25.** Seltskond istub ümmarguse laua taha. Lepime kokku, et kaks istuma paigutamise viisi on ühesugused, kui

- seltskonna igal liikmel on mõlemal juhul ühed ja samad naabrid. Mitmel erineval viisil võib istuma panna neli inimest? Seitse inimest? Mitmel juhul osutuvad naabriteks teatavad kaks inimest seitsmest? Mitmel juhul on teatud inimesel seitsmest kaks teatavat naabrit?
- 26.** Viis neidu ja kolm noormeest mängivad kurni. Mitmel viisil saavad nad moodustada kaks neljaliikmelist võistkonda, kui kummaski võistkonnas peab olema vähemalt üks noormees?
- 27.** Tarvis on saata 6 kiireloomulist kirja. Mitmel viisil saab seda teha, kui kirju võib saata kolme virgatsiga ja igale virgatsile võib anda ükskõik millise kirja?
- 28.** Ühel inimesel on 7, teisel aga 9 matemaatikaalast raamatut. Mitmel viisil võivad nad vahetada raamatuid üks ühe vastu?
- 29.** Sama ülesanne tingimusel, et raamatuid vahetatakse kaks kahe vastu.
- 30.** Koosolekul peavad sõna võtma viis inimest: A , B , C , D ja E . Mitmel viisil võib neid paigutada sõnavõtjate nimekirja tingimusel, et B ei tohi esineda enne kui A ?
- 31.** Sama ülesanne, kui B peab esinema vahetult A järel.
- 32.** Mitmel viisil saab ümmarguse laua ümber paigutada 5 meest ja 5 naist nii, et tekiks kirju rida (s. t. samast soost isikud poleks kõrvuti)?
- 33.** Sama ülesanne, ainult ei istuta mitte ümmarguse laua taha, vaid karussellile. Kui üks paigutus saadakse teisest karusselli pöörlemisel, siis loetakse nad ühtivateks.
- 34.** Kaardipakist (52 kaarti) tõmmati 10 kaarti. Mitmel juhul on nende kaartide hulgas vähemalt üks äss? Mitmel juhul täpselt üks äss? Mitmel juhul vähemalt kaks ässa? Aga täpselt kaks?
- 35.** Raudteejaamas on m valgusfoori. Mitu erinevat signaali saab nendega anda, kui igas valgusfooris võib põleda kas punane või roheline tuli?
- 36.** Ühes riigis polnud kahte ühesuguse hammastekomplektiga inimest. Kui palju võib selles riigis ülimalt elanikke olla (suurim hammaste arv on 32)?
- 37.** Kupee kahe vastasseina ääres on viiekohalised diivanid. Kümnest reisijast neli soovivad istuda näoga sõidu suunas, kolm vastassuunas, ülejäänud kolmel on aga ükskõik, kuhu istuda. Mitmel erineval viisil võivad reisijad istet võtta?

- 38.** Ametiühingukomiteesse valiti 9 inimest. Nende seast tuleb valida esimees, esimehe asetäitja, sekretär ja kultuuritöö organisaator. Mitmel viisil saab seda teha?
- 39.** 52 osavõtjaga konverentsil tuleb valida viieliikmeline delegatsioon. Mitmel viisil saab seda teha?
- 40.** Autonumbrid koosnevad ühest, kahest või kolmest tähest ja neljast numbrist. Leida selliste autonumbrite arv, kui kasutatakse 32 tähte.
- 41.** Emal on kaks õuna ja 3 pirni. Viie päeva jooksul annab ta iga päev ära ühe puuvilja. Mitmel viisil võib ta seda teha?
- 42.** Sama ülesanne, kui õunu on m ja pirne n .
- 43.** Sama ülesanne, kui on 2 õuna, 3 pirni ja 4 apelsini.
- 44.** Isal on 5 erinevat apelsini, mida ta jaotab oma kaheksa poja vahel nii, et igaüks saab kas ühe apelsini või mitte midagi. Mitmel viisil võib ta seda teha?
- 45.** Samasugune ülesanne, kui iga poeg võib saada ükskõik kui palju apelsine.
- 46.** Mitu erinevat sõna võib sõnast «matemaatika» saada tähtede ümberpaigutamise abil? Sõnast «parabool»? Sõnast «ingredient»?
- 47.** 30-liikmelisel spordiklubil on tarvis koostada neljaliikmeline võistkond osavõtuks 1000 m jooksust. Mitmel viisil saab seda teha? Aga mitmel viisil võib koostada neljaliikmelise võistkonna osavõtuks $800+400+200+100$ m teatejooksust?
- 48.** Mitmel viisil saab malelaua esimesele horisontaalile asetada valged vigurid (2 ratsut, 2 oda, 2 vankrit, lipu ja kuninga)?
- 49.** Telefonivõrgus on n abonenti. Mitmel viisil saab korraga ühendada kolm paari abonente?
- 50.** Postkontoris müüakse 10 erinevat liiki postkaarte. Mitmel viisil võib sealt osta 12 postkaarti? Mitmel viisil 8 postkaarti? Mitmel viisil 8 erinevat postkaarti?
- 51.** Rühmast, milles on 7 meest ja 4 naist, on tarvis valida 6 inimest nii, et nende seas oleks vähemalt 2 naist. Mitmel viisil saab seda teha?
- 52.** Mitu erinevat neljakohalist neljaga jaguvat arvu saab moodustada numbritest 1, 2, 3, 4 ning 5, kui arvu üleskirjutamisel võib üht numbrit kasutada mitu korda?
- 53.** Rongil on n reisijat ja rong peatub m korda. Mitmel viisil võivad reisijad nende peatuste vahel jaotuda? Sama ülesanne, kui arvestada ainult peatustes väljuvate reisijate arvu.

- 54.** Kui palju on permutatsioonide n elemendist, milles kaks antud elementi a ja b ei asetse kõrvuti? Milles antud kolm elementi a , b ja c ei asetse kõrvuti (mitte mingis järjekorras)? Milles ükski paar elementidest a , b , c ei asetse kõrvuti?
- 55.** Võimlemisvõistlustest võtab osa 10 inimest. Kolm kohtunikku peavad üksteisest sõltumatult koostama võistlejate paremusjärjestuse. Võitjaks kuulutatakse see, keda vähemalt kaks kohtunikku on esimeseks tunnistanud. Kui suur on kõigi juhtude seas nende juhtude osa, kus selgub võitja?
- 56.** Neli üliõpilast sooritavad eksamit. Mitmel viisil saab neile hindeid panna, kui on teada, et ükski neist ei saanud mitterahuldavat hinnet?
- 57.** Mitu erinevat kaelakeed saab valmistada seitsmest erineva suurusega helmest (tuleb ära kasutada kõik 7 helmest)?
- 58.** Mitu kaelakeed saab valmistada viiest ühesugusest ja kahest suuremast helmest?
- 59.** Asulas elab 2000 elanikku. Tõestada, et vähemalt kahel neist on ühesugused initsiaalid (ees- ja perekonnanime algustähed).
- 60.** Seitse noormeest ja kümme neidu tantsivad. Mitmel viisil saavad neiud tantsupõrandal viibida, kui kõik noormehed tantsivad? Kui palju on variante, kui arvestada ainult seda, millised neiud jäid tantsule palumata? Lahendada samad ülesanded, kui kahe neiu kohta on teada, et neid kindlasti tantsule palutakse.
- 61.** Rood koosneb 3 ohvitserist, 6 seersandist ja 60 reamehest. Mitmel viisil saab nende hulgast moodustada rühma, mis koosneb ühest ohvitserist, kahest seersandist ja 20 reamehest? Sama ülesanne, kui rühma peab kuuluma roodukomandör ja vanim seersantidest.
- 62.** Koolipeol on 12 neidu ja 15 noormeest. Mitmel viisil võib nende hulgast valida 4 tantsupaari?
- 63.** On olemas 3 kana, 4 parti ja 2 hane. Mitmel viisil saab neist valida teatud arvu linde nii, et väljaeraldatud hulgas oleks nii kanu, parte kui hanesid?
- 64.** Mitmel viisil saab $m+n+p$ eset jaotada kolme ossa nii, et ühes oleks m , teises n ning kolmandas p eset?
- 65.** Riivil on $m+n$ erinevat raamatut, millest m on mustas ja n punases köites. Kui palju on neid raamatute permutatsioonide, milles m esimest raamatut on mustad?

Kui palju on neid paigutusi, milles kõik mustad raamatud on kõrvuti?

66. Mitmel viisil saab 15 inimese seast valida rühma mingi töö tegemiseks? Rühma võib kuuluda 1, 2, 3, ..., 15 inimest. Sama ülesanne juhul, kui valik tehakse n inimese hulgast?

67. Olgu $p_1, \dots, p_n$ erinevad algarvud. Mitu jagajat (1 ja q kaasa arvatud) on arvul

$$q = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n},$$

kus $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ on mingid naturaalarvud? Millega võrdub jagajate summa?

68. Mitmel viisil saab 12 50-kopikalist paigutada viide karpi, kui ükski karp ei tohi tühjaks jääda?

69. Mitmel viisil saab 20 raamatut paigutada viie riiuliga raamatukappi, kui kõik 20 raamatut mahuvad ka ühele riiulile?

70. Mitmel viisil saab ühe käe sõrmedes kanda 5 erinevat sõrmust, kui pöidla sõrmust ei kanta?

71. 5 ettepanekut pandi hääletusele, millest võtab osa 30 inimest. Mitmel viisil võivad hääled jaotuda, kui igaüks hääletab ühe ettepaneku poolt ja arvestatakse ainult ettepanekute poolt antud häälte arvu?

72. 12 raamatut tuleb kõita punasesse, rohelisse või pruuni nahka. Mitmel viisil saab seda teha, kui peab esinema kõiki kolme värvi kõiteid?

73. Mitmel viisil saab 32 tähest koostada 6 sõna, kui iga täht esineb neis sõnades kokku täpselt üks kord?

74. Mitmel viisil saab 17 inimese hulgast valida 12 inimest, kui kahte teatud isikut nende 17 hulgast ei tohi korraga valida?

75. Mitu erinevat käevõru saab teha viiest ühesugusest smaragdist, kuuest ühesugusest rubiinist ja seitsmest ühesugusest safiirist (kasutatakse ära kõik 18 kivi)?

76. Mitmel viisil saab samade kivide hulgast välja valida kolm kivi sõrmuse jaoks?

77. Ühiselamutoas elab kolm üliõpilast. Neil on neli tassī, 5 alustassi ja 6 teelusikat (kõik omavahel erinevad). Mitmel viisil võivad nad katta teelaua (igaühele tass, alustass ja lusikas)?

78. Mehel on 5 nais- ja 7 meestuttavat, naisel aga 7 nais- ja 5 meestuttavat. Mitmel viisil võivad nad külla kutsuda seltskonna 6 mehest ja 6 naisest nii, et 6 inimest oleks kutsunud mees ja 6 inimest naine?

- 79.** Paadi kummalgi küljel istub neli inimest. Mitmel viisil saab 31 kandidaadi seast valida selle paadi meeskonna, kui neist 10 soovib istuda paadi vasakul küljel, 12 paremal küljel ja ülejäänule on ükskõik, kus istuda?
- 80.** Urnis on sedelid arvudega 1, 2, 3, ..., 10. Urnist võetakse 3 sedelit. Mitmel juhul on nendel olevate arvude summa 9? Mitmel juhul mitte väiksem kui 9?
- 81.** Mitmel viisil saab tervest kaardipakist (52 kaarti) valida 6 kaarti nii, et nende hulgas oleksid esindatud kõik mastid?
- 82.** Kooris on 10 lauljat. Mitmel viisil võib valida neid kolmel päeval esinema, nii et iga päev tekiks erinev koosseis 6 lauljast?
- 83.** Inimesel on 6 sõpra. 20 päeva jooksul kutsub ta iga päev endale külla 3 sõpra nii, et alati oleks koos erinev seltskond. Mitmel viisil saab ta seda teha?
- 84.** Kolm noormeest ja kaks neidu otsivad tööd. Linnas on kolm tehast, mis vajavad töölisi valutsehhi (sinna võetakse ainult mehi), kaks kudumisvabrikut (sinna võetakse naisi) ning kaks vabrikut, mis vajavad nii mees- kui ka naistöölisi. Mitmel viisil võivad nad jaotuda nende ettevõtete vahel?
- 85.** Mitu viietähelist sõna saab koostada 33 tähest, kui tähtede kordumine sõnas on lubatud, kuid kaks kõrvuti asetsevat tähte peavad alati olema erinevad?
- 86.** Matemaatikaolümpiaadist osavõtjate autasustamiseks eraldati kolm eksemplari ühte raamatut, kaks eksemplari teist ja üks eksemplar kolmandat. Mitmel viisil saab autasud välja anda, kui olümpiaadist võtab osa 20 inimest ja kellelegi ei anta üle ühe raamatu? Sama ülesanne, kui kellelegi ei anta kahte eksemplari ühte ja sama raamatut, kuid erinevaid raamatuid võidakse anda ka kaks või kolm.
- 87.** Vaatleme doominokive $(0, 0)$ kuni (n, n) . Näidata, et parajasti $E\left(\frac{n-r}{2}\right) + 1$ kivil on silmade summa $n - r$ ja niisamapaljudel kivil on summa $n + r$. Leida kõigi doominokivide arv.
- 88.** Mitmel viisil on võimalik paigutada ümmarguse laua taha 7 meest ja 7 naist nii, et 2 naist ei istuks kuskil kõrvuti?
- 89.** Mitmel viisil saab 16 hobuse hulgast valida kuuest hobusest koosneva rakendi nii, et sellesse kuuluksid kolm

hobust kuuikust $ABCA'B'C'$, kuid mitte ükski paaridest AA' , BB' , CC' ?

90. Mitmel viisil võib 9-st kaas- ja 7-st täishäälikust koostada sõnu, milles on 4 erinevat kaas- ning 3 erinevat täishäälikut? Mitu sellist sõna ei sisalda kahte kõrvuti-asetsevat kaashäälikut?

91. Uurimisinstituudi mingis osakonnas töötab teatud arv inimesi ja igaüks neist tunneb vähemalt ühte võõr-keelt. Kuus valdavad inglise, kuus saksa ja seitse prantsuse keelt. Neli oskavad inglise ja saksa keelt, kolm saksa ja prantsuse keelt, kaks aga prantsuse ja inglise keelt. Üks inimene tunneb kõiki kolme keelt. Mitu inimest töötab selles osakonnas? Mitu neist oskab ainult inglise keelt? Ainult prantsuse keelt?

92. Puhkepäeval sõitis linnast välja 92 inimest. Neist 47 võttis kaasa võileibu vorstiga, 38 juustuga, 42 singiga, 28 nii juustu kui vorstiga, 31 nii vorsti kui singiga ning 26 inimest nii juustu kui singiga. Kõiki kolme sorti võileibu võttis kaasa 25 inimest, mõned aga võtsid võileibade asemel kaasa pirukaid. Mitmel inimesel olid kaasa pirukad?

93. 10 abielupaarist koosnev seltskond jaotub viieks neljaliikmeliseks rühmaks, et minna paatidega sõitma. Mitmel viisil võib neid nii jaotada, et igas paadis oleks kaks meest ja kaks naist?

94. Mitmel juhul satub teatud mees ühte paati oma naisega?

95. Mitmel juhul satuvad kaks antud meest ühte paati oma naistega?

96. Mitu erinevat neljakohalist arvu saab koostada numbritest 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, kui iga number võib arvus esineda mitu korda?

97. Kui palju on selliseid kuuekohalisi arve, mille esimese kolme numbri ja viimase kolme numbri poolt moodustatud kolmekohaliste arvude summa on väiksem kui 1000?

98. Mitmel viisil saab 12 valget ja 12 musta kabendit paigutada malelaua mustadele väljadele?

99. Mitmel viisil saab tähed sõnas «tihane» nii ümber paigutada, et täishäälikud oleksid tähestiku järjekorras?

100. Mitmel viisil võib tähed sõnas «nipitiri» nii järjestada, et neli *i*-tähte poleks kõrvuti?

101. Mitmel viisil saab tähed sõnas «unustas» nii ümber paigutada, et *n*-täht järgneks vahetult *u*-tähele?

- 102.** Mitmel viisil saab tähed väljendis «kaalikamaad kastmas» nii ümber paigutada, et kaks *a*-tähte poleks kuskil kõrvuti?
- 103.** Mitmel viisil võib tähed sõnas «meremuda» nii järjestada, et täishäälikud poleks kuskil kõrvuti?
- 104.** Mitmel viisil saab tähed sõnas «asemiku» nii ümber paigutada, et täishäälikute järjekord ei muutuks?
- 105.** Mitmel viisil saab tähed sõnas «parallelism» nii järjestada, et täishäälikute järjekord ei muutuks?
- 106.** Mitmel viisil võib tähed sõnas «karjus» nii ümber paigutada, et kahe täishääliku vahel oleks kaks kaashäälikut?
- 107.** Mitmel viisil saab tähed sõnas «logaritm» nii ümber paigutada, et teisele, neljandale ja kuuendale kohale satuksid kaashäälikud?
- 108.** Mitmel viisil saab valida kaks kaas- ja ühe täishääliku sõnast «logaritm»? Sama ülesanne lisaeeldusel, et *i*-täht kindlasti valitakse.
- 109.** Mitmel viisil saab tähed sõnas «abajas» nii ümber paigutada, et kolm *a*-tähte poleks kõrvuti?
- 110.** Sama ülesanne eeldusel, et kaks *a*-tähte ei tohi olla kõrvuti.
- 111.** Mitmel erineval viisil saab valida teatud arvu tähti väljendist «Entel-tentel? Tohoh!»? Tähtede järjekorda ei arvestata.
- 112.** Mitmel viisil võib sellest väljendist valida kolm tähte?
- 113.** Mitmel viisil saab sellest väljendist valida kolm tähte, kui arvestatakse valitud tähtede järjekorda?
- 114.** Mitmel viisil võib tähed sõnas «karjuse» nii ümber paigutada, et nii kaas- kui ka täishäälikud asetseksid tähestiku järjekorras?
- 115.** Mitmel viisil saab tähed sõnas «kojukutse» nii järjestada, et kaas- ja täishäälikud vahelduksid? Sama ülesanne sõna «sanitar» puhul.
- 116.** Mitmel viisil võib tähed sõnas «abajas» nii järjestada, et kaashäälikud asetseksid tähestiku järjekorras? Sama ülesanne lisaeeldusel, et *a*-tähed poleks kuskil kõrvuti.
- 117.** Mitmel viisil saab tähed sõnas «tik-tak» nii ümber paigutada, et ühesugused tähed ei asetseks kõrvuti? Sama ülesanne sõna «purpur» puhul.
- 118.** Mitmel viisil saab sõnast «purpur» välja valida 4 tähte, kui valitud tähtede järjekorda mitte arvestada.

Mitu neljakohalist arvu võib moodustada arvu 132 132 numbritest?

119. Mitu miljonist väiksemat mittenegatiivset täisarvu sisaldavad kõiki numbreid 1, 2, 3, 4? Mitu arvu koosneb ainult nendest numbritest?

120. Leida nende 4-kohaliste arvude summa, mis saadakse numbrite 1, 2, 3, 4 kõikvõimalike ümberpaigutuste abil.

121. Sama ülesanne numbrite 1, 2, 2, 5 puhul.

122. Sama ülesanne numbrite 1, 3, 3, 3, puhul.

123. Sama ülesanne numbrite 1, 1, 4, 4 puhul.

124. Sama ülesanne kõigi nende viiekohaliste arvude jaoks, mida võib saada numbrite 0, 1, 2, 3, 4 permutatsioonidena. Number 0 ei tohi olla esikohal.

125. Mitu miljonist väiksemat arvu saab kirjutada numbrite 8 ja 9 abil?

126. Sama ülesanne numbrite 9, 8, 7 korral.

127. Sama ülesanne numbrite 9, 8, 0 korral (0 ei tohi olla esikohal).

128. Leida kõigi nende kolmekohaliste arvude summa, mida saab kirjutada numbritega 1, 2, 3, 4.

129. Leida kõikide nende viiekohaliste arvude summa, mida saab kirjutada numbritega 1, 2, 3, 4, 5, kusjuures iga number esineb täpselt üks kord. Sama ülesanne viiekohaliste arvude puhul, mida saab kirjutada numbritega 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

130. Mitu paaritut arvu võib koostada arvu 3694 numbritest (ühtegi numbrit ei tohi kasutada üle ühe korra)? Aga mitu paarisarvu?

131. Mitmel kuuekohalisel arvul on kolm paaris- ja kolm paaritut numbrit?

132. Sama ülesanne, kuid vaadeldakse ka numbriga 0 algavaid kuuekohalisi arve.

133. Mitmel kuuekohalisel arvul (mille esimene number erineb nullist) on ristsummaks paarisarv? Sama ülesanne, kui vaadeldakse kõiki arve alates 1 kuni 999 999.

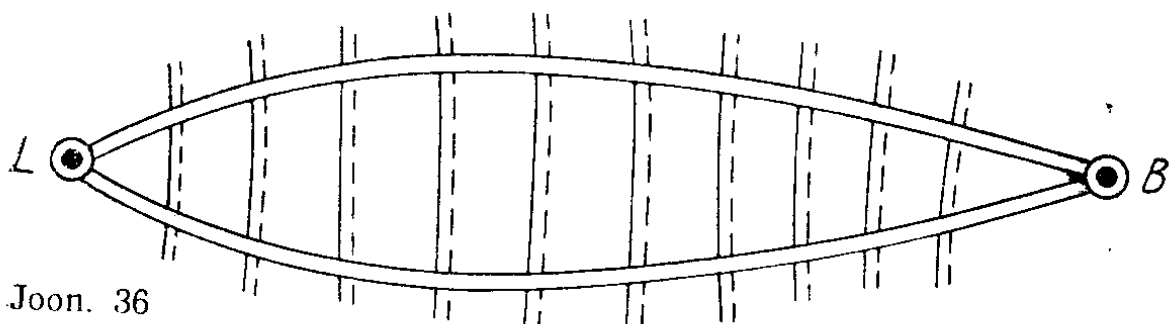
134. Mitmel kümnekohalisel arvul (mille esimene number erineb nullist) on ristsumma 3? Sama ülesanne, kui vaadeldakse kõiki arve alates 1 kuni 9 999 999 999.

135. Mitmel 9-kohalisel arvul on kõik numbrid erinevad?

136. Mitu täisarvu 0 ja 999 vahel ei jagu viiega ega seitsmega?

137. Mitu täisarvu 0 ja 999 vahel ei jagu kahe, kolme, viie ega seitsmega?

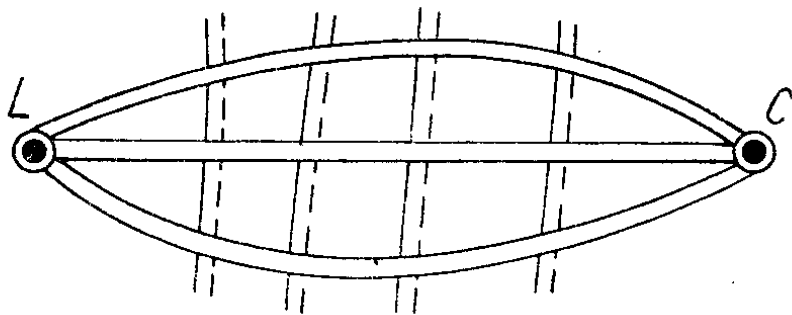
- 138.** Mitmes arvus 0 ja 999 vahel esineb number 9? Mitmes arvus esineb 9 kaks korda? Mitmes arvus esineb 0? Mitmes arvus esineb 0 kaks korda? Mitmes arvus esinevad numbrid 0 ja 9? Mitmes numbrid 8 ja 9? Mitmel arvul 0 ja 999 999 vahel on kõrvutiseisvad numbrid alati erinevad?
- 139.** Mitu neljakohalist arvu saab koostada arvu 123153 numbritest?
- 140.** Mitu viiekohalist arvu võib koostada arvu 12335233 numbritest?
- 141.** Mitu kuuekohalist arvu saab koostada arvu 1233145254 numbritest nii, et neis kaks ühesugust numbrit ei asetseks kõrvuti?
- 142.** Mitu viiekohalist arvu võib koostada arvu 12312343 numbritest nii, et neis poleks kõrvuti kolme kolme?
- 143.** Mitmel viisil saab arvu 12341234 numbrid nii järjestada, et kaks ühesugust numbrit poleks kuskil kõrvuti?
- 144.** Sama ülesanne arvu 12345254 korral.
- 145.** Mitmel viisil saab arvu 1234114546 numbrid nii järjestada, et kolm ühesugust numbrit ei asetseks kõrvuti?
- 146.** Mitmel viisil võib seda teha nii, et kaks ühesugust numbrit poleks kuskil kõrvuti?
- 147.** Mitmel viisil saab naturaalarvudest 1 kuni 20 valida kaks arvu, mille summa on paaritu arv?
- 148.** Mitmel viisil võib naturaalarvudest 1 kuni 30 valida kolm arvu, mille summa on paarisarv?
- 149.** Londonist Brightoni viib kaks maanteed, mida ühendavad 10 külavaheteed (joon. 36). Mitmel viisil saab Londonist nii Brightoni sõita, et sama punkti ei läbitaks kaks korda?



Joon. 36

- 150.** Kaks rändurit sõidavad samadel tingimustel Londonist välja erinevaid maanteid pidi. Mitmel viisil võib nende reis toimuda, kui nad ei läbi ühtki teelõiku ühes ja samas suunas?

Joon. 37



151. Londonist viib Cambridge'i kolm maanteed, mida ühendavad 4 külavaheteed (joon. 37). Mitmel viisil saab reisida Londonist Cambridge'i, kui ühelgi teelõigul ei sõideta Londoni suunas ja ühtegi lõiku ei läbita kaks korda?

152. On olemas piiramata arvul münte väärtusega 10, 15 ja 20 kopikat. Mitmel viisil võib valida neist 20 münti?

153. Tuleb ära arvata, missugused viis münti on kaasmängija pihus. Iga münti väärtuseks on kas 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 kopikat või 1 rubla. Mitu vale vastust on võimalik anda?

154. Kui palju on viiekohalisi arve? Mitmel neist on kõik numbrid paaritud? Mitmel neist ei esine kuuest väiksemat numbrit? Mitmel neist ei esine kolmest suuremat numbrit? Mitmel neist esinevad korruga numbrid 1, 2, 3, 4 ja 5? Mitmel aga korruga numbrid 0, 2, 4, 6, 8?

155. Kahe täringu tahkudel on numbrid 0, 1, 3, 7, 15 ja 31. Mitu erinevat summat võib saada nende täringute viskamisel?

156. Kolme täringu tahkudel on numbrid 1, 4, 13, 40, 121 ja 364. Mitu erinevat summat võib saada nende täringute viskamisel?

157. Heidetakse kuut täringut, mille tahkudel on numbrid 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Mitmel juhul annavad nad kõik ühesuguse arvu silmi? Mitmel juhul esineb kaks erinevat silmade arvu? Mitmel kolm? Mitmel neli? Mitmel viis? Mitmel kuus? (Kõiki täringuid loeme eristatavateks.)

158. Heidetakse n täringut. Mitu erinevat tulemust võib saada (ainult silmade järjekorra poolest erinevad tulemused loeme samadeks; kõigi täringute tahkudel on numbrid 1, 2, 3, 4, 5 ja 6)?

159. Mitmel erineval viisil saab arvu 1 000 000 esitada kolme teguri korrutisena? Tegurite järjekorra poolest erinevad esitused loetakse erinevateks.

160. Sama ülesanne tingimusel, kui tegurite järjekorda ei arvestata.

- 161.** Mitmel viisil saab kahte taskusse panna üheksa erineva väärtusega münti?
- 162.** Mitmel viisil võib $3n$ erinevat eset jaotada kolme inimese vahel nii, et igaüks saaks n eset?
- 163.** Antud on $2n$ eset. Vaadeldakse nende kõikvõimalikke jaotusi paarideks. Seejuures loetakse ühtelangevateks jaotused, mis erinevad teineteisest ainult elementide järjekorra poolest paarides või paaride järjekorra poolest. Kui palju on selliseid erinevaid jaotusi?
- 164.** Sama ülesanne, kuid nüüd jaotatakse nk elementi n rühmaks, k elementi igas rühmas.
- 165.** Mitmel viisil saab 30 töölist jaotada kolmeks kümneliikmeliseks brigaadiks? Kümneks kolmeliikmeliseks rühmaks?
- 166.** Mitmel viisil võib kaardipaki (36 kaarti) nii pooleks jaotada, et kummaski pooles oleks kaks ässa?
- 167.** Mitmel viisil saab 10 raamatut jaotada viieks panderolliks (igaüks sisaldab kaks raamatut; panderollide järjekorda ei arvestata)?
- 168.** Mitmel viisil on võimalik jaotada 9 raamatut viieks panderolliks (üks koosneb ühest ja ülejäänud kahest raamatust)?
- 169.** Sama ülesanne, kui tuleb koostada 3 kolm raamatut sisaldavat panderolli.
- 170.** Mitmel viisil võivad 3 inimest jaotada omavahel 6 ühesugust õuna, 1 apelsini, 1 ploomi, 1 sidruni, 1 pirni, 1 aiva ja 1 datli?
- 171.** Mitmel viisil on jaotus teostatav nii, et igaüks saaks neli puuvilja?
- 172.** Isikutel A , B ja C on igaühel 3 õuna ning peale selle on A -l veel pirn, ploom ja aiva, B -l apelsin, sidrun ja dattel, C -l aga mandariin, virsik ja aprikoos. Mitmel viisil võivad nad need omavahel nii ära jaotada, et igaüks saaks 6 puuvilja?
- 173.** Mitmel viisil saab jaotada kaardipaki (52 kaarti) 13 mängija vahel nii, et igaüks saaks 4 kaarti? Sama ülesanne tingimusel, et igaüks saaks igast mastist ühe kaardi. Sama ülesanne tingimusel, et üks saaks igast mastist ühe kaardi ja ülejäänud kõik ühe ja sama masti kaardid.
- 174.** Mitmel viisil võib tervest kaardipakist tõmmata 4 kaarti nii, et esindatud oleksid 3 masti? Esindatud oleksid kaks masti?
- 175.** Mitmel viisil saab 52 kaarti jaotada nelja mängija

vahel nii, et igaüks saaks neli kaarti ühest mastist ning kolm kaarti igast ülejäänud mastist?

176. Mitmel erineval viisil võib 18 erinevat eset jaotada 5 inimese vahel nii, et neli neist saaksid 4 eset ja viies 2 eset? Sama ülesanne tingimusel, et kolm saavad 4 eset ja kaks 3 eset.

177. On olemas 14 paari erinevaid esemeid. Mitu valikut saab nende hulgast teha? (Kaks valikut erinevad oma koosseisult, mitte aga nendesse kuuluvate elementide järjekorralt.)

178. Mitmel viisil võib 4 musta, 4 valget ja 4 sinist kera paigutada 6 erinevasse pakki (millest mõned võivad jääda tühjaks)?

179. Mitmel viisil saab 3 rublalist ning 10 viiekümnekopikalist paigutada 4 erinevasse ümbrikku?

180. Tõestada, et arvu n lahutusi teatud arvuks liidetavateks on niisama palju kui arvu $2n$ lahutusi n liidetavaks (liidetavate järjekorda ei arvestata).

181. n eset on asetatud ritta. Mitmel viisil saab nende hulgast valida kolm eset nii, et väljavahetuste hulgas ei oleks kõrvutiasetsevaid?

182. Laps asetab malelaua kahele esimesele horisontaalile valged ja mustad vigurid (kumbagi värvi vigureid on 8: kaks ratsut, kaks oda, kaks vankrit, lipp ja kuningas). Mitmel viisil võib ta seda teha?

183. Mitmel viisil saab need vigurid paigutada tervele malelauale?

184. Lahendage sama ülesanne eeldusel, et malelauale asetatakse ka kõik etturid (8 valget ja 8 musta).

185. Mitmel viisil saab 15 valget ja 15 musta kabendit paigutada 24 väljale nii, et igal väljal oleksid kas ainult valged või ainult mustad kabendid? Nii pannakse nad mängulauale idamaises mängus «nardō».

186. Mitmel viisil võib malelauale paigutada 20 valget kabendit nii, et malelaua pööramisel 90° võrra tekiks sellel samasugune kabendite asetus kui enne?

187. Mitmel viisil saab malelauale asetada 20 valget kabendit nii, et nad paikneksid sümmeetriliselt malelauda poolitava sirge suhtes?

188. Sama ülesanne tingimusel, et kabendid paigutatakse mustadele väljadele.

189. Mitmel viisil saab 12 valget ja 12 musta kabendit paigutada mustadele väljadele nii, et nad paikneksid sümmeetriliselt malelaua keskpunkti suhtes?

- 190.** Sama ülesanne, aga valgega sümmeetriliselt paiknev kabend peab olema must, ja vastupidi.
- 191.** Mitmel viisil võib asetada 20 valget kabendit malelaua ääreliinidele nii, et saadud asetus ei muutuks laua pööramisel 90° võrra?
- 192.** Mitmel viisil saab 20 valget kabendit asetada malelaua ääreliinidele nii, et nad paikneksid sümmeetriliselt malelaua diagonaalide suhtes?
- 193.** Mitmel viisil võib 7 valget ja 2 musta kuuli paigutada 9 erinevasse süvendisse? Osa süvendeid võib jääda tühjaks.
- 194.** Mitmel viisil saab 7 valget, 1 musta ja 1 punase kuuli asetada 9 erinevasse süvendisse?
- 195.** Mitmel viisil võib 27 raamatut jaotada isikute A , B ja C vahel nii, et A ja B saaksid kokku kaks korda rohkem raamatuid kui C ?
- 196.** Lifti sisenes 8 inimest. Mitmel viisil võivad nad neljal korrusel nii väljuda, et igal korrusel lahkuks vähemalt üks inimene?
- 197.** Mitmel viisil saab arvudest 1 kuni 100 valida kolm arvu nii, et nende summa jaguks kolmega?
- 198.** Mitmel viisil võib $3n$ järjestikuse täisarvu hulgast valida kolm arvu nii, et nende summa jaguks kolmega?
- 199.** On olemas n valget ja üks must kuul. Mitmel viisil saab osa neist kuulidest paigutada $n+1$ süvendisse, kui ühessegi süvendisse ei mahu üle ühe kuuli?
- 200.** Mitmel viisil saab m valget ja n musta kuuli nii ritta seada, et valged ja mustad kuulid puutuksid kokku $2r-1$ punktis? $2r$ punktis?
- 201.** Mitmel viisil võib 8 erinevas aines saada vähemalt rahuldava hinde nii, et hinnete summa oleks 30?
- 202.** Tõestada, et $m+n$ eset saab parajasti $(m+n)!D_m$ viisil nii ümber paigutada, et täpselt n eset jääb paigale.
- 203.** Tõestada, et r erinevat eset saab täpselt
- $$S_r = (n+p)^r - n(n+p-1)^r + \\ + C_n^2 (n+p-2)^r - \dots + (-1)^n p^r$$
- viisil nii jaotada $n+p$ inimese vahel, et antud n inimest saaksid igaüks vähemalt ühe eseme.
- 204.** Tõestada, et arvul $2r+x$ on lahutusi $r+x$ positiivseks liidetavaks niisama palju kui arvul r lahutusi mitte-negatiivseteks liidetavateks.
- 205.** n liikmest koosnev ühing valib oma koosseisust ühe esindaja. Mitmel viisil võib hääletamine toimuda, kui iga-

üks hääletab ühe inimese (võib-olla iseenda) poolt? Sama ülesanne tingimusel, et arvestatakse ainult iga kandidaadi poolt antud häälte arvu, mitte aga seda, kes tema poolt hääletas

206. Tõestada, et $2n$ või $2n - 3$ ühesuguse eseme jaoks leidub ühepalju selliseid jaotusi kolmeks mitteeristatavaks rühmaks, et kahe suvalise rühma summa on suurem kolmandast.

207. Tõestada, et n eseme hulgast võib paaritu arvu esemeid valida 2^{n-1} viisil.

208. Tõestada, et kaks inimest saavad $3n^2 + 3n + 1$ viisil jaotada omavahel $2n$ ühte liiki, $2n$ teist ja $2n$ kolmandat liiki eset nii, et igaüks saaks $3n$ eset.

209. Tõestada, et kui lisada $2n$ neljandat liiki eset, siis leidub parajasti

$$\frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3)$$

sellist jaotusviisi, mille puhul igaüks saab $4n$ eset.

210. Tõestada, et kui esemed jaotatakse mitteeristatavateks rühmadeks, siis vastused on $\frac{1}{2}(3n^2+3n+2)$ ja

$$\frac{1}{3}(n+1)(8n^2+4n+3).$$

211. Tõestada, et kui on olemas m liiki esemeid ning igast liigist on $2n$ eset, siis saab neid esemeid jaotada kaheks võrdseks rühmaks

$$C_{mn+m-1}^{m-1} - C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1} + C_m^2 C_{mn+m-4n-3}^{m-1} - \dots \pm C_m^x C_{mn+m-1-x(2n+1)}^{m-1} \mp \dots$$

viisil.

212. Mitmel viisil võib viis valget, viis musta ja viis punast kuuli asetada 3 kasti nii, et igasse kasti saaks viis kuuli?

213. Tõestada, et kui meil on olemas kolme sorti esemeid ning igast sordist n eset, siis leidub

$$C_{n+2}^2 C_{n+2}^2 - 3C_{n+3}^4 = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4)$$

võimalust jaotada nad kolme isiku A , B ja C vahel, nii et igaüks saaks n eset.

214. Mitmel viisil saab 3 inglasi, 3 prantslast ja 3 türklast nii ritta istuma panna, et kolm kaasmaalast poleks kuskil kõrvuti?

215. Sama ülesanne tingimusel, et kuskil ei tohi kõrvuti istuda kaks kaasmaalast.

216. Mitmel viisil saab ümmarguse laua taha istuma panna 3 inglasi, 3 prantslast ja 3 türklasi nii, et kaks kaasmaalast poleks kuskil kõrvuti?

217. Mitmel viisil võib ühte ritta kleepida marke 40 kopika väärtuses, kui kasutatakse 5-, 10-, 15- ja 20-kopikase marke? (Markide järjekorra poolest erinevad asetused loetakse erinevateks; markide arv pole piiratud.)

218. Mitmel viisil saab rubla vahetada müntideks väärtusega 10, 15, 20 ja 50 kopikat?

219. Mitmel viisil võib kaalukausile asetada 78 g, kui kasutada kaheksat erinevat kaaluvihti 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 g? Seejuures loetakse, et kahe erineva vihi kasutamine annab erineva kombinatsiooni ka siis, kui need vihid kaaluvad ühepalju.

220. On olemas kuus kuuli: 3 musta, 1 punane, 1 valge ja 1 sinine. Mitmel viisil saab neist moodustada neljast kuulist koosneva rea?

221. Mitmel viisil võib naturaalarvu n esitada kolme naturaalarvulise liidetava summana (liidetavate järjekorra poolest erinevad esitused loetakse erinevateks)?

222. Kui palju ja milliseid numbraid läheb vaja selleks, et üles kirjutada kõik arvud alates 1 kuni 999 999 (kaasa arvatud)? Alates 1 kuni $10^n - 1$?

223. Mitu erinevat kümnekohalist arvu saab üles kirjutada, kasutades kolme numbrit 1, 2, 3, kusjuures number 3 esineb igas arvus täpselt kaks korda? Kui paljud neist arvudest jaguvad üheksaga?

224. Ütleme, et kaks jadasse kuuluvat arvu moodustavad inversiooni, kui suurem neist asetseb jadas väiksemast eespool. Mitu inversiooni on arvude 1, 2, ..., n kõikides permutatsioonides?

225. Tõestada, et arvu n saab parajasti $E\left[\frac{1}{12}(n^2 - 6n + 12)\right]$ viisil jaotada kolme erinevasse ossa.

226. Tõestada, et arvu $12n + 5$ võib täpselt $\frac{1}{2}(n+1) \cdot (12n^2 + 9n + 2)$ viisil jaotada neljaks osaks nii, et ükski osa poleks suurem kui $6n + 2$.

227. Tõestada, et arvu $12n + 5$ saab parajasti $\frac{n}{2}(12n^2 +$

+3n — 1) viisil jagada nelja erinevasse ossa nii, et ükski osa poleks suurem kui $6n+2$ ja ükski kaks osa poleks omavahel võrdsed.

228. Leida, kui palju on selliseid naturaalarvude kolmikuid, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni ning mille liikmed pole suuremad kui 100.

229. Mitmel viisil saab 6 inglase, 7 prantslast ja 10 türklast nii ritta paigutada, et iga inglase seisaks prantslase ja türklase vahel ning prantslane ja türklane poleks kuskil kõrvuti?

230. Sama ülesanne 5 inglase, 7 prantslase ja 10 türklase korral.

231. Mitu lahendit on järgmisel ülesandel: leida kaks arvu, mille suurim ühistegur on G ja vähim ühiskordne $M = Ga^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ (a, b, c ja d on algarvud)?

232. Lahendage sama ülesanne, tõmmates eelnevalt tekstist maha sõnad «suurim» ja «vähim».

233. Mitu kombinatsiooni saab moodustada 20-st tähest 6-kaupa nii, et ükski täht ei kuuluks ühtegi kombinatsiooni üle kahe korra?

234. On olemas $p+q+r$ tähte: p α -tähte, q β -tähte ja r γ -tähte. Need järjestatakse nii, et α -tähed algavad enne β -tähti ja viimased enne γ -tähti. Mitmel viisil on selline järjestamine võimalik?

235. 30 cm pikkune lõik värvitakse niisuguses järjekorras: punane, valge, sinine (edasi värvid korduvad samas järjestuses). Alustatakse punase ja lõpetatakse sinise värviga. Iga värviga värvitakse 10 cm, kusjuures värvilõik hõlmab täisarvu sentimeetreid (mitte alla 2 cm). Mitu värvimismoodust on olemas? Sama küsimus, kui loobuda tingimusest, et viimaseks värviks on sinine. Näidata, et kui ükski värvilõik pole alla 3 cm, siis on viimaseks värviks 153 juhul sinine, 71 juhul valge ja 81 juhul punane.

236. Mul on 6 sõpra. Ma olen neist igaühega koos lõunatanud 7 korda, iga kahega 5 korda, iga kolmega 4 korda, iga neljaga 3 korda, iga viiega 2 korda, kõigi kuuega 1 kord, aga igaüks neist on lõunalauast puudunud 8 korda. Mitu korda lõunatasin ma üksi?

237. Kaks eksaminaatorit eksamineerivad 12 õpilasest koosnevat klassi kahes aines korraga. Iga õpilane vastab kumbagi ainet 5 minutit. Mitmel viisil võivad eksaminaatorid omavahel töö nii jaotada, et ükski õpilane ei peaks korraga vastama kahte ainet?

238. Mitmel viisil võivad 6 inimest valida kuue paari

kinnaste hulgast igaüks ühe parema ja ühe vasaku käe kinda nii, et keegi ei saaks kindapaari? Sama ülesanne 9 kindapaari ja 6 inimese korral.

239. Avaldisse $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ kuuluvaid tähti paigutatakse ümber nii, et iga tähe kõrval, kas vasakul või paremal, asetseks sama täht. Tõestada, et selliseid ümberpaigutusi on 6. Avaldise $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ puhul on see arv samuti 6, avaldise $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ korral 90 ja $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ puhul 426.

