

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

VIIIE KOOLI VÕISTLUSED
MATEMAATIKAS

Koostanud: E. MEIDLA

Tallinn
1984

© Eesti NSV Haridusministeerium, 1984

ÜLEVAADE VIIE KOOLI VÕISTLUSTEST MATEMAATIKAS

Et õpilasi paremini ette valmistada täppisteaduste olümpiaadideks, alustati 1965. aastal käesoleva kogumiku autori initsiatiivil koolidevahelisi võistlusi matemaatikas.

Esimesel koolidevahelisel võistlusel 1965/66. õppeaastal kohtusid Tartu I Keskkoolis Viljandi I ja Tartu I Keskkooli võistkonnad. Mitteametliku võistkonnaga esines Nõo Keskkool. Võistkondlikult võitis Viljandi I Keskkool. Parimateks lahendajateks olid viljandlased Indrek Kolkks, Meelis Krigul ja Peeter Tooming. Võistlusülesanded koostas TRÜ õppejõud Kalle Velsker.

Teisel võistlusel 1966/67. õppeaastal Viljandis osalesid Tartu I, Nõo ja Viljandi I Keskkooli võistkonnad. Võisteldi matemaatikas, füüsikas ja keemias. Viljandi TSN TK Haridusosakonna poolt pandi välja ränddiplomid parimatele koolidele. Kõikides ainetes tuli võitjaks Nõo Keskkool. Matemaatikas järgnesid Tartu I Keskkool ja Viljandi I Keskkool. Matemaatika ülesanded osutusid eriti rasketeks.

Kolmas koolidevaheline võistlus toimus 1967/68. õppeaastal Nõos. Parim oli Nõo Keskkool, järgnesid Viljandi I ja Tartu I Keskkool.

Neljandal koolidevahelisel kohtumisel 1968/69. õppeaastal lülitus võistlusse ka Tartu V Keskkool, samas koolis ka võisteldi. Tuleb märkida, et see võistlus korraldati eriti pidulikult ja ladusalt. Parimatele koolidele ja õpilastele oli kooli juhtkond välja pannud uusi rändvimpleid, auhindu ja mälestusesemeid. Koolide järjestus: Nõo, Viljandi I, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Individuaalselt oli parim kümnenda klassi õpilane Toomas Vään Nõo Keskkoolist.

Viies võistlus toimus 1969/70. õppeaastal Tartu I Keskkoolis. Koolid järjestusid nii: Nõo, Tartu I, Viljandi I ja Tartu V Keskkool. Parimateks osutusid: 1.–2. V. Altleis ja Ü. Samarüütel Nõo Keskkoolist, 3. M. Noppel Tartu I Keskkoolist.

Kuues võistlus toimus 1970/71. õppeaastal Viljandis. Koolide paremusjärjestus: Nõo, Viljandi I, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Esikoht läks jagamisele viljandlaste Jaan Pruulmanni ja Lembit Kuriku vahel.

Seitsmes võistlus toimus 1971/72. õppeaastal Nõos. Koolid järjestusid nagu eelmisel aastal: Nõo, Viljandi I, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Individuaalselt võitis Tõnis Pleksepp Nõost viljandlase Urmas Haudi ees.

Kaheksas võistlus toimus 1972/73. õppeaastal Tartu V Keskkoolis.

Viienda koolina lülitus võistlusse tugeva tasemega Tartu II Keskkool. Koolide järjestus: Nõo, Tartu II, Viljandi I, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Parimateks lahendajateks osutusid Kalle Kulbok ja Toivo Jullis Nõo Keskkoolist ning Martin Viil Tartu II Keskkoolist.

Üheksas võistlus toimus 1973/74. õppeaastal Tartu II Keskkoolis. Koolid järjestusid nii: Nõo, Viljandi I, Tartu I, Tartu II ja Tartu V Keskkool. Parimad lahendajad olid Kalle Kulbok Nõo Keskkoolist ja Anto Unt Tartu II Keskkoolist. Kolmandaks tuli Nõo Keskkooli X klassi õpilane Elle Eglit.