240. Maleolümpiaadist võtavad osa n riigi neljaliikmelised võistkonnad. Mitmel viisil võivad maletajad asetuda ritta nii, et igaühe kõrval (kas vasakul või paremal) seisaks tema kaasmaalane?

241. Malelaua ruudud värvitakse 8 värviga nii, et igal horisontaalil on esindatud kõik 8 värvi ning iga vertikaali mistahes kaks kõrvutiasetsevat ruutu on värvitud erinevate värvidega. Mitmel viisil on selline värvimine võimalik?

242. On olemas n ühesugust eset ning peale selle veel n erinevat eset. Mitmel viisil saab nende hulgast valida n eset? Mitmel viisil võib järjestada kõik $2n$ eset?

243. m prantslast ja n inglasi asetuvad ritta nii, et igaühe kõrval on vähemalt üks kaasmaalane. Näidata, et kõikvõimalike selliste asetuste arv on

$$m!n![1 + (C_{m-2}^0 + C_{m-3}^1)(C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{m-3}^1 + C_{m-4}^2) \cdot \\ \cdot (C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2) + (C_{m-4}^2 + C_{m-5}^3)(C_{n-4}^2 + C_{n-5}^3) + \dots].$$

244. Mitmes kuuekohalises arvus esineb täpselt kolm erinevat numbrit?

245. Mitmes m -kohalises arvus esineb täpselt k erinevat numbrit?

246. Vaadeldakse kõiki selliseid k -kaupa variatsioone arvudest 1, 2, ..., n , milles paarisarvud asetsevad paaris-kohtadel ja paaritud arvud paaritutel kohtadel. Mitmes sellises variatsioonis on arvud kasvamise järjekorras (nagu näiteks variatsioonis 3678)?

247. On antud $2n$ elementi $a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n$, kus $a_i \neq a_j$, kui $i \neq j$. Mitmes nende $2n$ elemendi permutatsioonis ei leidu kahte ühesugust kõrvutiasetsevat elementi?

248. On antud n komplekti, millest igaühes on q ühesugust elementi, kusjuures erinevatesse komplektidesse kuuluvad elemendid on erinevad. Mitmes nende nq elemendi permutatsioonis ei leidu kõrvuti ühesuguseid elemente?

249. Lahendage sama ülesanne tingimusel, et elemendid asetsevad ringjoonel.

250. Riiulil on n raamatut. Mitmel viisil saab nende hulgast valida p raamatut nii, et iga kahe väljavalitud raamatu vahel ja p -nda valitud raamatu järel oleks vähemalt s raamatut?

251. Tähistame $a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ abil matemaatikaolümpiaadist osavõtivate õpilaste arvu viiendast, ..., kümnest klassist. On teada, et arvud $a_5, \dots, a_{10}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni ja iga klassi õpilastele ettenähtud auhindade arv võrdub selle progressiooni vahega. Tõestada, et autasustamisvõimaluste arv ei muutu, kui kõik auhinnad anda kümnenda klassi õpilastele (eeldatakse, et kõik autasud on erinevad).

252. Ruudulisele paberile on joonistatud ruut $ABCD$ küljepikkusega 4 ruutu. Vaadeldakse kõiki selliseid lühimaid teid tipust A tippu C , mis kulgevad mööda ruutude külgi. Näidata, et nende teede arv on 70, kusjuures nelja lõiku läbib 35 teed, kaheksat lõiku 20 teed, 4 lõiku 18 teed, 4 lõiku 15, 4 lõiku 12, 4 lõiku 10, 4 lõiku 5, 4 lõiku 4 teed ning 4 lõiku 1 tee. Urida samal viisil teede lõikepunkte: ühte punkti läbib 36 teed, nelja punkti 35 teed, 4 punkti 30, 4 punkti 15, 4 punkti 5, 4 punkti 40 teed ja 2 punkti 1 tee (otspunkte ei vaadelda).

253. Kui palju leidub kolmnurki, mille tipud on etteantud kumera kuusnurga tippudeks?

254. Kui palju on kolmnurki, mille külgede pikkused on 4, 5, 6 või 7?

255. Kui palju leidub erinevaid risttahukaid, mille kõigi servade pikkused avalduvad täisarvudena ühest kümneni?

256. Tasandile on tõmmatud 4 sirget, mille seas pole kahte paralleelset ega kolme ühte punkti läbivat sirget. Mitu kolmnurka seejuures tekkis?

257. Tasandil on antud n punkti, millest p asetsevad ühel sirgel, ülejäänute seas ei leidu kolme ühel sirgel paiknevat. Kui palju on kolmnurki, mille tippudeks on need punktid?

258. Sirgel on valitud p punkti ja temaga paralleelsel sirgel veel q punkti. Kui palju on kolmnurki, mille tippudeks on need punktid?

259. Olgu samadel tingimustel veel ühel paralleelsel sirgel võetud r punkti, kusjuures valitud punktide seas ei leidu kolme sellist, mis paikneksid ühel paralleele lõikaval sirgel. Mitu kolmnurka tuleb juurde?

260. Ruudu kõik küljed on jaotatud n osaks. Kui palju on kolmnurki, mille tippudeks on jaotuspunktid?

- 261.** Tasandile on tõmmatud n sirget, mille seas pole kahte paralleelset ega kolme ühte punkti läbivat sirget. Mitu lõikepunkti on nendel sirgetel?
- 262.** Tasandile on tõmmatud n sirget, millest p läbivad punkti A , q punkti B ning ükski ei läbi mõlemat. Nende sirgete seas pole kahte paralleelset ega kolme sellist, mis lõikuksid mõnes muus punktis. Mitu lõikepunkti on nendel sirgetel?
- 263.** Mitmeks osaks jaotavad tasandi n sirget, mille hulgas pole kahte paralleelset ega kolme ühte punkti läbivat sirget?
- 264.** Mitmeks osaks jaotavad ruumi n tasandit, mille seas pole kahte paralleelset, kolme ühte sirget läbivat ega nelja ühte punkti läbivat tasandit?
- 265.** Tasandil on antud 5 punkti. Neid ühendavate sirgete seas pole paralleelseid, ristuvaid ega ühtivaid. Tõmbame igast punktist ristsirged ülejäänud nelja punkti paari-kaupa ühendavatele sirgetele. Kui palju on maksimaalselt nende ristsirgete omavahelisi lõikepunkte, kui antud viit punkti mitte arvestada?
- 266.** Kui palju leidub kolmnurki, mille küljed on arvust n suuremad täisarvud ega ületa arvu $2n$? Kui palju on nende seas võrdhaarset ja võrdkülgseid?
- 267.** Tõestada, et leidub $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$ kolmnurka, mille küljed on täisarvud ega ületa $2n$. Kui võrdhaarset kolmnurki ei arvestata, siis on see arv $\frac{1}{6}n(n-1) \cdot (4n-5)$.
- 268.** Tõestada, et leidub $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ kolmnurka, mille küljed on täisarvud ega ületa $2n-1$ ja et pärast võrdhaarsete kolmnurkade kõrvaldamist jääb järele $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3)$ kolmnurka.
- 269.** Tasandile on tõmmatud n sirget, mille seas ei leidu kolme ühte punkti läbivat sirget. Tõestada, et nende lõikepunktidest saab koostada $\frac{1}{2}(n-1)!$ järjestamata rühma, mis sisaldavad n punkti. Eeldatakse, et ühte rühma kuuluvate lõikepunktide hulgas ei leidu kolme ühel sirgel asetsevat.

270. Tasandil on n punkti, mille seas pole kolme ühel sirgel asetsevat. Kui palju leidub r lülist koosnevaid kin-nisi murdjooni, mille tipud asetsevad nendes punktides?

271. Ühel sirgel on võetud n punkti ning temaga paral-leelsel sirgel veel m punkti. Need punktid ühendatakse sirgetega. Tõestada, et tekkivate sirgete lõikepunkte on

$$\frac{mn(m-1)(n-1)}{2}.$$

(Eeldame, et tõmmatud sirgete seas

ei leidu kolme ühes punktis lõikuvat, antud $m+n$ punkti me ei arvesta.)

272. Tasandil on antud n punkti, mille seas pole kolme ühel sirgel ega nelja ühel ringjoonel asetsevat. Läbi iga kahe punkti tõmmatakse sirge ning läbi iga kolme ring-joon. Leida kõigi sirgete ja ringjoonte lõikepunktide mak-simaalne arv.

273. Ruumis on antud n punkti, mille hulgas pole nelja ühel tasandil asetsevat. Läbi iga kolme punkti pannakse tasand, kusjuures nende tasandite seas pole kahte paral-leelset. Leida tasandite lõikesirgete arv. Kui paljud neist ei läbi ühtegi antud punkti?

274. On olemas n lõiku pikkustega $1, 2, \dots, n$. Nende hulgast valitakse neli lõiku nii, et tekiks puutujanelinurk. Tõestada, et seda võib teha

$$\frac{2n(n-2)(2n-5) - 3 + 3(-1)^n}{48}$$

viisil. Mitu nelinurka saadakse, kui lubatakse valida ka ühepikkusi külgi?

275. On antud n punkti, mille seas pole nelja ühel ring-joonel asetsevat. Läbi iga kolme sellise punkti joonestat-akse ringjoon. Kui palju on maksimaalselt nende ring-joonte lõikepunkte?

276. Tõestada, et kui n tasandit läbivad sfääri keskpunkti, siis jaotavad nad sfääri mitte rohkem kui $n^2 - n + 2$ osaks.

277. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil saab kuubi tahud värvida kuue erineva värviga? Kahte värvimisviisi loetakse geomeetriliselt ühtelangevateks, kui ühe neist võib teisest saada kuubi kui jäiga keha liikumisel.

278. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil saab tetraeedri tahud värvida nelja erineva värviga?

279. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil võib kaheksa erineva värviga värvida oktaeedri tahud?

280. Lahendada samasugused ülesanded korrapärase dodekaeedri ja ikosaeedri korral.

281. Vaadelda eelnevates ülesannetes juhte, kus värvide arv on väiksem tahkude arvust (näiteks kuupi värvitakse kahe, kolme, nelja või viie värviga).

282. Kui palju leidub kolmnurki, mille külgede pikkused on täisarvud ja übermõõt on 40? Mille übermõõt on 43?

283. Tõestada, et kolmnurki täisarvuliste külgedega ja übermõõduga $4n+3$ on $n+1$ võrra rohkem kui samasuguseid kolmnurki übermõõduga $4n$.

284. Tõestada, et übermõõtu N omavate täisarvuliste külgedega kolmnurkade arv on esitatav järgmise tabelina:

N	Kolmnurkade arv	N	Kolmnurkade arv
$12n$	$3n^2$	$12n+6$	$3n^2+3n+1$
$12n+1$	$n(3n+2)$	$12n+7$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+2$	$n(3n+1)$	$12n+8$	$(n+1)(3n+1)$
$12n+3$	$3n^2+3n+1$	$12n+9$	$3n^2+6n+3$
$12n+4$	$n(3n+2)$	$12n+10$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+5$	$(n+1)(3n+1)$	$12n+11$	$3n^2+7n+4$

285. Linna autobussiliinid on korraldatud järgmiselt:
1) igast peatusest saab igasse teise peatusse sõita ilma ümberistumiseta;

2) kahel suvalisel liinil on täpselt üks ühine peatus;

3) igal liinil on täpselt n peatust.

Mitu autobussiliini on linnas?

286. Linnas on 57 autobussiliini. On teada, et

1) igast peatusest saab igasse teise peatusse sõita ilma ümber istumata;

2) kahel suvalisel liinil on täpselt üks ühine peatus;

3) igal liinil on vähemalt kolm peatust.

Mitu peatust on igal liinil?

287. Kas saab linnas käiku panna 10 autobussiliini, nii et iga kaheksa liini korral leiduks peatus, mis ei asetseks ühelgi neist liinidest, kuid suvalised üheksa liini läbiksid kõiki peatusi?

288. Mitu erinevat kera saab ruumis nii konstrueerida, et nad puudutaksid kolme antud tasandit ja antud kera?

289. Antud on kolm punkti. Tõmbame läbi igaühe neist m sirget nii, et nende hulgas poleks kahte paralleelset ega kolme mõnes ülejäänud punktis lõikuvat sirget. Leida saadud sirgete lõikepunktide arv.

290. Ruumis on antud n punkti nii, et m neist asetsevad ühel tasandil P ja ülejäänute hulgas ei leidu nelja ühel

tasandil asetsevat. Kui palju saab konstrueerida tasandeid, et igaüks neist sisaldaks kolme antud punkti?

291. Tasandil on antud punktid A , B ja C . Tõmbame läbi A m sirget, läbi B n sirget ning läbi C p sirget. Seejuures pole tõmmatud sirgete hulgas kolme mõnes ülejäänud punktis lõikuvat või kahte paralleelset sirget. Kui palju on selliseid kolmnurki, mille tippudeks on nende sirgete lõikepunktid, mis erinevad punktidest A , B ja C ?

292. Kui palju leidub kolmnurki, mille tippudeks on etteantud kumera n -nurga tipud ning mille ükski külge ei lange kokku selle n -nurga küljega?

293. Tasandile on tõmmatud n sirget ja igaühel neist on võetud p punkti nii, et ükski neist pole antud sirgete lõikepunkt ning ei leidu kolme antud punkti, mis paikneksid etteantutest erineval sirgel. Leida nende kolmnurkade arv, mille tipud on nendes punktides.

294. Tõestada, et kumera n -nurga diagonaalidel on väljaspool hulknurka $\frac{1}{12}n(n-3)(n-5)$ lõikepunkti ja

hulknurga sees $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ lõikepunkti (eeldatakse, et ei leidu kahte teineteisega paralleelset ega kolme hulknurga tipust erinevas punktis lõikuvat diagonaali).

295. Ringjoonel on antud n punkti. Mitu erinevat (mitte tingimata kumerat) hulknurka saab selle ringjoone sisse joonestada, nii et nende tippudeks oleksid antud punktid? Aga mitu kumerat?

296. Tasandile on tõmmatud m paralleelset sirget. Peale nende on tasandile tõmmatud veel n sirget, mis pole paralleelsed ei omavahel ega ka varem tõmmatud sirgetega. Ükski sirgetest ei läbi kahe ülejäänud sirge lõikepunkti. Mitmeks osaks jaotavad need sirged tasandi?

297. On antud 11 punkti, millest 5 asetsevad ühel ringjoonel. Peale nende pole antud punktide seas nelja ühel ringjoonel asetsevat punkti. Mitu ringjoont saab joonestada nii, et igaüks neist sisaldaks vähemalt kolme antud punktidest?

298. Tasandil on antud 10 paarikaupa lõikuvat sirget, mille seas ei leidu kolme ühes punktis lõikuvat ega nelja ühte ringjoont puudutavat. Kui palju saab joonestada selliseid ringjooni, et igaüks neist puudutaks kolme mainitud kümnest sirgest?

- 299.** Leida kõigi selliste kumerate k -nurkade arv, mille tippudeks on kumera n -nurga k tippu, kusjuures k -nurga kahe naabertipu vahele peab jääma vähemalt s n -nurga tippu.
- 300.** Kaks sirgete peret lõikavad rööpkülikut, ühe pere sirged on paralleelsed rööpküliku ühe ja teise pere omad teise küljega ning kummaski peres on r sirget. Mitu rööpkülikut sel viisil tekib?
- 301.** Mitmeks osaks jaotavad kumera n -nurga tema diagonaalid, kui nende seas ei leidu kolme hulknurga sisepunktis lõikuvat diagonaali?
- 302.** On antud üks kaart, millel on arv 1, kaks kaarti arvuga 2, kolm kaarti arvuga 3 jne. Tõestada, et kui n on paaritu arv, siis saab nende seast parajasti $\frac{n}{12}(n^2 - 1)$ viisil valida kaks kaarti nii, et viimastele kirjutatud arvude summa oleks n . Kui n on paarisarv, siis on vastuseks $\frac{n}{12}(n^2 - 4)$.
- 303.** On $3n+1$ eset, millest n on ühesugused, ülejäänud aga erinevad. Tõestada, et nende hulgast võib n eset valida 2^{2n} viisil.
- 304.** On antud arvude jada $1, 2, 3, \dots, 2n$. Mitmel viisil saab nendest valida kolm arvu nii, et nad moodustaksid aritmeetilise progressiooni? Sama küsimus jada $1, 2, 3, \dots, 2n+1$ korral.
- 305.** Tasandile on joonestatud rida kinnisi kõveraid, millest igaüks lõikab kõiki ülejäänuid vähemalt kahes punktis. Olgu n_r nende punktide arv, milles lõikuvad r kõverat. Tõestada, et leidub parajasti $1+n_2+2n_3+\dots+r n_{r+1}+\dots$ sellist kinnist piirkonda, mis on piiratud nende kõverate kaartega ega sisalda niisuguseid kaari.
- 306.** Tasandil on antud m punkti A ning n punkti B läbivat sirget. Nende sirgete seas pole paralleelseid ega ühtki sellist, mis läbiks korraga punkte A ja B . Mitmeks osaks need sirged jaotavad tasandi?
- 307.** Kas on võimalik igaüht 77 telefonist ühendada täpselt 15 telefoniga?
- 308.** Leida sellise hulkliikme kordajate summa, mille saame avaldisest
- $$(7x^3 - 13y^2 + 5z^2)^{1964} (y^3 - 8y^2 + 6y + z)^2 + (2x^2 + 18y^3 - 21)^{1965}$$
- pärast sulgude avamist.

309. Kastis on 100 kuulikest. Neist 28 on punased, 20 rohelised, 12 kollased, 20 sinised, 10 valged ja 10 mustad. Mitu kuulikest tuleb minimaalselt kastist välja võtta, et nende seas kindlasti leiduks 15 ühevärvilist?

310. Kuubi tahud võib värvida kas kõik valgeks, kõik mustaks või siis osa valgeks ja osa mustaks. Mitu erinevat värvimisviisi on olemas? (Kahte kuupi loeme erinevalt värvituks, kui neid pole võimalik segi ajada, ükskõik kuidas me neid ka ei pööraks.)

311. Lahendada sama ülesanne tingimusel, et värvitakse mitte kuubi tahke, vaid tippe.

312. Hulktahtukate mudeleid tehakse nende pinnalaotustest. Pinnalaotusel eraldavad tahkused servad ja mudel saadakse papist pinnalaotuse kokkumurdmisel piki servi. Korrapärasele tetraeedril on kaks sellist pinnalaotust. Mitu pinnalaotust on kuubil?

313. Korrapärase dodekaeedri saab 4 värviga nii värvida, et iga kaks kõrvutiasetsevat tahku oleksid eri värvi. Mitu geomeetriliselt erinevat lahendust on sellel ülesandel?

314. Tetraeedri kuuest servast saab valida neli nii, et nad moodustavad kinnise ruumilise nelinurga. See nelinurk sisaldab tetraeedri kõiki tippe. Sama võib teha kuubi korral ning me saame kaheksanurga, mis sisaldab kõiki kuubi tippe. Kas saab samuti toimida oktaeedri, dodekaeedri ja ikosaeedri korral? Mitu lahendit tuleb iga hulktahtuka kohta?

315. Osake asetseb koordinaatide alguspunktis. Ajaühiku möödudes laguneb ta kaheks osakeseks, millest üks liigub ühiku võrra vasakule ja teine paremale. See protsess kordub iga ajaühiku järel, kusjuures kaks samasse punkti sattunud osakest hävitavad teineteist (näiteks pärast kahe ajaühiku möödumist jääb järele kaks osakest). Mitu osakest on 129 ajaühiku möödumisel? Aga n ajaühiku pärast?

316. Tähestik koosneb kuuest tähest, mis on telegraafi teel üleandmiseks kodeeritud järgmiselt:

. ; — ; . . ; — — ; . — ; — .

Ühe sõna üleandmisel ei jäetud tähtede vahele vahesid, nii et tekkis 12 märgist koosnev punktide ja kriipsude jada. Mitmel viisil on saadud sõna võimalik lugeda?

317. Milliseid arve on 1 ja 10 000 000 vahel rohkem, kas neid, milles number 1 esineb, või neid, milles seda pole?

318. Punktidest ja kriipsudest koostatakse kõikvõimalikud «sõnad», milles on täpselt 7 märki. Nende seast valitakse mõned sõnad nii, et suvalised kaks valitud sõna

erineksid teineteisest vähemalt kolme märgi poolest. Kui suur on niimoodi valitud sõnade maksimaalne arv?

319. Mitmel viisil saab n värviga värvida p osaks jaotatud ringjoone (p on algarv)? Värvimisviise, mis langevad kokku ringjoone pööramisel ümber keskpunkti, loetakse ühtelangevateks.

320. Paberilehel on $n \times n$ ruutu ja neisse on arvud 1, 2, 3, ..., n^2 paigutatud nii, et igal vertikaalil ja igal horisontaalil asetsevad arvud moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leida selliste paigutuste arv.

321. Inimese peas pole rohkem kui 300 000 juuksekarva. Tõestada, et Moskvast elab vähemalt 10 inimest, kellel on ühepalju juukseid (Moskva elanikke on ligi 6 miljonit).

322. On antud $2n+1$ eset. Tõestada, et on ühepalju võimalusi valida nende seast paarisarv esemeid või paaritu arv esemeid.

323. Tõestada, et 1 rubla vahetamisel 2- ja 5-kopikalisteks on rohkem võimalusi kui selle vahetamisel 3- ja 5-kopikalisteks.

324. Mitmel viisil saab 20 kopikat vahetada 1-, 2- ja 5-kopikalisteks?

325. Tõestada, et kui on olemas kaaluvihid 1 mg, 2 mg, 2 mg, 5 mg, 10 mg, 20 mg, 20 mg, 50 mg, 100 mg, 200 mg, 200 mg, 500 mg, 1 g jne., siis saab neist koostada iga sellise eseme kaalu, mis kaalub täisarvu milligramme.

326. On antud 6 numbrit: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Leida kõigi neljakohaliste paarisarvude summa, mida saab nende numbritega üles kirjutada (numbrid võivad korduda).

327. $2n$ kaardist koosnevat kaardipakki segatakse järgmiselt: pakk jaotatakse pooleks ning esimese poole kaardid pannakse ühekaupa teise poole kaartide vahele (etteantud järjekorras). Näiteks saab $(n+1)$ -ne kaart esimeseks, esimene teiseks, $(n+2)$ -ne kaart kolmandaks, teine neljandaks jne. Tõestada, et r segamise järel satub esialgu p -ndal kohal asetsenud kaart kohale number x , kus x on jääk, mis tekib arvu $p2^r$ jagamisel arvuga $2n+1$.

328. Tõestada, et kui kaardipakk ülesandes 327 koosneb $6m+2$ kaardist, siis vahetavad kaardid numbritega $2m+1$ ja $4m+2$ kogu aeg teineteisega kohti.

329. Kui kaardipakk koosneb samadel tingimustel $14m+6$ kaardist, siis tulevad kaardid numbritega $2m+1$, $2(2m+$

$+1)$, $3(2m+1)$, $4(2m+1)$, $5(2m+1)$ ja $6(2m+1)$ pärast kolme segamist tagasi oma esialgsetele kohtadele.

330. Näidata, et kui $2^x - 1$ jagub arvuga $2n+1$, siis korrastub kaardipakk ülesandest 327 pärast x segamist esialgsesse järjestusse.

331. Kaardipakki segatakse järgmiselt: algul võetakse esimene kaart, teine kaart pannakse selle peale, kolmas selle alla jne. Tõestada, et kui pakis on $6n - 2$ kaarti, siis jääb kaart järjenumbriga $2n$ oma kohale.

332. 22 kaardist koosnevat pakki segatakse ülalkirjeldatud viisil. Tõestada, et kaheksas kaart jääb paigale, viies ja neljateistkümnes vahetavad kohad ning kolmas, kolmeteistkümnes ja kaheksateistkümnes kaart vahetavad oma kohti tsükliliselt.

333. Tõestada, et 16 kaardist koosnev pakk saavutab samadel tingimustel esialgse järjestuse viienda segamise järel. Näidata, et 32, 42, 14, 18, 26, 30, 50 kaarti sisaldav pakk jõuab esialgsesse asendisse vastavalt 6, 8, 14, 18, 26, 30, 50 segamise järel. Tõestada, et 28 või 36 kaardist koosnev pakk tuleb esialgsesse asendisse 9 segamise, 22, 20 või 46 kaardist koosnev pakk 10 segamise, 22 või 56 kaarti sisaldav pakk 12 segamise järel.

334. Ruut on jaotatud 16 võrdseks ruuduks. Mitmel viisil saab need ruudud valge, musta, punase ja sinise värviga nii värvida, et igas horisontaal- ja igas vertikaalreas esineksid kõik neli värvi?

335. 15 õpilast rivistatakse jalutuskäigule minekuks 5 ritta, igas reas 3 inimest. Mitu korda võib seda nii teha, et ei esineks kahte õpilast, kes on kaks korda sattunud ühte ritta?

336. Tõestada, et kui n on täisarv, siis on $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ täisarv, ning kui m ja n on paaritud arvud, siis on $\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}} (n!)^{\frac{m+1}{2}}}$ täisarv.

337. n eset on paigutatud ringjoonele. Olgu f_n nende esemete selliste permutatsioonide arv, mille puhul ükski ese ei järgne sellele, millele ta esialgselt järgnes. Tõestada, et siis

$$f_n + f_{n+1} = D_n$$

(vt. lk. 73).

338. Leida, kui palju on võrrandil $x_1 + x_2 + \dots + x_p = m$ täisarvulisi lahendeid, kui kõik tundmatud rahuldavad võrratust

$$0 \leq l \leq x_k \leq n.$$

339. On olemas 7 eksemplari ühte, 8 teist ja 9 kolmandat raamatut. Mitmel viisil saab need raamatud jaotada kahe inimese vahel nii, et igaüks saaks 12 raamatut?

340. On välja kirjutatud kõik n -kaupa kordumistega kombinatsioonid n tähest. Näidata, et iga täht esineb neis C_{2n-1}^n korda.

341. A ja B vaheline kaugus on 999 km. Tee ääres on kilomeetripostid, millele on kirjutatud kaugused A -ni ja B -ni: $(0,999)$ $(1,998)$, ..., $(999,0)$. Kui palju on postide hulgas selliseid, millel esineb ainult kaks erinevat numbrit?

342. Koostatakse kõikvõimalikud kordumistega variatsioonid m valgest ja n mustast kuulist. Näidata, et nende arv on $P(m+1, n+1) - 2$.

343. On koostatud kõikvõimalikud kordumistega variatsioonid m valgest ja n mustast kuulist. Näidata, et valgete kuulide üldarv kõigis variatsioonides on

$$1 + \frac{mn+m-1}{n+2} P(m+1, n+1)$$

ja mustade üldarv

$$1 + \frac{mn+n-1}{m+2} P(m+1, n+1).$$

Kontrollida ülesande vastust sõna «Viivi» korral.

344. Tõestada, et leidub täpselt

$$1 + \frac{mn+m+n}{m+n+4} P(m+2, n+2)$$

variatsiooni m valgest, n mustast ja ühest punasest kuulist 1-, 2-, ..., $(m+n+1)$ -kaupa, mis sisaldavad punast kuuli.

345. Üldse saab m valgest, n mustast ja ühest punasest kuulist koostada

$$\frac{(m+1)(n+1)}{m+n+3} P(m+2, n+2) - 1$$

variatsiooni. Kontrollida vastust sõna «keelel» korral.

346. Mul on 7 sõpra. Mitmel viisil võin ma neid 7 päeva jooksul kolmekaupaga nii lõunale kutsuda, et ei leiduks kahte sõpra, kes oleksid minu juures kohtunud kaks korda.

347. Kui ma soovin enda juures näha 7 erinevat kolmeliikmelist seltskonda ega taha kedagi kutsumata jätta, siis saab seda korraldada

$$A_{35}^7 - 7A_{20}^7 + 21A_{10}^7$$

viisil. Tõestada see väide.

348. Kui ma soovin külla kutsuda 7 erinevat kolmeliikmelist seltskonda, kusjuures ükski sõber ei külasta mind iga päev, siis saab seda teha $A_{35}^7 - 7A_{15}^7$ viisil. Tõestada see väide.

349. Näidata, et kõigi (1-, 2-, ..., n -kaupa) variatsioonide arv $n \geq 2$ esemest on lähim täisarv arvule $en! - 1$.

350. Näidata, et kui kõik need variatsioonid välja kirjutada ja iga ese esineb neis variatsioonides m korda, siis on m lähim täisarv arvule $e(n-1)(n-1)!$.

351. Münti visatakse $2n$ korda. Tõestada, et leidub parajasti

$$1 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

varianti, mille puhul mistahes heiteni pole kull esinenud rohkem kui kiri.

352. Mitmel viisil saab $3n$ erinevat raamatut kolme isiku vahel nii jagada, et saadavate raamatute arvud moodustaksid aritmeetilise progressiooni?

353. On antud n ühesugustest tähtedest koosnevat paari, kusjuures erinevad paarid koosnevad erinevatest tähtedest. Need tähed järjestatakse kõikvõimalikel viisidel nii, et kaks ühesugust tähte ei asetseks kõrvuti. Tõestada, et erinevate järjestuste arv on

$$\frac{1}{2^n} \left[(2n)! - \frac{n}{1} 2(2n-1)! + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 2^2(2n-2)! - \dots \right].$$

354. On olemas r erinevat eset, mis jaotatakse $n+p$ isiku vahel nii, et vähemalt n neist ei saa alla ühe eseme. Tõestada, et jaotuste arv on

$$(n+p)^r - n(n+p-1)^r + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n+p-2)^r - \dots$$

355. Olgu n erineva eseme k rühmaks jaotuste arv Π_n^k . Tõestada, et $n > 1$ korral

$$1 - \Pi_n^2 + 2!\Pi_n^3 - 3!\Pi_n^4 + \dots = 0.$$

356. On olemas m kasti, millest esimeses on n , teises $2n$, ..., m -ndas aga mn eset. Mitmel viisil saab igast kastist valida n eset?

357. Korvis on $2n+r$ õuna ja $2n-r$ pirni. Tõestada, et etteantud n korral on suurim arv võimalusi n õuna ja n pirni valikuks siis, kui $r=0$.

358. 1000 punkti on kumera tuhatnurga tippudeks, mille sees on antud veel 500 punkti nii, et nende 1500 punkti seas ei leidu kolme ühel sirgel asetsevat. Antud tuhatnurk on jaotatud kolmnurkadeks nii, et kõik need 1500 punkti on kolmnurkade tippudeks ning muid tippe neil kolmnurkadele ei ole. Mitu kolmnurka sel viisil tekib?

359. Viis inimest mängivad mõne partii doominot (kaks kahe vastu), kusjuures igale mängijale on iga teine üks kord partneriks ja kaks korda vastaseks. Leida mängitud partiide arv ja mängijate kõik jaotumisviisid partiides.

360. Tasandi punktist O tõmmatakse kõik kinnised murdjooned pikkusega $2n$, mille küljed asetsevad ruudulise paberi joontel. Ruudu külje pikkus on 1. Leida nende murdjoonte arv, kui murdjoon võib läbida ühe ja sama lõigu mitu korda.

361. Paberilehele on joonestatud n horisontaalsest ja n vertikaalsest sirgest koosnev võrk. Mitu erinevat $2n$ -lülilist kinnist murdjoont saab joonestada nii, et nende kõik lülid paikneksid nimetatud sirgetel, kusjuures igal murdjoonel leidub igal horisontaal- ja igal vertikaalsirgel vähemalt üks lüli?

362. Tehas toodab kõristeid, millel on 3 punast ja 7 sinist kerakest. Mitu erinevat kõristit võib tehas toota (kahte kõristit loetakse ühesugusteks, kui ühe neist võib teisest saada kuulikeste nihutamisel mööda rõngast või kõristi ümberkeeramisel)?

363. On kogunenud n inimest. Mõned neist on üksteisega tuttavad, kusjuures igal kahel võõral on täpselt kaks ühist tuttavat, kahel tuttaval aga pole ühiseid tuttavaid. Tõestada, et kõigil kokkutulnutel on ühepalju tuttavaid.

364. Ringjoonel on võetud mõned punktid, neist a on tähistatud A -tähega, ülejäänud b B -tähega. Need punktid jaotavad ringjoone kaarteks. Kirjutame iga kaare juurde arvu järgmise reegli kohaselt: kui kaare mõlemad ots-punktid on tähistatud A -tähega, siis kirjutame arvu 2, kui mõlemad B -tähega, siis arvu $\frac{1}{2}$; kui aga otspunktid on

märgitud erinevate tähtedega, siis arvu 1. Tõestada, et kõigi kirjutatud arvude korrutis on 2^{a-b} .

365. Tähistame malelaua horisontaalid nagu tavaliselt numbritega 1...8 ja vertikaalid tähtedega $a...h$. Olgu nüüd a, b, c, d, e, f, g ja h suvalised arvud. Kirjutame malelaua igale väljale vastavat horisontaali ja vertikaali tähistavate arvude korrutise ning paigutame malelauale 8 vankrit nii, et nad üksteist ei tulistaks. Milline on vankrite alla jäävate arvude korrutis?

366. Olümpiaadi organiseerimiskomitee koosneb 11 inimesest. Olümpiaadi materjale hoitakse seifis. Mitu lukku peab seifil olema ja mitu võtit tuleb anda komitee igale liikmele, selleks et pääs seifi oleks võimalik, kui on koos mistahes 6 komitee liiget, ning võimatu, kui neid on vähem?

367. On olemas 60 lülist koosnev kett. Iga lüli kaalub 1 g. Ketil mõned lülid tuleb avada, et lahtivõetud lülidest ja tekkinud ketitükkidest saaks moodustada iga raskuse, mille kaal väljendub täisarvuga 1...60. Milline on avatavate lülide minimaalarv? Lahendage sama ülesanne, kui kaalumiseks võib kasutada kahe kausiga kaalusid.

368. Kui palju on olemas selliseid täisarvude paare (x, y) , et x ja y oleksid 1 ja 1000 vahel ning $x^2 + y^2$ jaguks arvuga 49?

369. Kui palju leidub selliseid kahekohalisi arve, mille summa samadest numbritest vastupidises järjekorras kirjutatud arvuga on täisruut?

370. Leida kõigi nende neljakohaliste arvude summa, mis on koostatud numbritest 1 kuni 6 ja jaguvad arvuga 3.

371. Leida kõigi nende neljakohaliste paarisarvude summa, mida võib koostada numbritest 0 kuni 5.

372. Mitu erinevat täisarvulist lahendit on võrratusel $|x| + |y| \leq 1000$?

373. Ringjoonel on antud punktid $A_1, A_2, \dots, A_{16}$. Joonestame kõikvõimalikud kumerad hulknurgad, mille tippudeks on mõned punktidest $A_1, A_2, \dots, A_{16}$. Jaotame need hulknurgad kahte rühma. Esimesse kuuluvad kõik hulknurgad, mille üheks tipuks on punkt A_1 , teise kõik ülejäänud. Millises rühmas on rohkem hulknurki?

374. Lõpmatul malelaual asetseb ratsu. Leida nende väljade arv, milleni ta võib jõuda $2n$ käigu järel.

375. On olemas 1955 punkti. Nende seast tuleb valida mõned punktikolmikud, nii et igal kahel kolmikul leiduks ühine punkt. Leida valitavate kolmikute maksimaalne arv.

376. Arvud 1 kuni 100 000 000 on üksteise järel ritta kirjutatud nii, et tekiks numbrite jada 123456...100 000 000. Tõestada, et selle jada kõigi numbrite arv võrdub nullide arvuga jadas 1, 2, 3, ..., 10^9 .

377. Kui palju leidub arvude 0001 kuni 9999 seas neljakohalisi arve, mille kahe esimese numbri summa võrdub kahe viimase numbri summaga?

378. Koolis õpitakse $2n$ ainet. Kõik õpilased õpivad hinnetele 4 ja 5. Ei leidu kahte õpilast, kes õpiksid ühtemoodi, ning ei saa väita, et mõni õpilane õpiks paremini kui teine (loeme, et üks õpilane õpib teisest paremini, kui tema hinne pole üheski aines halvem kui teisel ja on mõnes aines parem). Tõestada, et koolis ei saa olla rohkem kui C_{2n}^n õpilast.

379. Olgu M_r variatsioonide arv m elemendist r -kaupa ja N_r variatsioonide arv n elemendist r -kaupa. Tõestada, et variatsioonide arv $m+n$ elemendist r -kaupa avaldub valemiga $(M+N)^r$, kus pärast astendamist tuleb kõik astmenäitajad asendada indeksitega.

380. Leida astme x^8 kordaja avaldise $(1+x^2-x^3)^9$ arendises.

381. Leida astme x^m kordaja avaldise

$$(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \dots + (1+x)^n$$

arendises x astmete järgi. Eraldi läbi vaadata juhud $m < k$ ning $m \geq k$.

382. Leida kordajad x^{17} ja x^{18} ees pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist avaldises $(1+x^5+x^7)^{20}$.

383. Kummas avaldises, kas $(1+x^2-x^3)^{1000}$ või $(1-x^2+x^3)^{1000}$ tekib pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist x^{17} ees suurem kordaja?

384. Olgu $a_0, a_1, a_2, \dots$ avaldise $(1+x+x^2)^n$ kordajad pärast arendamist x kasvavate astmete järgi. Tõestada, et

a) $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \dots - a_{2n-1} a_{2n} = 0;$

b) $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2 =$
 $= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} a_n^2;$

c) $a_r - n a_{r-1} + C_n^2 a_{r-2} - \dots + (-1)^r C_n^r a_0 = 0,$

kui r ei jagu kolmega;

d) $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{1}{2} (3^n + 1);$

$$e) a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

385. Leida erinevate (mittesarnaste) liikmete arv, mis saadakse pärast astendamist avaldises

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3.$$

386. Leida astme x^k kordaja avaldise

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})^2$$

arendises.

387. Tõestada, et

$$\frac{[C_{n+1}^{r+1} - C_n^r] C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1}} = r.$$

388. Näidata, et

$$C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3,$$

$$1 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3.$$

389. Tõestada, et

$$1 + 14C_n^1 + 36C_n^2 + 24C_n^3 = (n+1)^4 - n^4,$$

$$C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 = n^4.$$

390. Tõestada, et

$$1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \dots = (-1)^n 2^n \cos \frac{2n\pi}{3},$$

$$C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - \dots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

391. Näidata, et

$$a) C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right);$$

$$b) C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right);$$

$$c) C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n+2)\pi}{3} \right);$$

$$d) C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right).$$

392. Tõestada, et $n \geq 2$ ja $|x| < 1$ korral kehtib

$$(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n.$$

393. Tõestada, et $m > n$ korral

$$\sum_{x=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{m(m-1)\dots(m-x+1)} = \frac{m+1}{m-n+1}$$

ja

$$\sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

394. Näidata, et

$$\begin{aligned} \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \\ = \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}. \end{aligned}$$

395. Tõestada, et

$$\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^x} = \frac{2}{n+1}.$$

396. Tõestada, et

$$\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^x} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

397. Näidata, et

$$\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^x} = \frac{2(n+q+1)}{(q+1)(q+2)(q+3)}.$$

398. Tõestada, et

$$(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

399. Tõestada samasus

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(n-1)!]^2} + \frac{1}{1!2!} \frac{1}{[(n-2)!]^2} + \frac{1}{2!3!} \frac{1}{[(n-3)!]^2} + \dots \\ \dots = \frac{(2n-1)!}{[n!(n-1)!]^2}. \end{aligned}$$

400. Tõestada, et

$$\frac{(n+r-1)!}{r!} - \frac{n}{1} \frac{(n+r-3)!}{(r-2)!} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{(n+r-5)!}{(r-4)!} - \dots = \frac{n!(n-1)!}{r!(n-r)!}.$$

401. Arvutada järgmised summad:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n;$

b) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n;$

c) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \dots + (n-1)C_n^n;$

d) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (2n+1)C_n^n;$

e) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \dots + (-1)^n (n+1)C_n^n;$

f) $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \dots + (4n-1)C_n^n;$

g) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n;$

h) $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1};$

i) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2};$

j) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1};$

k) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots + (-1)^n (C_n^n)^2.$

402. Leida suurimad kordajad avaldiste

$$(a+b+c)^{10} \quad \text{ja} \quad (a+b+c+d)^{14}$$

arendistes.

403. Tähistame Y_n kaudu kordajad funktsiooni $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ arendises astmeritta

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + Y_1x + Y_2x^2 + \dots$$

Avaldada arvud Y_n binoomkordajate kaudu. Leida aval-

dise $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ arendis astmereaks.

404. Tõestada, et arvud Y_n rahuldavad järgmisi seoseid:

$$\begin{aligned} \text{a) } Y_n + \frac{1}{2} Y_1 Y_{n-1} + \frac{1}{3} Y_2 Y_{n-2} + \dots + \frac{1}{n+1} Y_n &= \\ &= \frac{1}{2} Y_{n+1}; \end{aligned}$$

$$b) Y_0 Y_n + Y_1 Y_{n-1} + Y_2 Y_{n-2} + \dots + Y_n Y_0 = 4^n;$$

$$c) \frac{Y_0 Y_n}{1(n+1)} + \frac{Y_1 Y_{n-1}}{2n} + \frac{Y_2 Y_{n-2}}{3(n-1)} + \dots + \frac{Y_n Y_0}{(n+1) \cdot 1} =$$

$$= \frac{Y_{n+1}}{n+2}.$$

405. Arvukolmnurgas

			1			
		1	1	1		
	1	2	3	2	1	
1	3	6	7	6	3	1
.	.	.	.	.	.	.

võrdub iga arv kolme arvu summaga, mis asetsevad eelmises reas selle arvu ja tema naaberarvude kohal (kui mõni sellistest arvudest puudub, siis loetakse ta võrdseks nulliga). Tõestada, et igas reas, alates kolmandast, leidub paarisarv.

406. Arvukolmnurga

0	1	2	3...	1957	1958
1	3	5	...	3915	
.	.	.	.	.	.

esimene rida koosneb arvudest 0, 1, ..., 1958. Iga järgmise rea elemendid kujutavad endast eelmise rea nende elementide summasid, mis asetsevad vastavast arvust vasakul ja paremal. Tõestada, et kolmnurga viimane element jagub arvuga 1958.

407. Vaadeldakse Fibonacci arvude u_n jada: $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$, $u_5=5$ jne. (me alustasime liikmetest 0 ja 1, aga mitte 1 ja 2 nagu VI peatükis). Tõestada, et

a) iga m ja n korral kehtib

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1};$$

b) iga m ja $n=km$ korral arv u_n jagub arvuga u_m ;

c) kaks kõrvuti asetsevat Fibonacci arvu on ühistegurita.

408. Leida Fibonacci arvude jada 1000-nda ja 770-nda liikme suurim ühistegur.

409. Kas leidub Fibonacci jada esimese 100 000 001 liikme hulgas arv, mis lõpeb nelja nulliga?

410. Fibonacci jadast on välja valitud 8 järjestikust arvu. Tõestada, et nende summa sellesse jadasse ei kuulu.

411. Tõestada, et

a) $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1;$

b) $u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n};$

c) $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1};$

d) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n;$

e) $u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2n-1} u_{2n} = u_{2n}^2;$

f) $u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2n} u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1;$

g) $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+1} - (n+3);$

h) $u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2};$

i) $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$

412. Tõestada, et iga naturaalarvu N saab esitada Fibonacci arvude summana, kusjuures iga arv kuulub summasse ülimalt üks kord ja kaks kõrvutiseisvat Fibonacci arvu ei kuulu korraga ühte summasse.

413. Olgu p, q ja r sellised täisarvud, et $p \geq q \geq r$, $p < q+r$ ning $p+q+r=2s$. On olemas p musta, q valget ja r punast kuuli. Näidata, et need kuulid saab parajasti

$$s^2 + s + 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$$

viisil jaotada kahe isiku vahel, nii et kumbki saaks s kuuli.

414. Kui $q+r < p$, siis suureneb eelmise ülesande vastus $\frac{1}{2}(p-s)(p-s-1)$ võrra.

415. On olemas $pq+r$ erinevat eset, kus $0 \leq r \leq p$. Nad jaotatakse p inimese vahel võimalikult ühtlaselt (kõik saavad kas q või $q+1$ eset). Näidata, et selliste jaotuste arv on

$$C_p^r \frac{(pq+r)!}{(q+1)^r (q!)^p}.$$

416. Arvutada summa

$$\sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1.$$

417. Tõestada samasus

$C_{n+m}^m = \sum P(k_1, \dots, k_m, n - k_1 - \dots - k_m + 1)$,
kus summa on võetud üle võrrandi $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$
kõigi mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite hulga.

418. Leida rekurrentsete võrrandite üldlahendid:

- a) $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$;
- b) $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 10a_n = 0$;
- c) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 13a_n = 0$;
- d) $a_{n+2} + 9a_n = 0$;
- e) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0$;
- f) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$;
- g) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$;
- h) $a_{n+4} + 4a_n = 0$.

419. Leida a_n , teades rekurrentset seost ja esimesi liikmeid:

- a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -7$;
- b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$;
- c) $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$, $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$;
- d) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -3$,
 $a_3 = -29$.

420. Leida selline jada, kus $a_1 = \cos \alpha$, $a_2 = \cos 2\alpha$ ning
 $a_{n+2} - 2 \cos \alpha a_{n+1} + a_n = 0$.

421. Tõestada, et jada üldliikmega $a_n = n^{k-1}$ rahuldab seost

$$a_{n+k} - C_k^1 a_{n+k-1} + C_k^2 a_{n+k-2} + \dots + (-1)^k C_k^k a_n = 0.$$

422. Leida selline jada, et

$$a_n + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n.$$

423. Kasutades samasust

$$(1-x)^p (1-x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1},$$

tuletage võrdus

$$\sum_{s=0}^p (-1)^s C_{k+s}^s C_p^{n-s} = C_{p-k-1}^n.$$

Silmas pidada, et $p > k+1$.

424. Kasutades samasust

$$(1-x)^{-m-1} (1-x)^{-q-1} = (1-x)^{-m-q-2},$$

¹ Siin ja edaspidi on summa võetud üle s selliste mittenegatiivsete täisarvuliste väärtuste, mille puhul võrduse vasak pool on defineeritud.

tuletage vördus

$$\sum_{s=0}^m C_{p-s}^m C_{q-s}^q = C_{p+q+1}^{p-m}.$$

425. Tuletage samasusest $(1+x)^n = (1-x^2)^n (1-x)^{-n}$
seos

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s C_{n+k-2s}^n C_{n+1}^s = C_{n+1}^k.$$

426. Tuletage samasusest

$$(1+x)^n = (1-x^2)^n (1-x)^{-n}$$

seos

$$\sum_{s=0}^k C_n^{k-2s} C_{n+s-1}^s = C_{n+k-1}^k.$$

427. Kasutades samasust

$$(1-x^2)^{-p-1} = (1+x)^{-p-1} (1-x)^{-p-1},$$

tuletage seos

$$\sum_{s=0}^p (-1)^s C_{p+2k-s}^p C_{p+s}^p = C_{p+k}^k.$$

428. Tuletage samasustest

$$(1-x)^{-2p} \left[1 - \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right]^{-p} = (1-2x)^{-p}$$

ja

$$(1-x)^{2p} \left[1 - \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right]^p = (1-2x)^p$$

seosed

$$\sum_{s=0}^p C_{p+s}^s C_{2p+m}^{2p+2s+1} = 2^{m-1} C_{m+p-1}^p$$

ja

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{m-2s} = 2^p C_p^m.$$

429. Tõestage, et

$$\sum_{s=0}^p C_{p+s}^s C_{2p+m}^{2p+2s} = 2^{m-1} \frac{2p+m}{m} C_{m+p-1}^p.$$

430. Tuletage samasustest

$$(1-x)^{\pm 2p} \left[1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \right]^{\pm p} = (1+x^2)^{\pm p}$$

valemid

$$\sum_{s=0}^s (-1)^s C_{p+s-1}^s C_{2m+2p+s}^{2m+1-s} 2^s = 0;$$

$$\sum_{s=0}^s (-1)^s C_{p+s-1}^s C_{2m+2p+s-1}^{2m-s} 2^s = (-1)^m C_{p+m-1}^m;$$

$$\sum_{s=0}^s (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m+1-s} 2^s = 0;$$

$$\sum_{s=0}^s (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m-s} 2^s = C_p^m.$$

Tõestage nende abil, et

$$\sum_{s=0}^{2s} C_{2p+2m}^{2s} C_{p+m-s}^p = 2^{2m} (p+m) \frac{(p+2m-1)!}{p! (2m)!};$$

$$\sum_{s=0}^{2s+1} C_{2p+2m+1}^{2s+1} C_{p+m-s}^p = 2^{2m} (2p+2m+1) \frac{(p+2m)!}{p! (2m+1)!};$$

$$\sum_{s=1}^{2s-1} C_{2p+2m}^{2s-1} C_{p+m-s}^p = 2^{2m-1} C_{p+2m-1}^p;$$

$$\sum_{s=0}^{2s} C_{2p+2m+1}^{2s} C_{p+m-s}^p = 2^{2m} C_{p+2m}^p.$$

431. Vaadeldes valemeid

$$\begin{aligned} & [(1+x)^p \pm (1-x)^p]^2 = \\ & = (1+x)^{2p} + (1-x)^{2p} \pm 2(1-x^2)^p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(1+x)^p + (1-x)^p] [(1+x)^p - (1-x)^p] = \\ & = (1+x)^{2p} - (1-x)^{2p} \end{aligned}$$

p positiivsete ja negatiivsete väärtuste korral, tõestage, et

$$2 \sum_{s=0}^{2s} C_p^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p}^{2m} + (-1)^m C_p^m;$$

$$2 \sum_{s=0}^{2s+1} C_p^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1};$$

$$2 \sum_{s=0}^{2s} C_p^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+1};$$

$$2 \sum_{s=0}^p C_{p+2s}^p C_{p+2m-2s}^p = C_{2p+2m+1}^{2p+1} + C_{p+m}^p;$$

$$2 \sum_{s=0}^{p-1} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p-1} = C_{2p+2m+1}^{2p-1} - C_{p+m}^p;$$

$$2 \sum_{s=0}^p C_{p+2s}^p C_{p+2m-2s+1}^p = C_{2p+2m+2}^{2p+1}.$$

432. Vaadeldes avaldist

$$[(1+x)^{p+1} \pm (1-x)^{p+1}] [(1+x)^p \pm (1-x)^p]$$

kõigi märgikombinatsioonide korral, tuletage valemid

$$2 \sum_{s=0}^{2s} C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m} + (-1)^m C_p^m;$$

$$2 \sum_{s=0}^{2s} C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+1} - (-1)^m C_p^m;$$

$$2 \sum_{s=0}^{2s+1} C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m+1} + (-1)^m C_p^m;$$

$$2 \sum_{s=0}^{2s+1} C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1};$$

$$2 \sum_{s=0}^{p-1} C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s}^p = C_{2p+2m}^{2p} + C_{p+m}^p;$$

$$2 \sum_{s=0}^{p-1} C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^p = C_{2p+2m+1}^{2p} + C_{p+m}^p;$$

$$2 \sum_{s=0}^{p-1} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^p = C_{2p+2m+1}^{2p} - C_{p+m}^p;$$

$$2 \sum_{s=0}^{p-1} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^p = C_{2p+2m+2}^{2p} - C_{p+m+1}^p.$$

433. Tuletage seosest

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^m (1-x)^{-n-1} = \frac{(-1)^m}{x^m} (1-x)^{m-n-1}$$

seos

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_m^{m-k+s} C_{n+s}^n = C_{m-n-1}^k.$$

434. Tõestage, et

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_m^s C_s^n = \begin{cases} 0, & \text{kui } m \neq n; \\ (-1)^n, & \text{kui } m = n. \end{cases}$$

435. Kasutades võrdust

$$(1-x)^{-n} (1-x^h)^n = (1+x+\dots+x^{h-1})^n,$$

tuletage seosed

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_{m-sh}^{n-1} C_n^s = \begin{cases} 0, & \text{kui } m > hn-1; \\ 1, & \text{kui } m = hn-1. \end{cases}$$

436. Kasutades samasust

$$(1-x)^{-n-1} (1-x^h)^n = \frac{(1+x+\dots+x^{h-1})^n}{1-x},$$

näidake, et $m \geq hn$ korral

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_{m-sh}^n C_n^s = h^n.$$

437. Kasutades samasust

$$(1+x)^{\pm p} (1-x)^{\pm p} = (1-x^2)^{\pm p},$$

näidake, et

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_p^{m-s} C_p^s = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_{\frac{p}{2}}^{\frac{m}{2}}, & \text{kui } m \text{ on paarisarv;} \\ 0, & \text{kui } m \text{ on paaritu arv;} \end{cases}$$

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s C_{\frac{p}{2}+m-s}^{\frac{p}{2}} C_{\frac{p}{2}+s}^{\frac{p}{2}} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_{\frac{p}{2}+\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, & \text{kui } m \text{ on paarisarv;} \\ 0, & \text{kui } m \text{ on paaritu arv.} \end{cases}$$

438. Tõestage, et

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s [C_m^s]^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, & \text{kui } m \text{ on paarisarv;} \\ 0, & \text{kui } m \text{ on paaritu arv.} \end{cases}$$

439. Tähistame avaldise

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$$

tähisega $(a)_n$. Tõestada, et

$$(a+b)_n = \sum_{m=0}^n C_n^m (a+b)_{n-m} (b-m+1)_m.$$

LAHENDUSED JA VASTUSED

1. Vastavalt korrutise reeglile saame $5 \cdot 3 = 15$ marsruuti.
2. Sama reegli kohaselt on $100^2 = 10\,000$ valikuvõimalust.
3. 20.
4. 8.
5. 9.
6. 48.
7. 25; 20.
8. 480; 437.
9. 1024; 4032.
10. Valge ruudu saame valida 32 viisil. Pärast valimist tõmbame vastava horisontaali ja vertikaali maha. Laua ülejäänud osale jääb 24 musta ruutu. Kokku on seega $32 \cdot 24 = 768$ valikuvõimalust.
11. Vastavalt korrutise reeglile $12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$ viisil.
12. $6 \cdot 5 = 30$ viisil.
13. $3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$.
14. Võib osta kas ühe eksemplari iga romaani või köite kahe romaaniga ja eksemplari kolmanda romaaniga. Vastavalt summa ja korrutise reeglile saame $6 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 6 = 134$ võimalust.
15. Veel võib osta köite romaanidega «Rudin» ja «Isad ja pojad» ning ühe eksemplari «Aadlipesa». Juurde tuleb $3 \cdot 3 = 9$ võimalust, seega kokku 143 võimalust.
16. Mail on rohkem valikuvõimalusi siis, kui Tiit võttis õuna, sest $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$.
17. $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ asendis. Kui esimesed kaks vurri langesid tahule 1, siis võib kolmas vurr langeda ükskõik millisele oma kümnest tahust. Seega võib ta peatuda 10 erinevas asendis. Analoogiliselt vaadeldakse juhte, kus teised kaks vurri langevad tahule 1. Kokku saame $6 + 8 + 10$ võimalust, seejuures oleme aga ühte võimalust (kui kõik

vurrid langevad tahule 1) arvesse võtnud kolm korda. Seega jääb järele 22 võimalust.

18. Et värvide järjekord pole oluline, siis $C_5^3=10$ viisil.

19. Siin tuleb värvide järjekorda juba arvestada ning seetõttu on $A_5^3=60$ võimalust. Kui üks triip on punane, siis on $3 \cdot A_4^2=36$ võimalust.

20. $A_5^2=20$ sõnaraamatut.

21. $A_{10}^2 - A_5^2=70$.

22. Tegemist on kordumistega variatsioonidega 13 kaardist 4-kaupa. Kokku on $13^4=28\,561$ võimalust. Kui kaartide hulgas ei tohi olla paare, siis on tegemist kordumisteta variatsioonidega, neid on $A_{13}^4=17\,160$.

23. Et piisab ühe musta ja ühe punase kaardi valimisest, siis saame $13^2=169$ valikuvõimalust.

24. Lapsele võib panna kas ühe, kaks või kolm nime, kusjuures kõik nimed on erinevad. Kokku on $300+300 \cdot 299+300 \cdot 299 \cdot 298=26\,820\,600$ erinevat nime.

25. Kui seltskonna liikmeid tsükliliselt ümber paigutada või seltskonda sümmeetriatelje suhtes peegeldada, siis jäävad igaühe naabrid samaks. 4 inimese korral on meil $2 \cdot 4=8$ sellist teisendust. Et permutatsioonide üldarv 4 inimesest on $4!=24$, siis on meil $\frac{24}{8}=3$ erinevat istuma

paigutamise viisi. Kui laua taga istub 7 inimest, siis on meil $\frac{7!}{14}=360$ võimalust. Võimaluste arv juhul, kus 2 teatud inimest kõrvuti istuvad, on 2 korda suurem 6 inimese istuma paigutamise viiside arvust (sest me võime neil lasta teineteisega kohad vahetada). Järelikult on siis võimalusi $5!=120$. Samuti leiame, et võimaluste arv juhul, kui ühel väljavalitud inimesel on teatud naabrid, on $4!=24$.

26. Ühes võistkonnas mängib üks ja teises kaks noormeest. Noormehi võib võistkondadesse jaotada 3 viisil. Peale selle tuleb esimesse võistkonda valida 3 neidu viiest.

Seda saab teha $C_5^3=10$ viisil. Kokku saame korrutise reegli järgi võistkondade moodustamiseks $3 \cdot 10=30$ võimalust.

27. n erinevat elementi võib k rühma jaotada k^n viisil. Meie juhul saame $3^6=729$ võimalust.

28. Vastavalt korrutise reeglile $7 \cdot 9=63$ viisil.

29. Esimene võib vahetuseks raamatuid valida $C_7^2=21$ ja teine $C_9^2=36$ viisil. Kokku on $21 \cdot 36=756$ vahetamisvõimalust.

30. Jaotame kõik oraatorite järjestused paarideks nii, et ühe paari järjestuse saame teisest, kui me selles A ja B ümber paigutame. Ülesande tingimust rahuldab täpselt üks järjestus igast paarist. Seetõttu on meil $\frac{5!}{2}=60$ võimalust.

31. Kui A peab esinema vahetult enne kui B , siis võime lugeda nad üheks sõnavõtjaks. Seetõttu on $4!=24$ võimalust.

32. Meeste ja naiste kohad saab valida kahel viisil. Seejärel saab mehed väljavalitud kohtadele paigutada $5!$ viisil. Niisama palju võimalusi on naiste istuma paigutamiseks. Kokku saame seega $2(5!)^2=28\,800$ paigutamisi.

33. Saame 10 korda vähem võimalusi kui eelmises ülesandes, s. o. 2880 võimalust.

34. 10 kaardi väljatõmbamiseks on kokku C_{52}^{10} võimalust. Võimalusi, mil ei valita ühtegi ässa, on C_{48}^{10} . Seetõttu on väljatõmmatute hulgas vähemalt üks äss $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ juhul. Täpselt üks äss on $C_4^1 C_{48}^9$, vähemalt kaks $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - C_{48}^9$ ja täpselt kaks $C_4^2 C_{48}^8$ juhul (valime kaks ässa C_4^2 viisil ning veel 8 kaarti 48 kaardist C_{48}^8 viisil).

35. 3^m erinevat signaali (vt. ülesannet 27).

36. Šifreerime iga hammastekomplekti nullide ja ühtede jadaga (kirjutame nulli, kui antud kohal hammast ei ole, ning ühe, kui on). Selliseid jadasid on 2^{32} . Et igale elanikule vastab oma jada, siis ei saa elanikke olla rohkem kui 2^{32} .

37. Algul vaatleme kolme reisijat, kellel on ükskõik, kuhu istuda. Valime nende seast ühe, kes istub näoga sõidu suunas. Selle valiku saab teha 3 viisil. Mõlemale diivanile võib reisijad paigutada $5!$ viisil. Kokku saame $3(5!)^2=43\,200$ võimalust.

38. $A_9^4=3024$.

39. $C_{52}^5=2\,598\,960$.

40. Ühte tähte sisaldab $32 \cdot 10^4$ numbrit, kaks tähte $32^2 \cdot 10^4$ ja kolm $32^3 \cdot 10^4$ numbrit. Vastavalt summa reeglile on kokku $33\,820 \cdot 10^4$ numbrit.

41. Viie päeva hulgast tuleb valida kaks, mil ema annab õuna. Kokku on $C_5^2 = 10$ võimalust.

42. C_{m+n}^m .

43. $P(2, 3, 4) = 1260$.

44. Et apelsinid on erinevad, siis saame $A_8^5 = 6720$ võimalust.

45. Iga apelsin võib sattuda ükskõik missugusele 8 pojast. Seetõttu on $8^5 = 32\,768$ võimalust.

46. $P(4, 2, 2, 1, 1, 1)$; $P(2, 2, 1, 1, 1, 1)$; $P(2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

47. $C_{30}^4 = 27\,405$; $A_{30}^4 = 657\,720$.

48. $P(2, 2, 2, 1, 1) = 5040$.

49. Algul valime 6 abonenti C_n^6 viisil. Järjestame need abonendid suvaliselt ning jaotame nad paarideks (esimene ja teine, kolmas ja neljas, viies ja kuues). Seda saab teha $6!$ viisil. Et igas paaris võib abonendid ümber vahetada ning paaride järjekord pole oluline, siis tuleb kõigi võimaluste arv jagada arvuga $2^3 \cdot 3! = 48$. Kokku saame $\frac{n!}{48(n-6)!}$ võimalust.

50. $\bar{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12}$; $\bar{C}_{10}^8 = C_{17}^8$; C_{10}^8 .

51. Võib valida kas kaks, kolm või neli naist. Kaks naist saab valida C_4^2 viisil. Seejärel tuleb valida 4 meest. Seda võib teha C_7^4 viisil. Korrutise reegli kohaselt saame $C_4^2 C_7^4$ võimalust. Kui valitakse kolm naist, saadakse $C_4^3 C_7^3$, kui neli naist, siis $C_4^4 C_7^2$ võimalust. Kokku on $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$ võimalust.

52. Arv peab lõppema numbritega 12, 24, 32, 44 või 52, esimesed kaks numbrit võivad olla suvalised. Kokku saame $5^2 \cdot 5 = 125$ arvu.

53. n reisijast võib igaüks väljuda ükskõik millises m peatuses. Seetõttu on m^n jaotumisviisi. Kui arvestada ainult peatustes väljuvate reisijate arvu, siis saame C_{m+n-1}^{m-1} võimalust.

54. Kui a ja b asetsevad kõrvuti, siis võime neid vaadelda ühe elemendina. Et me võime a ja b ümber vahetada, saame $2(n-1)!$ permutatsiooni, kus a ja b asetsevad kõrvuti. Seetõttu pole nad kõrvuti $n! - 2(n-1)!$ per-

mutatsioonis. Täpselt samuti saame, et a , b ja c ei asetse kõrvuti $n! - 6(n-2)!$ permutatsioonis. Ükski paar elementidest a , b ja c ei asetse kõrvuti $n! - b(n-1)! + b(n-2)!$ permutatsioonis (juurde ja mahaarvamise valemi kohaselt).

55. Kolm kohtunikku võivad võitja valida 10^3 viisil. $A_{10}^3 = 720$ juhul nimetavad nad kolme erinevat kandidaati. Seetõttu langevad vähemalt kahe kohtuniku arvamused kokku 280 juhul. Nende juhtude osa on 0,28.

56. Et iga üliõpilane võib saada ühe kolmest hindest, siis saab neile hinded panna $3^4 = 81$ viisil.

57. Et kaelakee ei muutu, kui helmeid tsükliliselt ümber paigutada või kee ümber keerata, siis saab valmistada $\frac{7!}{14} = 360$ erinevat keed.

58. Kaelakeed erinevad üksteisest suuremate helmeste vahel asetsevate väiksemate helmeste arvu poolest, seetõttu saab valmistada 3 erinevat kaelakeed.

59. Eesti tähestikus on 23 tähte. Seetõttu pole erinevate initsiaalide arv üle $23^2 = 529$, mis on väiksem kui 2000.

60. $A_{10}^7 = 604\,800$; $C_{10}^3 = 120$. Kui kaks neist palutakse kindlasti tantsima, siis on nende partnerite valikuks A_7^2 võimalust. Ülejäänud 5 noormeest valivad partneri 8 neiu hulgast, seda saab teha A_8^5 viisil. Kokku on seega $A_7^2 \cdot A_8^5 = 282\,240$ võimalust. Lõpuks, kui kaks antud neidu on tantsule palutud, siis võib ülejäänud 5 valida C_8^5 viisil.

61. Ohvitseri võib valida C_3^1 , seersandid C_6^2 ja reamehed C_{60}^{20} viisil. Vastavalt korrutise reeglile saame kokku $C_3^1 C_6^2 C_{60}^{20}$ võimalust. Kui väeossa peab kuuluma roodukomandör ja vanim seersantidest, siis saame $C_5^1 C_{60}^{20}$ valikuvõimalust.

62. Neli neidu saab valida C_{12}^4 viisil. Seejärel valime noormehed A_{15}^4 viisil (siin on järjestus juba oluline!). Kokku on $C_{12}^4 A_{15}^4 = 17\,417\,400$ võimalust.

63. Iga kana võib sattuda väljavalitute hulka või mitte. Seetõttu on kanade valikuks 2^3 võimalust. Et ülesande tingimuse kohaselt peab vähemalt ühe kana valima, saame kanade valikuks 7 võimalust. Analoogiliselt on partide

valikuks $2^4 - 1 = 15$ ning hanede valikuks $2^2 - 1 = 3$ võimalust. Kokku on $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ võimalust

64. $P(m, n, p) = \frac{(m+n+p)!}{m! n! p!}$ viisil.

65. Mustas köites raamatuid võib ümber paigutada $m!$ ja punases köites raamatuid $n!$ viisil. Kokku on vastavalt korrutise reeglile $m! \cdot n!$ võimalust. Kui mustad raamatud on kõrvuti, siis tuleb veel valida neile koht punaste raamatute vahel. Seda saab teha $n+1$ viisil. Kokku saame $m! n! (n+1) = m! (n+1)!$ võimalust.

66. 15 inimesest võib igaüks rühma kuuluda või mitte. Et rühm ei või tühi olla, siis saame $2^{15} - 1 = 32767$ võimalust. n isiku puhul on $2^n - 1$ võimalust.

67. Antud jagajasse α võib arv p_k kuuluda $\alpha_k + 1$ viisil (astendajatega $0, 1, \dots, \alpha_k$). Vastavalt korrutise reeglile on jagajaid $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$. Et leida jagajate summat, vaatleme avaldist

$$(1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_n + \dots + p_n^{\alpha_n})$$

Kui avada sulud, saame summa, millesse iga jagaja kuulub liidetavana täpselt üks kord. Geomeetrilise progressiooni summa valemit kasutades leiame, et jagajate summa on

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

68. Algul paneme igasse karpi ühe 50-kopikalise. Seejärel tuleb 7 50-kopikalist jaotada 5 karbi vahel. Seda saab teha $C_{11}^4 = 330$ viisil (vt. lk. 204).

69. Lisame 20 raamatule 4 ühesugust eraldavat eset ja vaatleme saadud objektide kõiki permutatsioone. Nende arv on $\frac{24!}{4!}$. Igale sellisele permutatsioonile vastab oma raamatute paigutamise viis.

70. Täpselt nagu eelmisegi ülesande puhul saame, et võimalusi on $\frac{8!}{3!} = 6720$.

71. Et arvestatakse ainult iga ettepaneku poolt antud häälte arvu, siis tuleb meil tegelikult jaotada 30 ühesugust «eset» 5 «kasti» vahel. Selleks võtame juurde 4 ühesugust eraldavat eset ning vaatleme saadud objektide kõiki permutatsioone. Neid on $P(30, 4) = 46376$. Igale permutatsioonile vastab oma häälte jaotus.

72. 12 raamatu köitmiseks kolme värvi nahka on kokku 3^{12} võimalust. Neist $3 \cdot 2^{12}$ juhul kasutatakse ainult kahte ning 3 juhul ainult üht värvi kaasi. Vastavalt juurde- ja mahaarvamise valemile saame, et ülesande tingimus on täidetud $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519\,156$ juhul.

73. Lisame 32 tähele 5 ühesugust eraldavat märki ja vaatleme saadud objektide kõiki selliseid permutatsioone, milles ükski eraldav märk ei asetse esimesel ega viimasel kohal ning ei leidu kahte kõrvutiolevat eraldavat märki. Tähti on võimalik ümber paigutada $32!$ viisil. Eraldavate märkide jaoks on aga 31 kohta ja neid võib paigale panna C_{31}^5 viisil. Arvestades, et sõnade järjekord pole

oluline, saame sõnade koostamiseks $\frac{32! C_{31}^5}{6!}$ võimalust.

74. 12 inimest saab valida C_{17}^{12} viisil. Kaks etteantud inimest satuvad väljavalitute hulka C_{15}^{10} juhul, seetõttu jääb $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$ lubatud valimisviisi.

75. Kalliskive võib ümber paigutada $P(5, 6, 7)$ viisil. Nende tsükliline ümberpaigutamine ja sümmeetriatelje suhtes peegeldamine käevõru ei muuda. Seega saame $\frac{P(5, 6, 7)}{36} = \frac{18!}{36 \cdot 5!6!7!}$ võimalust.

76. Kui kõik väljavalitud kalliskivid on ühte liiki, siis on 3 võimalust, kui 2 liiki, siis saame $2C_3^1 = 6$ ning kui kõik kivid on erinevad, siis 1 võimaluse. Kokku on 10 võimalust.

77. Tasse võib lauale paigutada A_4^3 , alustasse A_5^3 ning teelusikaid A_6^3 viisil. Vastavalt korrutise reeglile on kokku $A_4^3 A_5^3 A_6^3 = 172\,800$ võimalust.

78. Kui mees kutsub külla k naist, siis peab ta kutsuma $6 - k$ meest. Naine kutsub siis $6 - k$ naist ja k meest. Vastavalt summa ja korrutise reeglitele saab sellise valiku teha $\sum_{k=0}^5 (C_5^k)^2 (C_7^{6-k})^2 = 267\,148$ viisil.

79. Paadi vasakul küljel võib istuda kas 0, 1, 2, 3 või 4 neist inimestest, kellel oli ükskõik, kus istuda. Kui nende hulgast on valitud k inimest, siis tuleb valida veel $4 - k$ inimest nende 10 hulgast, kes eelistasid vasakut külge. Nüüd jääb järele $12 + (9 - k)$ kandidaati, kellest valime

4 sõudjat paremale küljele. Kokku on $C_9^h C_{10}^{4-h} C_{21-h}^h$ võimalust. Summeerides k järgi, saame vastuseks

$$\sum_{k=0}^4 C_9^h C_{10}^{4-h} C_{21-h}^h =$$

$$= \frac{9!10!}{4!} \sum_{k=0}^4 \frac{(21-k)!}{k!(9-k)!(4-k)!(6+k)!(17-k)!}.$$

80. Arvu 9 saab kolme erineva liidetava summaks jaotada kolmel viisil: $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$. Ühek-
sast väiksem summa tekib neljal juhul: $1+2+3=6$,
 $1+2+4=7$, $1+2+5=8$, $1+3+4=8$. Et 3 sedelit saab
välja võtta C_{10}^3 viisil, siis tuleb summa $C_{10}^3 - 4 = 116$ juhul
mitte väiksem kui 9.

81. Algul valime ühe kaardi igast mastist. Seda saab
teha 13^4 viisil. Seejärel valime veel kaks kaarti. Kui need
on erinevatest mastidest, siis saab seda teha $C_4^2 \cdot 12^2 = 864$
viisil. Kombineerides neid võimalusi esimese nelja kaardi
valimisviisidega ning arvestades seda, et kahte sama
masti kaarti võib ümber vahetada, saame $216 \cdot 13^4$ valiku-
võimalust. Kui viimased kaks kaarti on ühest mastist,
siis on nende valikuks $4 \cdot C_{12}^2 = 264$ võimalust. Juba tuntud
kaalutlused toovad meid selleni, et kõigi 6 kaardi jaoks
on $44 \cdot 13^4$ valikuvõimalust. Kokku saame $260 \cdot 13^4$ või-
malust.

82. Esimesel päeval võib lauljaid valida $C_{10}^6 = 210$, teisel
päeval $C_{10}^6 - 1 = 209$ ning kolmandal päeval $C_{10}^6 - 2 =$
 $= 208$ viisil. Kokku on $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9\,129\,120$ võimalust.

83. Et $C_6^3 = 20$, siis kasutatakse iga valimisvõimalust
täpselt üks kord. Valimisviiside permutatsioone on $20!$.

84. Iga noormees võib valida ühe 5 ettevõttest, iga neiu
aga ühe 4 ettevõttest. Kokku saame $5^3 \cdot 4^2 = 2000$ valiku-
võimalust.

85. Esimesele kohale võime kirjutada ükskõik millise 33
tähest, igale järgnevale aga ükskõik millise 32 tähest
(eelnevat tähte ei tohi kirjutada). Kokku on $33 \cdot 32^4 =$
 $= 34\,603\,008$ sõna.

86. Algul valime välja võitjad, seejärel jaotame nende
vahel raamatud. Vastavalt korrutise reeglile tuleb
 $C_{20}^6 P(3, 2, 1)$ võimalust. Teisel juhul valime kõigepealt
välja esimese raamatu saajad, seejärel teise ning lõpuks

kolmanda raamatu saajad. Kokku on $C_{20}^3 C_{20}^2 C_{20}^1$ võimalust.

87. Seame igale kivile (p, q) vastavusse kivi $(n - p, n - q)$. Kui $p + q = n - r$, siis $(n - p) + (n - q) = n + r$. Seega on kive silmade summaga $n - r$ niisama palju kui silmade summaga $n + r$. Kõiki doominokive on C_{n+2}^2 .

88. Ülesande tingimuse kohaselt istuvad mehed ja naised vaheldumisi. Seetõttu saame $2(7!)^2$ võimalust.

89. Valime paaridest AA' , BB' ja CC' igaühest ühe hobuse (8 valikuvõimalust), kolm hobust ülejäänud kümne hulgast ($C_{10}^3 = 120$ võimalust) ning seame seejärel võimalitult hobused järjekorda ($6!$ võimalust). Kokku on $8 \cdot 6! C_{10}^3 = 691\,200$ võimalust.

90. Kaashäälikuid saab valida C_9^4 ja täishäälikuid C_7^3 viisil. Valitud seitset tähte saab $7!$ viisil ümber paigutada. Kokku saame $C_9^4 C_7^3 \cdot 7!$ võimalust. Kui kaks kaashäälikut ei asetse kuskil kõrvuti, siis on tähtede järjekord selline: $KTKTKTK$ (K — kaashäälik, T — täishäälik). Siin on meil ainult $3!4!$ permutatsiooni ning $C_9^4 C_7^3 \cdot 3!4!$ sõna.

91. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt on töötajaid $6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$. Ainult inglise keelt tunneb $6 - 4 - 2 + 1 = 1$ ja ainult prantsuse keelt $7 - 3 - 2 + 1 = 3$ inimest.

92. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt võtsid pirukaid kaasa $92 - 47 - 38 - 42 + 28 + 31 + 26 - 25 = 25$ inimest.

93. Mehi saab paarideks jaotada $\frac{10!}{(2!)^5}$ viisil (arvestades ümberpaigutusi paaride sees ning paaride ümberpaigutamisi). Naised jagunevad $\frac{10!}{(2!)^5}$ viisil (siin on paaride järjekord juba oluline). Kokku on $\frac{(10!)^2}{2^{10} \cdot 5!}$ võimalust.

94. Algul valime ühe mehe ja ühe naise, kes läheksid väljavalitud abielupaariga ühte paati (9^2 võimalust). Seejärel jaotame ülejäänud 4-ks rühmaks $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ viisil. Kokku on $\frac{(9!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ võimalust.

95. Kui kaks väljavalitud meest satuvad ühte paati (ja nende naised koos nendega), siis võime ülejäänud jaotada $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ viisil. Kui nad aga satuvad erinevatesse rüh-

madesse, siis võib neid rühmi täiendada $(A_8^2)^2$ viisil ning seejärel ülejäänud jaotada rühmadeks $\frac{6!}{2^6 \cdot 3!}$ viisil. Kokku saame $\frac{17(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ võimalust.

96. Et arvud ei või alata nulliga, siis saab koostada $7^4 - 7^3 = 2058$ arvu.

97. Kui esimese kolme numbri poolt moodustatud arv on x , siis annavad viimased kolm numbrit ühe arvudest $0, 1, \dots, 999 - x$. Seega on selle arvu valimiseks $1000 - x$ võimalust. Et x muutub 100 ja 999 vahel, siis tuleb meil leida naturaalarvude $1 \dots 900$ summa. See on 405 450.

98. Valgeid kabendeid saab malelauale paigutada C_{32}^{12} viisil. Kui valgete kabendite jaoks on 12 välja valitud, jääb mustade jaoks järele 20 välja, millele neid võib paigutada C_{20}^{12} viisil. Kokku on $C_{32}^{12} C_{20}^{12}$ võimalust.

99. Jaotame sõna «tihane» tähtede kõik permutatsioonid klassideks nii, et ühte klassi kuuluvad permutatsioonid erinevad üksteisest ainult täishäälikute järjekorra poolest.

Klasse on $\frac{P_6}{P_3} = 120$. Ainult üks iga klassi permutatsioonidest rahuldab ülesande tingimust. Seetõttu on ülesande vastuseks 120.

100. Permutatsioonides, kus neli i -tähte kõrvuti asetsevad, võib nad ühendada ja lugeda üheks täheks. Seetõttu on selliste permutatsioonide arv $5!$. Jääb järele $P(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$ võimalust.

101. Kui n -täht järgneb vahetult u -tähele, siis võib need tähed ühendada. Seetõttu on otsitavaid ümberpaigutusi $P(2, 1, 1, 1, 1) = 360$.

102. Algul järjestame väljendi «kaalikamaad kastmas» kõik a -tähest erinevad tähed $P(3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ viisil. Seejärel valime a -tähe jaoks 4 kohta 12-st. Kokku saame $P(3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \cdot C_{12}^4$ ümberpaigutust.

103. Nii kaas- kui ka täishäälikuid võib omavahel ümberpaigutada $C(2, 1, 1) = 12$ viisil. Kui kaashäälikud on juba paigale pandud, siis jääb täishäälikute jaoks 5 kohta. See-

tõttu võib neile kohti valida $C_5^4=5$ viisil. Kokku on $5 \cdot 12^2=720$ võimalust.

104. Kirjutame täishäälikud välja antud järjekorras. Siis on *s*-tähe jaoks 5 kohta. Kui *s* on paigale pandud, siis on *m*-tähe jaoks 6 kohta. Lõpuks jääb *k*-tähe jaoks 7 kohta. Kokku on $5 \cdot 6 \cdot 7=210$ võimalust.

105. Nagu eelmiseski ülesandes saame, et ümberpaigutusi on $\frac{A_{11}^7}{P_3}=277\,200$ (arvestasime seda, et *l*-täht kuulub meie sõnasse kolm korda).

106. Algul fikseerime täishäälikute järjekorra (2 võimalust), seejärel paigutame nende täishäälikute vahele 2 kaashäälikut ($A_4^2=12$ võimalust). Esimese ülejäänud kaashäälikuist võib asetada kas ette- või tahapoole täishäälikuist (2 võimalust), teise jaoks on aga juba kolm kohta. Kokku saame $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3=144$ ümberpaigutust.

107. Valime 5 kaashääliku seast 3 tähte ja paneme nad näidatud kohtadele (A_5^3 võimalust). Ülejäänud viis tähte paigutame suvalisel viisil järelejäänud kohtadele ($5!$ võimalust). Kokku on $5! \cdot A_5^3=7200$ võimalust.

108. Vastavalt korrutise reeglile $C_5^2 C_3^1=30$ viisil; $C_5^2=10$ viisil.

109. $P(3, 1, 1, 1)=4!=96$ viisil (vt. ülesannet 100).

110. Algul paneme paigale kaashäälikud ($3!$ võimalust). Kolme *a*-tähe jaoks jääb neli kohta, kuhu neid saab paigutada 4 viisil. Kokku on 24 võimalust.

111. *e*-täht võib väljavalitud tähtede hulka kuuluda kas 0, 1, 2, 3 või 4 korda (5 võimalust), *n*-täht 3 viisil jne. Kokku saame $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=2025$ võimalust.

112. Leidub $C_6^3=20$ kombinatsiooni, milles kõik kolm tähte on erinevad, $6 \cdot 5=30$ kombinatsiooni täpselt kahest erinevast tähest ja 2 kombinatsiooni, kus esineb ainult üks täht. Kokku on 52 võimalust.

113. Kui arvestatakse ka väljavalitud tähtede järjekorda, siis on $A_6^3+3A_6^2+2=212$ võimalust.

114. Et nii täis- kui ka kaashäälikute järjekord on kindlaks määratud, siis tuleb 7 kohast valida täishäälikute jaoks 3 kohta. Seda saab teha C_7^3 viisil.

115. Sõna «kojukutse» puhul peavad esimene ja viimane täht olema kaashäälikud. Kaashäälikuid võib ümber pai-

gutada $P(2, 1, 1, 1)$ ja täishäälikuid $P(2, 1, 1)$ viisil. Kokku on $P(2, 1, 1, 1) \cdot P(2, 1, 1) = 720$ võimalust. Sõna «sanitar» korral on võimalusi $P_4 \cdot P(2, 1) = 72$.

116. a -tähe jaoks tuleb valida 3 kohta kuuest. Seda saab teha $C_6^3 = 20$ viisil. Kui lisada tingimus, et kaks a -tähte ei asetse kõrvuti, siis jääb nende jaoks ainult 4 kohta. Sel juhul on meil $C_4^3 = 4$ võimalust.

117. Sõna «tik-tak» tähtedest saab moodustada 180 permutatsiooni. Nendest 60-s permutatsioonis on kaks t -tähte ja 60-s permutatsioonis kaks k -tähte kõrvuti ning 24 permutatsioonis asetsevad kõrvuti mõlemad paarid. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt saame $180 - 60 - 60 + 24 = 84$ lubatavat permutatsiooni. Sõna «purpur» korral on $90 - 30 - 30 - 30 + 12 + 12 + 12 - 6 = 30$ lubatavat permutatsiooni.

118. On 3 kombinatsiooni, mis sisaldavad kõiki kolme tähte, ja 3 kombinatsiooni, kus esineb kaks erinevat tähte. Kokku on 6 kombinatsiooni. Arvu 132 132 numbritest saab moodustada $3P(2, 1, 1) + 3P(2, 2) = 54$ erinevat neljakohalist arvu.

119. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt saame, et kõiki numbreid 1, 2, 3, 4 sisaldab $10^6 - 4 \cdot 9^6 + 6 \cdot 8^6 - 4 \cdot 7^6 + 6^6 = 23\,160$ arvu. Ainult numbritest 1, 2, 3, 4 koosneb $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 = \frac{4^7 - 4}{3} = 5460$ arvu.

120. Iga number esineb igal kohal 6 korda $\left(6 = \frac{P_4}{4}\right)$.

Liites üheliste numbrid, saame summa $6(1 + 2 + 3 + 4) = 60$. Samuti talitame kümneliste, sajaliste ja tuhandelistega. Kõigi nende arvude summa on seega $60 + 600 + 6000 + 60\,000 = 66\,660$.

121. Siin on kõikide permutatsioonide arv 12, kusjuures 1 ja 5 esinevad igal kohal 3 korda ja number 2 6 korda. Seetõttu on üheliste summaks $3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 30$. Kõigi arvude summa on $30 + 300 + 3000 + 30\,000 = 33\,330$.

122. Samal viisil leiame, et summa on 11 110.

123. Summa on 16 665.

124. Kui loobuda kitsendustest, et number 0 ei tohi olla esikohal, saame summaks 2 666 640. Nulliga algavate arvude summa on 66 660. Seega on lubatavate viiekohaliste arvude summa 2 599 980.

125. Et numbrite 8 ja 9 abil saab üles kirjutada 2^k k -kohalist arvu, siis on vaadeldavaid arve $\sum_{k=1}^6 2^k = 126$.

126. Samal viisil saame $\sum_{k=1}^6 3^k = 1092$.

127. Et null ei või esikohal olla, siis saame $2 \sum_{k=0}^5 3^k = 728$ arvu.

128. Iga number esineb igal kohal $4^2 = 16$ korda. Seega on ühel kohal asetsevate numbrite summa $16(1+2+3+4) = 160$ ning vaadeldavate arvude summa 17 760.

129. Esimesel juhul on summa 3 999 960. Teisel juhul esineb iga number igal kohal A_8^4 korda ning me saame ühel kohal asetsevate numbrite summaks $A_8^4(1+2+\dots+9) = 75\,600$ ning kogusummaks 839 991 600.

130. Viimasel kohal peab asetsema kas 3 või 9, ülejäänud numbreid võib aga $3!$ viisil ümber paigutada. Kokku saame 12 paaritut arvu. Täpselt samuti leiame, et ka paarisarve on 12.

131. Paaritute numbrite kohad võib valida $C_6^3 = 20$ viisil. Igal kohal võib asetseda üks viiest numbrist. Kokku saame $20 \cdot 5^6$ arvu, nende hulgast $10 \cdot 5^5$ algavad nulliga. Järele jääb $20 \cdot 5^6 - 10 \cdot 5^5 = 281\,250$ arvu.

132. $C_6^3 \cdot 5^6 = 312\,500$.

133. Esimesel kohal võib olla üks üheksast, järgmistel üks kümnest ning viimasel kohal üks viiest numbrist (viimasel kohal asetseva numbri paarsus on eelnevaga määratud). Kokku saame $9 \cdot 10^4 \cdot 5 = 450\,000$ arvu. Kui vaadelda kõiki arve 1 ja 999 999 vahel, siis saame tulemuseks 499 999 arvu.

134. Kui nullid kõrvale jätta, siis moodustavad ülejäänud numbrid ühe järgmistest jadadest: 3; 2,1; 1,2; 1,1,1. Kui üks sellistest jadadest on antud, siis tuleb sellele nullid nii juurde panna, et esimene number oleks nullist erinev. Arvu 3 puhul saab seda teha ühel viisil; jadade 2,1 ning 1,2 puhul üheksal viisil (võimalused erinevad nullide arvu poolest ühe ja kahe vahel). Jada 1,1,1 puhul saab seda teha C_9^2 viisil. Kokku on $1+18+36=55$ arvu. Kui vaadelda kõiki arve 1 ja 9 999 999 999 vahel, siis on tarvis valida nullist erinevate numbrite kohad. Arvu 3 korral saab seda teha C_{10}^1 viisil; jadade 2, 1 ja 1, 2 puhul

C_{10}^2 ning jada 1, 1, 1 korral C_{10}^3 viisil. Kokku saame $C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + C_{10}^3 = 220$ arvu.