Kümnes võistlus toimus 1974/75. õppeaastal Tartu I Keskkoolis. Koolid järjestusid järgmiselt: Nõo, Viljandi I, Tartu II, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Esikohta jagasid 4 õpilast: Elle Eglit, Andres Lilla Nõo Keskkoolist ja Kaido Kama ning Tiina Reha Viljandi I Keskkoolist.

Üheteistkümnes võistlus toimus 1975/76. õppeaastal Viljandi I Keskkoolis. Koolid reastusid selliselt: Nõo, Tartu II, Viljandi I, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Individuaalselt olid parimad: 1.–2. Uku Tuul Tartu II Keskkoolist ja Tarmo Maasik Nõo Keskkoolist. 3.–4. Toivo Mängel Nõo Keskkoolist ja Tõnis Örd Tartu I Keskkoolist. Esindajate nõupidamisel kinnitati võistluste põhikiri järgnevateks aastateks. Olulisemaks muudatuseks oli see, et iga kooli 10-liikmelises võistkonnas peab olema vähemalt 2 õpilast IX klassist (või noorematest klassidest) ja 2 õpilast X klassist (või noorematest klassidest). Võistlusülesannetest peavad 3 olema jõukohased üheksanda klassi õpilastele, 4 kümnenda klassi õpilastele ja 5 üheteistkümnenda klassi õpilastele. Selle kohtumise ülesandeid, mis olid nimetatud põhimõttel koostatud, suutsid nooremad õpilased edukalt lahendada.

Kaheteistkümnes võistlus toimus 1976/77. õppeaastal Nõos. Koolide paremusjärjestus: Nõo, Viljandi I, Tartu II, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Võitjaks oli X klassi õpilane Urmas Lips Nõo Keskkoolist, järgnesid sama kooli õpilased Jaanus Pöial, Anneli Johanson ning viljandlased Jaanus Tekko ja Toomas Talts.

Kolmeteistkümnes võistlus toimus 1977/78. õppeaastal Tartu V Keskkoolis. Koolid reastusid nii: Nõo, Viljandi I, Tartu V, Tartu II, Tartu I Keskkool. Parim lahendaja oli Jaan Janno Nõost, 2.–3. kohta jagasid Jaanus Tekko Viljandist ja Jüri Šeffler Nõost.

Neljateistkümnes võistlus toimus 1978/79. õppeaastal Tartu II Keskkoolis. Koolide paremusjärjestus: Nõo, Tartu I, Viljandi I, Tartu II ja Tartu V Keskkool. Esikohta jagasid viis õpilast: Peep Abel Viljandi I Keskkoolist, Peeter Ellervee Tartu V Keskkoolist, Erko Jalviste Tartu I Keskkoolist, Hillar Kukk, Jüri Šeffler ja Jaan Janno Nõo Keskkoolist.

Viieteistkümnes võistlus toimus 1979/80. õppeaastal Tartu I Keskkoolis. Koolid reastusid selliselt: Nõo, Viljandi I, Tartu I, Tartu II ja Tartu V Keskkool. Võitja oli Hillar Kukk Nõost, 2.–3. kohta jagasid Andri Ksenofon-

toiv Tartu II ja Jüri Helekivi Nõo Keskkoolist.

Kuueteistkümnnes võistlus toimus 1980/81. õppeaastal Tartu II Keskkoolis. Koolide järjestus: Nõo, Viljandi I, Tartu V ja Tartu I Keskkool. Esi kohta jagasid neli õpilast: Kalev Jaaniste, Jüri Helekivi, Arvo Jägel Nõost ja Peep Abel Viljandist.