135. Esimesel kohal võib asetseda ükskõik milline numbritest 1, 2, ..., 9. Teisel kohal võib olla ükskõik milline ülejäänud üheksast, kolmandal suvaline kaheksast numbrist jne. Kokku saame $9 \cdot 9!$ arvu.

136. 0 ja 999 vahel olevaid ja viiega jaguvaid arve on $E\left(\frac{1000}{5}\right)$, kus $E(x)$ on arvu x täisosa. Täpselt samuti

jagub seitsmega $E\left(\frac{1000}{7}\right)$ ning arvuga 35 $E\left(\frac{1000}{35}\right)$

arvu. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt saame, et

$$1000 - E\left(\frac{1000}{5}\right) - E\left(\frac{1000}{7}\right) + E\left(\frac{1000}{35}\right) = 686$$

arvu ei jagu viiega ega seitsmega.

137. Täpselt samuti leiame, et otsitavaid arve on 228.

138. Leidub 729 arvu, milles puudub number 9. Seetõttu on numbrit 9 sisaldavaid arve $1000 - 729 = 271$. Täpselt kaks korda esineb mainitud number 27-s arvus (099, 909, 990, 199 jne.). Null esineb ühes ühe-, üheksas kahe- ning 171-s kolmekohalises arvus, seega kokku 181-s arvus. Kaks korda esineb null 9-s arvus. 0 ja 9 mõlemad esinevad 36-s arvus (9-ga algab 19 sellist kolmekohalist arvu ja üks kahekohaline, 1 kuni 8-ga algab 16 niisugust arvu). Numbrid 8 ja 9 esinevad 54-s arvus. $n > 1$ puhul leidub 9^n ja $n = 1$ puhul 10 n -kohalist arvu, milles kaks kõrvutiseisvat numbrit ei ole võrdsed. Seetõttu on 0 ja 999 999 vahel niisuguseid arve $10 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 = 597\,871$.

139. Vastav neljakohaline arv võib koosneda kas neljast erinevast numbrist (1, 2, 3, 5), kahest ühesugusest ja kahest erinevast numbrist (1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 5; 1, 1, 3, 5; 1, 2, 3, 3; 1, 3, 3, 5; 2, 3, 3, 5) või lõpuks kahest võrdsete numbrite paarist (1, 1, 3, 3). Järelikult on selliseid arve $P_4 + 6P(2, 1, 1) + P(2, 2) = 24 + 6 \cdot 12 + 6 = 102$.

140. Samuti nagu eelmises ülesandes saame vastuseks $2P(2, 1, 1, 1) + 3P(3, 1, 1) + 2P(2, 2, 1) + 3P(4, 1) + P(3, 2) = 265$.

141. Kuuekohalisse arvu võib kuuluda kas üks, kaks või kolm paari ühesuguseid numbreid. Ühe paari saab valida C_5^1 viisil. 4 erinevast ja 2 ühesugusest tähest saab koostada $P(2, 1, 1, 1, 1) = \frac{6!}{2!} = 360$ permutatsiooni. Nendest

$5! = 120$ permutatsioonis asetsevad kaks ühesugust numbrit kõrvuti. Järelikult saame sel juhul $5(360 - 120) = 1200$ kuuekohalist arvu. Kaks paari ühesuguseid numbreid saab valida $C_5^2 = 10$ viisil, seejärel saab $C_3^2 = 3$ viisil valida veel kaks numbrit. Nende permutatsioone on kokku $P(2, 2, 1, 1) = 180$, kusjuures $2 \cdot \frac{5!}{2!} = 120$ neist sisaldab ühte ühesuguste numbrite paari ja $4! = 24$ permutatsiooni kahte sellist paari. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt saame, et see juht annab $10 \cdot 3(180 - 120 + 24) = 2520$ nõutavat arvu. Samal viisil leiame, et kolm ühesuguste numbrite paari annavad

$$C_5^3 \left(\frac{6!}{(2!)^3} - 3 \frac{5!}{(2!)^2} + 3 \frac{4!}{2!} - 3! \right) = 300$$

nõutavat arvu. Kokku saame 4020 arvu.

142. Kokku saab antud arvu numbritest koostada

$$3 \cdot \frac{5!}{2!} + C_3^2 C_2^1 \frac{5!}{(2!)^2} + C_3^1 \cdot \frac{5!}{3!} + C_2^1 \cdot \frac{5!}{3! 2!} = 440$$

viiekohalist arvu. Nendest $3P_3 + 2 \frac{P_3}{2!} = 24$ arvus asetsevad 3 kolme kõrvuti. Saame 416 otsitavat arvu.

143. Antud numbritest saab kokku $P(2, 2, 2, 2)$ permutatsiooni. Nendest $P(2, 2, 2, 1)$ permutatsioonis asetseb antud numbri kõrval seesama number, $P(2, 2, 1, 1)$ permutatsioonis kahe antud numbri, $P(2, 1, 1, 1)$ permutatsioonis kolme ning $P(1, 1, 1, 1)$ permutatsioonis nelja antud numbri kõrval needsamad numbrid. Juurde- ja mahaarvamise valemi kohaselt saame, et

$$P(2, 2, 2, 2) - 4P(2, 2, 2, 1) + 6P(2, 2, 1, 1) - 4P(2, 1, 1, 1) + P(1, 1, 1, 1) = 864$$

permutatsioonis ei leidu kahte ühesugust kõrvutiasetsevat numbrit.

144. Samal viisil saame, et otsitavaid arve on

$$\frac{8!}{(2!)^3} - 3 \cdot \frac{7!}{(2!)^2} + 3 \cdot \frac{6!}{2!} - 5! = 2220.$$

145. Täpselt samuti saame

$$\frac{10!}{(3!)^2} - 2 \cdot \frac{8!}{3!} + 6! = 88\,080$$

arvu.

146. Samal viisil saame vastuseks 20 040.

147. Kui üks arv on valitud, siis jääb teise arvu valikuks 10 võimalust (sest selle paarsus on juba teada). Et neid kahte arvu võib omavahel ümber paigutada, saame $\frac{20 \cdot 10}{2} = 100$ valikuvõimalust.

148. Valitud arvudest on kas kõik kolm paarisarvud või siis on üks neist paarisarv ning kaks paaritud. Seetõttu saame $C_{15}^3 + C_{15}^1 C_{15}^2 = 2030$ valikuvõimalust.

149. Tee 11 punktis on võimalik valida kahe võimaluse vahel. Seetõttu on $2^{11} = 2048$ sõitmisviisi.

150. Et alguspunktis on valik juba tehtud, siis jääb järele $2^{10} = 1024$ võimalust.

151. Samal viisil leiame, et võimaluste arv on $3^5 = 243$.

152. Kui on valitud p 10-kopikalist, siis 15-kopikalisi võib valida $0, 1, \dots, 20 - p - 1, 20 - p$, s. t. kokku on 15-kopikaliste valikuks $21 - p$ võimalust. Et p muutub nullist kahekümneni, siis on meil kokku $1 + 2 + 3 + \dots + 21 = 231$ valikuvõimalust.

153. Müntide erinevaid kombinatsioone on $C_{13}^5 = 1287$. Seetõttu võib anda 1286 vale vastust.

154. Viiekohalisi arve on 90 000, neist $4 \cdot 5^4 = 2500$ arvus on kõik numbrid paarisnumbrid ning $5^5 = 3125$ arvus kõik numbrid paaritud. Kuuest väiksemat numbrit ei esine $4^5 = 1024$ arvus ning kolmest suuremat numbrit $3 \cdot 4^4 = 768$ arvus. Numbrid 1, 2, 3, 4 ja 5 esinevad korraga $5!$ arvus, numbrid 0, 2, 4, 6, 8 korraga aga $4 \cdot 4! = 96$ arvus.

155. Ülesande tingimusest on näha, et kaks erinevat viset annavad ühesugused summad ainult siis, kui üks neist saadakse teisest täringute ümbervahetamisel. Seetõttu on erinevaid summasid $C_6^2 + 6 = 21$.

156. Täpselt samal viisil saame vastuseks $C_6^3 + 2C_6^2 + 6 = 56$.

157. Kõigil täringutel tuleb ühesugune arv silmi 6 juhul. Kaks erinevat silmade arvu võib esineda järgmisel kolmel viisil: ühel täringul tuleb üks ning ülejäänud 5 täringul teine silmade arv või tuleb kahel täringul üks ning ülejäänud neljal täringul teine arv silmi või esineb üks silmade arv kolmel ning teine samuti kolmel täringul. Esimesel juhul saab esinevad silmade arvud valida A_6^2 viisil, kusjuures esimene silmade arv võib esineda igaühel 6 tärin-

gust. See annab $6A_6^2 = 180$ võimalust. Variant $2+4$ annab täpselt samuti $A_6^2 P(2, 4) = 450$ ja variant $3+3$ $C_6^2 P(3, 3)$ võimalust. Seega võib kaks erinevat silmade arvu esineda $180+450+300=930$ juhul. Kolme erineva silmade arvuga juhu käsitlemiseks leiame kõigepealt arvu 6 kõik lahutused 3 liidetavaks: $6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$. Vastavalt sellele leiame

$$\frac{1}{2!} A_6^3 P(1, 1, 4) = 1800,$$

$$A_6^3 P(1, 2, 3) = 7200,$$

$$\frac{1}{3!} A_6^3 P(2, 2, 2) = 1800,$$

seega on kokku 10 800 võimalust kolme erineva silmade arvu saamiseks.

Neljaks liidetavaks laguneb arv 6 nii: $6=1+1+1+3=1+1+2+2$.

Need variandid annavad

$$\frac{1}{3!} A_6^4 P(1, 1, 1, 3) = 7200,$$

$$\frac{1}{(2!)^2} A_6^4 P(1, 1, 2, 2) = 16\,200,$$

seega on kokku 23 400 võimalust, et tuleks neli erinevat silmade arvu.

Viie erineva silmade arvu korral on meil $\frac{1}{4!} A_6^5 P(1, 1, 1, 1, 2) = 10\,800$ ja kuuel korral $6! = 720$ võimalust. Märgime, et $6+930+10\,800+23\,400+10\,800+720=6^6$.

158. Täringud jagunevad rühmadeks vastavalt sellele, mitu silma peale tuli. Seetõttu on meil tarvis leida kõigi võimaluste arv n täringu jaotamisel 6 rühmaks. See arv on C_{n+5}^5 (vt. lk. 204).

159. Et $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$, siis on miljoni igal kolmeks teguriks lahutusel kuju $1\,000\,000 = (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3})$, kus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ on sellised mittenegatiivsed täisarvud, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 6$. Et 6 lahutub 3-ks mittenegatiivseks täisarvuliseks liidetavaks $C_8^2 = 28$ viisil ja me arvestame tegurite järjekorda, saame erinevate esituste arvuks $28^2 = 784$.

160. Eelmises ülesandes saadud esitused jagunevad kolmeks klassiks: kas kõik tegurid on võrdsed või on kaks võrdsed ja kolmas erinev või on kõik erinevad. Esimene klass koosneb ühest esitusest: $1\,000\,000 = 100 \cdot 100 \cdot 100$. Leiame teise klassi kuuluvate esituste arvu. Kui ühtelangevatel teguritel on kuju $2^\alpha \cdot 5^\beta$, siis saame $2\alpha + \alpha_3 = 2\beta + \beta_3 = 6$. Võrrandil $2x + y = 6$ on aga mittenegatiivsetes täisarvudes 4 lahendit: $x=0, y=6$; $x=1, y=4$; $x=2, y=2$; $x=3, y=0$. Et iga astendajat α võib vaadelda koos suvalise astendajaga β , siis saame $2^\alpha 5^\beta$ jaoks 16 võimalust. Ühe neist ($2^2 \cdot 5^2$) peame kõrvale jätma kui esimese klassi kuuluva. Järele jääb 15 varianti. Igaüks neist annab kolm teguriteks lahutust olenevalt kohast, kus asetseb kolmas tegur. Seega koosneb teine klass 45 lahutusest. Kui tegurite järjekorda ei arvestata, saame 15 lahutust. Kolmanda klassi teguriteks lahutuste arv on $784 - 1 - 45 = 738$. Selle klassi lahutused erinevad ainult tegurite järjekorra poolest. Seetõttu on juhul, kui tegurite järjekorda ei arvestata, $1 + 15 + 123 = 139$ teguriteks lahutust.

161. Iga mündi võib panna ühte kahest taskust, seetõttu on võimalusi 2^9 .

162. Järjestame esemed mingil viisil ning anname esimesele inimesele esimesed n , teisele teised n ning kolmandale viimased n eset. Et elementide järjekord rühmades pole oluline, saame $C_{3n}^n \cdot C_{2n}^n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ jaotamisviisi.

163. Täpselt samuti nagu eelmises ülesandes saame erinevate jaotuste arvuks $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

164. Samal viisil saame vastuseks $\frac{(nk)!}{(k!)^n n!}$.

165. $\frac{30!}{(10!)^3 3!} \cdot \frac{30!}{(3!)^{10} 10!}$.

166. 4 ässa saab pooleks jaotada $\frac{4!}{(2!)^3} = 3$ viisil, ülejäänud 32 kaarti aga $\frac{32!}{(16!)^2 2!}$ viisil. Et neid jaotusi võib teineteisega ühendada kahel viisil, siis saame $\frac{3 \cdot 32!}{(16!)^2}$ jaotamisviisi.

167. Võimaluste arv on $\frac{10!}{2^5 \cdot 5!} = 945$.

168. 945.

169. $\frac{9!}{(3!)^4} = 280$.

170. Kolm inimest võivad jaotada 6 õuna C_8^2 viisil, iga ülejäänud puuvili võib sattuda ükskõik kellele kolmest, järelikult on nende jaotamisvõimalusi 3^6 . Kokku saame $3^6 C_8^2 = 20\,412$ jaotamisviisi.

171. Kõigepealt jaotame ära õunad. Et keegi ei saa rohkem kui 4 õuna, siis võib neid jaotada ühel järgmistest viisidest: $6 = 4 + 2 + 0 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 + 0 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$. Kui õunad on jaotatud vastavalt skeemile $4 + 2 + 0$, siis tuleb teisele isikule valida veel 2 puuvilja kuuest ja ülejäänud anda kolmandale. Seda saab teha C_6^2 viisil. Arvestades inimeste ümberpaigutamise võimalust, saame $3! C_6^2$ jaotamisviisi. Skeemi $4 + 1 + 1$ korral tuleb teisele isikule valida 3 puuvilja kuuest (C_6^3 võimalust). Et kahel inimesel on õunu ühepalju, siis on siin inimeste ümberpaigutusi $P(2, 1) = 3$. Skeemi $3 + 3 + 0$ puhul tuleb esimesele isikule valida üks puuvili kuuest ja teisele üks ülejäänud viiest. Siin on samuti 3 võimalikku ümberpaigutust. Täpselt samuti vaadeldakse ülejäänud skeeme. Kokku saame

$$6C_6^2 + 3C_6^3 + 3C_6^1 C_5^1 + 6C_6^1 C_5^2 + C_6^2 C_4^2 = 690$$

jaotamisviisi.

172. Et $9 = 6 + 3 + 0 = 6 + 2 + 1 = 5 + 4 + 0 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$, siis saame nagu eelmiseski ülesandes $6[C_9^3 + C_9^4 + C_9^1 C_8^2 + C_9^1 C_8^3 + C_9^2 C_7^3] + 3(C_9^1 C_8^4 + C_9^2 C_7^2) + C_9^3 C_6^3 = 19\,194$ jaotamisviisi.

173. Kaardipaki võib 13 mängija vahel jaotada $\frac{52!}{(4!)^{13}}$ viisil (vt. ülesannet 162). Kui igaüks peab saama igast mastist ühe kaardi, siis tekib iga masti jaoks permutatsioon 13 kaardist. Et erinevate mastide permutatsioonid üksteisest ei sõltu, siis saame vastavalt korrutise reeglile $(13!)^4$ võimalust. Kolmandal juhul võib üks mängija valida ühe kaardi igast mastist 13^4 viisil. Seejärel võib iga masti ülejäänud 12 kaarti jaotada kolmeks osaks

$\frac{12!}{(4!)^3 3!}$ viisil ja kõik ülejäänud kaardid $\frac{(12!)^4}{(4!)^{12} (3!)^4}$ viisil. Saadud osad võib 12 mängija vahel jaotada 12! viisil. Et igast mastist kaarte saava mängija võib valida 13 viisil, saame kolmandal juhul vastuseks $\frac{(13!)^5}{(4!)^{12} (3!)^4}$.

174. Tervest kaardipakist saab 4 kaarti välja tõmmata C_{52}^4 viisil. Täpselt 3 masti on esindatud $A_4^2 (C_{13}^1)^2 C_{13}^2 = 518\,184$ juhul: me valime puuduva ja korduva masti välja A_4^2 viisil, valime seejärel korduvast mastist kaks kaarti C_{13}^2 viisil ning siis ühe kaardi kahest ülejäänud mastist $(C_{13}^1)^2$ viisil. Täpselt 2 masti on esindatud $C_4^2 (C_{13}^2)^2 + A_4^2 C_{13}^3 C_{13}^1 = 81\,120$ juhul. Tõepoolest, selline olukord tekib, kui meil on kas kaks kaarti kahest või üks kaart ühest ning kolm teisest mastist. Esimesel juhul tuleb valida kaks masti ning kummastki mastist kaks kaarti, teisel juhul aga valida esimene ja teine mast (siin on järjekord juba oluline) ning seejärel võtta kolm kaarti esimesest ning üks teisest mastist.

175. Jaotame iga masti 13 kaarti vastavalt skeemile $3+3+3+4$. Seda saab teha $\frac{13!}{4! (3!)^4}$ viisil. Neljast kaardist koosnevad osad võib mängijatele jaotada 4! viisil ja iga masti 3-st kaardist koosnevad osad 3! viisil. Kokku saame $(3!)^4 4!$ osade jaotamisviisi. Terve kaardipaki saab jaotada $\left(\frac{13!}{4! (3!)^4} \right)^4 4! (3!)^4 = \frac{(13!)^4}{(4!)^3 (3!)^{12}}$ viisil.

176. Järjestame jaotusest osavõtjad mingil viisil. Seejärel vaatleme 18 eseme kõiki järjestusi ning jaotame need esemed neljaks 4 eset sisaldavaks ja üheks 2 eset sisaldavaks osaks. Kahest esemest koosneva osa anname ühele jaotuse viiest osavõtjast, ülejäänud osad aga ülejäänutele (esimese osa esimesele, teise teisele jne.). Et esemete järjestus osades pole oluline, siis saame $\frac{5 \cdot 18!}{(4!)^4 2!}$ jaotamis-

viisi. Teisel juhul saame samal teel $\frac{18! C_5^2}{(4!)^3 (3!)^2}$ võimalust.

177. Iga esemepaari jaoks on kolm võimalust: sellest paarist võib valikusse kuuluda kas kaks, üks või mitte ühtegi eset. Seetõttu on valikuid $3^{14} = 4\,782\,969$.

178. 4 musta kera saab paigutada 6 pakki C_9^5 viisil. Nii-sama palju võimalusi on valgete ja siniste kerade jaoks. Vastavalt korrutise reeglile saame $(C_9^5)^3 = 2000376$ võimalust.

179. Samal viisil saame vastuseks $C_6^3 C_{13}^3 = 5720$.

180. Kujutame arvu n igaks liidetavaks lahutust punkt-diagrammina. Kui sellele diagrammile lisada n punktist koosnev veerg, siis saame diagrammi, mis esitab arvu $2n$ lahutuse n liidetavaks.

181. Valime kolm suvalist naturaalarvu 1 ja $n-2$ vahel ning lisame suuremale neist arvu 2 ja suuruselt teisele arvu 1. Saame kolm arvu, mille seas pole kahte naaber-arvu. Need arvud annavadki valitavate esemete numbrid. Järelikult saab valiku teha C_{n-2}^3 viisil.

182. $P(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{16!}{2^6}$ viisil.

183. Me võime vabad väljad täita ühesuguste kabenditega, saades permutatsiooni 48-st kabendist ja ülesandes antud malenditest. Selliste permutatsioonide arv on

$$P(48, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{64!}{2^6 48!}.$$

184. Vastuse $P(32, 8, 8, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ saame samasugusel viisil.

185. Olgu valgete kabendite poolt hõivatud p ja mustade poolt q välja. 15 valget kabendit saab C_{14}^{p-1} viisil asetada p väljale nii, et kõik väljad oleksid hõivatud, 15 musta q väljale C_{14}^{q-1} viisil. p välja valgete ja q välja mustade kabendite jaoks saab valida $P(p, q, 24-p-q)$ viisil. Seepärast on paigutamiseviise üldse

$$\sum_{p,q} P(p, q, 24-p-q) C_{14}^{p-1} C_{14}^{q-1},$$

kus summa on võetud üle kõigi siisuguste p ja q , et

$$1 \leq p \leq 15, \quad 1 \leq q \leq 15, \quad p+q \leq 24.$$

186. Arvame ühte rühma väljad, mis teisenevad üksteiseks malelaua pööramisel 90° võrra. Ülesande tingimuse järgi täidavad kabendid viie sellise rühma väljad, rühmade üldarv on aga 16. Seepärast saame $C_{16}^5 = 4368$ paigutamiseviisi.

187. Ülesanne lahendatakse analoogiliselt eelmisega. Saame C_{32}^{10} paigutamisviisi.

188. Välju on nüüd kaks korda vähem, seega on C_{16}^{10} paigutamisviisi.

189. Laua ühel poolel tuleb 16-le mustale väljale asetada 6 valget ja 6 musta kabendit. Seda saab teha $P(6, 6, 4) = \frac{16!}{6!6!4!}$ viisil.

190. Laua ühel poolel tuleb 16 välja seast valida 12, asetada neile suvalised kabendid ning täita teisel pool sümmeetrilised väljad vastupidist värvi kabenditega. Väljad saab valida C_{16}^{12} viisil ja neid 12 välja täitvate kabendite värvi 2^{12} viisil. Kokku saame $2^{12} C_{16}^{12} = 7\,454\,720$ paigutamisviisi.

191. Kabendite asend on määratud sellega, millisel viiel väljal esimese horisontaali 7-st väljast nad paiknevad, seepärast saame $C_7^5 = 21$ asetamisviisi.

192. Kabendite asendid jagunevad kahte klassi vastavalt sellele, kas nurgaväli on hõivatud või mitte. Kui nurgaväljad on täidetud, siis seisab esimesel horisontaalil veel 4 kabendit 6 väljal, mis pole nurgaväljad. Neid saab paigutada $C_6^4 = 15$ viisil. Kui aga nurgaväljad on vabad, siis seisab esimese horisontaali 6 väljal (mitte nurkades) 5 kabendit. Neid saab asetada $C_6^5 = 6$ viisil. Kokku saame 21 paigutamisviisi.

193. 7 valget kuuli võib 9 süvendisse asetada C_{15}^8 viisil ja 2 musta kuuli C_{10}^8 viisil. Kokku saame $C_{15}^8 \cdot C_{10}^8 = 289\,575$ asetamisviisi.

194. Analoogiliselt saame $C_{15}^8 (C_9^8)^2 = 521\,235$ asetamisviisi.

195. Algul valime 9 raamatut C jaoks. Seda saab teha C_{27}^9 viisil. Ülejäänud 18 raamatut saab A ja B vahel jaotada 2^{18} viisil. Kokku on $2^{18} C_{27}^9$ jaotamisviisi.

196. 8 inimest saavad korruste vahel jaotuda 4^8 viisil. Siinjuures pole antud korrusel mahaminejaid 3^8 juhul, antud kahel korrusel 2^8 juhul, antud kolmel korrusel 1

juhul. Juurde- ja mahaarvamise valemi järgi saame vastuseks

$$4^8 - 4 \cdot 3^8 + 6 \cdot 2^8 - 4 = 40\,824.$$

197. Võimalikud on järgmised juhud: kolmega jaguvad kas kõik kolm liidetavat, üks neist või mitte ükski. Esimesel juhul saab liidetavad valida C_{33}^3 viisil. Teisel juhul annab üks liidetav kolmega jagamisel jäägi 1, teine jäägi 2. Et esimese saja arvu seas annavad 34 jäägi 1, 33 jäägi 2 ja 33 jaguvad kolmega, siis saame teisel juhul $C_{34}^1 (C_{33}^1)^2$ valimisviisi. Kui ükski liidetav ei jagu kolmega, siis annavad nad kõik jäägi 1 või kõik jäägi 2. Vastavalt saame C_{34}^3 või C_{33}^3 juhtu. Kokku tuleb $2C_{33}^3 + C_{34}^3 + C_{34}^1 (C_{33}^1)^2 = 53\,922$ valimisviisi.

198. Ülesanne lahendatakse eelmisega analoogiliselt. Vastus on

$$3C_n^3 + (C_n^1)^3 = \frac{n}{2}(3n^2 - 3n + 2).$$

199. Kui süvenditesse on pandud p valget kuuli, siis saab hõivatud süvendid valida C_{n+1}^p viisil. Seejärel jääb musta kuuli jaoks $n - p + 1$ süvendit, peale selle ei pruugi teda süvendisse pannagi. Saame $n - p + 2$ võimalust. Seejärel on vastus

$$\sum_{p=0}^n (n - p + 2) \cdot C_{n+1}^p = \sum_{s=1}^q s C_q^s + \sum_{p=0}^{q-1} C_q^p.$$

Et

$$\sum_{s=1}^q s C_q^s = q \cdot 2^{q-1} \quad \text{ja} \quad \sum_{p=0}^{q-1} C_q^p = 2^q - 1$$

(vt. ülesannet 401, a), siis saame vastuseks $(n+3)2^n - 1$.

200. Tähistame mittetühja valgete kuulide rea V abil, mustade kuulide rea M abil. Ülesande tingimustest järeldub, et kuulid paiknevad kas skeemi $MVMV \dots MV$ või skeemi $VMVM \dots VM$ järgi (kummaski skeemis on r paari). Kuid m valget kuuli saab jaotada r mittetühjaks hulgaks C_{m-1}^{r-1} viisil. Mustade kuulide jaoks saame C_{n-1}^{r-1} jaotamisviisi, kokku aga $2C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r-1}$ paigutamisi. Täpselt samuti leiame, et $2r$ kokkupuutekohta esineb $C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r-1} + C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^r$ juhul.

201. Näidaku arv $A(m, n)$, mitmel viisil võib n eksamilt koguda m punkti (saamata ühtki kahte). Siis on selge, et $A(30, 8) = A(25, 7) + A(26, 7) + A(27, 7)$ jne. Arvu m vähendamist jätkates jõuame mõne sammu järel vastuseni 784.

202. Valime algul n paigalejäävat eset. Seda saab teha C_{m+n} viisil. Ülejäänud m eset paigutame nii ümber, et ükski ese ei jääks paigale. Seda võib teha D_m viisil (vt. lk. 67). Kokku saame $\frac{(m+n)!}{m!n!} D_m$ ümberpaigutamise viisi.

203. r eset saab $n+p$ inimese vahel jaotada $(n+p)^r$ viisil; seejuures jääb antud inimene kõigest ilma $(n+p-1)^r$ juhul; kaks inimest jäävad ilma $(n+p-2)^r$ juhul jne. Tõestatava tulemuseni jõuame juurde- ja mahaarvamise valemit rakendades.

204. Arvu $2r+x$ nõutava lahutuse diagrammi esimene veerg sisaldab $r+x$ elementi. Kui selle ära jätame, saame arvu r mittenegatiivseteks liidetavateks lahutuse diagrammi.

205. Et igaüks võib hääletada iga liikme poolt ja ühingus on n liiget, siis saame n^n hääletamisviisi. Teisel juhul tuleb n häält jaotada n kandidaadi vahel. Seda võib teha C_{2n-1}^{n-1} viisil.

206. Olgu arv $2n$ jaotatud nõutud viisil kolmeks osaks: $2n = a+b+c$, kusjuures $a \leq b \leq c$. Siis $a \neq 1$, vastasel juhul saaksime $b+c = 2n-1$ ja $b < c$, mis pole $b+1 > c$ tõttu võimalik. Peale selle kehtib $a+b > c$, kusjuures $a+b$ ja c on korraga paaris- või paaritud arvud. Järelikult $a+b \geq c+2$. Kuid siis annavad $a-1$, $b-1$ ja $c-1$ arvu $2n-3$ lahutuse, kusjuures $(a-1)+(b-1) > c-1$. Seega oleme saanud üksühese vastavuse arvude $2n$ ja $2n-3$ lahutuste vahel.

207. Väide järeldub võrdusest

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

208. Oletame, et esimene sai x esimest liiki, y teist liiki ja z kolmandat liiki eset. Siis $x+y+z = 3n$, kusjuures $0 \leq x, y, z \leq 2n$. Seega tuleb meil leida võrrandi $x+y+z = 3n$ nende mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite arv, kus ühegi tundmatu väärtus ei ületa $2n$. Kui tingimused $x \leq 2n$, $y \leq 2n$, $z \leq 2n$ kõrvale jätta, siis on võrrandil lahendeid niisama palju kui $3n$ ühesuguse

eseme jaotamisviise 3 isiku vahel, s. t. C_{3n+2}^2 . Leiame nüüd nende lahendite arvu, milles $x > 2n$. See arv võrdub võrrandite $y+z=k$, $0 \leq k < n$ mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite üldarvuga, s. t. on $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Niisama paljudes lahendites on $y > 2n$ ja $z > 2n$. Jättes need lahendid kõrvale, saame $3n^2+3n+1$ lahendit.

209. Lahendatakse analoogiliselt eelmisega. Saame

$$\begin{aligned} C_{4n+3}^3 - 4 \sum_{k=0}^{2n-1} C_{k+2}^2 &= C_{4n+3}^3 - 4C_{2n+2}^3 = \\ &= \frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3) \end{aligned}$$

jaotamisviisi.

210. Et rühmad pole eristatavad, siis tuleb võrrandi $x+y+z=3n$ lahendid x , y , z ja $2n-x$, $2n-y$, $2n-z$ samastada. Üks lahend (nimelt $x=n$, $y=n$, $z=n$) samastatakse seejuures iseendaga, ülejäänud neist erinevate lahenditega. Seetõttu vastus on

$$\frac{3n^2+3n}{2} + 1.$$

Analoogiliselt käsitletakse juhtu, kus on olemas nelja liiki esemeid.

211. Siin tuleb leida võrrandi $x_1+x_2+\dots+x_m=mn$ nende täisarvuliste lahendite arv, mis rahuldavad tingimusi $0 \leq x_k \leq 2n$, $1 \leq k \leq m$. Kui tingimused $x_k \leq 2n$ ära jätta, siis saame C_{mn+m-1}^{m-1} lahendit. Leiame nende lahendite arvu, kus $x_1 > 2n$. See võrdub võrrandite

$$x_2+x_3+\dots+x_m=k$$

mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite üldarvuga, kus $0 \leq k \leq mn-2n-1$, s. t.

$$\sum_{k=0}^{mn-2n-1} C_{k+m-2}^{m-2} = C_{mn-2n+m-2}^{m-1}.$$

Niisama palju on lahendeid, kus $x_2 > 2n$ jne. Järelikult tuleb $C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1}$ lahendit kõrvale jätta. Seejuures jäetakse mõned lahendid kaks korda välja (nimelt sellised, kus näiteks $x_1 > 2n$, $x_2 > 2n$). Tõestatava tulemuseni jõuame juurde- ja mahaarvamise valemit rakendades.

212. 231 viisil. Lahenduskäiku vt. järgmise ülesande juurest.

213. Oletame, et A saab x_1 esimest, x_2 teist ja x_3 kolmandat liiki eset. B jaoks olgu vastavad arvud y_1, y_2, y_3 . Siis saame võrrandid $x_1 + x_2 + x_3 = n$ ja $y_1 + y_2 + y_3 = n$, kusjuures peavad kehtima tingimused $x_k + y_k \leq n, 1 \leq k \leq m$. Kui need tingimused ära jätta, siis saame C_{n+2}^2 esimese võrrandi ja C_{n+2}^2 teise võrrandi lahendit, kokku $(C_{n+2}^2)^2$ lahendit. Seejuures võrdub nende lahendite arv, kus $x_1 + y_1 > n$, võrrandisüsteemide

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= r, \\ y_2 + y_3 &= s \end{aligned} \tag{1}$$

($0 \leq r < n, 0 \leq s < n, r + s < n$) mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite üldarvuga. Süsteemil (1) on $(r+1)(s+1)$ mittenegatiivset täisarvulist lahendit. Seetõttu on meie võrrandisüsteemidel üldse

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-s-1} (r+1)(s+1) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)(n-s)(n-s+1) = \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} C_{s+1}^1 C_{n-s+1}^2 = C_{n+3}^4 \end{aligned}$$

lahendit (vt. lk. 52). Niisama paljud lahendid ei rahulda tingimusi $x_2 + y_2 \leq n$ ja $x_3 + y_3 \leq n$. Jättes need lahendid kõrvale, saame

$$(C_{n+2}^2)^2 - 3C_{n+3}^4$$

lahendit. $n=5$ puhul on 231 lahendit.

214. 9 inimest saab ümber paigutada $9!$ viisil. Leiame, mitmes permutatsioonis istub kolm inglasi kõrvuti. Kõik sellised permutatsioonid saadakse ühest permutatsioonist, kui paigutada selles omavahel ümber 3 inglasi ($3!$ võimalust) või 6 prantslast ja türklasi ning rühma, mis koosneb 3 inglasest ($7!$ võimalust). Kokku saame $3!7!$ permutatsiooni. Niisama paljudes permutatsioonides istub kõrvuti 3 prantslast või 3 türklasi. Edasi istuvad $(3!)^2 5!$ permutatsioonis kõrvuti nii inglased kui ka prantslased ning $(3!)^4$ permutatsioonis on kõrvuti nii inglased, prantslased kui ka türklased. Juurde- ja mahaarvamise valemi järgi saame vastuse

$$9! - 3 \cdot 3! 7! + 3(3!)^2 5! - (3!)^4 = 283\,824.$$

215. Permutatsioonide üldarv on $9!$. Leiame nende permutatsioonide arvu, kus kaks antud inglasi kõrvuti istuvad. Kui ühendame nad üheks paariks, siis saame 8 objekti permutatsioonid. Kuid need inglased võivad kohad vahetada. Seepärast saame kokku $2!8!$ permutatsiooni. Seejuures saab kaks inglasi valida C_3^2 viisil ja kokku on meil kolm erinevat rahvust. Sellepärast on juurde- ja mahaarvamise valemi vastav liige $3C_3^2 2!8!$. Nüüd leiame, mitmes permutatsioonis istuvad kõrvuti kaks antud inglasi ja peale selle kaks antud prantslast. Kui ühendada kõrvuti istuvad kaasmaalased kummalgi juhul paariks, saame 7 ümberpaigutatavat objekti. Peale selle võivad kaasmaalased paarides oma kohad vahetada. Kokku saame $(2!)^{27!}$ permutatsiooni. Peale selle saab kaks kaasmaalaste paari valida $(C_3^2)^3$ viisil. Seetõttu on vastav liige juurde- ja mahaarvamise valemis $(C_3^2)^3 (2!)^{27!}$. Edasi vaatleme järgmisi juhte: kõrvuti istuvad

- a) kolm kaasmaalast,
- b) kaks inimest kõigist kolmest rahvusest,
- c) kolm inimest ühest ja kaks teisest rahvusest,
- d) kolm ühe ja kolm teise rahvuse liiget,
- e) kolm ühe, kaks teise ja kaks kolmanda rahvuse esindajat,
- f) kolm inimest ühest, kolm teisest ja kaks kolmandast rahvusest,
- g) kolm inimest igast rahvusest.

Juurde- ja mahaarvamise valemit kasutades saame vastuse

$$9! - 9 \cdot 2!8! + 27(2!)^{27!} + 3 \cdot 3!7! - (2!)^{36!} - 18 \cdot 3!2!6! + 3(3!)^{25!} + 27 \cdot 3!(2!)^{25!} - 9(3!)^{2!4!} + (3!)^4.$$

216. See ülesanne lahendatakse eelmisega analoogiliselt, kuid nende permutatsioonide arv, kus antud kaasmaalased kõrvuti istuvad, leitakse teisiti. Kahte inglasi saab kõrvuti paigutada $7!$ viisil. Kaks inglasi ja kaks prantslast istuvad kõrvuti $(2!)^{29 \cdot 6!}$ paigutamiseviisi korral. Me saame nimelt $9-1$ viisil valida inglase kohad, ühendame seejärel kaks prantslast paariks ning võtame selle paari ja ülejäänud 5 inimese kõikvõimalikud permutatsioonid. Permutatsioonide arvu saame, kui arvestame, et kõrvuti istuvad inglased või prantslased võivad oma kohad vahetada. Ülejäänud võimalusi vaadeldakse analoogiliselt. Kokku saame

$$\begin{aligned}
& 9! - 9 \cdot 2!9 \cdot 7! + 27(2!)^{29} \cdot 6! + 3 \cdot 3!9 \cdot 6! - (2!)^3 \cdot 9 \cdot 5! - \\
& - 18 \cdot 3!2!9 \cdot 5! + 3(3!)^{29} \cdot 4! + 27 \cdot 3!(2!)^{29} \cdot 4! - \\
& - 9(3!)^{22}9 \cdot 3! + (3!)^{39} \cdot 2!
\end{aligned}$$

paigutamiseviisi.

217. Näidaku arv $F(N)$, mitmel viisil saab kleepida marke N kopika eest. Jaotame kleepimisviisid klassidesse vastavalt viimase margi hinnale. Saame rekurrentse seose

$$f(N) = f(N-5) + f(N-10) + f(N-15) + f(N-20).$$

Seda seost ja võrdust $F(5) = 1$ kasutades saame $F(40) = 108$.

218. Tähistame $F(n_1, \dots, n_m; N)$ abil N kopika tasumisviiside arvu n_1 -, n_2 -, ..., n_m -kopikaste müntide abil. Siis kehtib rekurrentne seos

$$\begin{aligned}
F(n_1, \dots, n_m; N) &= F(n_1, \dots, n_{m-1}; N) + \\
&+ F(n_1, \dots, n_m; N - n_m)
\end{aligned}$$

vt. lk. 103). Seda ja teisi analoogilisi seoseid kasutades leiame, et $F(10, 15, 20, 50; 100) = 20$.

219. Rekurrentse seose abil saame, et ülesandel on 4 lahendit.

220. Rida võib sisaldada 3, 2 või 1 musta kuuli. Kui ta sisaldab 3 musta kuuli, siis võime neljanda kuuli valida kolmel viisil ja paigutame seejärel saadud kuulid omavahel ümber $P(3, 1) = 4$ viisil. Kokku on 12 võimalust.

Kui võtta kaks musta kuuli, saame analoogiliselt $C_3^2 \cdot P(2, 1, 1) = 36$ võimalust, kui aga üks, siis $4!$ võimalust. Kokku saab moodustada $12 + 36 + 24 = 72$ rida.

221. Selliste esituste arv võrdub n ühesuguse kuuli 3 mittetühjaks rühmaks jaotamise viiside arvuga ja on seega C_{n-1}^2 .

222. Leiame algul, mitu nulli on vaja selleks, et kirja panna arvud 1-st 999 999-ni. Null on viimasel kohal 99 999 arvul (10, 20, ..., 999 990), lõpust teisel kohal 99 990 arvul, lõpust kolmandal 99 900 arvul jne. Kokku saame $99\,999 + 99\,990 + 99\,900 + 99\,000 + 90\,000 = 488\,889$ nulli. Vajaminevate numbrite üldarv on aga $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9000 + 5 \cdot 90\,000 + 6 \cdot 900\,000 = 5\,888\,889$. Et kõiki numbreid peale nulli kasutatakse ühesugune arv kordi, siis esineb igaüks neist

$$\frac{5\,888\,889 - 488\,889}{9} = 600\,000 \text{ korda.}$$

223. Algul valime kohad numbri 3 jaoks (valida saab C_{10}^2 viisil). Seejärel paigutame ülejäänud 8 kohale numbrid 1 või 2, mida saab teha 2^8 viisil. Kokku saame $2^8 C_{10}^2 = 11\,520$ arvu.

Nende numbrite abil kirjutatud suvalise arvu ristsumma on arvude $8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14$ ja $8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22$ vahel. Seepärast, kui arv jagub üheksaga, peab tema ristsumma olema 18. Järelikult peab arvu ühtede ja kahtede summa olema 12. See summa tekib, kui võtta 4 ühte ja 4 kahte. Niisiis sisaldab meie arv 4 ühte, 4 kahte ja 2 kolme. Neist numbritest saab koostada

$$P(4, 4, 2) = \frac{10!}{4! 4! 2!} = 3150$$

erinevat arvu.

224. Oletame, et arvud a ja b moodustavad antud permutatsioonis inversiooni. Kui nende kohad vahetada, saame uue permutatsiooni, milles nad enam inversiooni ei moodusta. Meil on $n!$ permutatsiooni, millest igaühes saab arvud a ja b valida C_n^2 viisil. Pooltel juhtudel moodustavad need arvud inversiooni. Seega on inversioone $\frac{n!}{2} C_n^2$.

225. Arvu n saab kolme naturaalarvulise liidetava summana esitada $C_{n-1}^2 = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ viisil (liidetavate järjekorra poolest erinevad esitused loeme erinevateks). Nendest on paarisarvulise n puhul $\frac{n-2}{2}$ ja paaritu arvulise

n korral $\frac{n-1}{2}$ esituses kaks liidetavat võrdsed. Peale selle, kui n jagub kolmega, siis leidub lahutus, kus kõik kolm liidetavat on võrdsed. Juurde- ja mahaarvamise valemit kasutades leiame raskusteta, et erinevate liidetavatega esituste arv avaldub järgmiste valemite abil:

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n - 2) + 2 = \frac{n^2 - 6n + 12}{2},$$

kui $n = 6k$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n - 1) = \frac{n^2 - 6n + 5}{2},$$

kui $n = 6k + 1$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n - 2) = \frac{n^2 - 6n + 8}{2},$$

kui $n = 6k + 2$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n - 1) + 2 = \frac{n^2 - 6n + 9}{2},$$

kui $n = 6k + 3$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n - 2) = \frac{n^2 - 6n + 8}{2},$$

kui $n = 6k + 4$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n - 1) = \frac{n^2 - 6n + 5}{2},$$

kui $n = 6k + 5$,

Kui liidetavate järjekorda ei arvestata, saame 6 korda vähem esitusi. Pole raske kontrollida, et seejuures saadavad avaldised pole midagi muud kui arvu $\frac{n^2 - 6n + 12}{12}$ täisosad vastavate n väärtuste puhul.

226. Arvu $12n + 5$ võib C_{12n+4}^3 viisil esitada nelja liidetava summana (kus liidetavate järjekord on oluline). Nende esituste arv, kus $x = y$, võrdub võrrandi $2x + z + t = 12n + 5$ naturaalarvuliste lahendite arvuga. Et võrrandil $z + t = 12n - 2k + 5$ on $12n - 2k + 4$ naturaalarvulist lahendit, siis on selliseid lahendeid üldse

$$\sum_{k=1}^{6n+1} (12n - 2k + 4) = (6n + 1)(6n + 2) = 2C_{6n+2}^2.$$

Nende lahendite arv, kus $x = y = z$, võrdub võrrandi $3x + t = 12n + 5$ lahendite arvuga, s. t. $4n + 1$.

Leiame, mitmes lahendis on arvust $6n + 2$ suuremaid liidetavaid. Olgu $x = k \geq 6n + 3$. Siis $y + z + t = 12n + 5 - k$. Kuid arvu $12n + 5 - k$ saab kolme naturaalarvulise liidetava summana esitada $C_{12n+4-k}^2$ viisil. Seetõttu on parajasti

$$\sum_{k=6n+3}^{12n+2} C_{12n+4-k}^2 = C_{6n+2}^3$$

lahendit, kus $x \geq 6n + 3$. Et x asemel võib võtta mistahes liidetava, saame $C_{12n+4}^3 - 4C_{6n+2}^3$ lahendit, kus ükski liidetav ei ole suurem arvust $6n + 2$.

Edasi on võrrandil $2x + z + t = 12n + 5$ kokku $3n(3n + 1) =$

$=2C_{3n+1}^2$ lahendit, kus $z \geq 6n+3$. Seepärast on esialgsel võrrandil $2[C_{6n+2}^2 - 2C_{3n+1}^2]$ lahendit, kus $x=y$ ning ükski liidetav ei ületa arvu $6n+2$. Et x ja y asemel võib võtta suvalise teise tähepaari, siis leidub

$$2C_4^2 [C_{6n+2}^2 - 2C_{3n+1}^2]$$

lahendit, kus kaks liidetavat on võrdsed ning ükski liidetav ei ületa arvu $6n+2$.

Lõpuks on võrrandil $3x+t=12n+5$ kokku $2n$ lahendit, kus $t \geq 6n+3$. Seepärast on esialgsel võrrandil $4(2n+1)$ lahendit kolme võrdse liidetavaga, kus liidetavad ei ületa arvu $6n+2$.

Kui jätta esituste seast välja need, kus kaks liidetavat ühtivad, siis on kolme võrdse liidetavaga esitused välja jäänud kolmekordselt. Seepärast tuleb juurde- ja mahaarvamise valemis nende arvu korrutada kahega. Kokku saame

$$[C_{12n+4}^3 - 4C_{6n+2}^3] - 2C_4^2 [C_{6n+2}^2 - 2C_{3n+1}^2] + 8(2n+1) = 12n(12n^2+3n-1)$$

esitust, kus kõik liidetavad on erinevad,

$$2C_4^2 [6C_{6n+2}^2 - 2C_{3n+1}^2] - 12(2n+1) = 12n(9n+4)$$

kolme erineva liidetavaga esitust ja $4(2n+1)$ lahutust, kus on kaks erinevat liidetavat.

Kõik esitused jaotame klassidesse, nii et kaks ühe klassi lahutust erinevad ainult liidetavate järjekorralt. Siis lagunevad esimest tüüpi esitused 24-elementilisteks, teist tüüpi esitused 12-elementilisteks ja kolmandat tüüpi esitused 4-elementilisteks klassideks. Seetõttu on nõutud tüüpi esitusi

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2}(12n^2+3n-1) + n(9n+4) + 2n+1 = \\ & = \frac{n+1}{2}(12n^2+9n+2). \end{aligned}$$

227. Eelmise ülesande lahendamise käigus leidsime, et nende lahutuste arv, kus kõik liidetavad on erinevad, on $12n(12n^2+3n-1)$. Et liidetavate järjekorda ei arvestata, saame $\frac{n}{2}(12n^2+3n-1)$ lahutust.

228. Iga geomeetriline progressioon on määratud esimese liikmega a ja teguriga q . Kui progressioon on kasvav, peab kehtima võrratus $aq^2 \leq 100$, millest järeldub, et $a \leq \frac{100}{q^2}$. Olgu $q = \frac{m}{n}$ üldiselt taandatud murd, s.o. naturaalarvud m ja n on ühistegurita (lubame ka võimalust $n=1$, kus q on täisarv). Et progressioon $a, a\frac{m}{n}, a\frac{m^2}{n^2}$ koosneks täisarvudest, peab a jaguma arvuga n^2 (m ja n on ühistegurita), s.o. $a = kn^2$. Et $a \leq 100$, siis $n \leq 10$. Seos $a \leq \frac{100}{q^2}$ annab nüüd, et $kn^2 \leq \frac{100n^2}{m^2}$ ehk $k \leq \frac{100}{m^2}$. Siit $m^2 \leq \frac{100}{k}$ ja $m \leq 10$. Et vaatleme kasvavaid progressioone, siis $m > n$. Antud m väärtuse puhul saame nõutava q , kui valime n nii, et $n < m$ ning n ja m oleksid ühistegurita. Tähistame $\varphi(m)$ abil nende naturaalarvude arvu, mis on väiksemad kui m ja m suhtes ühistegurita. Siis saame antud m väärtuse korral $\varphi(m)$ erinevat q väärtust. Seosest $k \leq \frac{100}{m^2}$ järeldub, et antud m korral leidub $E\left(\frac{100}{m^2}\right)$ lubatavat k väärtust (ehk a väärtust). Seega leidub antud m puhul $E\left(\frac{100}{m^2}\right) \varphi(m)$ nõutud kasvavat progressiooni, mille teguri lugeja on m . Summa reegli järgi saame kokku

$$\sum_{m=2}^{10} E\left(\frac{100}{m^2}\right) \varphi(m) = 25 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 105$$

kasvavat progressiooni. Kahanevate progressioonide arv on ilmselt sama (igast kasvavast progressioonist saame ümberpööramisele kahaneva ja vastupidi). Peale selle on veel 100 konstantset progressiooni 1, 1, 1 jne. Kokku saame 310 progressiooni.

229. Tähistame mitmest kõrvuti seisvast prantslasest koosneva hulga P , kõrvuti seisvatest türklasest koosneva hulga aga T abil. Täht i märkigu inglase. Ülesande tingimusest järeldub, et mõeldavad on järgmist tüüpi paigutused: $P_i T_i P_i T_i P_i T_i P$ või $T_i P_i T_i P_i T_i P_i T$. Esimese

tüübi korral peame 7 prantslast jaotama 4 mittetühjaks rühmaks (seda saab teha C_6^3 viisil), 10 türklast 3 mittetühjaks rühmaks (C_9^2 jaotamisviisi), seejärel asetame rühmad järjekorras vastavatele kohtadele ja paigutame kaasmaalased omavahel kõikvõimalikel viisidel ümber. Saame $6!7!10!C_6^3C_9^2$ paigutamisi. Teine asetamistüüp annab analoogiliselt $6!7!10!C_6^2C_9^3$ paigutamisi. Kokku saame $6!7!10![C_6^3C_9^2 + C_6^2C_9^3] = 6!7!10!1980$

lahendit.

230. Täpselt samuti nagu eelmises ülesandes saame $5!7!10!1080$ lahendit.

231. Kaks otsitavat arvu erinevad teineteisest tegurite $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, d^\delta$ poolest: igaüks neist on jagajaks ühele arvule ja teisele mitte. Et 4 tegurit saab kahe arvu vahel jaotada 16 viisil, siis on ülesandel 16 lahendit. Kui arvude järjekorda ei arvestata, saame 8 lahendit.

232. Otsitavatel arvudel on kuju GA ja GB , kus A ja B on arvu $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ jagajad. Sellel arvul on jagajad $N = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)$ (vt. ülesannet 67). Seepärast saab A ja B valida C_{N+1}^2 viisil, kui paare (GA, GB) ja (GB, GA) mitte eristada, ja N^2 viisil, kui neid eristada.

233. Leidub C_{20}^6 kombinatsiooni, kus kõik tähed on erinevad, $C_{20}^1 C_{19}^4$ kombinatsiooni, kus on kaks ühesugust tähte jne. Kokku saame

$$C_{20}^6 + C_{20}^1 C_{19}^4 + C_{20}^2 C_{18}^2 + C_{20}^3 = 146\,400$$

kombinatsiooni.

234. Otsitavad permutatsioonid algavad mitmest α -tähest, millele järgneb β -täht, pärast seda võivad tähed olla mistahes järjekorras. Kui alguses on k α -tähte ja üks β -täht, siis saab ülejäänud tähti ümber paigutada $P(p-k, q-1, r)$ viisil. Võttes summa, kus k muutub ühest arvuni p , saame

$$\sum_{k=1}^p \frac{(p+q+r-k-1)!}{(p-k)!(q-1)!r!} = C_{q+r-1}^r \sum_{k=1}^p C_{p-k+q+r-1}^{p-k}$$

otsitavat permutatsiooni. Kuid

$$\sum_{k=1}^p C_{p-k+q+r-1}^{p-k} = C_{p+q+r-1}^{p-1}.$$

Seepärast saame $C_{q+r-1}^r C_{p+q+r-1}^{p-1}$ permutatsiooni.

235. Antud värvi lõikude pikkusi väljendavad arvud annavad arvu 10 liidetavateks lahutuse (liidetavateks on naturaalarvud 2 ja 10 vahel, järjekord on oluline). Selliste k liidetavast koosnevate lahutuste arv võrdub x^{10} kordajaga avaldises

$$\begin{aligned}(x^2+x^3+\dots+x^{10})^k &= \left(\frac{x^2-x^{11}}{1-x} \right)^k = \\&= x^{2k} (1-x^9)^k (1-x)^{-k} = \\&= x^{2k} \left(1 - kx^9 - \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^{18} - \dots \right) \cdot \\&\cdot \left(1 + kx + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \right. \\&\left. + \dots + \frac{k(k+1)\dots(k+9)}{10!} x^{10} + \dots \right).\end{aligned}$$

Siit leiame kohe, et $k=1$ puhul on otsitav kordaja 1, $k=2$ puhul 7, $k=3$ puhul 15, $k=4$ puhul 10 ja $k=5$ korral 1. Et iga värvi lõikude arv on antud värvimisviisi puhul ühesugune ja eri värvi lõikude pikkusi võib kombineerida suvaliselt, saame $1^3+7^3+15^3+10^3+1^3=4720$ värvimisviisi. Jätame nüüd ära tingimuse, et viimane värv oleks sinine. Kui viimane värv on punane, siis esineb ta ühe korra rohkem kui valge või sinine. Sel juhul on värvimisviise $1+7 \cdot 1^2+15 \cdot 7^2+10 \cdot 15^2+1 \cdot 10^2=3093$. Täpselt samuti leiame, et kui viimane värv on valge, siis on värvimisviise $1^2+7^2 \cdot 1+15^2 \cdot 7+10^2 \cdot 15+1^2 \cdot 10=3135$. Kokku on 10 948 võimalust.

Kui ükski lõik pole lühem kui 3 cm, siis tuleb leida arvu 10 liidetavateks lahutuste arv, kus liidetavad on 3 ja 10 vahel. $k=1$ puhul saame ühe esituse, $k=2$ korral viis, $k=3$ puhul kolm. Seetõttu on viimane värv sinine $1^3+5^3+3^3=153$ juhul, punane $1+5 \cdot 1^2+3 \cdot 5^2=81$ juhul ja valge $1^2+5^2 \cdot 1+3^2 \cdot 5=71$ juhul.

236. Tähistame sõpru lühidalt järjenumbritega 1, ..., 6. Et ma lõunatasin koos kõigi kuue sõbraga ühe korra (külalised 123456) ja iga viiega kaks korda, siis sõin ma iga viisikuga ühe korra nii, et kuues puudus (lõunad külalistega 12345, 12346, 12356, 12456, 13456, 23456). Kuid seni nimetatud lõunatel sõin ma iga neljaga 3 korda (näiteks 1234 olid esimesel, teisel ja kolmandal lõunal), iga kolmega 4 korda (näiteks 123 olid esimesel, teisel,

kolmandal ja neljandal lõunal) ja iga kahega 5 korda (näiteks 12 viibisid esimesel, teisel, kolmandal, neljandal ja viiandal lõunal). Iga sõbraga kohtusin ma nendel lõunatel 6 korda (näiteks esimese sõbraga esimesest kuuenda lõunani), üldse aga tingimuse järgi 7 korda. Seega sõin ma iga sõbraga korra kahekesi (kui oleks olnud kas või kaks külalist, oleksin iga kahega kohtunud enam kui 5 korda). Niisiis olid mul veel lõunad külalistega 1, 2, 3, 4, 5, 6. Iga sõber puudus kuuelt seninimetatud lõunalt (näiteks 1 puudus seitsmendalt ja üheksandalt kuni kolmeteistkümnendalt lõunalt). Et iga sõber on lõunalauast puudunud 8 korral, siis sõin ma 2 korda üksi.

237. 12 õpilast saavad kummagi eksamineerija juures järjekorra moodustada $12!$ viisil, kahe eksamineerija juures aga $(12!)^2$ viisil. Seejuures peab üks õpilane üheaegselt kahele eksamineerijale vastama $C_{12}^1 \cdot 11!$ juhul, kahte õpilast tabab sama saatus $C_{12}^2 \cdot 10!$ juhul jne. Juurde- ja mahaarvamise valemit kasutades saame, et mõistlikke tööjaotusi on

$$(12!)^2 \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{12!} \right] = \\ = 12! \cdot 176\,214\,841.$$

238. Analoogiliselt saame vastuseks

$$(6!)^2 \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{6!} \right] = 190\,800$$

ja

$$(A_9^6)^2 - C_6^1 A_9^1 (A_8^5)^2 + C_6^2 A_9^2 (A_7^4)^2 - C_6^3 A_9^3 (A_6^3)^2 + \\ + C_6^4 A_9^4 (A_5^2)^2 - C_6^5 A_9^5 (A_4^1)^2 + C_6^6 A_9^6.$$

239. Ülesande tingimusest järeldub, et avaldise $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ ühesugused tähed esinevad permutatsioonides paaridena. Seetõttu saame permutatsioonid 3-st elemendist $a=\alpha^2$, $b=\beta^2$ ja $c=\gamma^2$, neid on aga 6. Avaldise $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ ühesugused tähed peavad vastavates permutatsioonides tegelikult esinema kolmikutena, seetõttu on siin 6 permutatsiooni. Avaldise $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ tähed esinevad vastavates permutatsioonides samuti paaridena. Tähistame ajutiselt $\alpha^2=a_1$, $\alpha^2=a_2$, $\beta^2=b_1$, $\beta^2=b_2$, $\gamma^2=c_1$, $\gamma^2=c_2$.¹ Siis saame 6 elemendi a_1 , a_2 ,

¹ Siin me ajutiselt ei arvesta, et tegelikult $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$.

b_1, b_2, c_1, c_2 permutatsioonid, mille arv on 720. Kuid need permutatsioonid jaotuvad rühmadeks, kus ühe rühma permutatsioonid saadakse üksteisest tähtede a_1 ja a_2, b_1 ja b_2 või c_1 ja c_2 ümberpaigutamisel. Igasse rühma kuulub 8 permutatsiooni ja kõik nad vastavad avaldise $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ tähtede ühele ja samale permutatsioonile. Seega on nõutavaid permutatsioone $\frac{720}{8}=90$.

Vaatleme lõpuks avaldise $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ tähtede permutatsioone. Kui tähistada ajutiselt $\alpha^2=a_1, \alpha^3=a_2, \beta^2=b_1, \beta^3=b_2, \gamma^2=c_1, \gamma^3=c_2$, siis kujutab avaldise $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ tähtede iga lubatav permutatsioon endast tähtede $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ permutatsiooni. Kuid mõned viimaste tähtede permutatsioonid annavad ühesuguse permutatsiooni α, β, γ suhtes. Näiteks annavad $a_1a_2b_1c_2b_2c_1$ ja $a_2a_1b_1c_2b_2c_1$ mõlemad $\alpha^5\beta^2\gamma^3\beta^3\gamma^2$. See leiab aset siis, kui mõned tähepaaridest $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ või (c_1, c_2) seisavad kõrvuti. Tähed a_1 ja a_2 asetsevad kõrvuti $2 \cdot 5!$ permutatsioonis, samuti ka paarid (b_1, b_2) ja (c_1, c_2) . Mõlema paari (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) tähed seisavad kõrvuti $(2!)^2 4!$ permutatsioonis (nagu ka paaride $(a_1, a_2), (c_1, c_2)$ ja $(b_1, b_2), (c_1, c_2)$ korral). Lõpuks asetsevad kõik kolm paari kõrvuti $(2!)^3 3! = 48$ permutatsioonis. Juurde- ja mahaarvamise valemi põhjal saame, et ükski paar ei ole kõrvuti

$$6! - 6 \cdot 5! + 3(2!)^2 4! - (2!)^3 3! = 240$$

permutatsioonis, parajasti üks paar on kõrvuti

$$3[2 \cdot 5! - 2(2!)^2 4! + (2!)^3 3!] = 288$$

permutatsioonis ja täpselt kaks paari

$$3[(2!)^2 4! - (2!)^3 3!] = 144$$

permutatsioonis. Siit järeldub, et tähtede α, β, γ nõutavaid permutatsioone on

$$240 + \frac{288}{2!} + \frac{144}{(2!)^2} + \frac{48}{(2!)^3} = 426$$

(kui a_1 ja a_2 on kõrvuti, siis ei muuda nende ümberpaigutamine tähtede α, β, γ järjekorda).

240. Jaotame algul iga riigi maletajad järjestatud paarideks. Antud riigi puhul saab seda teha $\frac{4!}{2} = 12$ viisil

(paaride eneste järjekord pole tähtis.). Kokku saame 12^n jaotamisviisi. Paare saab omavahel ümber paigutada $(2n)!$ viisil, seepärast on lubatavaid permutatsioone $(12)^n (2n)!$

241. Esimese horisontaali saab värvida $8!$ viisil. Iga järgmine horisontaal tuleb värvida nii, et välja värv erineks tema all oleva välja omast. Seda saab teha

$$8! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \right] = 14\,833$$

viisil. Korrutise reegli järgi saame, et värvimisviise on üldse $8!(14\,833)^7$.

242. n erinevast esemest saab valiku teha 2^n viisil (sellesse võib kuuluda $0, 1, \dots, n$ eset). Kui see valik on juba tehtud, lisame puuduvad esemed n ühesuguse seast. Seepärast on meil 2^n valimisviisi. Kõigi $2n$ eseme permutatsioonide arv on $\frac{(2n)!}{n!}$.

243. Nii inglased kui ka prantslased seisavad igas lubatavas permutatsioonis vähemalt kaheliikmeliste rühmadena. Seejuures erineb prantslaste rühmade arv inglaste omast ülimalt 1 võrra. Arvutame, mitmel viisil saab n inglasi jaotada p järjestatud rühmaks, mis on kõik vähemalt kaheliikmelised. Selleks seame nad kõigepealt mingisse järjekorda ($n!$ võimalust). Seejärel jaotame 4 inglasi p rühma vahel nii, et igasse rühma satub vähemalt 2 inimest. Vastavalt lk. 204 toodud tulemusele saab seda teha C_{n-p-1}^{p-1} viisil. Kokku saame $n!C_{n-p-1}^{p-1}$ jaotamisviisi. Täpselt samuti saab m prantslast jaotada s rühmaks $m!C_{m-s-1}^{s-1}$ viisil. Neid jaotamisviise saab üksteisega kombineerida järgmiselt:

- p inglasi ja $p-1$ prantslaste rühma,
- p inglasi ja p prantslaste rühma, kusjuures inglased on eespool;
- samasugused rühmad, aga prantslased on eespool;
- p inglasi ja $p+1$ prantslaste rühma.

Seega avaldub paigutamiskiiside üldarv valemiga

$$m!n! \left[2(C_{m-2}^0 C_{n-2}^0 + C_{m-3}^1 C_{n-3}^1 + C_{m-4}^2 C_{n-4}^2 + \dots) + \right. \\ \left. + (C_{m-2}^0 C_{n-3}^1 + C_{m-3}^1 C_{n-4}^2 + \dots) + \right. \\ \left. + (C_{m-3}^1 C_{n-2}^0 + C_{m-4}^2 C_{n-3}^1 + \dots) \right].$$

Avades lk. 224 toodud valemis sulud, saame sama tulemuse.

244. Leiame algul, mitu arvu ei sisalda numbrit null. Kolm arvu sisalduvat numbrit saab valida $C_9^3 = 84$ viisil.

Kolmest numbrist saab koostada 3^6 kuuekohalist arvu, kahest numbrist 2^6 , ühest numbrist 1^6 arvu. Juurde- ja mahaarvamise valemi järgi leidub

$$3^6 - C_3^1 2^6 + C_3^2 1^6 = 540$$

kuuekohalist arvu, mis sisaldavad kõiki kolme meie poolt valitud numbrit. Seepärast on parajasti kolme nullist erinevat numbrit sisaldavaid kuuekohalisi arve $84 \cdot 540 = 45\,360$.

Kui arv sisaldab nulli, tuleb meil valida veel kaks temas sisalduvat numbrit. Seda saab teha $C_9^2 = 36$ viisil. Valime näiteks 0, 1 ja 2. Kui esimene number on 1, siis võib viis ülejäänud numbrit võtta 0, 1, 2 seast suvaliselt tingimusel, et nende seas esineksid 0 ja 2. Juurde- ja mahaarvamise valemi põhjal leiame, et need viis numbrit saab valida

$$3^5 - C_2^1 2^5 + 1^5 = 180$$

viisil. Kuid siis saab numbritest 0, 1, 2 koostada $2 \cdot 180 = 360$ kuuekohalist arvu, mis kõiki neid numbreid sisaldavad, ja kokku on kolmest numbrist koosnevaid nulli sisaldavaid kuuekohalisi arve $36 \cdot 360 = 12\,960$. Üldse saame $45\,360 + 12\,960 = 58\,320$ arvu.

245. Vastuse

$$\begin{aligned} & C_9^k [k^m - C_k^1 (k-1)^m + C_k^2 (k-2)^m - \dots \\ & \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^m] + \\ & + (k-1) C_9^{k-1} [k^{m-1} - C_{k-1}^1 (k-1)^{m-1} + \\ & + C_{k-1}^2 (k-2)^{m-1} - \dots + (-1)^{k-2} C_{k-1}^{k-2} 1^{m-1}] \end{aligned}$$

saame täpselt samuti nagu ülesandes 244.

246. Tähistame vastavat liiki variatsioonide arvu $\Gamma_n^{(k)}$ abil. Need variatsioonid jagunevad kahte klassi. Esimesse kuuluvad ühega algavad variatsioonid, teise kõik ülejäänud. Kui variatsioon algab ühega, siis lahutame tema kõigist arvudest ühe ja jätame alguses oleva nulli ära (näiteks 14589 teiseneb algul kujule 03478 ja pärast variatsiooniks 3478). Tekib sama tüüpi $(k-1)$ -variatsioon arvudest 1, 2, ..., $n-1$. Seepärast on esimese klassi variatsioone $\Gamma_{n-1}^{(k-1)}$. Iga teise klassi variatsioon algab ühest suurema arvuga. Lahutame sellise permutatsiooni kõigist arvudest kahe. Saame sama tüüpi k -variatsiooni arvudest 1, 2, ..., $n-2$. Seepärast on teise klassi variat-

sioone $\Gamma_{n-2}^{(k)}$. Järelikult kehtib rekurrentne valem

$$\Gamma_n^{(k)} = \Gamma_{n-1}^{(k-1)} + \Gamma_{n-2}^{(k)}. \quad (1)$$

Võtame $F_n^{(k)} = C_N^k$, kus $N = E\left(\frac{n+k}{2}\right)$. Saame

$$F_{n-1}^{(k-1)} + F_{n-2}^{(k)} = C_{N-1}^{k-1} + C_{N-1}^k = C_N^k = F_n^{(k)}.$$

Seega rahuldavad arvud $F_n^{(k)}$ sedasama rekurrentset seost mis arvud $\Gamma_n^{(k)}$.

Näitame nüüd, et $F_n^{(n)} = \Gamma_n^{(n)}$ ja $F_{n+1}^{(n)} = \Gamma_{n+1}^{(n)}$. Selleks paneme tähele, et arvud $1, 2, \dots, n$ saab paigutada kasvamise järjekorras ühelainsal viisil, ja seetõttu $\Gamma_n^{(n)} = 1 = C_n^n = F_n^{(n)}$. Arvude $1, 2, \dots, n+1$ seast saab ainult ühel viisil valida n arvu nii, et nad rahuldaksid püstitatud tingimusi (esimesed n arvu). Seepärast $\Gamma_{n+1}^{(n)} = 1 = C_n^n = F_{n+1}^{(n)}$. Veel on kerge näha, et $\Gamma_{1+m}^{(1)} = E\left(\frac{m+2}{2}\right) = F_{1+m}^{(1)}$ (numbritest $1, 2, \dots, m+1$ saab moodustada nõutavad 1-variatsioonid $1, 3, 5$ jne.). Võrduse

$$\Gamma_{k+m}^{(k)} = F_{k+m}^{(k)} \quad (2)$$

kehtivuse suvaliste naturaalarvude k, m jaoks saab nüüd tõestada induktsiooniga arvu m järgi. Kirjutame selleks rekurrentse seose (1) kujul $\Gamma_{k+m}^{(k)} = \Gamma_{k+m-1}^{(k-1)} + \Gamma_{k+m-2}^{(k)}$. Induktsiooniga k järgi on siis kerge näidata, et (2) kehtib $m=2$ korral (juhud $m=0$ ja $m=1$ on juba vaadeldud). Edasi veendume (jälle induktsiooniga k järgi), et kui (2) kehtib $m=p$ korral, siis kehtib ka $m=p+2$ puhul. Sellega on valem (2) tõestatud suvaliste k ja m (k ja n) jaoks.

247. Antud elemente saab omavahel ümber paigutada

$$P(2, 2, \dots, 2) = \frac{(2n)!}{2^n}$$

viisil. Leiame, mitmes permutatsioonis seisavad antud k paari elemendid kõrvuti. Sellistes permutatsioonides võib nende paaride kõrvutiasetsevad elemendid ühendada. Siis saame permutatsiooni k erinevast elemendist ja $n-k$ paari elementidest. Selliseid permutatsioone on $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

Et k paari saab valida C_n^k viisil, siis leiame juurde- ja mahaarvamise valemi järgi, et ühesugused elemendid ei asetse kõrvuti

$$\frac{(2n)!}{2^n} - C_n^1 \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + C_n^2 \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \dots + (-1)^n C_n^n n!$$

permutatsioonis.

248. Vastuse

$$\frac{(qn)!}{(q!)^n} - C_n^1 \frac{(qn-q+1)!}{(q!)^{n-1}} + C_n^2 \frac{(qn-2q+2)!}{(q!)^{n-2}} - \dots$$

saame täpselt samuti nagu eelmises ülesandes.

249. Antud elemente saab ümber paigutada $\frac{(qn)!}{(q!)^n}$ viisil.

Arvutame, kui palju on selliseid permutatsioone, kus k antud q -elemendilise hulga elemendid asetsevad järjest (hulgad ise ei tarvitse järjest seista). Valime ühe nendest hulkadest. Selle elemendid saab ringjoonele järjestikku paigutada qn viisil. Kui see hulk on paigutatud, asendame igaühe ülejäänud $k-1$ hulgast uue elemendiga ning vaatleme $k-1$ uue elemendi ja $(n-k)q$ ülejäänud elemendi kõikvõimalikke permutatsioone. Neid on $\frac{(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$, kusjuures on kerge näha, et igale

sellisele permutatsioonile vastab oma elementide paigutus ringjoonel. Seepärast leidub $\frac{qn(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$

permutatsiooni, kus antud k hulga elemendid seisavad järjestikku. Et selliseid hulki endid võib valida C_n^k viisil, siis saame juurde- ja mahaarvamise valemi järgi

$$qn \left[\frac{(qn-1)!}{(q!)^n} - C_n^1 \frac{(qn-q)!}{(q!)^{n-1}} + C_n^2 \frac{(qn-2q+1)!}{(q!)^{n-2}} - \dots + (-1)^n C_n^n (n-1)! \right]$$

otsitavat permutatsiooni.

250. Nummerdame vaadeldavad raamatud numbrite 1, 2, ..., n abil. Olgu nõutaval viisil valitud p raamatu numbriteks $n_1, n_2, \dots, n_p$. Ülesande tingimuse kohaselt on

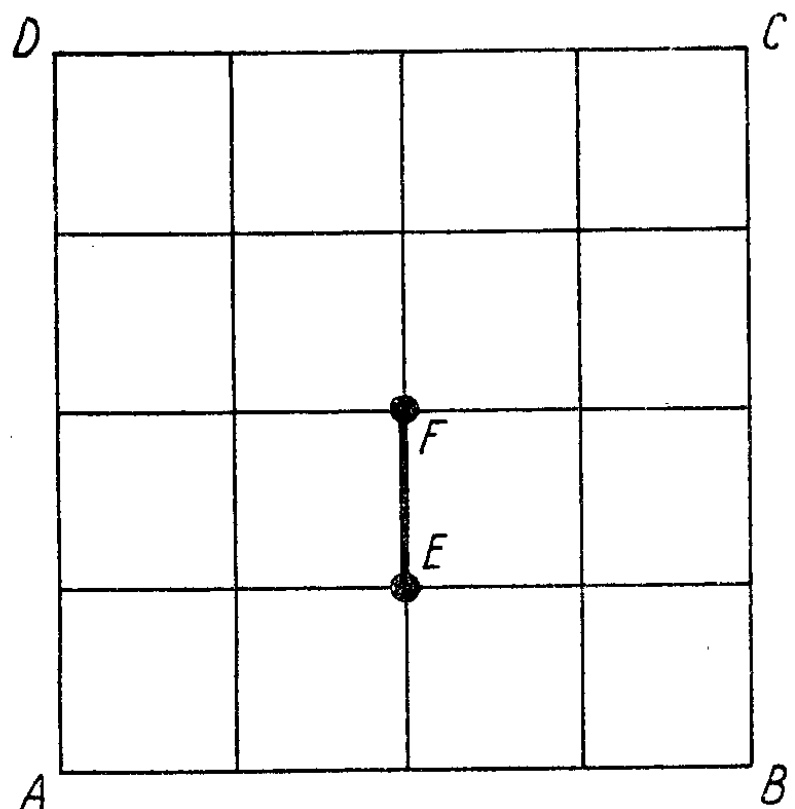
siis $n_1 < n_2 - s$, $n_2 < n_3 - 2s$ jne., millest $n_1 < n_2 - s < n_3 - 2s < \dots < n_p - (p-1)s < n - ps$. Tähistame $n_1 = m_1$, $\dots$, $n_p - (p-1)s = m_p$, $n - ps = m$. Siis saame arvud $m_1, m_2, \dots, m_p$, mis moodustavad kombinatsiooni esimesest $m = n - ps$ numbrist p -kaupa. On kerge näha, et erinevatele lubatud valikutele vastavad erinevad kombinatsioonid ja nii saame kõik p -kaupa kombinatsioonid arvudest $1, 2, \dots, n - ps$. Järelikult on lubatud valikute arv C_{n-ps}^p .

251. Kui progressiooni vahe on d ja olümpiaadist võtab osa a V klassi õpilast, siis saab preemiad jaotada $A_a^d A_{a+d}^d \dots A_{a+5d}^d$ viisil. Kui aga kõik preemiad anda X klassi õpilastele, siis saab neid jaotada A_{a+5d}^{6d} viisil.
Võrdus

$$A_a^d A_{a+d}^d \dots A_{a+5d}^d = A_{a+5d}^{6d}$$

järeldub ilmsest samasusest $A_n^m A_{n+k}^h = A_{n+k}^{m+h}$.

252. Ülesande lahendamiseks tuleb vaadelda mitmesuguse asendiga lõike ja ruutude tippe ning arvutada neid läbivate teede arv. Näiteks lõiku EF (joon. 38) läbib 18 teed ($C_3^1 = 3$ teed viivad punktist A punkti E ja $C_4^2 = 6$ teed punktist F punkti C). Punkti E läbib 30 teed: punktist A viib punkti E 3 teed ja punktist E punkti C $C_5^2 = 10$ teed. Analoogiliselt vaadeldakse teisi lõike ja punkte.



Joon. 38

253. $C_6^3 = 20$.

254. Siin on kordumistega kombinatsioonid 4 elemendist kolmekaup. Neid on

$$\bar{C}_4^3 = C_6^3 = 20.$$

255. $\bar{C}_{10}^3 = C_{12}^3 = 220$.

256. 4 kolmnurka.

257. Kui nende n punkti seas ei leiduks kolme ühel sirgel asetsevat, saaksime C_n^3 kolmnurka. Kuid p punkti on ühel sirgel, mistõttu C_p^3 kolmnurka tuleb välja jätta. Jääb $C_n^3 - C_p^3$ kolmnurka.

258. Kaks tippu võib võtta ühel sirgel ja kolmanda teisel. Seepärast saame $C_p^2 C_q^1 + C_p^1 C_q^2 = \frac{pq}{2}(p+q-2)$ kolmnurka.

259. Juurde tuleb

$$\begin{aligned} C_r^2 (C_p^1 + C_q^1) + C_r^1 (C_p^2 + C_q^2) + C_r^1 C_p^1 C_q^1 = \\ = \frac{r}{2}(p+q)(p+q+r-2) \end{aligned}$$

kolmnurka.

260. Kolmnurki võib olla kahte liiki: ühtedel on kõik kolm tippu ruudu erinevatel külgedel, teistel on kaks tippu ühel ja üks mingil teisel küljel. Esimesel juhul tuleb valida kolm ruudu külge neljast ($C_4^3 = 4$ võimalust) ja seejärel igal võetud küljel üks punkt $n-1$ seast. Kokku saame $4(C_{n-1}^1)^3$ valimisviisi. Teisel juhul tuleb valida kahte tippu sisaldav külge (4 valimisviisi) ja kaks punkti $n-1$ seast (C_{n-1}^2 võimalust) ning seejärel valida üks ülejäänud kolmest küljest (3 võimalust) ja punkt sellel (C_{n-1}^1 võimalust). Kokku on teisel juhul $12C_{n-1}^1 C_{n-1}^2$ valimisviisi. Üldse saime

$$4(C_{n-1}^1)^3 + 12C_{n-1}^1 C_{n-1}^2 = 2(n-1)^2(5n-8)$$

valimisviisi.

261. C_n^2 lõikepunkti.

262. Üldasendis on n sirgel C_n^2 lõikepunkti. Kuid punkti A läbivad p sirget annavad ühe lõikepunkti C_p^2 punkti

asemel ja punkti B läbivad q sirget ühe punkti C_q^2 punkti asemel. Seetõttu jääb $C_n^2 - C_p^2 - C_q^2 + 2$ lõikepunkti.

263. Olgu tasandil tõmmatud $k-1$ sirget ja tõmbame veel ühe. Varem tõmmatud sirgete lõikepunktid temaga jaotavad sirge k osaks, millest igaühele vastab uus tasanditükk. Seepärast jaotavad n sirget tasandi $1+1+\dots+2+\dots+n = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$ osaks.

264. Olgu $k-1$ tasandit juba antud. Võtame veel ühe tasandi. See lõikub varem võetud tasanditega mööda $k-1$ sirget, mis jaotavad ta $\frac{1}{2}(k^2-k+2)$ osaks. Iga selline osa määrab uue ruumitüki. Seetõttu jaotavad n tasandit ruumi

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 2) = \frac{1}{6} (n+1)(n^2 - n + 6)$$

osaks.

265. Antud on 5 punkti ja $C_5^2 = 10$ sirget (nimetame neid vastavalt lähtepunktideks ja lähtesirgeteks). Fikseerime lähtepunktid B ja C ja vaatleme punktist B tõmmatud ristsirgete lõikepunkte punktist C tõmmatud ristsirgetega. Punkti C läbib 4 lähtesirget, seega tuleb punktist C tõmmata ristsirged 6-le ülejäänud lähtesirgele. On kerge näha, et nendest 6-st sirgest läbib 3 punkti B ja 3 ei läbi punkte B ega C . Kui tõmbame punktist C ristsirged esimesele 3-le sirgele, siis on kerge näha, et iga saadud ristsirge lõikab kõiki kuut punktist B tõmmatud ristsirget. Seega saame $3 \cdot 6 = 18$ lõikepunkti. Tõmbame nüüd punktist C ristsirged kolmele viimasele lähtesirgele. Iga selline ristsirge on paralleelne ühe punktist B tõmmatud ristsirgega (nad on risti ühe ja sama lähtesirgega). Seetõttu lõikab iga vaadeldav punktist C tõmmatud ristsirge ainult viit punktist B tõmmatud ristsirget ja me saame 15 lõikepunkti. Kokku lõikuvad kahest lähtepunktist tõmmatud ristsirged $18+15=33$ punktis. 5 lähtepunktist saab moodustada 10 paari. See annaks $33 \cdot 10$ lõikepunkti, kuid mõned neist punktidest ühtivad. Nimelt tekitavad suvalised 3 viiest lähtepunktist kolmnurga. Selle kolmnurga kõrgused (mis kuuluvad vaadeldavate ristsirgete hulka) lõikuvad ühes punktis ja see punkt on meil arvestatud

3 korda. Et siisuguseid kolmnurki on $C_5^3=10$, tuleb 20 punkti ära jätta ning jääb 310 võimalikku lõikepunkti.

266. Kolmnurga külgedeks võivad olla suvalised kolm täisarvu x, y, z , mis rahuldavad võrratusi $n+1 \leq x, y, z \leq 2n$. Seepärast on siisuguste külgedega kolmnurki üldse $\bar{C}_n^3 = C_{n+2}^3$. Võrdhaarsete kolmnurkade arvu leidmiseks paneme tähele, et antud aluse puhul saame n võrdhaarset kolmnurka. Seega on võrdhaarseid kolmnurki n^2 , võrdkülgseid aga n .

267. Tuleb leida, kui palju on selliseid naturaalarvude kolmikuid x, y, z , et $x \leq y \leq z \leq 2n$ ja $x+y > z$. Olgu antud $x=p$. Siis omandab y väärtusi arvust p arvuni $2n$. Kui y väärtused on p ja $2n-p+1$ vahel, siis vastab igale y väärtusele p arvu z väärtust, mis rahuldavad tingimusi $y \leq z < y+p, z \leq 2n$. Kui aga y väärtused on $2n-p+2$ ja $2n$ vahel, siis on vastavaid z väärtusi $2n-y+1$. Kokku saame antud $x=p$ puhul

$$2p(n-p+1) + \sum_{y=2n-p+2}^{2n} (2n-y+1) = \\ = 2pn - \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{2}p$$

sellist paari (y, z) , et arvud x, y, z rahuldavad püstitatud tingimusi. Siit järeldub, et neid kolmnurki, millel $1 \leq x \leq n$ ja $1 \leq y, z \leq 2n$, on

$$\sum_{p=1}^n \left(2pn - \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{2}p \right) = \frac{n}{2}(n+1)^2.$$

Ülesande 266 põhjal leidub C_{n+2}^3 kolmnurka, millel $x \geq n+1$. Seepärast saame kokku

$$\frac{n}{2}(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

kolmnurka. Võrdhaarseid kolmnurki alusega $x=2k$ on $2n-k$, alusega $2k+1$ samuti $2n-k$. Seetõttu on võrdhaarseid kolmnurki üldse

$$\sum_{k=1}^n (2n-k) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n-k) = 3n^2.$$

Jättes need välja, saame

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} - 3n^2 = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}$$

kolmnurka.

268. See ülesanne lahendatakse sarnaselt eelmisega.

Antud $x = p \leq n-1$ puhul on kolmnurki $2np - \frac{3}{2}p^2 + \frac{p}{2}$, üldse aga kolmnurki, millel $x \leq n-1$, on

$$\sum_{p=1}^{n-1} \left(2np - \frac{3}{2}p^2 + \frac{p}{2} \right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$$

Neid kolmnurki, millel $x \geq n$, on C_{n+2}^3 ja seepärast saame kokku

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

kolmnurka. Võrdhaarseid kolmnurki on

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2n-k-1) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n-k-1) = 3n^2 - 3n + 1,$$

erinevate külgedega kolmnurki aga

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - 3n^2 + 3n - 1 &= \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3). \end{aligned}$$

269. Et nõutava kujuga rühma kuulub n lõikepunkti, millest ükski kolmik pole ühel sirgel, siis paikneb igal antud sirgel parajasti kaks valitud rühma punkti. Sellise rühma etteandmiseks nummerdame mingil viisil antud sirged, valime esimesel sirgel lõikepunkti teisega, teisel lõikepunkti kolmandaga, ..., n -ndal lõikepunkti esimesega. Saame nõutava punktirühma, kusjuures kirjeldatud meetodil võib saada kõik sellised punktirühmad. Kui arvestame, et punktide tsükliline ümberpaigutamine ja ümberkäigusuuna vastupidiseks muutmine punktirühma ei muuda, saame selliste rühmade arvuks $\frac{P_n}{2n} = \frac{1}{2}(n-1)!$.

270. r antud järjekorras võetud tippu saame valida A_n^r viisil. Et tippude tsükliline ümberpaigutamine ja ümber-

käigusuuna vastupidiseks muutmine hulknurka ei muuda, saame $\frac{1}{2r} A_n^r$ hulknurka.

271. Valime kummalgi sirgel kaks punkti. Läbi nende punktide saab tõmmata neli sirget, mille lõikepunktid annavad kaks uut punkti (trapetsi külgede ja diagonaalide lõikepunktid). Et esimesel sirgel saab valida C_n^2 punktipaari ja teisel C_m^2 paari, siis on lõikepunkte $2C_n^2 C_m^2$.

272. n punkti määravad C_n^3 ringjoont. Neist C_{n-1}^2 läbivad antud punkti ja C_{n-2}^1 kahte antud punkti. Seetõttu on kahte antud punkti läbival sirgel ringjoontega ülimalt $2C_{n-2}^3 + (2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^1) + 2$ lõikepunkti. Et läbi n punkti on tõmmatud C_n^2 sirget, siis ei saa me üle

$$C_n^2 [2C_{n-2}^3 + 2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^1 + 2]$$

lõikepunkti.

273. Iga lõikesirge on määratud kahe tasandiga ja iga tasand kolme antud punktiga. Sirged jagunevad klassidesse vastavalt sellele, mitu esimest tasandit määravad punkti kuulub teist tasandit määravate punktide hulka.

Kõik need punktid on erinevad $\frac{1}{2} C_n^3 C_{n-3}^3$ juhul (valime kolm punkti n seast ja veel kolm punkti ülejäänud $n-3$ seast, kusjuures valimise järjekord pole tähtis). Kui kummalgi kolmikul on üks ühine punkt, saame $\frac{3}{2} C_n^3 C_{n-3}^2$ valimisviisi, kui aga kaks ühist punkti, siis $\frac{3}{2} C_n^3 C_{n-3}^1$ valimisviisi. Kokku saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_n^3 (C_{n-3}^3 + 3C_{n-3}^2 + 3C_{n-3}^1) = \\ = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2+2)}{72} \end{aligned}$$

sirget. Neist

$$\frac{1}{2} C_n^3 C_{n-3}^3 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72}$$

ei läbi ühtki antud punkti.

274. Tähistame nelinurga küljed a, b, c, d abil. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et a on vähim külg, c selle vastaskülge ja $b < d$. Siis $a < b < d$ ja $a < c$. Et meil on peale selle tegemist ümberjoonestatud nelinurkadega, siis $a + c = b + d$. Siit järeldub, et $a + c > 2b$. Seepärast peab c arvude a ja b antud väärtuste korral olema arvude $2b - a + 1$ ja n vahel ning peab kehtima võrratus $2b - a \leq n - 1$.

Seega oleme näidanud, et $b \leq \frac{a+n-1}{2}$ ja $2b - a + 1 \leq c \leq n$. Tähistame $E\left(\frac{a+n-1}{2}\right) = s$. Siis saame antud a väärtuse puhul

$$\sum_{b=a+1}^s (n + a - 2b) = (s - a)(n - s - 1)$$

nelinurka.

Olgu $n = 2m$ paarisarv. Siis saame paaritu $a = 2k - 1$ puhul, et $s = E\left(\frac{n+a-1}{2}\right) = m + k - 1$ ja nelinurki on $(m - k)^2$, paarisarvulise $a = 2k$ korral aga $s = E\left(\frac{n+a-1}{2}\right) = m + k - 1$ ja nelinurki on $(m - k - 1) \cdot (m - k)$. a järgi summeerides leiame, et nelinurkade üldarv on

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (m - k)^2 + \sum_{k=1}^m (m - k)(m - k - 1) &= \\ = \frac{m(m-1)(4m-5)}{6} &= \frac{n(n-2)(2n-5)}{24}. \end{aligned}$$

Paarituarvulise n juhtu vaadeldakse analoogiliselt.

Kui lubada, et nelinurkadel on võrdseid külgi, siis peavad a, b, c, d rahuldama tingimusi $a \leq b \leq d \leq n$, $a \leq c$ ja $a + c = b + d$, millest järeldub, et $b \leq \frac{a+n}{2}$ ja $2b - a \leq c \leq n$. Kui tähistada $E\left(\frac{a+n}{2}\right) = s$, siis on antud a väärtusega nelinurki $(n - s + 1)(s - a + 1)$.

Paarisarvulise n korral saame $\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$ nelinurka, paaritu n puhul $\frac{(n+1)(2n^2+7n+3)}{24}$ nelinurka.

275. Tõmmatud ringjoonte arv on C_n^3 , kusjuures antud punkti läbib C_{n-1}^2 ja kahte antud punkti C_{n-2}^1 ringjoont. Võtame ühe sellise ringjoone, mis on tõmmatud läbi punktide A, B, C . Saame $C_n^3 - 3C_{n-1}^2 + 3C_{n-2}^1 - 1$ ringjoont, mis ei läbi ühtki neist punktidest. Valitud ringjoon lõikub iga sellise ringjoonega kahes punktis. Edasi on $3(C_{n-1}^2 - 2C_{n-2}^1 + 1)$ ringjoont, mis läbivad ühte punktidest A, B, C ega sisalda kahte ülejäänut. Iga selline ringjoon annab ühe punktidest A, B, C erineva lõikepunkti. Ülejäänud ringjooned lõikuvad valitud ringjoonega kahes punktis punktide A, B, C seast. Seega annab vaadeldud ringjoon

$$2(C_n^3 - 3C_{n-1}^2 + 3C_{n-2}^1 - 1) + 3(C_{n-1}^2 - 2C_{n-2}^1 + 1) = \\ = \frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}$$

lõikepunkti, mis erinevad punktidest A, B, C . Kokku saame

$$\frac{1}{2} C_n^3 \frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6} = \frac{5(2n-1)}{3} C_n^5$$

lõikepunkti, mis erinevad antud punktidest. Neid punkte lisades leiame, et suurim lõikepunktide arv on

$$\frac{5(2n-1)}{3} C_n^5 + n.$$

276. Kui lisada k tasandile veel üks tasand, tekib $2k$ uut osa, kuid $2+2+4+6+\dots+2(n-1)=n^2-n+2$.

277. Üldse saab 6 tahku värvida 6 erineva värviga $6!=720$ viisil. Jaotame need värvimisviisid klassidesse, võttes kaks värvimisviisi ühte klassi, kui esimese saab liikumise abil teisendada teiseks. Kuupi saab liikumise abil iseendaks kujutada 24 viisil (6 viisil saab valida tahu, milleks teiseneb fikseeritud tahk, seejärel jääb 4 kuubi pööret, mis kujutavad antud tahu iseendaks). Seetõttu koosneb iga klass 24 värvimisviisist ja geomeetriliselt erinevaid värvimisviise on $\frac{720}{24}=30$.

278. Lahendatakse täpselt samuti nagu eelmine ülesanne. Värvimisviise on $\frac{4!}{12}=2$.

279. $\frac{8!}{24}=1680$.

280. Dodekaeedri puhul on $\frac{12!}{60}$ ja ikosaeedri puhul $\frac{20!}{60}$ värvimisviisi.

282. Tuleb leida, kui palju on selliseid naturaalarvude kolmikuid x, y, z , et $x \leq y \leq z$, $x+y+z=40$ ja $x+y > z$. Neist võrratustest järeldub, et z saab omandada väärtusi, mis rahuldavad võrratusi $14 \leq z \leq 19$. Kui $z=19$, siis $x+y=21$, kusjuures $x \leq y \leq 19$. Seepärast $11 \leq y \leq 19$ ja me saame 9 kolmnurka, millel $z=19$. Täpselt samuti teeme kindlaks, et vastavalt 8, 6, 5, 3, 2 kolmnurgal on $z=18, 17, 16, 15, 14$ ja saame kokku 33 kolmnurka. Just samuti näitame, et 44 kolmnurgal on perimeeter 43.

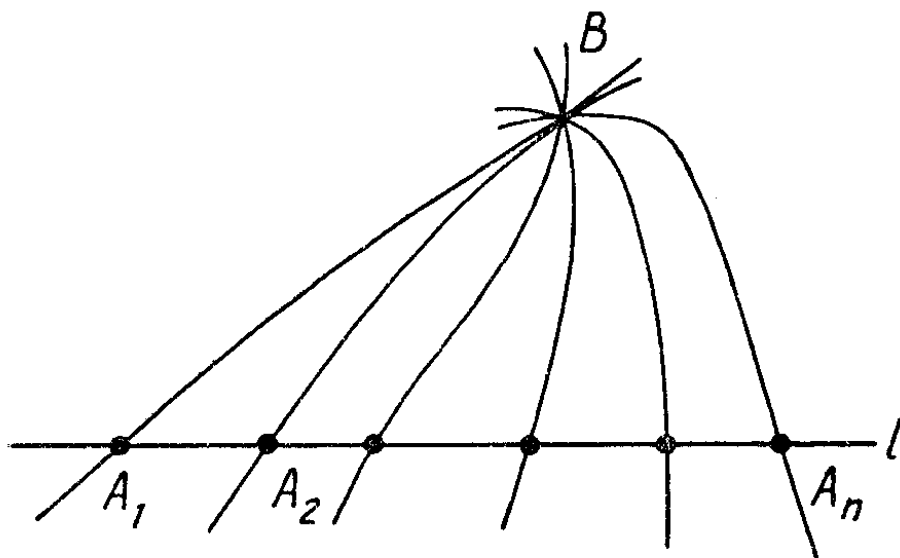
283. Võtame kolmnurga ümbermõõduga $4n$. Olgu tema küljed x, y, z . Liites külgede pikkustele arvu üks, saame arvud $x+1, y+1, z+1$, mis on külgedeks kolmnurgale perimeetriga $4n+3$. Kuid peale selle on olemas kolmnurgad külgedega $(1, 2n+1, 2n+1), (2, 2n, 2n+1), \dots, (n+1, n+1, 2n+1)$, mida pole kirjeldatud viisil võimalik saada.

284. Olgu $N=12n$. Tuleb leida, kui palju on selliseid naturaalarvude kolmikuid x, y, z , et $x \leq y \leq z$, $x+y+z=12n$ ja $x+y > z$. Neist võrratustest järeldub, et $4n \leq z \leq 6n-1$. Kui seejuures $z=2k$, siis $x+y=12n-2k$, sellel võrrandil on aga $3k-6n+1$ niisugust naturaalarvulist lahendit, et $x \leq y \leq z=2k$. Kui $z=2k+1$, saame $3k-6n+2$ lahendit. Seepärast on kolmnurki

$$\sum_{k=2n}^{3n-1} (3k-6n+1) + \sum_{k=2n}^{3n-1} (3k-6n+2) = 3n^2.$$

Ülejäänud juhte vaadeldakse täpselt samuti. Üleminekul arvult N arvule $N+3$ võib kasutada arutlusi, mis on analoogilised ülesande 283 lahendamisel kasutatutega.

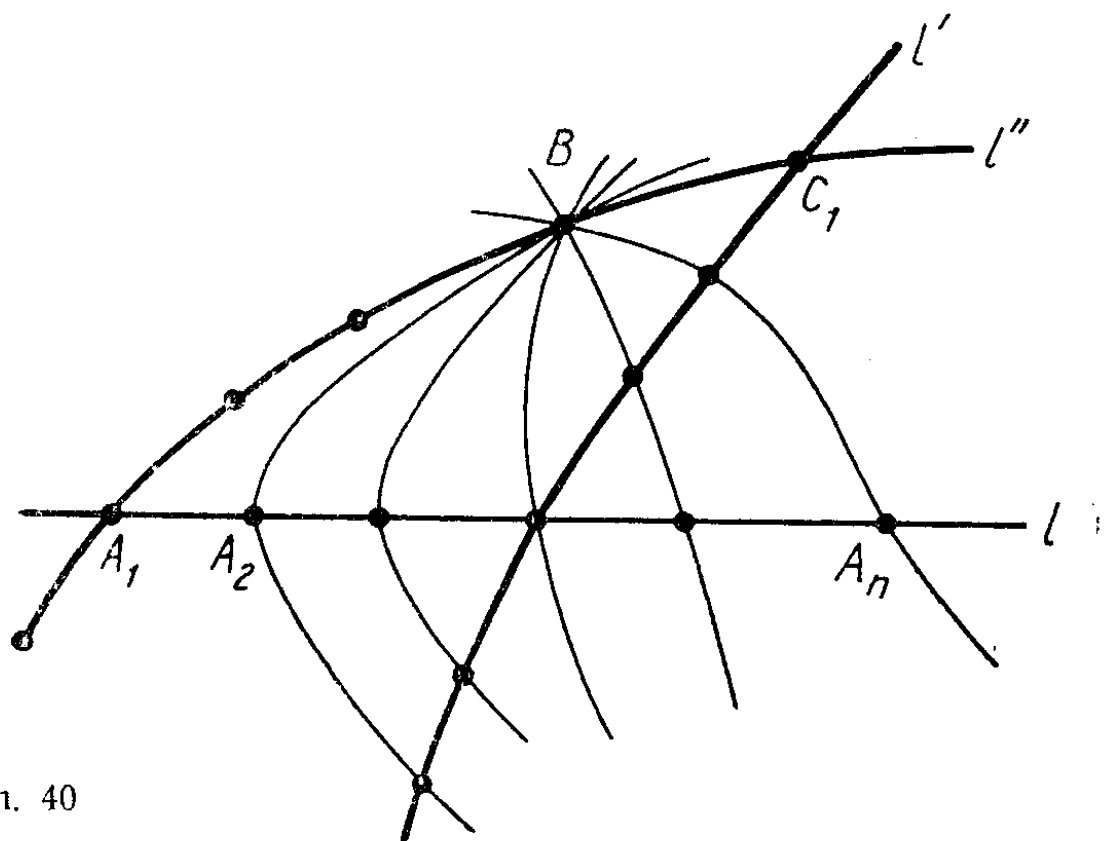
285. Tõestame, et iga peatust läbib parajasti n liini. Olgu l üks liinidest ja B väljaspool seda paiknev peatus (joon. 39). Tingimuse 1 põhjal võib peatusest B ühte liini kasutades jõuda ükskõik millisesse peatusse $A_1, \dots, A_n$ liinil l . Seejuures peab iga peatust B läbiv liin tingimuse 2 põhjal läbima ka mõnda peatustest $A_1, \dots, A_n$ (muidu poleks sellelt liinilt võimalik ümber istuda liinile l) ning ühtlasi ainult ühte neist (muidu saaks sellelt liinilt liinile l ümber istuda kahes peatuses). Siinjuures ei saa kaks erinevat liini, mis läbivad peatust B , läbida ühte ja sama peatust liinil l (muidu võiks esimeselt liinilt teisele ümber istuda kahes kohas, peatuses B ning kummagi liini ja liini l ühi-



Joon. 39

ses peatuses). Siit järeldub, et peatust B läbib niisama palju liine, kui on peatusi liinil l (s.o. n).

Näitame, et liini l iga peatust $A_1, \dots, A_n$ läbib samuti täpselt n liini. Piisab, kui näitame, et iga sellise peatuse jaoks leidub liin l'' , mis seda peatust ei läbi (liinil l'' on eelduse järgi n peatust, siis aga läbib antud peatust teatavasti n liini). Et liine on üldse vähemalt kaks, siis leidub peale l veel vähemalt üks liin l'' (joon. 40), millel on liiniga l üksainus ühine peatus, näiteks A_1 . Peatused $A_2, \dots, A_n$ ei paikne siis liinil l'' ja seetõttu läbib igaüht nendest n liini. Olgu B veel üks peatus liinil l'' . Läbi A_2 ja B kulgev liin ei läbi peatust A_1 ja seetõttu läbib ka seda



Joon. 40

peatust parajasti n liini. Seega läbib iga peatust täpselt n liini.

Võtame uuesti liini l . Selle liini iga peatust läbib $n - 1$ liinist l erinevat liini, kusjuures ükski paar nimetatud liine ei lange kokku (muidu oleks neil liiniga l kaks ühist peatust). Et iga liin peab omama liiniga l ühise peatuse, siis saame nii kõik liinid. Niisiis leidub $n(n - 1)$ liinist l erinevat liini ja kokku on $n(n - 1) + 1$ liini.

286. Olgu liinil l n peatust. Eelmise ülesande lahendusest nähtub, et iga peatust B väljaspool liini l läbib parajasti n liini. Näitame, et suvalisel liinist l erineval liinil l' on samuti n peatust. Kolmanda tingimuse järgi on liinil l' vähemalt kolm peatust, kusjuures teise tingimuse järgi on vaid üks nendest ühtlasi ka liinil l . $n - 1$ liini l peatust ei paikne liinil l' . Näitame, et leidub peatus, mis ei kuulu liinile l ega l' . Tõepoolest, olgu A_1 liini l mingi peatus, mis ei paikne liinil l' , ja C_1 liini l' mingi peatus, mis pole liinil l (selliseid peatusi on vähemalt 2). Esimese tingimuse järgi leidub peatusi A_1 ja C_1 ühendav liin l'' , kusjuures kolmanda tingimuse põhjal leidub sellel liinil veel vähemalt üks peatus B_1 , mis ei kuulu liinile l ega liinile l' . Nagu me ülesande 285 lahendusest teame, läbib peatust B_1 n liini. Igaüks nendest n liinist omab liiniga l' üheainsa ühise peatuse, kusjuures liini l' iga peatust läbib vähemalt üks liin, mis ühendab teda peatusega B_1 . Seetõttu võrdub liini l' peatuste arv peatust B_1 läbivate liinide arvuga, s.t. n .

Nagu me eelmise ülesande lahendusest nägime, avaldub liinide arv sel juhul valemiga $n(n - 1) + 1$. Et liine on ülesande tingimuse järgi 57, tuleb lahendada võrrand $n^2 - n + 1 = 57$. Võrrandi lahendamisel leiame, et $n = 8$.

287. See on võimalik. Vaatleme näiteks kümme sellist sirget tasandil, mille seas pole kahte paralleelset ega kolme ühes punktis lõikuvat, ning loeme sirged autobussiliinideks ja nende lõikepunktid peatusteks. Seejuures saab antud peatusest sõita mistahes teise peatusse ilma ümberistumiseta, kui nad on ühel sirgel, ja ühe ümberistumisega, kui nad on erinevatel sirgetel. Isegi kui sellest skeemist üks sirge välja jätta, on ikkagi võimalik sõita igast peatusest mistahes teise, istudes ümber mitte üle ühe korra. Ent kui kaks sirget välja jätta, siis ei läbi nende sirgete lõikepunkti enam ükski ülejäänud liin ning sellest pole võimalik sõita ühtegi peatusse.

288. Kera võib iga tasandit puudutada ühelt poolt kahest võimalikust ja antud kera puudutada seest- või väljast-poolt. Seepärast saab konstrueerida 16 erinevat kera.

289. Punkti A läbiva m sirge seast lõikub igaüks $2m$ sirgega. Seetõttu annavad punkti A läbivad sirged $2m^2$ lõikepunkti. Antud kolmest punktist erinevaid lõikepunkte on üldse $3m^2$.

290. Tähistame antud tasandil paiknevad punktid $A_1, \dots, A_m$, ülejäänud aga $B_1, \dots, B_{n-m}$ abil. Iga tasand määratakse kolme punkti valikuga. Nende hulka võib punktide $A_1, \dots, A_m$ seast kuuluda kolm, kaks, üks või mitte ühtki punkti. Vastavalt sellele saame, et tasandeid on

$$1 + C_m^2 C_{n-m}^1 + C_m^1 C_{n-m}^2 + C_{n-m}^3.$$

291. Igal punkti A läbival sirgel on $n+p$, punkti B läbival sirgel $m+p$ ja punkti C läbival sirgel $m+n$ lõikepunkti. Et läbi A läheb m sirget, läbi B n sirget ja läbi C p sirget, siis on lõikepunktide üldarv

$$\frac{1}{2}[m(n+p) + n(m+p) + p(m+n)] = mn + mp + np.$$

Neist saab kolm punkti valida $C_{mn+mp+np}^3$ viisil, kuid $mC_{n+p}^3 + nC_{m+p}^3 + pC_{m+n}^3$ juhul paiknevad need punktid ühel sirgel. Seepärast on kolmnurki

$$C_{mn+mp+np}^3 - mC_{n+p}^3 - nC_{m+p}^3 - pC_{m+n}^3.$$

292. Valime kolmnurga esimese tipu vabalt. Seda saab teha n viisil. Seejärel tuleb meil valida veel kaks tippu nende $n-3$ tipu seast, mis pole antud tipuga kõrvuti, ja nii, et ka viimased poleks kõrvuti. Seda saab teha C_{n-4}^2 viisil (vt. lk. 59). Et iga tippu nendest kolmest võib lugeda esimeseks, siis saame

$$\frac{n}{3} C_{n-4}^2 = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$$

valimisviisi.

293. Jaotame kõik kolmnurgad kahte klassi: sellisteks, millel kõik tipud on erinevatel sirgetel, ja niisugusteks, millel kaks tippu on ühel sirgel. Kolmnurki on esimeses klassis $p^3 C_n^3$ (me valime C_n^3 viisil kolm sirget, millel paiknevad tipud, ja valime seejärel igal sellisel sirgel p punkti seast ühe). Teises klassis on kolmnurki

$\frac{1}{2} p^2(p-1)n(n-1)$ (me valime kahte tippu sisaldava sirge ja siis kaks punkti sellel sirgel, seejärel võtame ühte tippu sisaldava sirge ja punkti sellel). Kolmnurkade üldarv on

$$p^3 C_n^3 + \frac{1}{2} p^2(p-1)n(n-1) = \\ = \frac{n(n-1)p^2(pn+p-3)}{6}.$$

294. Diagonaalide iga seesmine lõikepunkt on määratud n -nurga 4 tipu (lõikuvate diagonaalide otspunktide) etteandmisega. Seepärast on selliseid lõikepunkte C_n^4 . Leiame nüüd diagonaalide lõikepunktide üldarvu. n -nurga igast tipust väljub $n-3$ diagonaali ja kokku saame $\frac{n(n-3)}{2}$

diagonaali. Iga diagonaal AB lõikub kõigi diagonaalidega, mis ühendavad punktidest A ja B erinevaid tippe. Seepärast saame, et diagonaalil AB on

$$\frac{n(n-3)}{2} - 2(n-3) + 1 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 1$$

lõikepunkti ülejäänud diagonaalidega. Et diagonaalide üldarv on $\frac{n(n-3)}{2}$ ja iga lõikepunkti loetakse seejuures kaks korda, siis saame kokku

$$\frac{n(n-3)[(n-4)(n-3)+2]}{8}$$

diagonaalide lõikepunkti. Lahutades sellest arvust seesmiste lõikepunktide arvu, leiame, et väliseid lõikepunkte on

$$\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

295. Iga r -nurk on määratud r kindlas järjekorras võetud punkti valimisega n punkti seast, kusjuures punktide tsükiline ümberpaigutamine ja orientatsiooni muutmine r -nurka ei muuda. Seepärast on r -nurki $\frac{1}{2r} A_n^r$ ja sissejoonestatud hulknurki üldse

$$\sum_{r=3}^n \frac{1}{2r} A_n^r.$$

Sissejoonestatud kumeraid hulknurki on $\sum_{r=3}^n C_n^r$.

296. m paralleelset sirget jaotavad tasandi $m+1$ ribaks. Kui tõmmatud sirged jaotavad uue sirge p tükiks, siis lisandub uue sirge juurdevõtmisel p tasandi tükki. Et me tõmbame veel n sirget, siis saame

$$(m+1) + (m+2) + \dots + (m+n) = \frac{n(2m+n+1)}{2}$$

osa.

297. Jaotame ringjooned klassidesse vastavalt sellele, mitu punkti antud viiest punktist mingil ringjoonel paikneb. Üks ringjoon (nimelt antud ringjoon) sisaldab neid kõiki, $C_5^2 C_6^1$ ringjoont sisaldavad kahte punkti, $C_5^1 C_6^2$ ringjoont ühe ja C_6^3 mitte ühtki antud punkti. Kokku saame

$$1 + C_5^2 C_6^1 + C_5^1 C_6^2 + C_6^3 = 156$$

ringjoont.

298. Igale kolmele sirgele vastab 4 neid puudutavat ringjoont. Seepärast saame kokku $4C_{10}^3 = 480$ ringjoont.

299. Valime n -nurgal s järjestikust tippu $A_1, \dots, A_s$ ja jaotame kõik ülesande tingimust rahuldavad k -nurgad kahte klassi. Esimesse klassi arvame kõik k -nurgad, mille üks tipp kuulub s valitud tipu hulka, ja teise kõik ülejäänud k -nurgad. Esimese klassi k -nurgad jaotame s alamklassi vastavalt sellele, milline tipp A_m , $1 \leq m \leq s$ antud k -nurgale kuulub (neil alamklassidel pole ilmselt ühiseid elemente).

Leiame nende k -nurkade arvu, mille üheks tipuks on A_m . Selleks jätame välja tipu A_m ja s temale kellaosuti liikumise suunas järgnevat tippu (ükski neist pole k -nurga tipuks). Ülejäänud $n - s - 1$ tipu seast tuleb valida $k - 1$ tippu nii, et iga kahe valitud tipu vahel oleks vähemalt s tippu. Seda saab teha C_{n-ks-1}^{k-1} viisil (vt. ülesannet 250). Seepärast on tippu A_m sisaldavaid k -nurki C_{n-ks-1}^{k-1} ja esimese klassi k -nurki üldse sC_{n-ks-1}^{k-1} .

Leiame nüüd k -nurkade arvu teises klassis. Selleks lõikame hulknurga tippude A_s ja A_{s+1} vahelt lahti (vaatleme lahtist murdjoont $A_{s+1} \dots A_1 \dots A_s$). Sellel tuleb valida k tippu nii, et iga kahe valitud tipu vahel oleks vähemalt s tippu (kusjuures tippe $A_1, \dots, A_s$ ei tohi valida). Seda

saab teha C_{n-ks}^k viisil. Seega on püstitatud tingimust rahuldavaid k -nurki üldse

$$sC_{n-ks-1}^{k-1} + C_{n-ks}^k.$$

300. Iga rööpküliku määrab kaks paari paralleelseid sirgeid. Seepärast tekib $(C_{r+2}^2)^2$ rööpkülikut.

301. Hakkame tippudest $A_1, A_2, \dots, A_n$ üksteise järel diagonaale tõmbama. Iga uue diagonaali poolt tekitatud uute osade arv võrdub nende tükide arvuga, milleks tema jaotavad varem tõmmatud diagonaalid. Seega on uute osade arv ühe võrra suurem kui antud diagonaali ja varem tõmmatud diagonaalide lõikepunktide arv. Et me saame seejuures iga lõikepunkti üks kord, siis võrdub uute osade üldarv lõikepunktide ja diagonaalide arvude summaga. Et meil alguses oli üksainus osa, siis saame kokku

$$\begin{aligned} 1 + \frac{n(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} &= \\ = \frac{n(n-3)(n^2-3n+14)}{24} + 1 \end{aligned}$$

osa (vt. ülesannet 294).

302. Olgu n paarisarv, $n=2k$. Siis saab arvu n esitada kahe liidetava summana järgmiselt:

$$n=1+(2k-1)=2+(2k-2)=\dots=k+k.$$

Kuid kaardi arvuga 1 saab tõmmata ühelainsal viisil, kaardi arvuga 2 kahel viisil jne. Kaks kaarti arvuga $k>1$ saab aga tõmmata C_k^2 viisil. Seepärast on kokku

$$\begin{aligned} 1(2k-1) + 2(2k-2) + \dots + (k-1)(k+1) + \frac{k(k-1)}{2} &= \\ = \sum_{s=1}^{k-1} s(2k-s) + \frac{k(k-1)}{2} &= \frac{2k(k^2-1)}{2} = \frac{n(n^2-4)}{12} \end{aligned}$$

võimalust saada summa $n=2k$. Kui aga n on paaritu arv ($n=2k-1$), siis

$$n=1+(2k-2)=2+(2k-3)=\dots=(k-1)+k$$

ja summa n saamisviise on

$$\sum_{s=1}^{k-1} s(2k-s-1) = \frac{k(k-1)(2k-1)}{3} = \frac{n}{12}(n^2-1).$$

303. Jaotame valikud klassidesse neis sisalduvate ühesuguste esemete arvu järgi. Neid valikuid, mis sisaldavad k ühesugust eset, on C_{2n+1}^{n-k} . Seepärast on valikute üldarv

$$C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n-1} + \dots + C_{2n+1}^0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k = 2^{2n}.$$

304. Kui progressiooni esimene liige on a ja vahe d , siis kolmas liige on $a+2d$. Ülesande tingimuse kohaselt $a+2d \leq 2n$. Sellel võrratüel on antud d puhul $2n-2d$ lahendit. Kokku saame

$$(2n-2) + (2n-4) + \dots + 2 = n(n-1)$$

lahendit. Et iga saadud progressiooni võib vaadelda nii kasvava kui kahanevana, saame $2n(n-1)$ progressiooni. Kui lisada veel $2n$ konstantset progressiooni, saame $2n^2$ progressiooni. Arvude $1, 2, 3, \dots, 2n+1$ jadast saame $2n^2+2n+1$ progressiooni.

305. Tõestame väite induktsiooniga kõverate arvu s järgi. Kui $s=1$, siis on väide ilmne, sest lõikepunkte ei ole ja piirkondade arv on 1. Olgu s kõvera jaoks väide juba tõestatud. Võtame s kõverat, millel on n_r r -kordset lõikepunkti, kus $r=2, 3, \dots$ (lõikepunkti nimetame r -kordseks, kui selles lõikub r kõverat). Siis nad piiravad $1+n_2+\dots+\dots+rn_{r+1}+\dots$ kinnist piirkonda. Tõmbame $(s+1)$ -se kõvera, millel olgu k_r r -kordset lõikepunkti varem tõmmatud kõveratega ($r=2, 3, \dots$), kokku aga lõikugu nendega $k_2+k_3+\dots+k_{r+1}+\dots$ punktis. Need punktid jaotavad selle kõvera $k_2+k_3+\dots+k_{r+1}+\dots$ osaks. Tõmmatud kõvera iga osa vastab ühele uuele piirkonnale ja seepärast on piirkondi nüüd

$$(1+n_2+\dots+rn_{r+1}+\dots) + (k_2+k_3+\dots+k_{r+1}+\dots). \quad (1)$$

Ent kui uus kõver läbib varem tõmmatud kõverate r -kordset lõikepunkti, siis muutub see lõikepunkt $(r+1)$ -kordseks.

Tähistame n'_r kaudu r -kordsete lõikepunktide arvu uues kõverate süsteemis. On selge, et $n'_{r+1} = n_{r+1} - k_{r+1} + k_r$ (varem esinenud $(r+1)$ -kordsete lõikepunktide arvust tuleb lahutada k_{r+1} $(r+1)$ -kordset lõikepunkti, mille kordsus tõusis, ja liita k_r r -kordset lõikepunkti, mille kordsus tuleb nüüd $r+1$). Kuid siis

$$1+n'_2+2n'_3+\dots+rn'_{r+1}=1+(n_2-k_3+k_2)+\\+2(n_3-k_4+k_3)+\dots+r(n_{r+1}-k_{r+2}+k_{r+1})+\dots=\\=(1+n_2+2n_3+\dots+rn_{r+1}+\dots)+\\+(k_2+k_3+\dots+k_{r+1}+\dots).$$

ega oleme näidanud, et uuel kõverate süsteemil on piirondade arv $1+n'_2+2n'_3+\dots+rn'_{r+1}+\dots$ (vt. valemit (1)). Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal kehtib väide igasuguse kõverate arvu korral.

306. Esimese kimbu sirged jaotavad tasandi $2m$ osaks. Teise kimbu esimene sirge lõikub iga m sirgega esimesest kimbust ja annab $m+1$ uut osa. Kõik ülejäänud teise kimbu sirged lõikuvad varem tõmmatud sirgetega $m+1$ punktis. Seepärast saame kokku

$$2m+m+1+(n-1)(m+2)=nm+2n+2m-1$$

osa.

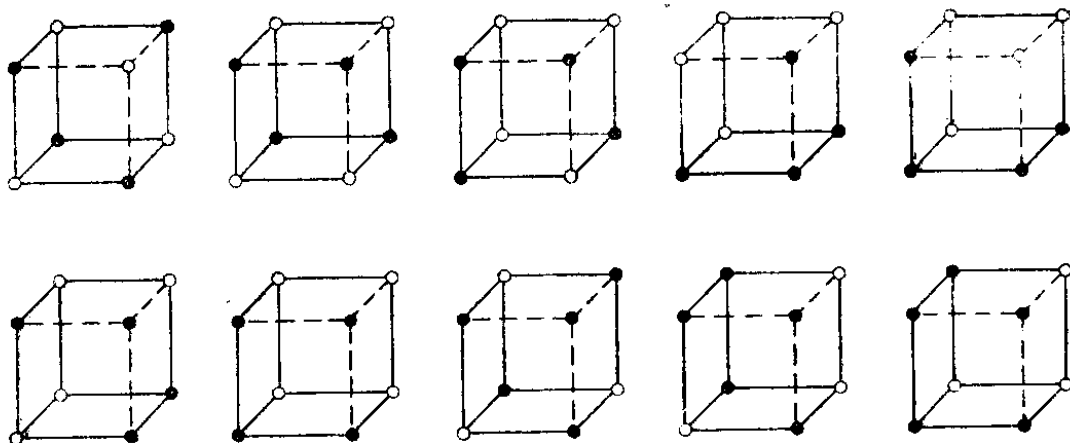
307. See pole võimalik, sest vastasel juhul oleks ühenduste arvuks murd $\frac{77 \cdot 15}{2}$.

308. Kordajate summa võrdub avaldise väärtusega $x=y=z=1$ puhul. Asendades need väärtused, saame summaks -1 .

309. Suurim arv kuulikesi, mille seas pole 15 ühesugust, on 74 (10 valget, 10 musta, 12 kollast, 14 punast, 14 rohelist ja 14 sinist). Kui aga võtta 75 kuulikest, siis leidub nende seas 15 ühevärvilist.

310. Klassifitseerime värvimisviisid valgete tahkude arvu järgi. Leidub üksainus värvimisviis, mille puhul pole ühtki valget tahku, ja üks värvimisviis, kus on üks valge tahk. Kahe valge tahu korral on kaks värvimisviisi: valgetel tahkudel on kas ühine serv või nad on vastastahud. Kolme valge tahu puhul on jälle kaks värvimisviisi: leidub kas kaks valget vastastahku või on kõigil valgetel tahkudel ühine tipp. Nelja, viie ja kuue valge tahu juhud taanduvad eespool vaadeldutele, kui asendada värvid vastupidistega. Kokku saame $1+1+2+2+2+1+1=10$ värvimisviisi.

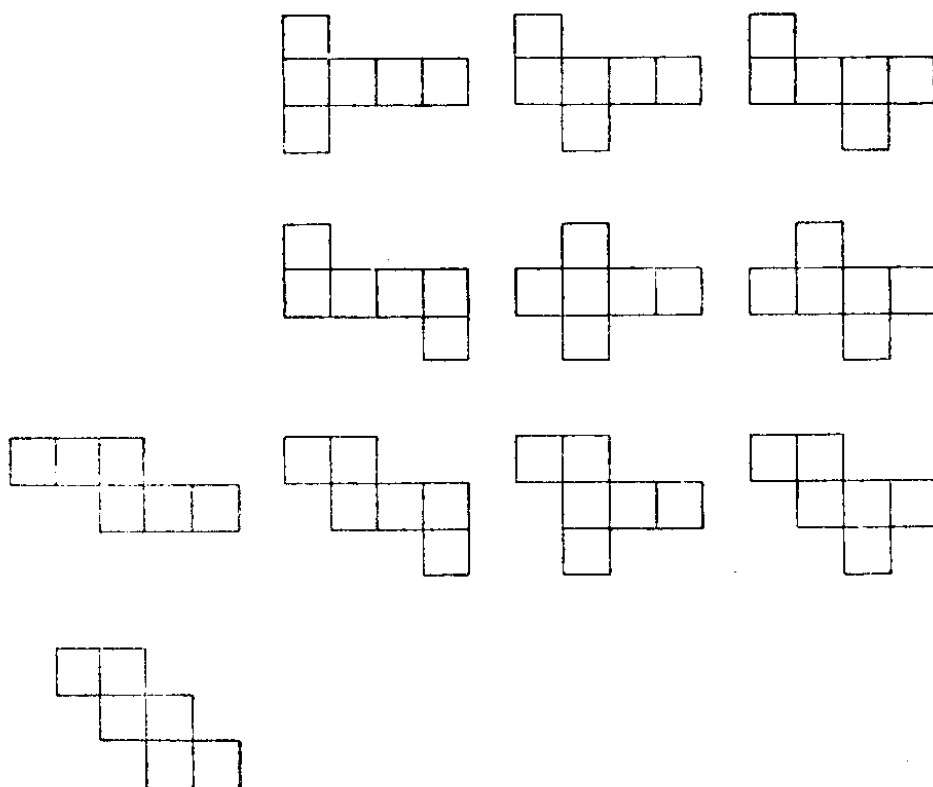
311. Värvime nüüd kuubi tippe. Siis leidub üks värvimisviis ilma valgete tippudeta, 1 viis ühe valge tipuga, 3 värvimisviisi kahe valge tipuga (valged tipud on kas ühel serval, ühel tahu diagonaalil või ühel kuubi diagonaalil), 3 viisi kolme valge tipuga (kas on kolm tippu ühel tahul või on kaks tippu ühel serval ja kolmas ühega neist ühel diagonaalil või on nad paarikaupa ühistel tahkude diago-



Joon. 41

naalidel (vt. joon. 41). Nelja valge tipu puhul on 7 värvimisviisi. (Nimelt võivad kõik neli tippu paikneda ühel tahul, või on tipud A , B ja C ühel tahul ning neljas ühel serval tipuga A , B või tipuga C . Peale selle võib neljas tipp olla veel B vastastipuks. Lõpuks võivad kaks valget tippu asetseda ühel serval ja kaks ülejäänut selle vastas-serval või paiknevad valged tipud nii, et ühelgi serval pole sama värvi tippe.) 5, 6, 7 ja 8 valge tipu juhud taanduvad eespool vaadeldutele, kui värvid asendada vastupidistega. Kokku saame $1+1+3+3+7+3+3+1+1=23$ värvimisviisi.

312. Kuubil on 11 pinnalaotust (joon. 42). Kuus esimest lahendit annavad sellised pinnalaotused, mille puhul neli



Joon. 42

tahku on kõrvuti. Järgmised neli pinnalaotust on sellised, kus leidub kolm, kuid pole nelja kõrvutiseisvat tahku. Ja lõpuks viimasel lahendil pole kuskil kolme tahku kõrvuti.

313. Leidub vaid 4 sellist värvimisviisi. Selle väite tõestust vt. raamatus Г. Штейнгауз, «Сто задач», Физматгиз, 1959, ülesanne 40.

314. Vt. ülesannet 44 samast raamatust.

315. Tõestame algul, et 2^n ajaühiku järel jääb alles vaid kaks osakest, mis paiknevad vastavalt punktides koordinaatidega 2^n ja -2^n . $n=1$ puhul on see väide ilmne. Oletame, et väide on tõestatud $n=k$ puhul ja vaatame, mis tekkinud osakestega edasi toimub. Järgmise $2^k - 1$ sammu kestel osakesed üksteist ei mõjusta ja induktsiooni eelduse järgi annab kumbki neist 2^k sammu järel vaid kaks osakest, mis asetsevad neist paremal ja vasemal kaugusel 2^k . Teiste sõnadega saame ühe osakese punktis 2^{k+1} , kaks punktis O ja ühe punktis -2^{k+1} . Punktis O hävitavad osakesed teineteist ja jääb kaks osakest. Väide on tõestatud.

Seega jääb pärast 128 sammu kaks osakest koordinaatidega 128 ja -128 . Kuid 129 sammu järel saame neli osakest punktides 129, 127, -127 ja -129 .

Kui $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_s}$, $k_1>k_2>\dots>k_s$, siis saame 2^s osakest, mille koordinaatidel on kuju $\pm 2^{k_1}\pm 2^{k_2}\pm\dots\pm 2^{k_s}$ (lubatud on suvalised märkide kombinatsioonid). Seda väidet on kerge tõestada induktsiooniga s järgi, $s=1$ puhul on ta juba tõestatud. Olgu lause juba tõestatud $s<m$ puhul ja $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_m}$. Siis saame pärast $(n-2^{k_m})$ -ndat sammu 2^{m-1} osakest, mis paiknevad punktides koordinaatidega $\pm 2^{k_1}\pm 2^{k_2}\pm\dots\pm 2^{k_{m-1}}$. Kaugus lähimate osakeste vahel on vähemalt $2^{k_{m-1}+1}$. Seepärast ei mõjusta erinevates punktides tekkinud osakesed üksteist $2^{k_{m-1}} - 1$ sammu kestel ja 2^{k_m} sammu järel annab iga osake kaks osakest, mis asuvad temast kaugusel $\pm 2^{k_m}$. Teiste sõnadega saame osakesed punktides $\pm 2^{k_1}\pm\dots\pm 2^{k_m}$. Meie väide on tõestatud.

316. Sõna dekodeerimiseks piisab, kui näidata need märkide vahemikud, mis on kahemärgiliste tähtede algusteks. Need tuleb valida 11 vahemiku seast, kusjuures kahte kõrvutiseisvat vahemikku ei tohi valida (kokku on 13 vahemikku, esimene ja viimane kaasa arvatud, kuid tingimusest on selge, et viimast ja eelviimast vahemikku ei saa

valida). Kui sõna sisaldab p kahemärgilist tähte, siis tuleb valida p vahemikku. Seda saab teha C_{12-p}^p viisil. Seejärel on antud sõna võimalik lugeda

$$C_{12}^0 + C_{11}^1 + C_{10}^2 + C_9^3 + C_8^4 + C_7^5 + C_6^6 = 233$$

viisil.

317. Neid p -kohalisi arve, mis ei sisalda numbrit 1, on $8 \cdot 9^{p-1}$. Seega on arvude 1 ja 10 000 000 vahel

$$8(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6) = 9^7 - 1 = 4\,782\,968$$

arvu, mis ei sisalda numbrit üks. See arv on väiksem kui pool arvust 10 000 000.

318. Vaatleme iga sõna kolme esimest märki. Need ei anna üle $2^3 = 8$ kombinatsioonile. Näitame, et igale sellisele märkide kombinatsioonile vastab ülimalt kaks sõna, s.t. näitame, et kui kolmel sõnal on kolm esimest märki ühised, siis on vähemalt kahel neist veel kaks ühist märki. Tõepoolest, kirjutame välja tabeli, mis on koostatud nende kolme sõna neljast viimasest märgist. Igas veerus langevad vähemalt kaks märki kokku. Et kolmest sõnast koostatud paare on kolm ja veergusid neli, siis langevad vähemalt kahel sõnal kaks veergu kokku. See aga tähendabki, et neil sõnadel on veel kaks ja üldse viis kokkulangevat märki, mis on vastuolus ülesande tingimusega.

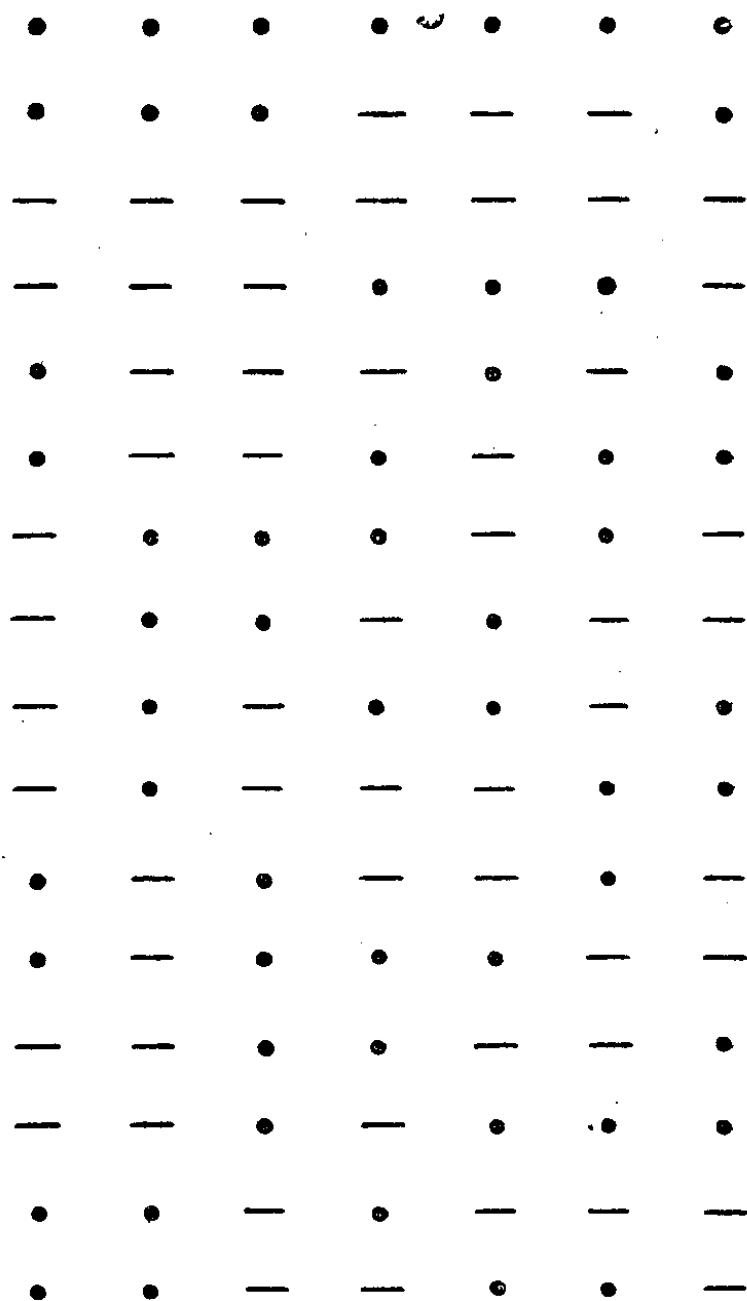
Seega vastab esimese kolme märgi igale kombinatsioonile ülimalt kaks sõna ja sõnade üldarv ei ületa 16. Joonisel 43 on kujutatud 16 sõna, mis mainitud tingimust rahuldavad.

319. Et p on algarv, siis kujutuvad ringjoone pöörete korral iseendaks vaid sellised värvimisviisid, kus on kasutatud ühtainsat värvi. Selliseid võimalusi on n . Ülejäänud menetlused (nende arv on $n^p - n$) jaotuvad p värvimisviisist koosnevatesse klassidesse, kusjuures ühe klassi menetlused kujutuvad ringi pöörete korral üksteiseks. Seejärel annavad nad kokku $\frac{n^p - n}{p}$ menetlust. Kokku

saame $\frac{n^p - n}{p} + n$ võimalust. Ülesande lahendamise käi-

gus tõestasime nn. Fermat' väikese teoreemi: kui p on algarv, siis jagub arv $n^p - n$ iga täisarvulise n korral arvuga p .

320. Et 1 on antud arvudest vähim, siis peab ta asetsema nurgas, kusjuures 2 peab olema tema kõrval kas samas



Joon. 43

reas või veerus. Siis peavad arvud $1, 2, \dots, n$ sattuma ühte ritta või veergu. Paiknegu nad näiteks sellises järjekorras esimeses reas. Siis peab arv $n+1$ paiknema kas esimeses või viimases veerus (muidu ei tekiks teda sisaldavas reas aritmeetilist progressiooni). $n+1$ peab olema teises reas (muidu ei tuleks vastavasse veergu aritmeetilist progressiooni). Kui $n+1$ oleks viimases veerus (arvu n all), siis koosneks see veerg arvudest $n, n+1, \dots, 2n-1$. Sel korral ei saaks me aga $n > 2$ korral esimeses veerus aritmeetilist progressiooni, mille liikmed on väiksemad kui n^2 . Niisiis peab $n+1$ olema esimeses veerus arvu 1 all (on kerge näha, et $n+1$ tuleb arvu 1 kõrvale ka teiste asendite puhul). Arutlust jätkates leiame, et arvude 1 ja 2 asendid määravad kõigi teiste arvude asendi üheselt. Kuid

arvu 1 paigutamiseks on 4 võimalust ja pärast arvu 1 paigutamist on arvu 2 asetamiseks 2 võimalust. Seega saame $n > 2$ puhul 8 paigutust. On kerge veenduda, et juhul $n = 2$ tekib 24 paigutust.

321. Vastasel juhul ei ületaks Moskva elanike arv 2 700 000.

322. Kui valime paaritu arvu esemeid, siis on järelejäänud esemeid paarisarv.

323. Ühe rubla vahetamisviiside arv 2- ja 5-kopikalisteks võrdub võrrandi $2x + 5y = 100$ mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite arvuga. On selge, et y võib omandada mistahes paarisarvulise väärtuse 0 ja 20 vahel. Rubla 5- ja 3-kopikalisteks vahetamisel tuleb aga lahendada võrrand $3x + 5y = 100$. Siin võib y omandada vaid väärtusi 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, neid on aga vähem kui 11.

324. Tuleb leida, kui palju on võrrandil $x + 2y + 5z = 20$ või sellega samaväärsel võrratusel $2y + 5z \leq 20$ mittenegatiivseid täisarvulisi lahendeid. On selge, et z saab omandada ainult väärtused 0, 1, 2, 3 ja 4, millele vastab 11, 8, 6, 3 ja 1 võimalikku y väärtust. Kokku saame 29 lahendit.

325. Et $3 = 2 + 1$, $4 = 2 + 2$, $6 = 5 + 1$, $7 = 5 + 2$, $8 = 5 + 2 + 1$, $9 = 5 + 2 + 2$, siis saab antud vihtide abil koostada mistahes täisarvulise kaalu ühest kuni 9 milligrammini. Täpselt samuti koostatakse kümnetes ja sadades milligrammides avalduvad kaalud jne.

326. Viimase numbri keskmine väärtus on 2, teisel ja kolmandal numbril 2,5, esimesel numbril 3. Neid arve on üldse $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. Seepärast on nende summa

$$540(3000 + 250 + 25 + 2) = 1\,769\,580.$$

327. $r = 1$ puhul on väide ilmne: pärast esimest sammu satub p -ndal kohal olev kaart $p \leq n$ puhul $2p$ -ndale kohale, $p > n$ puhul aga $(2p - 2n - 1)$ -sele kohale. Kummalgi juhul on uue koha numbriks jääk, mis tekib $2p$ jagamisel arvuga $2n + 1$. Olgu väide juba tõestatud r sammu jaoks, s. o. mingi kaart number p pärast r sammu x -ndale kohale, kus $2^r p = k(2n + 1) + x$. Järgmisel sammul läheb ta y -ndale kohale, kus $2x = l(2n + 1) + y$, l on 0 või 1. Kuid siis

$$2^{r+1}p = 2k(2n + 1) + 2x = (2k + l)(2n + 1) + y,$$

kus $y < 2^{r+1}p$. See tähendab, et y on jääk, mis tekib arvu $2^{r+1}p$ jagamisel arvuga $2n + 1$. Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal on meie väide tõestatud.

328. See järeldub vahetult ülesande 327 tulemusest.

329. See järeldub ülesande 327 tulemusest.

330. Tõepoolest, sel juhul annab $2^x p$ arvuga $2n+1$ jagamisel jäägi p .

331. Tõepoolest, pärast $2n$ -ndat kaarti tulevad $2n-1$ paarisarvuliste numbritega kaarti, mis jäävadki $2n$ -nda peale.

332. Väide kaheksanda kaardi kohta järeldub ülesandest 331. Ülejäänud väited on vahetult kontrollitavad.

333. Kirjutame iga kaardi numbri alla selle numbri, mille ta saab pärast segamist:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	8	10	7	11	6	12	5	13	4	14	3	15	2	16	1

Tabelist on näha, et esimesel segamisel läheb arv 1 arvu 9 kohale, teisel puhul läheb arv 9 arvu 13 kohale, siis arv 13 arvu 15 kohale, edasi arv 15 arvu 16 kohale ja lõpuks arv 16 arvu 1 kohale. Seda saab kujutada tsükli (1, 9, 13, 15, 16, 1) abil. Kogu ümberpaigutus jaguneb tsükliteks. Peale ülalnimetatut saame veel tsüklid (2, 8, 5, 11, 14, 2), (3, 10, 4, 7, 12, 3) ja tsükli, mis koosneb ainult arvust 6. Iga tsükkel koosneb ühest või viiest erinevast arvust ja seepärast tulevad kõik kaardid pärast viiekordset segamist endistele kohtadele. Ülejäänud juhte käsitletakse täpselt samuti.

334. Esimeses reas võime värvid paigutada mistahes järjekorras (24 viisil) ja seejärel paigutada 6 viisil esimesse veergu kolm värvi, mis erinevad nurgavälja värvist. Oletame, et valiti tabeli esimeses reas ja veerus näidatud värvid. Et

<i>v</i>	<i>m</i>	<i>p</i>	<i>s</i>
<i>m</i>	<i>v</i>	<i>s</i>	<i>p</i>
<i>p</i>	<i>s</i>	<i>v</i>	<i>m</i>
<i>s</i>	<i>p</i>	<i>m</i>	<i>v</i>

ridades ja veergudes peavad kõik värvid olema esindatud, siis peab teise rea kolmel viimasel väljal esinema üks järgmistest värvikombinatsioonidest: valge, sinine, punane; punane, sinine, valge; sinine, valge, punane. Esimese

variandi puhul on kahe ülejäänud välja värv teisest vee-
rust üheselt määratud ja ülejäänud 4 ruudu värvimiseks
jääb kaks võimalust. Iga ülejäänud variant annab ainult
ühe värvimisvõimaluse. Kokku saame $4!3!(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) =$
 $= 576$ värvimisviisi.

335. Jaotame õpilased mingil viisil kolmikuteks. Igast
kolmikust saab valida kolm järjestamata paari (näiteks
kolmikust abc saab valida kolm järjestamata paari (paa-
rid ab, ac, bc). Kokku vastab antud jaotamisviisile 15
paari, millest ükski ei tohi esineda teiste jaotamisviiside
puhul. Kuid 15 õpilasest saab koostada $C_{15}^2 = 105$ paari.

Seetõttu ei saa erinevate jaotamisviiside arv olla suurem
kui $105 : 15 = 7$. Järgmine tabel näitab, et väärtus 7 on saa-
vutatav, s. o. õpilased on võimalik 7 päeva jooksul kolmiku-
teks jaotada nii, et tingimus on täidetud.

<i>klo</i>	<i>ino</i>	<i>jmo</i>	<i>ilm</i>	<i>jln</i>	<i>ijk</i>	<i>kmn</i>
<i>lab</i>	<i>jac</i>	<i>lad</i>	<i>nae</i>	<i>kaf</i>	<i>mag</i>	<i>oah</i>
<i>ncd</i>	<i>mdb</i>	<i>kbc</i>	<i>ocg</i>	<i>mch</i>	<i>lce</i>	<i>icf</i>
<i>mef</i>	<i>keg</i>	<i>ieh</i>	<i>jfb</i>	<i>obe</i>	<i>ofd</i>	<i>jde</i>
<i>jgh</i>	<i>lhf</i>	<i>nfg</i>	<i>khd</i>	<i>idg</i>	<i>nhb</i>	<i>lbg</i>

336. Arv

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$$

näitab, mitmel viisil saab n^2 elemendist valida n n -elemen-
dilist järjestamata rühma, ning on seetõttu täisarv. Täis-
arv on ka

$$\frac{-(mn)!}{(m!)^n n!},$$

see võrdub mn eseme jaotamisviiside arvuga n m -elemen-
diliseks järjestamata rühmaks. Samal põhjusel on

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$$

täisarv. Kuid siis on ka

$$\left[\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}} (n!)^{\frac{m+1}{2}}} \right]^2$$

kui kahe täisarvu korrutis täisarv. Et m ja n on paaritud
arvud, siis on

$$\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}} (n!)^{\frac{m+1}{2}}}$$

selline ratsionaalarv, mille ruut on täisarv. Seega on ta ka ise täisarv.

337. Vt. lk. 73.

338. See arv võrdub astme x^m kordajaga polünoomis

$$(x^l + x^{l+1} + \dots + x^n)^p = x^{lp} (1 - x^{n-l+1})^p (1 - x)^{-p}.$$

Newtoni binoomvalemit kasutades saame, et see kordaja on

$$C_{(m-lp)+p-1}^{m-lp} - C_p^1 C_{(m-lp)-(n-l+1)+p-1}^{(m-lp)-(n-l+1)} + \\ + C_p^2 C_{(m-lp)-2(n-l+1)+p-1}^{(m-lp)-2(n-l+1)} + \dots$$

339. Oletame, et esimene isik saab vastavalt x, y, z eksemplari esimest, teist ja kolmandat raamatut. Ülesande tingimuse kohaselt saame $x+y+z=12$, kusjuures $0 \leq x \leq 7$, $0 \leq y \leq 8$, $0 \leq z \leq 9$. Selle võrrandi tingimusi rahuldavate täisarvuliste lahendite arv võrdub t^{12} kordajaga avaldise

$$(1+t+\dots+t^7)(1+t+\dots+t^8)(1+t+\dots+t^9)$$

arendises. Korrutise võib ümber kirjutada nii:

$$\frac{(1-t^8)(1-t^9)(1-t^{10})}{(1-t)^3} = \\ = (1-t^8-t^9-t^{10}+t^{17}+\dots) \cdot (1+3t+6t^2+10t^3+ \\ +15t^4+\dots+91t^{12}+\dots).$$

On selge, et pärast sulgude avamist saame t^{12} kordajaks arvu 60. Seega saab raamatuid jaotada 60 viisil.

340. Kõiki kordumistega n -kombinatsioone n tähest on C_{2n-1}^n , järelikult kuulub nendesse kombinatsioonidesse nC_{2n-1}^n tähte. Et kõik tähed sisalduvad ühesugusel arvul, siis esineb igaüks neist C_{2n-1}^n korda.

341. Postile kirjutatud arvude summa on 999. Kui nüüd mõlemad arvud on kolmekohalised ja üks neist on $\overline{abc}$, siis teine on $(9-a)(9-b)(9-c)$. Kui aga üks arv on ühe- või kahekohaline, siis algab teine üheksaga ning sellistel postidel seisab $a, \overline{99(9-a)}$ või $\overline{ab}, 9(9-a)(9-b)$. Et postidel tohib esineda ainult kaks erinevat numbrit,

siis kas $a=b=c$ või langeb kaks nendest arvudest kokku ja kolmas täiendab neid üheksani. Esimest liiki arve on 10 (111, 222, ..., 999 ja veel 0). Iga teist liiki arvu määrab aga selle numbri valik, mis sisaldub vastavas kolmekohalises arvus kaks korda. Numbrile saab valida kümnel viisil. Igale numbrile vastab 3 kolmekohalist arvu (näiteks 227, 272, 722). Seepärast on teist liiki arve $3 \cdot 10 = 30$ ja kokku saame 40 posti, millel esineb ainult kaks erinevat numbrit.

342. Otsitav arv on $\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n P(p, q) - 1$ (tühja variatsiooni

jätame välja). Et $\sum_{q=0}^n P(p, q) = P(p+1, n)$, siis saame

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n P(p, q) - 1 &= \sum_{p=0}^m P(p+1, n) - 1 = \\ &= P(m+1, n+1) - 2. \end{aligned}$$

343. Eelmise ülesande põhjal leidub parajasti $P(k+1, n+1) - P(k, n+1)$ variatsiooni, mis sisaldavad täpselt k valget kuuli. Seetõttu esinevad valged kuulid

$$\sum_{k=1}^m k [P(k+1, n+1) - P(k, n+1)]$$

korda. Seda avaldist teisendame järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k P(k+1, n+1) - \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) P(k+1, n+1) &= \\ &= m P(m+1, n+1) - \sum_{k=0}^{m-1} P(k+1, n+1) = \\ &= m P(m+1, n+1) - P(m, n+2) + 1 = \\ &= 1 + \frac{mn+m-1}{n+2} P(m+1, n+1). \end{aligned}$$

Analoogiliselt tõestatakse ka väide mustade kuulide kohta.

344. Otsitav arv võrdub summaga

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n (p+q+1) P(p, q).$$

Kuid

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^n (p+q+1)P(p, q) &= (p+1) \sum_{q=0}^n P(p, q) + \\ &+ \sum_{q=1}^n qP(p, q) = (p+1) [P(p+1, n) + \\ &+ \sum_{q=1}^n P(p+1, q-1)] = (p+1) [P(p+1, n) + \\ &+ P(p+2, n-1)] = (p+1)P(p+2, n). \end{aligned}$$

Seetõttu tuleb vaadeldav summa

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^m (p+1)P(p+2, n) &= \sum_{p=0}^m (p+2)P(p+2, n) - \\ &- \sum_{p=0}^m P(p+2, n) = (n+1)P(m+1, n+2) - \\ &- P(m+2, n+1) + 1 = 1 + \frac{mn+m+n}{m+n+4} P(m+2, n+2). \end{aligned}$$

345. Nõutava valemi saame, kui võtame kokku ülesannete 342 ja 344 tulemused.

346. 7 inimesest saab moodustada üldse $C_7^2 = 21$ paari. Igas kolmikus (a, b, c) sisaldub 3 paari $((a, b), (a, c)$ ja $(b, c))$. Seetõttu on 7 päeva jooksul iga paar esindatud üks kord. Et 7 päeva jooksul lõunatab 21 inimest, siis külastab iga sõber mind 3 korda, s.o. sisaldub kolmes kolmikus.

Valime algul kolmikud, kus esineb esimene sõber. Seda saab teha

$$\frac{6!}{(2!)^3 3!}$$

viisil (6 inimese 3 paariks jaotamise viiside arv). Kui need kolmikud on valitud, jääb kaks võimalust valida kolmikud, kuhu kuulub teine sõber (näiteks kui esimene kuulub kolmikutesse 1,2,3; 1,4,5; 1,6,7, siis esineb teine kas kolmikutes 2,4,6; 2,5,7 või kolmikutes 2,4,7; 2,5,6). Seejärel on ülejäänud külaliste jaotumine üheselt määratud (näiteks esimesel juhul saame veel kolmikud 3,4,7; 3,5,6). Arvestades, et külaliste kolmikuid võib ümber paigutada,

saame

$$\frac{6!}{(2!)^3 3!} \cdot 2 \cdot 7! = 151\,200$$

võimalust.

347. Seitsmest inimesest saab moodustada $C_7^3 = 35$ kolmikut, kuuest inimesest $C_6^3 = 20$, viiest $C_5^3 = 10$ ja neljast $C_4^3 = 4$. Kutsumisvariantide üldarv on seepärast A_{35}^7 . Üks sõber jääb kutsumata $7A_{20}^7$ juhul ja kaks sõpra $21A_{10}^7$ juhul. Nõutava tulemuse saame juurde- ja mahaarvamise valemit rakendades.

348. Kui üks sõpradest tuleb iga päev, siis saab ülejäänutest koostada $C_6^2 = 15$ paari. Seetõttu on $7A_{15}^7$ kutsumisvarianti, kus mõni sõber käib iga päev. Jääb üle $A_{35}^7 - 7A_{15}^7$ kutsumisviisi.

349. Variatsioonid võivad koosneda 1, 2, ..., n esemest. Seepärast on variatsioonide üldarv

$$\begin{aligned} A_n^n + A_n^{n-1} + \dots + A_n^1 &= n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} = \\ &= n! \left[2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right]. \end{aligned}$$

Teiselt poolt,

$$\begin{aligned} en! - 1 &= n! \left[2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Kuid iga naturaalarvu $n \geq 2$ puhul kehtib

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots &< \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Seetõttu on nurksulgudes olev avaldis valemis (1) väiksem kui $\frac{1}{2}$. Sellega on meie väide tõestatud.

350. Esemleid on kõigis variatsioonides üldse

$$\begin{aligned} nA_n^n + (n-1)A_n^{n-1} + \dots + A_n^1 &= \\ = n! \left[n + \frac{n-1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] &= \\ = (n-1)n! \left[\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{(n-2)}{(n-1)!} \right) \right]. \end{aligned}$$

On kerge kontrollida, et $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - \dots - \frac{n-2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$.

Et iga ese esineb ühepalju kordi, siis esineb igaüks neist

$$N = (n-1)(n-1)! \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] + 1$$

korda.

Teiselt poolt,

$$\begin{aligned} (n-1)(n-1)!e &= (n-1)(n-1)! \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots \right] &= \\ = (n-1)(n-1)! \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] &+ \\ + (n-1) \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \right] &, \end{aligned}$$

ja seepärast

$$\begin{aligned} N - (n-1)(n-1)!e &= \\ = 1 - (n-1) \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \right] &= \\ = \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \dots \right] &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Järelikult N on lähim täisarv arvule $(n-1)(n-1)!e$.

351. Vt. lk. 76.

352. Üks kolmest saab n raamatut. Need n raamatut saab valida C_{3n}^n viisil. Ülejäänud $2n$ raamatut jaotame

kahe järelejäänud isiku vahel. Iga raamat võib sattuda kas ühele või teisele, seetõttu on siin jaotamine võimalik 2^{2n} viisil. Nendest C_{2n}^n juhul saab kumbki isik n raamatut ja $2^{2n} - C_{2n}^n$ saavad mõlemad erineva arvu raamatuid. Et n raamatut võib anda ükskõik kellele kolmest, siis saame kõigile kolmele isikule anda erineva arvu raamatuid $3C_{3n}^n(2^{2n} - C_{2n}^n)$ viisil. Lõpuks saab igale isikule n raamatut anda $C_{3n}^n C_{2n}^n$ viisil. Järelikult on jaotamisviise üldse $C_{3n}^n(3 \cdot 2^{2n} - 2C_{2n}^n)$.

353. Leidub $2^k(2n - k)!$ erinevat järjestust, mille puhul antud k paari tähti ei lahutata. Need k paari saab valida C_n^k viisil. Nõutava tulemuseni jõuame juurde- ja mahaarvamise valemit kasutades.

354. On $(n + p - k)^r$ jaotamisviisi, mille puhul k antud inimest ei saa midagi. Juurde- ja mahaarvamise valemit kasutades jõuame nõutud tulemuseni.

355. Arv $r! \Pi_n^r$ näitab, mitmel viisil saab n erinevat eset paigutada r kasti. See arv võrdub $n!$, korrutatud x^n kordajaga funktsiooni $(e^x - 1)^r$ arendisest. Siit järeldub, et

$$n![1 - \Pi_n^2 + 2!\Pi_n^3 - 3!\Pi_n^4 + \dots] \quad (1)$$

on astme x^n kordaja rea

$$(e^x - 1) - \frac{1}{2}(e^x - 1)^2 + \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 - \frac{1}{4}(e^x - 1)^4 + \dots$$

arendises astmereaks. Et

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \ln(1 + x),$$

siis on selle rea summaks $\ln[1 + (e^x - 1)] = x$. Seepärast võrdub avaldis (1) $n > 1$ puhul nulliga.

356. Esimesest kastist saab n eset valida ühel viisil, teisest C_{2n}^n viisil, ..., k -ndast C_{kn}^n viisil. Kokku saame

$$C_{2n}^n C_{3n}^n \dots C_{mn}^n = \frac{(mn)!}{(m!)^n}$$

valimisviisi.

357. Meil tuleb tõestada võrratus

$$C_{2n+r}^n C_{2n-r}^n \leq (C_{2n}^n)^2.$$

Selle võib ümber kirjutada kujul

$$\frac{(2n+r)(2n+r-1)\dots(2n+1)}{(n+r)(n+r-1)\dots(n+1)} \leq \frac{2n(2n-1)\dots(2n-r+1)}{n(n-1)\dots(n-r+1)}.$$

Viimane võrratus jäeldub sellest, et $0 < k < n$ puhul kehtib

$$\frac{2n+k}{n+k} < \frac{2n-k}{n-k}.$$

358. Arvutame kõigi tekkinud kolmnurkade nurkade summa. Nende nurkade summa, mille tipp on tuhatnurga mingis sisepunktis, on 360° . Et leidub 500 sellist punkti, siis on neile vastavate nurkade summa $360^\circ \cdot 500$. Nüüd vaatleme nurki, mille tipud on tuhatnurga tippudes. Nende summa võrdub tuhatnurga sisenurkade summaga, s.t. $180^\circ \cdot 998$. Kõigi nurkade summa on $180^\circ \cdot 1998$. Et iga kolmnurga nurkade summa on 180° , siis saame 1998 kolmnurka.

359. Iga mängija mängib 4 ja kokku mängitakse 5 partiid. Oletame, et esimeses partiis mängib paar (a, c) paari (b, d) vastu. Siis peavad kolmes järgmises mängus a partneriteks olema vastavalt b, d, e ja viiendast a osa ei võta. e peab osa võtma kõigist mängudest peale esimese, kusjuures teises ja kolmandas on ta a vastasmängijaks. Teises partiis vabaksjäänud kohale võiks võtta kas c või d ja kohale kolmandas partiis kas b või c . Ent kui teise partiisse valida d , siis tuleb kolmandasse valida c (muidu jääb c kahest mängust välja), lugedes neljandas partiis partneriteks b ja c ning jättes d sellest välja. Kuid siis on viiendas mängus partneriteks ühelt poolt b ja e ning teiselt poolt c ja d . Kui aga teise partiisse valida c , siis tuleb kolmandasse valida b (muidu on e ja c kaks korda partneriteks) ning neljandasse võtta c ja d , kuna viiendas mängivad b ja c mängijate d ja e vastu. Seega määrab iga esimese partii mängijate valik kaks mängijate edasise jaotamise võimalust. Et 4 järgmise mängu järjekorda saab muuta 24 viisil, siis saame kokku 48 võimalust. Esimesse partiisse võib mängijaid valida 15 viisil (5 inimese kaheks paariks ja varumängijaks jaotamise viiside arv). Iga selline jaotamisviis annab matši edasiseks käiguks 48 võimalust, kokku saame 720 võimalust. Kui partiide järjekorda ei arvestata, saame 6 võimalust.

360. Kinnisi murdjooni on $(C_{2n}^n)^2$ (vt. lk. 138).

361. Iga murdjoon on määratud oma tippude koordinaatidega. Need koordinaadid moodustavad lõpliku jada kas kujul

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \dots, (a_n, b_1)$$

või kujul

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2), \dots, (a_1, b_n).$$

Need jadad saab määrata permutatsioonide $(a_1, \dots, a_n)$ ja $(b_1, \dots, b_n)$ etteandmisega ja selle äranäitamisega, kumba liiki jada kuulub. Et koordinaatide tsükliline ümberpaigutamine murdjoont ei muuda, siis on murdjooni $\frac{(n!)^2}{2n}$.

362. Jaotame kõristid klassidesse, arvates m -ndasse klassi kõristid, millel vähim siniste kuulide arv kahe punase vahel on m . Juhul $m=0$ saame 4 kõristite liiki (kolmas punane kuul on kas kahe ülejäänud kõrval või on nendest eraldatud ühe, kahe või kolme sinise kuuliga). Juhul $m=1$ on meil kaks punast kuuli, mille vahel on sinine. Kolmanda punase ja talle lähima punase kuuli vahel võib olla üks, kaks või kolm sinist. Seepärast on $m=1$ puhul 3 liiki kõristeid. Juhul $m=2$ on vaid ühte liiki kõristeid. Kokku on 8 liiki.

363. Olgu kellelgi kogunenutest (isikul X) m tuttavat $a_1, \dots, a_m$. Tingimuse kohaselt pole isikud $a_1, \dots, a_m$ omavahel tuttavad (sest nende tuttavaks on X). Seetõttu peab mistahes kahel inimesel a_i, a_j leiduma veel üks ühine tuttav peale X . See inimene ei saa olla X tuttav ning erinevatele paaridele vastavad erinevad isikud (kui keegi oleks erinevate paaride (a_i, a_j) ja (a_k, a_e) ühine tuttav, siis oleks tal isikuga X vähemalt kolm ühist tuttavat). Seega neid inimesi, kes pole X -ga tuttavad, ei ole vähem kui paare isikutest $a_1, \dots, a_m$, s.o. C_m^2 .

Teiselt poolt on igal inimesel, kes X -i ei tunne, temaga täpselt kaks ühist tuttavat, muidugi isikute $a_1, \dots, a_m$ hulgast. Seejuures vastavad erinevatele inimestele erinevad paarid (kui paar (a_i, a_j) vastaks kahele erinevale inimesele, siis oleks isikutel a_i ja a_j üle kahe ühise tuttava, sest nad mõlemad tunnevad ka X -i). Siit järeldub, et neid inimesi, kes X -i ei tunne, pole ka rohkem kui C_m^2 , s.o.

$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$. Kuid siis on kohalolijate üldarv $1+m+$

$+\frac{m(m-1)}{2}$. Vaadeldes seda vördust ruutvörrandina m suhtes, näeme, et sellel on vaid üks positiivne lahend. See aga tähendabki, et kõigil kohalolijail on ühepalju tuttavaid.

364. Kontrollimine näitab, et kahe kõrvutiasetseva A -tähe ja B -tähe vahetamine korrutist ei muuda (piisab, kui vaadelda kombinatsioone $AABA$, $BABB$ ja $AABB$). Seetõttu võib lugeda, et algul tulevad kõik A -tähed ja siis kõik B -tähed. Aga sel juhul on väide ilmne.

365. Igal horisontaalil ja igal vertikaalil asetseb üks vanker. Seetõttu kuulub iga arv a, b, c, d, e, f, g, h ja samuti iga arv 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 korrutisse parajasti üks kord. Seega korrutis on $8!abcdefgh$.

366. Olgu kogunenud 5 organiseerimiskomitee liiget. Ülesande tingimuse kohaselt pole neil võtit vähemalt ühele lukule, kusjuures ülejäänud kuuel liikmel on see võti olemas. Et see on nii mistahes 5 liikme korral, siis on lukude üldarv $C_{11}^5 = 462$. Et igal lukul on kuus võtit, siis on võtmeid üldse $462 \cdot 6 = 2772$ ja igal liikmel $2772 : 11 = 252$ võtit.

Kui komitee liikmete arv oleks n ning seifi avamiseks tarvilik ja piisav liikmete arv m , siis oleks lukke C_n^{m-1} ja igal liikmel $\frac{n-m+1}{n} C_n^{m-1}$ võtit.

367. Teeme algul kindlaks, milline on ahela suurim pikkus n , et sellest pärast k lüli avamist võiks saada mistahes kaalu 1-st kuni n . Selleks vaatleme, milline on avatavate lülide kõige kasulikum paigutus. Et avatakse k lüli, siis võib nende abil saada suvalise kaalu 1-st kuni k . Kuid kaalu $k+1$ me ahela uusi osi kasutamata enam ei saa. On selge, et järgmise osa kõige kasulikum pikkus on $k+1$ lüli, siis võime saada iga kaalu 1-st kuni $(2k+1)$. Edasi vajame ahela osi kaaludega $2(k+1), 4(k+1), \dots, 2^k(k+1)$. Nende abil võib saada suvalise kaalu 1-st kuni n , kus

$$\begin{aligned} n &= k + [(k+1) + 2(k+1) + 4(k+1) + \dots + 2^k(k+1)] = \\ &= k + (k+1)(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1}(k+1) - 1. \end{aligned}$$

Niisiis, kui $2^k k \leq n < 2^{k+1}(k+1)$, siis piisab k , kuid ei piisa $k-1$ lüli avamisest. Et $2^3 \cdot 3 \leq 60 \leq 2^4 \cdot 4 - 1$, siis tuleb 60-lülilises ahelas avada 3 lüli, võttes tükid kaaludega 4, 8, 16 ja 29 g.

Kui kasutada kahe kausiga kaalusid, siis tuleb k avatud lülile lisada tükk kaaluga $2k+1$ (pannes ta ühele kaalu-kausile ja ülejäänud lülid teisele, saame mistahes kaalu $k+1$ ja $2k$ vahel, pannes ta aga koos üksiklülidega, saame suvalise kaalu $(2k+1)$ -st kuni $(3k+1)$. Järgmiste tükide kaalud peavad olema $3(2k+1)$, $9(2k+1)$, ..., $3^k(2k+1)$. Nende abil võime saada mistahes kaalu 1-st kuni arvuni

$$k + [(2k+1) + 3(2k+1) + \dots + 3^k(2k+1)] = \\ = \frac{1}{2}[(2k+1)3^{k+1} - 1].$$

Erijuhul tuleb 60-grammise ahela puhul avada kaks lüli ja võtta tükid kaaludega 5, 15 ja 38 g.

368. Kui x annab seitsmega jagamisel jäägid 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, siis annab x^2 vastavalt jäägid 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Seepärast jagub x^2+y^2 seitsmega (ja muidugi 49-ga) vaid siis, kui x ja y jaguvad seitsmega. Seetõttu on vastavaid

paare (järjekorda arvestades) $\left[E\left(\frac{1000}{7}\right)\right]^2 = 142^2 =$

$= 20\,164$. Kui järjekorda ei arvestata, saame $C_{142}^2 = 10\,153$ paari.

369. Kui antud arv on $10a+b$, siis on tema ja vastupidi-ses järjekorras numbritena arvu summaks $11(a+b)$. Et viimane on täisruut ja $2 \leq a+b \leq 18$, siis $a+b=11$. Saame 8 võimalust: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

370. Arvu esimesed kolm numbrit on suvalised, neljas aga omandab ühe kahest väärtusest (selle määrab jääk, mis tekib esimese kolme numbri summa jagamisel kolmega). Seepärast, kui arvu esimene number ette anda, siis saab ülejäänud numbrid valida $6^2 \cdot 2 = 72$ viisil. Järelikult on vastavate arvude esimeste numbritena summa $72 \cdot (1+2+\dots+3+4+5+6) = 1512$ ja kõigi selliste arvude summa $1512 + 15\,120 + 151\,200 + 1\,512\,000 = 1\,679\,832$.

371. Viimasel kohal võivad olla numbrid 0, 2, 4. Kui üks nendest numbritest on antud, siis võib teisel või kolmandal kohal olla ükskõik milline kuuest numbrist, esimesel aga suvaline numbritest 1, 2, 3, 4, 5. Kokku saame $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ võimalust. Seega on viimastele kümnendkohtadele vastavate arvude summa $(2+4) \cdot 180 = 1080$. Samal viisil leiame, et kolmandatele kümnendkohtadele vastavate arvude summa on $(1+2+3+4+5) \cdot 900 = 13\,500$, teiste kümnendkohtade jaoks tuleb summa 135 000 ja esimeste jaoks 1 620 000. Kokku saame summa 1 769 580.

372. Võrrandil $x+y=k$ on $k-1$ täisarvulist lahendit, mis rahuldavad tingimusi $1 \leq x, 1 \leq y$. Seepärast on võrratusel $|x|+|y| \leq 1000$

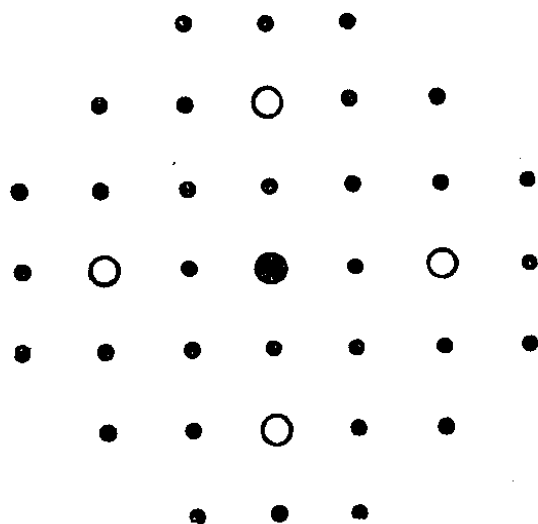
$$4 \sum_{k=2}^{1000} (k-1) = 1\,998\,000$$

täisarvulist lahendit, millel $|x| \neq 0$ ja $|y| \neq 0$. Peale selle on tal 4000 lahendit, millel ühe tundmatu väärtus on null, ja lahend $x=0, y=0$. Kokku on 2002001 lahendit.

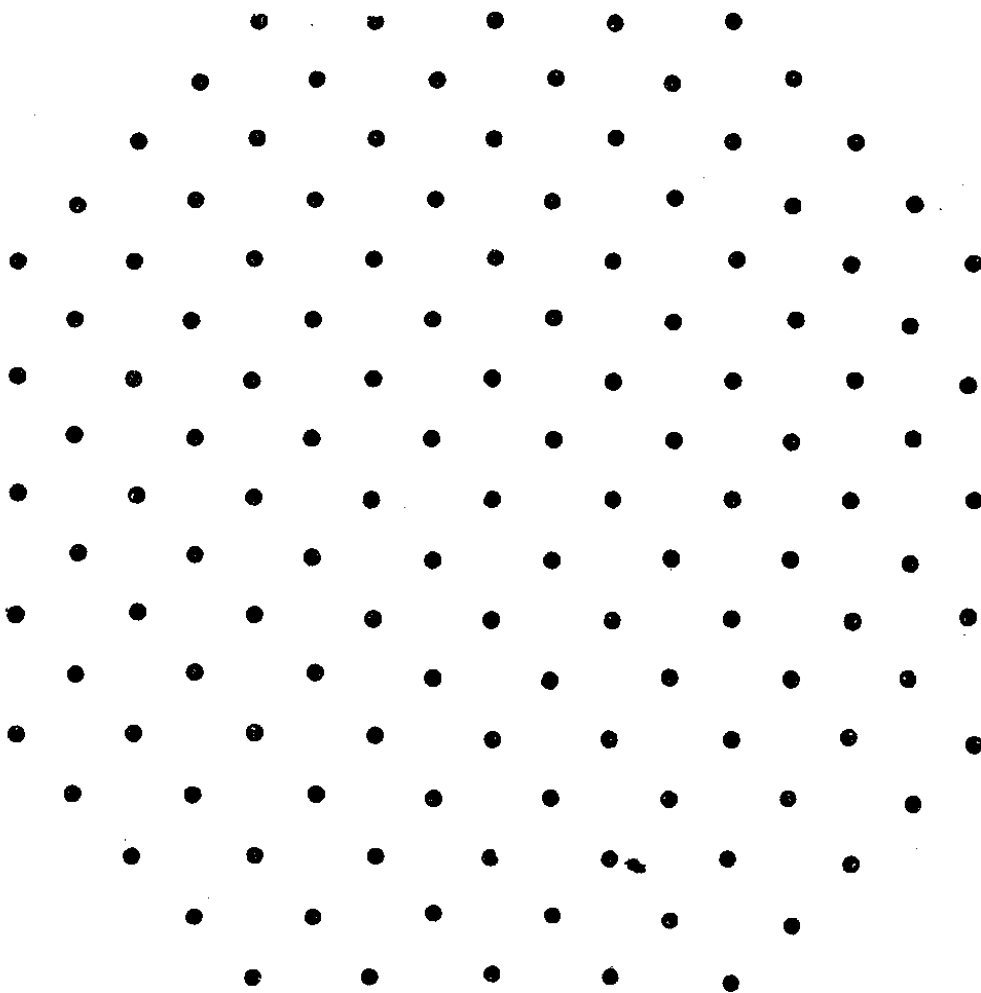
373. Kui lisada suvalisele tippu A_1 mittesisaldavale hulknurgale see tipp, saame tippu A_1 sisaldava hulknurga. Sellega oleme korraldanud üksühese vastavuse kõigi tippu A_1 mittesisaldavate hulknurkade ja osa seda tippu sisaldavate hulknurkade vahel. Sellest vastavusest ei võta osa tippu A_1 sisaldavad kolmnurgad. Seetõttu hulknurki tipuga A_1 on rohkem.

374. Paarisarvu käikude järel satub ratsu sama värvi väljale mis algul. On mugavam, kui pöörame malelauda 45° võrra ja kujutame joonisel ainult seda värvi välju, asendades iga välja tema keskpunktiga. Need väljad, kuhu ratsu jõuab kahe käiguga, on kujutatud joon. 44. Selliseid välju on 33. Iga niisugust välja võib vaadelda samasuguse kujundi keskpunktina, mis näitab, kuhu võib ratsu jõuda kahe järgmise käiguga. Neid kujundeid ühendades saame joon. 45 toodud kujundi. See koosneb ruudust, millel on $9^2=81$ punkti, ja neljast trapetsist, millest igaüks sisaldab $7+5=12$ punkti. Kokku saame $81+4 \cdot 12=129$ punkti.

$2n$ käigu järel saame kujundi, mis koosneb ruudust küljega $4n$ (sisaldab $(4n+1)^2$ punkti) ja 4-st trapetsist, millest igaüks sisaldab



Joon. 44



Joon. 45

$$(4n-1) + (4n-3) + \dots + (2n+1) = 3n^2$$

punkti. Kokku saame

$$12n^2 + (4n+1)^2 = 28n^2 + 8n + 1$$

punkti. Seega võib ratsu $2n$, $n > 1$ käiguga jõuda $28n^2 + 8n + 1$ väljale.

375. Kui võtta kõik antud punkti (näiteks a) sisaldavad kolmikud, siis nad rahuldavad ülesande tingimust, kusjuures nende arv on $C_{1954}^2 = 1\,907\,481$. Näitame, et ei saa valida rohkem kolmikuid, millel paarikaupa leiduksid ühispunktid. Oletame, et oleme valinud $N > C_{1954}^2$ sellist kolmikut ja (a, b, c) on üks nendest. Et igaühel $N-1$ ülejäänud kolmikust leidub antud kolmikuga vähemalt üks ühispunkt, siis leidub a, b, c seast vähemalt ühel, näiteks punktil a , $\frac{N-1}{3}$ teda sisaldavat kolmikut, kusjuures

$\frac{N-1}{3} > 635\,808$. Mitte üle 3906 kolmiku sisaldab peale

a ka punkte b või c . Seetõttu leidub kolmik (a, d, e) , kus d ja e erinevad punktidest b ja c . Täpselt samuti leiduvad kolmikud (a, f, g) ja (a, h, j) , kus f ja g erinevad punktidest b, c, d, e ning h, j punktidest b, d, c, e, f, g .

Ükskõik millisel antud N kolmikust on vähemalt üks ühis-punkt kõigi kolmikutega (a, b, c) , (a, d, e) , (a, f, g) , (a, h, j) . Selge, et üheks ühispunktiks peab olema a , sest muidu sisaldaks kolmik nelja erinevat elementi, mis on võimatu. Seega sisaldavad kõik kolmikud punkti a ning nende arv ei saa ületada C_{1954}^2 , mis on vastuolus eeldusega.

376. Antud jada sisaldab $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \dots + 8 \cdot 90\,000\,000 + 9$ numbrit. Leiame nullide arvu jadas $1, 2, \dots, 10^9$. Kirjutame kõik arvud $1 \dots (10^9 - 1)$ üheksakohaliste arvudena, lisades algusse vajalikud nullid (näiteks $000\,000\,003$), ning asendame 10^9 arvuga $000\,000\,000$. Tulemusena saame $9 \cdot 10^9$ numbrit, kusjuures iga number esineb ühepalju kordi. Seetõttu on meil $9 \cdot 10^8$ nulli. Kuid osa nulle oleme ise lisanud: $8 \cdot 9$ nulli ühekohalistele arvudele, $7 \cdot 90$ kahekohalistele jne. Kui need välja jätta, jääb $9 \cdot 10^8 - 8 \cdot 9 - 7 \cdot 90 - \dots - 9 \cdot 10^7$ nulli. On kerge näha, et see summa võrdub arvuga $2 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + \dots + 8 \cdot 9 \cdot 10^7$, s. o. esimese jada numbrite arvuga.

377. Kui kahe esimese numbri summa on k , siis leidub $k \leq 9$ puhul $(k+1)^2$ sellist arvu ja $k > 9$ korral $(19-k)^2$ niisugust arvu. Kokku saame

$$2(1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) + 10^2 = 670 \text{ arvu.}$$

378. Tähistame A_a abil nende ainete hulga, milles õpilasel a on hinne 5. Kõik sellised hulgad koosnevad ülimalt $2n$ elemendist, kusjuures ülesande tingimuse kohaselt ei sisaldu ükski niisugune hulk teises. Jaotame need hulgad klassidesse, arvates k -ndasse klassi k -elemendilised hulgad. Olgu r vähim elementide arv vaadeldavates hulkades. Näitame, et kui $r < n$, siis võib antud hulkade süsteemi asendada uuega, nii et

- a) ükski uue süsteemi hulk ei sisaldu mõnes teises;
- b) uues süsteemis on rohkem hulki kui esialgses;
- c) vähim elementide arv uue süsteemi hulkades on $r+1$.

Selleks võtame kõik r -elemendilised hulgad meie süsteemist ja lisame neile kõikvõimalikel viisidel ühe uue elemendi. Süsteemi ülejäänud hulgad jätame endisteks. On selge, et selle operatsiooni tulemusena saame hulkade

süsteemi, kus vähim elementide arv hulkades on $r+1$. Seejuures pole ükski uue süsteemi hulk teise osaks: kui hulk B sisaldaks uut hulka A' , siis oleks ta sisaldanud ka r -nda klassi hulka A , millest A' saadi elemendi lisamisel, see on aga vastuolus ülesande tingimusega. Peale selle märgime, et ükski uus hulk ei ühti esialgsega. Tekkigu uus hulk näiteks elemendi x lisamisel hulgale A . Kui ta ühtiks mõne esialgse hulgaga B , siis tähendaks see, et B sisaldab ülesande tingimuse vastaselt hulka A .

Jääb näidata, et uusi hulki on rohkem kui esialgseid. Selleks paneme tähele, et iga r -elemendilise hulga A jaoks leidub $2n-r$ sellesse mittekuuluvat elementi ja seetõttu saame temast $2n-r$ uut hulka. Kuid mõned nendest uutest hulkadest langevad kokku (näiteks hulkadest (a, b) ja (b, c) võib ühe elemendi lisamisel saada sama hulga (a, b, c)). Kuid iga $(r+1)$ -elemendilise hulga võib r -elemendilistest hulkadest saada vaid $r+1$ viisil. Seepärast, kui r -elemendilisi hulki on m ja neist on tekkinud p erinevat uut hulka, siis $m(2n-r) \leq p(r+1)$. Et $r < n$ puhul kehtib $2n-r > r+1$, siis siit järeldub, et $m \leq p$, s. o. hulkade arv on suurenenud.

Kirjeldatud võtet korrates võime kõik vähem kui n elementi sisaldavad hulgad asendada n -elemendilistega, nii et tingimus a) säilib ja hulkade arv suureneb. Samasugusel viisil võib asendada kõik hulgad, mis sisaldavad enam kui n elementi (nad asendatakse järk-järgult hulkadega, mis saadakse ühe elemendi ärajätmisel). Tulemusena saame n -elemendiliste hulkade süsteemi, milles on rohkem hulki kui esialgu. Kuid $2n$ elemendist saab koostada vaid C_{2n}^n n -elemendilist hulka. Seega pole hulki rohkem kui C_{2n}^n , teiste sõnadega ei saa koolis olla üle C_{2n}^n õpilase.

379. Nimetame esimesed m elementi esimest liiki ja viimased n teist liiki elementideks. Jaotame kõik r -kaupa variatsioonid $m+n$ elemendist klassidesse, arvates k -ndasse klassi variatsioonid, mis sisaldavad parajasti k esimest liiki elementi. Siis sisaldab k -s klass $C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$ variatsiooni. Tõepoolest, me võime C_r^k viisil valida esimest liiki elementide kohad ja seejärel täita need kohad A_m^k viisil esimest liiki elementidega ning paigutada A_n^{r-k} viisil ülejäänud $r-k$ kohale teist liiki elemendid. Seega on r -kaupa variatsioonide arv $m+n$ elemendist

$$\sum_{k=0}^r C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$$

ehk ülesandes kasutatavates tähistustes

$$\sum_{k=0}^r C_r^k M_k N_{r-k}.$$

Ent see pole midagi muud kui avaldis, mis tekib, kui avada astmes $(M+N)^r$ sulud ja muuta seejärel astendajad indekseks.

Märgime, et k -nda klassi variatsioonide arvu võib leida ka nii: valime k esimest liiki ja $k-r$ teist liiki elementi ning paigutame nad omavahel kõikvõimalikel viisidel ümber. Seda saab teha

$$P(k, r-k) A_m^k A_n^{r-k} = C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$$

viisil.

380. Astendaja 8 saab astendajatest 2 ja 3 koostada järgmisel viisil: $8=2+2+2+2=2+3+3$. See tähendab, et kui tähistada $x^2=y$, $x^3=z$, siis võrdub otsitav kordaja liikmete $1^5 y^4 z^0$ ja $1^6 y z^2$ kordajate summaga polünoomi $(1+y+z)^9$ arendises. Polünoomi astendamise valemi järgi on see kordaja $P(5, 4, 0) + P(6, 1, 2) = 378$.

381. Kehtib valem

$$(1+x)^k + \dots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^{k+1}}{x}.$$

Seetõttu on liikme x^m kordajaks $m < k$ puhul $C_{n+1}^{m+1} - C_k^{m+1}$ ja $m \geq k$ puhul C_{n+1}^{m+1} .

382. Kehtib $17=7+5+5$, kuid 18 ei avaldu arvude 5 ja 7 positiivsete kordsete summana. Seetõttu sisaldub x^{17} avaldises kordajaga $C_{20}^1 C_{19}^2 = 3420$ ja x^{18} kordajaga null.

383. Kehtivad võrdused $17=2+2+2+2+2+2+2+3=2+2+2+2+3+3+3=2+3+3+3+3+3$. Seepärast on liikme x^{17} kordajaks avaldises $(1+x^2-x^3)^{1000}$

$$-C_{1000}^7 C_{993}^1 - C_{1000}^4 C_{996}^3 - C_{1000}^1 C_{999}^5$$

ja avaldises $(1-x^2+x^3)^{1000}$ arv

$$-C_{1000}^7 C_{993}^1 + C_{1000}^4 C_{996}^3 - C_{1000}^1 C_{999}^5.$$

Selge, et teine kordaja on suurem.

384. On antud

$$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n}x^{2n}. \quad (1)$$

Näitame algul, et $a_k = a_{2n-k}$. Selleks tähistame $x = \frac{1}{y}$ ja korrutame avaldise mõlemaid pooli astmega y^{2n} . Saame

$$(y^2+y+1)^n = a_0y^{2n} + a_1y^{2n-1} + \dots + a_{2n}. \quad (2)$$

Valemeid (1) ja (2) võrreldes saame $a_k = a_{2n-k}$.

Asendame nüüd valemis (1) x suurusega $-x$. Saame:

$$(1-x+x^2)^n = a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + a_{2n}x^{2n}. \quad (3)$$

Võrdusi (1) ja (3) korrutades leiame, et

$$\begin{aligned} (1+x^2+x^4)^n &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (a_0a_k - a_1a_{k-1} + \dots + \\ &+ (-1)^k a_ka_0) x^k. \end{aligned} \quad (4)$$

On selge, et võrduse vasak pool sisaldab vaid x paarisarvulisi astmeid, seepärast peab x^{2n-1} kordaja olema null. Kuid paremal pool on x^{2n-1} kordajaks

$$\begin{aligned} &-(a_0a_{2n-1} - a_1a_{2n-2} + a_2a_{2n-3} - \dots - a_{2n-1}a_0) = \\ &= -(a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \dots - a_{2n-1}a_{2n}). \end{aligned}$$

Sellega on võrdus a) tõestatud.

Paneme nüüd tähele, et arendise (4) võib valemi (1) põhjal esitada kujul

$$(1+x^2+x^4)^n = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots + a_{2n}x^{4n}.$$

Siit järeldub, et x^{2n} kordajaks selles avaldises on a_n . Teiselt poolt, valemi (4) järgi on see kordaja

$$\begin{aligned} &a_0a_{2n} - a_1a_{2n-1} + a_2a_{2n-2} - \dots + a_{2n}a_0 = \\ &= 2a_0^2 - 2a_1^2 + 2a_2^2 - \dots + (-1)^n a_n^2. \end{aligned}$$

Siit järeldub vahetult võrdus b).

Kirjutame võrduse (1) kujul

$$(1-x^3)^n = (1-x)^n (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}).$$

Siit tuleneb, et

$$\begin{aligned} &1 - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^6 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{3n} = \\ &= (1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n (C_n^n x^n)) (a_0 + a_1x + \\ &+ a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}). \end{aligned}$$

Kui r ei jagu kolmega, siis on x^r kordaja võrduse vasakul poolel null. Paremal poolel on x^r kordaja aga

$$a_r - C_n^1 a_{r-1} + C_n^2 a_{r-2} - \dots + (-1)^r C_n^1 a_0.$$

Järelikult võrdub see avaldis nulliga, kui r ei jagu kolmega, ja arvuga $(-1)^k C_n^k$, kui $r=3k$. Sellega on tõestatud seos c).

Võttes arendises (1) $x=1$, saame

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3^n.$$

Võttes valemis (2) $x=1$, leiame

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} = 1.$$

Neid kahte võrdust liites ja lahutades jõuame seosteni d).

385. Saame C_n^1 liiget kujuga x_k^3 , $2C_n^2$ liiget kujuga $x_j x_k^2$ ($j \neq k$) ja C_n^3 liiget kujuga $x_i x_j x_k$ ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$), kokku aga $C_n^1 + 2C_n^2 + C_n^3$ liiget.

386. Kehtib võrdus

$$(1+x+\dots+x^{n-1})^2 = \frac{(x^n-1)^2}{(x-1)^2} = (x^n-1)^2(x-1)^{-2} = \\ = (x^{2n}-2x^n+1)(1+2x+3x^2+\dots+mx^{m-1}+\dots).$$

Seetõttu on x^k kordajaks $k+1$, kui $0 \leq k \leq n-1$, ja $2n-k-1$, kui $n \leq k \leq 2n-2$. Vastuse võib kirja panna järgmiselt: $n - |n-k-1|$.

387. Et

$$C_{n+1}^{r+1} = \frac{n+1}{r+1} C_n^r, \quad C_n^r = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1},$$

siis võib võrduse vasaku poole kirjutada kujul

$$\frac{\frac{n}{r} \left(\frac{n+1}{r+1} - 1 \right) (C_{n-1}^{r-1})^2}{\left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{(n+1)n}{(r+1)r} \right) (C_{n-1}^{r-1})^2} = \frac{\frac{n(n-r)}{r(r+1)}}{\frac{n(n-r)}{r^2(r+1)}} = r.$$

388. Kolmekaupade kordumistega variatsioonide arv n elemendist on n^3 . Jaotame need variatsioonid klassidesse, arvates k -ndasse klassi variatsioonid, mis sisaldavad täpselt k erinevat tüüpi elementi. Paigutuste arv esimeses klassis on C_n^1 , teises $6C_n^2$ (variatsioonid kaks korda sisalduva elemendi saab valida n viisil, üks kord sisalduva

elemendi $n-1$ viisil, peale selle saab need elemendid kolmel viisil ümber paigutada). Kolmanda klassi variatsioone on $A_n^3 = 6C_n^3$. Kokku saame $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3$ variatsiooni. Siit järeldub esimene seos. Teise seose tõestamiseks jaotame analoogilisel viisil klassidesse kõik kordumistega kombinatsioonid, mis sisaldavad vähemalt ühte fikseeritud tüüpi elementi. Saame

$$(n+1)^3 - n^3 = 1 + 6C_n^1 + 6C_n^2,$$

millest järeldubki tõestatav seos.

389. Tõestus on samasugune nagu ülesandes 388, kuid tuleb vaadelda kordumistega 4-kaupa variatsioone n tüüpi elementidest.

390. Vaatleme võrdust

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n &= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \\ &= \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}. \end{aligned}$$

Newtoni binoomvalemi järgi saame

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{2^n} \{1 + C_n^1(-i\sqrt{3}) + C_n^2(-i\sqrt{3})^2 + \\ + C_n^3(-i\sqrt{3})^3 + \dots\} = \\ = \frac{(-1)^n}{2^n} \{[1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - \dots] - \\ - i\sqrt{3}[C_n^1 - 3C_n^3 + \dots]\}. \end{aligned}$$

Tõestatavad seosed saame, kui võrdsustame saadud võrduse mõlemate poolte reaali- ja imaginaarosad.

391. Vaatleme samasust

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$$

ning anname selles muutujale x väärtused $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ (siin $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ ja seetõttu $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$). Saame

$$\begin{aligned} 2^n &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n, \\ (1+\varepsilon)^n &= C_n^0 + C_n^1 \varepsilon + C_n^2 \varepsilon^2 + \dots + C_n^n \varepsilon^n, \\ (1+\varepsilon^2)^n &= C_n^0 + C_n^1 \varepsilon^2 + C_n^2 \varepsilon^4 + \dots + C_n^n \varepsilon^{2n}. \end{aligned}$$

Kuid $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 0$, kui k ei jagu kolmega, ja $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 3$, kui k jagub kolmega. Järelikult

$$2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n = 3(C_0^n + C_3^n + C_6^n + \dots).$$

Et

$$1 + \varepsilon = -\varepsilon^2 = -\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \\ = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$$

$$1 + \varepsilon^2 = -\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3},$$

siis

$$2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n = 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Siit järeldubki, et

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

Kaks järgmist võrdust saadakse analoogiliselt, vaadeldes summasid

$$2^n + \varepsilon(1 + \varepsilon)^n + \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)^n, \quad 2^n + \varepsilon^2(1 + \varepsilon)^n + \varepsilon(1 + \varepsilon^2)^n.$$

Võrdus d) tuletatakse analoogilisel viisil avaldisest $(1 + i)^n$.

392. Kehtib võrdus

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n = 2 \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k} x^{2k}.$$

Selle polünoomi kordajad on positiivsed ja järelikult omandab polünoom suurima väärtuse $x=1$ korral. See väärtus on 2^n .

393. Kehtivad võrdused:

$$\sum_{x=0}^n \frac{n!(m-x)!}{m!(n-x)!} = \frac{1}{C_m^n} \sum_{x=0}^n C_{m-x}^{m-n} = \frac{C_{m+1}^{m-n+1}}{C_m^n} = \frac{m+1}{m-n+1}$$

ja

$$\sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{n! C_n^r}{(2n)!} \sum_{x=0}^n \frac{(x+r)!(2n-x-r)!}{x!(n-x)!} = \\ = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{x=0}^n C_{x+r}^r C_{2n-x-r}^{n-r} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

394. Vasakpoolne summa taandub avaldiseks

$$\sum_{k=1}^n C_{m+k-1}^k = C_{m+n}^m - 1.$$

Sama arvuga võrdub ka parempoolne summa.

395. Kehtivad seosed:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^x} &= \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(2n-x-1)!}{(n-x)!} = \\ &= \frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}} \sum_{x=1}^n C_{2n-x-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^n C_{2n-x}^n = \\ &= \frac{2nC_{2n-1}^{n-1}}{(2n-2)C_{2n-2}^{n-1}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

396. Saame:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^x} &= \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(n+q-x)!}{(n-x)!} = \\ &= \frac{(n+q+1)(n-1)!q!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n C_{n+q-x}^{n-x} - \\ &= \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+1}^{n-x} = \\ &= \frac{(n+q+1)(n-1)!q!}{(n+q)!} C_{n+q}^{n-1} - \\ &= \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} = \frac{n+q+1}{q+1} - \\ &= \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}. \end{aligned}$$

397. Saame:

$$\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^x} = \frac{(n-2)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(x-1)(n+q-x)!}{(n-x)!}.$$

Edasi leiame samasust

$$\begin{aligned} x(x-1) &= (n+q-x+1)(n+q-x+2) + (n+q+1) \cdot \\ &\cdot [n+q-2(n+q-x+1)] \end{aligned}$$

kasutades, et meie summa võrdub avaldisega

$$\begin{aligned} & \frac{(n-2)!}{(n+q)!} \left[(q+2)! \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+2}^{n-x} - 2(n+q+1)(q+1)! \cdot \right. \\ & \left. \cdot \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+1}^{n-x} + (n+q)(n+q+1)q! \sum_{x=1}^n C_{n+q-x}^{n-x} \right] = \\ & = \frac{(n-2)!q!}{(n+q)!} [(q+1)(q+2)C_{n+q+2}^{n-1} - \\ & - 2(n+q+1)(q+1)C_{n+q+1}^{n-1} + (n+q)(n+q+1)C_{n+q}^{n-1}]. \end{aligned}$$

Nõutava valemi saame, kui asendame C_{n+q+2}^{n-1} , C_{n+q+1}^{n-1} , C_{n+q}^{n-1} nende avaldistega ja teeme mõningad teisendused.

398. Me teame, et $C_{n-1}^{k-1} = \frac{k}{n} C_n^k$. Et

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n, \quad (1)$$

siis järeldub siit, et

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + \dots + kC_n^k x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

(diferentsiaalarvutusega tuttav lugeja saab valemi (2) tuletada valemi (1) mõlemaid pooli diferentseerides).

Korrutame võrdused (1) ja (2). Saame

$$\begin{aligned} n(1+x)^{2n-1} &= (1 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) \cdot \\ &\cdot (C_n^1 + \dots + nC_n^n x^{n-1}). \end{aligned}$$

Nõutava seoseni jõuame, kui võrdleme x^{n-1} kordajaid võrduse mõlemal poolel.

399. Vaatleme kõiki kordumistega n -kombinatsioone n tüüpi elementidest. Nende arv on C_{2n-1}^n . Jaotame need kombinatsioonid klassidesse, võttes k -ndasse klassi kombinatsioonid, mis sisaldavad parajasti k erinevat tüüpi elemente. k -ndasse klassi kuulub $C_n^k C_{n-1}^{n-k}$ kombinatsiooni (me valime C_n^k viisil k elementide tüüpi, nende k tüüpi elementidest saab aga koostada C_{n-1}^{n-k} kordumistega n -kombinatsiooni, mis sisaldavad kõigi k tüüpi elemente). Seega saame

$$C_{2n-1}^n = \sum_{k=1}^n C_n^k C_{n-1}^{n-k}.$$

Tõestatava seoseni jõuame, kui avaldame arvud C_{2n-1}^n , C_n^k , C_{n-1}^{n-k} faktoriaalide kaudu.

400. Tõestatava seose võime kirjutada nii:

$$C_{n+r-1}^r = C_n^1 C_{n+r-3}^{r-2} + C_n^2 C_{n+r-5}^{r-4} - \dots = C_n^r.$$

Tõestuseks võtame kõik kordumistega r -kombinatsioonid n tüüpi elementidest ja leiame kahel viisil kõigi nende kombinatsioonide arvu, mis koosnevad ainult erinevat tüüpi elementidest. Ühelt poolt on see arv C_n^r . Teiselt poolt leitud $C_{n+r-2k-1}^{r-2k}$ kordumistega r -kombinatsiooni n liiki elementidest, mis sisaldavad vähemalt kahte elementi antud k liigist. Et need k liiki saab valida C_n^k viisil, siis saame tõestatava seose, kui kasutame juurde- ja mahaarvamise valemit.

401. a) Tähistame

$$S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$$

Võrduse $C_n^k = C_n^{n-k}$ põhjal saame

$$S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \dots + C_n^{n-1}.$$

Liites leiame, et

$$2S_n = n[C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n] = 2^n n$$

ja seetõttu $S_n = 2^{n-1}n$.

Samamoodi näitame, et

$$b) S_n = (n+1)2^{n-1}.$$

$$c) S_n = (n-2)2^{n-1} + 1.$$

$$d) S_n = (n+1)2^n.$$

$$e) S_n = 0.$$

f) Kehtivad võrdused:

$$S_n = 4(C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) = 2^{n-1}n - 2^n + 1.$$

g) Kehtib seos $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. Seetõttu

$$\begin{aligned} S_n &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 - 2(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + 3(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) - \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} = \\ &= C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \dots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

See summa on $n=1$ puhul 1 ja $n>1$ puhul 0.

h) See summa võrdub

$$S_n = \frac{1}{n+1} [C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}] = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

i) Et

$$C_n^k = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+2)(n+1)} C_{n+2}^{k+2},$$

siis vastav summa on

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} (C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \dots + (n+1)C_{n+2}^{n+2}) = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} [(C_{n+2}^1 + 2C_{n+2}^2 + \dots \\ &\dots + (n+2)C_{n+2}^{n+2}) - (C_{n+2}^1 + \dots + C_{n+2}^{n+2})]. \end{aligned}$$

Ulesannete a) ja b) vastuseid kasutades saame

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} [2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1] = \\ &= \frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

j) Kirjutame summa kujul

$$S_n = \frac{1}{n+1} [C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + \dots + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1}] = \frac{1}{n+1},$$

sest nurksulgudes olev avaldis on 1.

k) Kui n on paaritu arv, siis $S_n=0$, kui aga $n=2k$ on paarisarv, siis $S_n=(-1)^k C_{2k}^k$. Tõestuseks tuleb korrutada $(1+x)^n$ ja $(1-x)^n$ avaldised ning leida seejärel liikme x^n kordaja.

402. Esimese arendise suurimaks kordajaks on liikme $a^3b^3c^4$ (või $a^3b^4c^3$ või $a^4b^3c^3$) kordaja. See on $P(3,3,4)=4200$. Teise arendise suurim on liikme $a^3b^3c^4d^4$ kordaja $P(4,4,3,3)$.

403. Newtoni binoomvalemi järgi saame

$$\begin{aligned} (1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4x)^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Seetõttu tuleb liikme x^n kordaja

$$Y_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2^n}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n.$$

Astme $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ jaoks saame Newtoni valemi järgi arendise

$$\begin{aligned} (1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (-4x)^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{1-2n} x^n. \end{aligned}$$

Kuid

$$\begin{aligned} \frac{Y_n}{1-2n} &= -\frac{C_{2n}^n}{2n-1} = -\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} = \\ &= -\frac{2}{n} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = -\frac{2}{n} Y_{n-1}. \end{aligned}$$

Seepärast

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{n-1}}{n} x^n, \quad (2)$$

kus $Y_0 = 1$.

404. a) Korrutame arendised (1) ja (2) läbi. Saame

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n x^n) \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{n-1}}{n} x^n \right) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_n - 2 \left(Y_{n-1} + \frac{1}{2} Y_{n-2} Y_1 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + \frac{1}{n} Y_{n-1} \right) \right] x^n. \end{aligned}$$

Siit järeldub otsekohe tõestatav võrdus.

b) Tõstame arendise (1) ruutu. Saame

$$(1 - 4x)^{-1} = (1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n x^n)^2 = 1 + (Y_0 Y_1 + Y_1 Y_0) x + \\ + (Y_0 Y_2 + Y_1 Y_1 + Y_2 Y_0) x^2 + \dots \\ \dots + (Y_0 Y_n + Y_1 Y_{n-1} + \dots + Y_n Y_n) x^n + \dots$$

Et

$$(1 - 4x)^{-1} = 1 + 4x + 4^2 x^2 + \dots + 4^n x^n + \dots,$$

siis saame otsekohe tõestatava võrduse.

c) Tõsta arendis (2) ruutu.

405. Tähistame paarisarve tähega P , paarituid tähega M . Kolmanda rea neljal esimesel elemendil on kuju $MPMP$, neljandas reas $MMPM$, viiendas $MPPP$, kuuen-
das $MMMP$ ja seitsmendas $MPMP$. Seejärel tsükkel kor-
dub (iga rea 4 esimest elementi on määratud eelmise
rea nelja esimese elemendiga). Seepärast on igas reas
vähemalt üks paarisarv.

406. Näitame, et kolmnurga iga rida on aritmeetiline
progressioon, mille algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel
olevate elementide summa jagub arvuga 1958. Tõestame
selle induktsiooniga rea numbri järgi. Esimese rea jaoks
on väide ilmne. Olgu väide n -nda rea jaoks juba tões-
tatud. Võtame n -ndast reast kolm naaberelementi a , $a+d$,
 $a+2d$. $(n+1)$ -ses reas vastavad neile elemendid $2a+d$,
 $2a+3d$ vahega $2d$. Seega on $(n+1)$ -ses reas progressioon
vahega $2d$. Et leida selle rea algusest ja lõpust võrdsetel
kaugustel olevate elementide summat, piisab esimese ja
viimase elemendi summa leidmisest. Ent kui n -nda rea
kaks esimest elementi on a ja b ning kaks viimast c ja d ,
siis on $(n+1)$ -se rea esimese ja viimase elemendi summa
 $(a+b) + (c+d) = 2(a+d)$, mis jagub induktsiooni eel-
duse tõttu arvuga 1958. Järelikult jagub iga rea esimese
ja viimase elemendi summa arvuga 1958, siis on aga see
omadus ka kahel eelviimase rea elemendil ja tabeli vii-
masel elemendil.

407. a) Tõestame võrduse induktsiooniga $n+m$ järgi.
Olgu võrdus a) tõestatud kõigi selliste naturaalarvude
 k , s jaoks, kus $k+s < n+m$. Siis saame

$$u_{n+m} = u_{n+m-1} + u_{n+m-2} = u_{n-1}u_{m-1} + u_n u_m + u_{n-1}u_{m-2} + \\ + u_n u_{m-1} = u_{n-1}(u_{m-1} + u_{m-2}) + u_n(u_m + u_{m-1}) = \\ = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}. \quad (1)$$

Et $m+n=1$ puhul on vördus (1) vahetult kontrollitav, siis kehtib ta suvaliste m ja n korral.

b) Töestame induktsiooniga k järgi. $k=1$ korral on väide triviaalne. Olgu juba töestatud, et u_{km} jagub arvuga u_m . Vörduse (1) järgi saame

$$u_{(k+1)m} = u_{km+m} = u_{km-1}u_m + u_{km}u_{m+1}$$

ja seetöttu jagub ka $u_{(k+1)m}$ arvuga u_m . Induktsiooniprintsiibi põhjal järeldame, et kõik liikmed u_{mn} jaguvad arvuga u_m .

c) Jagugu u_n ja u_{n+1} arvuga $k \neq 1$. Siis jaguks ka $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$ arvuga k . Seda arutlust jätkates saaksime, et $u_1=1$ jagub arvuga k , kuid see on vöimatu.

408. Tähistame arvude a ja b suurima ühisteguri (a, b) kaudu. Vördusest $u_{m+n} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}$ järeldub, et (u_{m+n}, u_n) on arvu $u_{n-1}u_m$ jagajaks ning et u_n ja u_{n-1} on ühistegurita, siis ka arvu u_m jagajaks. Vastupidi, (u_m, u_n) on arvu u_{m+n} jagajaks. Seetöttu $(u_m, u_n) = (u_{m+n}, u_n)$. Kuid siis järeldub seosest $n = km + q$, et $(u_m, u_n) = (u_m, u_q)$. Eukleidese algoritmi rakendades veendume, et $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$. Erijuhul $(u_{1000}, u_{770}) = u_{10} = 55$.

409. Vaatleme arve, mis esitavad Fibonacci arvude nelja viimast kümnendkohta. Et neljakohalisi arve 0000, 0001, ..., 9999 on 10^4 , siis saab nendest arvudest koostada 10^8 paari. Järelikult leidub esimese 100 000 001 Fibonacci arvu seas kaks paari (u_m, u_{m+1}) ja (u_n, u_{n+1}) , $n > m$, nii et arvudel u_m ja u_n ning samuti arvudel u_{m+1} ja u_{n+1} on viimased neli numbrit ühesugused. Kuid siis lõpevad arvud $u_n - u_m$ ja $u_{n+1} - u_{m+1}$ nelja nulliga. Et

$$u_{n-1} - u_{m-1} = (u_{n+1} - u_{m+1}) - (u_n - u_m),$$

siis lõpeb ka $u_{n-1} - u_{m-1}$ nelja nulliga. Jätkates indeksi vähendamist ja arvestades, et $u_0=0$, saame, et arv u_{n-m} lõpeb nelja nulliga.

410. Olgu valitud arvud $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+7}$, avaldame nad u_n ja u_{n+1} kaudu:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_n + u_{n+1}, & u_{n+3} &= u_n + 2u_{n+1}, & u_{n+4} &= 2u_n + 3u_{n+1}, \\ u_{n+5} &= 3u_n + 5u_{n+1}, & u_{n+6} &= 5u_n + 8u_{n+1}, & u_{n+7} &= 8u_n + \\ & & & & + 13u_{n+1}. \end{aligned}$$

Järelikult on nende arvude summa $21u_n + 33u_{n+1}$. Kuid $u_{n+8} = 13u_n + 21u_{n+1}$, $u_{n+9} = 21u_n + 34u_{n+1}$. Vörratustest $u_{n+8} < 21u_n + 33u_{n+1} < u_{n+9}$ on ilmne, et $21u_n + 33u_{n+1}$ ei ole Fibonacci arv.

411. Väide a) tõestatakse induktsiooni abil. $n=1$ puhul on ta ilmne. Kehtigu ta n korral:

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$$

Lisame võrduse mõlemale poolele arvu u_{2n+2} . Et $u_{2n+2} + u_{2n+1} = u_{2n+3}$, siis saame $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n+2} = u_{2n+3} - 1$. Sellega on meie väide tõestatud. Täpselt samuti tõestatakse väide b).

Väide c) tõestatakse samuti matemaatilise induktsiooni abil.

Väite d) tõestamiseks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} = \\ &= u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = \\ &= u_{n+1} u_{n+1} - u_n^2. \end{aligned}$$

Seepärast

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n [u_1^2 - u_0 u_2] = (-1)^n.$$

Väited e) ja f) tõestame koos. $n=1$ puhul on nad ilmsed. Olgu nad juba tõestatud $n=k$ puhul. Väite d) põhjal saame siis

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2k} u_{2k+1} + u_{2k+1} u_{2k+2} &= \\ &= u_{2k+1}^2 - 1 + u_{2k+1} u_{2k+2} = u_{2k+1} u_{2k+3} - 1 = u_{2k+2}^2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2k+1} u_{2k+2} + u_{2k+2} u_{2k+3} &= \\ &= u_{2k+2}^2 + u_{2k+2} u_{2k+3} = u_{2k+2} u_{2k+4} = u_{2k+3}^2 - 1. \end{aligned}$$

Järelikult on need väited õiged ka $n=k+1$ puhul ja seega kõigi n korral.

Väite g) tõestamiseks paneme tähele, et a) ja b) põhjal on

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} = u_{n+3} - 1.$$

Seepärast, kui g) n puhul kehtib, siis

$$\begin{aligned} (n+1)u_1 + nu_2 + \dots + 2u_n + u_{n+1} &= \\ &= u_{n+4} - (n+3) + u_{n+3} - 1 = u_{n+5} - (n+4). \end{aligned}$$

Et võrdus g) kehtib $n=1$ korral, siis kehtib ta iga n puhul.

Seos h) järeldub vaevata sellest, et

$$\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + u_{3n+3} = \frac{u_{3n+5} - 1}{2}.$$

Seose i) tõestamiseks võtame $m=n$ valemis $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}$. Saame, et $u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_nu_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$. Täpselt samuti tõestatakse, et $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$. Võttes samas valemis $m=2n$, leiame

$$u_{3n} = u_{n-1}u_{2n} + u_nu_{2n+1} = u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n(u_n^2 + u_{n+1}^2) = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

412. Olgu $u_n \leq N < u_{n+1}$. Siis $0 \leq N - u_n < u_{n-1}$ ja seetõttu leidub selline $s < n-1$, et $u_s \leq N - u_n < u_{s+1}$. Kuid siis kehtib $0 \leq N - u_n - u_s < u_{s-1}$, kusjuures $s-1 < n-2$. Mõne sammu järel saame, et $N = u_n + u_s + u_p + \dots + u_r$, kusjuures naaberindeksid $n, s, p, \dots, r$ erinevad üksteisest vähemalt kahe võrra.

413. Jaotamisviiside arv võrdub liikme x^s kordajaga avaldises

$$\begin{aligned} (1+x+\dots+x^p)(1+x+\dots+x^q)(1+x+\dots+x^r) &= \\ &= (1-x^{p+1})(1-x^{q+1})(1-x^{r+1})(1-x)^{-3} = \\ &= (1-x^{p+1}-x^{q+1}-x^{r+1}-\dots)(1+3x+6x^2+\dots \\ &\dots + C_{n+2}^2x^n + \dots). \end{aligned}$$

Et $p < q+r$, siis $p < s$, $q < s$, $r < s$ ja sellel kordajal on kuju

$$\begin{aligned} C_{s+2}^2 - C_{s-p+1}^2 - C_{s-q+1}^2 - C_{s-r+1}^2 &= \frac{(s+2)(s+1)}{2} - \\ &- \frac{(s-p+1)(s-p)}{2} - \frac{(s-q+1)(s-q)}{2} - \\ &- \frac{(s-r+1)(s-r)}{2}. \end{aligned}$$

Avame sulud ja võtame arvesse, et $p+q+r=2s$. Pärast teisendusi saame

$$s^2 + s + 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2).$$

414. Kui $q+r < p$, siis $q < s$, $r < s$, kuid $p \geq s$ ja seetõttu kordaja on

$$C_{s+r}^2 - C_{s-q+1}^2 - C_{s-r+1}^2.$$

Siit järeldubki meie väide.

415. Kõiki esemeid saab omavahel ümber paigutada $(pq+r)!$ viisil. Seejärel valime p inimese seast (C_p^r viisil)

need r inimest, kes saavad $q+1$ eset, ja jaotame neile esemed järjekorras, andes vastavalt q ja $q+1$ eset. Et tulemus ei sõltu esemete järjekorrast rühmades, siis tuleb $C_p^r(pq+r)!$ jagada arvuga $(q!)^{p-r}[(q+1)!]^r = (q!)^p(q+1)^r$.

416. Et $\sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = i_1 = C_{i_1}^1$, siis $\sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=0}^{i_1} 1 = \sum_{i_1=1}^{i_2} C_{i_1}^1 = C_{i_2+1}^2$.

Edasi saame

$$\sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = \sum_{i_2=1}^{i_3} C_{i_2+1}^2 = C_{i_3+2}^3.$$

Siit järeldub, et arvutatav summa on C_{n+m}^{n+1} .

417. Samasuse tõestamiseks vaatleme kõikvõimalikke permutatsioonide m valgest ja n mustast kuulist. Jaotame kõik m valge ja n musta kuuli permutatsioonid klassidesse. Klassi $(k_1, \dots, k_m)$ arvame permutatsioonid, milles on k_1 üksikult asetsevat valget kuuli, k_2 kõrvuti olevate valgete kuulide paari, $\dots$, k_m m -elemendilist kõrvuti olevate valgete kuulide jada. On selge, et $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$. Leiame klassi $(k_1, \dots, k_m)$ permutatsioonide arvu. Kui n musta kuuli on reas, siis on meil $n+1$ kohta valgete kuulide asetamiseks. Neist täidavad k_1 kohta üksikud kuulid, k_2 kohta paarid, $\dots$, k_m kohta m -elemendilised hulgad ja $n - k_1 - \dots - k_m + 1$ kohta jäävad vabaks. Seetõttu on valgete kuulide jaotamisviise (s.o. klassi $(k_1, \dots, k_m)$ permutatsioonide) $P(k_1, \dots, k_m, n - k_1 - \dots - k_m + 1)$. Et m valge ja n musta kuuli permutatsioonide üldarv on C_{n+m}^m , siis saamegi tõestatava seose.

418. a) Lahendades karakteristliku võrrandi $r^2 - 7r + 12 = 0$, leiame selle lahendid $r_1 = 3$, $r_2 = 4$. Seetõttu on üldlahend

$$a_n = C_1 3^n + C_2 4^n.$$

b) Täpselt samuti saame $a_n = C_1 2^n + C_2 (-5)^n$.

c) Saame $a_n = C_1 (2+3i)^n + C_2 (2-3i)^n$.

d) $a_n = C_1 (3i)^n + C_2 (-3i)^n$.

e) $r_1 = r_2 = -2$. Seepärast $a_n = (-2)^n (C_1 + C_2 n)$.

f) Karakteristlik võrrand on selline: $r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$. Selle lahendid on $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$. Seetõttu $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n + C_3 4^n$.

g) $r_1=r_2=r_3=-1$. Seepärast $a_n = (-1)^n(C_1 + C_2n + C_3n^2)$.

h) Karakteristlikul võrrandil on kuju $r^4+4=0$. Selle lahendid on $r_{1,2}=1\pm i$, $r_{3,4}=-1\pm i$. Seetõttu

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}} [C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n + C_3(-1+i)^n + C_4(-1-i)^n].$$

419. a) Lahendades karakteristliku võrrandi $r^2 - 5r + 6 = 0$, saame $r_1=2$, $r_2=3$ ja seetõttu $a_n = C_12^n + C_23^n$. Võttes $n=1$ ja $n=2$, saame C_1 ja C_2 leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 1; \\ 4C_1 + 9C_2 = -7. \end{cases}$$

Sellest leiame $C_1=5$, $C_2=-3$ ja seepärast $a_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$.

b) Saame $a_n = 2^n(C_1 + C_2n)$. Võttes $n=1$ ja $n=2$, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 + 2C_2 = 1, \end{cases}$$

millest järeldame, et $C_1=1$, $C_2=0$, seetõttu $a_n = 2^n$.

$$\text{c) } a_n = \frac{1}{2^{n+2}} [(-1+i\sqrt{3})^n + (-1-i\sqrt{3})^n].$$

$$\text{d) } a_n = 2^n + 3^n - 4^n.$$

420. Karakteristlik võrrand on $r^2 - 2r \cos \alpha + 1 = 0$. Selle lahenditeks on $r_{1,2} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$. Seepärast $a_n = C_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + C_2(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n$. Võttes $n=1, 2$, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (C_1 + C_2) \cos \alpha + (C_1 - C_2) i \sin \alpha = \cos \alpha; \\ (C_1 + C_2) \cos 2\alpha + (C_1 - C_2) i \sin 2\alpha = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Siit $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} [(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n]$. Moivre'i valemi põhjal $a_n = \cos n\alpha$.

421. Väide järeldub sellest, et karakteristliku võrrandi

$$r^k - C_k^1 r^{k-1} + C_k^2 r^{k-2} + \dots + (-1)^k = 0$$

saab kirjutada kujul $(r-1)^k = 0$. Tal on k -kordne lahend

$r=1$. Seetõttu on rekurrentse võrrandi üheks lahendiks $a_n=n^{k-1}$ (vt. lk. 169).

$$422. a_n = \frac{n}{12} \cdot 2^n + C_1(-4)^n + C_2 2^n.$$

423. Eeldusel, et $p > k+1$, kehtivad seosed:

$$(1+x)^p = 1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \dots + C_p^m x^m + \dots + C_p^p x^p; \quad (1)$$

$$(1+x)^{-k-1} = 1 - C_{k+1}^1 x + C_{k+2}^2 x^2 - \dots + (-1)^s C_{k+s}^s x^s + \dots; \quad (2)$$

$$(1+x)^{p-k-1} = 1 + C_{p-k-1}^1 x + C_{p-k-1}^2 x^2 + \dots + C_{p-k-1}^{p-k-1} x^{p-k-1}.$$

Korrutame võrdused (1) ja (2) ning leiame x^n kordaja. See tuleb

$$\sum_s (-1)^{n-s} C_{k+n-s}^{n-s} C_p^s = \sum_s (-1)^s C_{k+s}^s C_p^{n-s}.$$

Siit järeldub kohe tõestatav võrdus. Ülejäänud samasused kuni ülesandeni 438 (*incl.*) tõestatakse analoogiliselt.

439. Tõestatakse induktsiooniga n järgi.

SISUKORD

Eessõna 3

I. Kombinatorika üldreeglid 7

- Ebausklikud jalgratturid 7
- Kordumistega variatsioonid 8
- Arvusüsteemid 9
- Salalukk 10
- Morsetähestik 10
- Semaforitähestik 11
- Elektronarvuti 13
- Geneetiline kood 13
- Kombinatorika üldreeglid 14
- Doominoülesanne 16
- Kosmoselaeva meeskond 17
- Kabeülesanne 18
- Mitu inimest ei oska võõrkeeli? 20
- Juurde- ja mahaarvamise valem 23
- Milles on viga? 24
- Eratosthenese sõel 25

II. Variatsioonid, permutatsioonid ja kombinatsioonid 27

- Jalgpallimeistrivõistlused 27
- Kordumisteta variatsioonid 28
- Teaduslik ühing 28
- Permutatsioonid 29
- Ülesanne vankritest 30
- Lingvistilised probleemid 32
- Ringmäng 33
- Kordumistega permutatsioonid 33
- Angarammid 35
- Kombinatsioonid 37
- Genua loterii 40
- Kookide ostmine 43
- Kordumistega kombinatsioonid 44
- Uuesti jalgpallimeistrivõistlused 46
- Kombinatsioonide omadused 47
- Juurde- ja mahaarvamise valemi erijuht 54
- Kombinatsioonide vahelduvate märkidega summad 54

III. Kitsendustega kombinatoorikaülesanded	57
Lõvid ja tiigrid	58
Trepi ehitamine	58
Raamaturiiul	59
Kuningas Arthuri nüütlid	60
Tütarlaps ruttab kohtamisele	62
Telepaatiaseanss	64
Üldine nihutamisülesanne	67
Subfaktoriaalid	68
Karavan kõrbes	70
Karussellisõit	73
Kassajärjekord	74
Ülesanne kahest viirust	78
Kombinatsioonide uued omadused	79
IV. Jaotuste kombinatoorika	83
Doominomäng	84
Kastidesse paigutamine	85
Lillekimp	86
Ülesanne jagajate arvu kohta	87
Õunte korjamine	88
Seente korjamine	89
Fotode saatmine	89
Lipud mastidel	90
Signaalide üldarv	92
Erinevad statistikad	92
Arvude lahutamine liidetavaiks	93
Panderolli saatmine	94
Üldine margikleepimise ülesanne	95
Informatsiooniteooria kombinatoorsed ülesanded	97
Abituriendiprobleem	97
Raha maksmine	99
Kompvekkide ostmine	101
Kuidas kümnekopikalist peeneks vahetada?	102
Arvude liidetavateks lahutamine	103
Diagrammitehnika	105
Duaalsed diagrammid	107
Euleri valem	108
V. Kombinatoorika malelaua	113
Inimene hulgub linnas	113
Aritmeetiline ruut	114
Kujundarvud	116
Aritmeetiline kolmnurk	117
Laiendatud aritmeetiline kolmnurk	119
Malekuningas	120
Üldistatud aritmeetiline kolmnurk	121
Üldistatud aritmeetiline kolmnurk ja arvude m -ndsüsteem	123
Arvude $C_m(k, n)$ mõningad omadused	123
Ülesanne nurgas paiknevast kabendist	124
Aritmeetiline viisnurk	127

Geomeetriline viis kombinatsioonide omaduste
tõestamiseks 128
Juhuslik ekslemine 132
Browni liikumine 133
Šemahha keisrinna juures 135
Neelav membraan 137
Ekslemine lõpmatul tasandil 137
Üldine malevankrite ülesanne 139
Sümmeetrilised paigutused 140
Kaks ratsut 143

VI. Rekurrentsed seosed 146

Fibonacci arvud 147
Teine tõestusmeetod 150
Järkjärgulise jaotamise protsess 151
Arvude korrutamine ja jagamine 152
Ülesanded hulknurkadest 154
Kojaülem raskustes 157
Onnepiletid 160
Rekurrentsed tabelid 162
Kojaülemaja-probleemi teine lahendus 163
Rekurrentsete seoste lahendamine 164
Lineaarsed konstantsete kordajatega rekur-
rentsed võrrandid 166
Juht, kus karakteristliku võrrandi juured on
võrdsed 168
Rekurrentsete võrrandite rakendamine infor-
matsiooniteoorias 169
Kojaülemaja-ülesande kolmas lahendus 170

VII. Kombinatorika ja read 171

Polünoomide jagamine 171
Algebralised murrud ja astmeread 172
Tehted astmeridadega 176
Astmeridade kasutamine samasüste tõesta-
miseks 179
Genereerivad funktsioonid 180
Newtoni binoomvalem 181
Polünoomvalem 184
Newtoni rida 187
Ruutjuurte leidmine 190
Genereerivad funktsioonid ja rekurrentsed
seosed 193
Osamurdudeks lahutamine 195
Ühest mittelineaarsest rekurrentsest seo-
sest 198
Genereerivad funktsioonid ja arvude jaota-
mine 200

Kokkuvõte 204
Ülesanded 206
Lahendused ja vastused 249

Наум Яковлевич Виленкин.

Комбинаторика.

На эстонском языке.

Перевел с русского Я. Хион.

Художник-оформитель О. Меллов.

Иллюстратор Ю. Керем.

Издательство «Валгус», Таллин.

Toimetaja H. Heinoja

Kunstiline toimetaja A. Säde

Tehniline toimetaja V. Ansip.

Korrektorid K. Abram ja S. Hiie.

Laduda antud 15. XI 1974.

Trükkida antud 11. IX 1975.

Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2. 84×108/32.

Trükipoognaid 10,875.

Tingtrükipoognaid 18,27.

Arvestuspoognaid 18,09.

Trükiarv 5000.

Kirjastus «Valgus», Tallinn, Pärnu mnt. 10.

H. Heidemanni nim. trükikoda,

Tartu, Ülikooli 17/19. II

Tellimuse nr. 5831.

Hind 67 kop.