Seitsmeteistkümnnes võistlus toimus 1981/82. õppeaastal Viljandis. Koolid reastusid nii: Nõo, Viljandi I, Tartu I, Tartu V ja Tartu II Keskkool. Parimaks lahendajaks oli Arvo Jägel Nõost, järgnes koolikaaslane Jüri Helekivi ja viljandlane Kaja Tõnisalu.

Kaheksateistkümnnes võistlus toimus 1982/83. õppeaastal Tartu V Keskkoolis. Tihedas konkurentsiga jagasid esikohta Viljandi I ja Nõo Keskkool. Järgnesid Tartu II, Tartu V ja Tartu I Keskkool. Individuaalses võistluses jagasid esikohta kolm õpilast: Külli Grünbach ja Jaak Valgru Viljandist ning Toomas Tamm Tartu II Keskkoolist.

Üheksateistkümnnes võistlus toimus Tartu I Keskkoolis 1983/84. õppeaastal. Koolide võistkondade paremusjärjestus: Nõo, Tartu II, Viljandi I, Tartu I ja Tartu V Keskkool. Parimad lahendajad olid Allan Liblik ja Ivo Haamer Nõo Keskkoolist, Märt Pöldvere Tartu II ja Alar Aab Nõo Keskkoolist.

ÜLESANNETE TEKSTID

I VÕISTLUS

1. Võrrelda murdude A ja B suurusi, kui

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{ja} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}.$$

2. Kolmnurga küljed a , b ja c moodustavad aritmeetilise jada kolm järjestikust liiget ja rahuldavad tingimust $a < b < c$. Tõestage, et $ac = 6Rr$.
3. Oletame, et teil on vaid üks kell ja seegi seinakell. Ühel päeval on kell seisma jäänud ja otsustate minna lähedal elava sõbra poole, et õiget aega teada saada. Teate ka, et sõber tahab rääkida matemaatikaülesannetest ning te ei saa kohe tagasi tulla. Kuidas teil tuleks toimida, et saaksite pärast naasmist oma seinakella enam-vähem õigeks?

4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37, \\ x^2 + z^2 + xz = 28, \\ y^2 + z^2 + yz = 19. \end{cases}$$

5. Tõestada, et

$$a^2(c-d) + b^2(a-c) + c^2(b-a) \neq 0,$$

kui a , b ja c ei ole paarikaupa võrdsed.

II VÕISTLUS

1. Tõestada, et $\cos A : \cos B : \cos C = 12 : 9 : 2$, kui $A + B + C = \pi$ ja $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$.
2. Kolm võrdse raadiusega r ringjoont lõikuvad paarikaupa täisnurga all. Määrake nende ringjoonte sisepiirkondase ühisosa pindala.
3. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y - z = 15, \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{y} + \frac{5}{z} = 3, \\ xy - xz + yz = 75. \end{cases}$$

4. Mitu korda ööpäevas on kellaosutid sellises asendis, et nende äravahtamisel saadud asendil on mõte?
5. Leida summa $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ teades, et järjestikuste liikmete vahed moodustavad naturaalarvude jada $1; 2; 3; \dots$ ja $a_0 = 0$.

III VÕISTLUS

1. Tõestada, et kolmnurk on täisnurkne, kui kolmnurgas kehtib seos

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1.$$

2. Võrdhaarse kolmnurga ABC ümberringjoone raadius on R ning siseringjoone raadius on r . Tõestada, et nende ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus $d = \sqrt{R(R - 2r)}$.
3. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3xy = 2(x + y), \\ 5yz = 6(y + z), \\ 4zx = 3(z + x). \end{cases}$$

4. Kuus õpilast, tähistame nad tähtedega A, B, C, D, E, F , käisid matemaatikaolümpiaadil. Kaks nendest lahendasid ära kõik ülesanded. „Kes lahendasid ära kõik ülesanded?“ vastasid nad järgmiselt:

- 1) A ja E ,
- 2) B ja F ,
- 3) F ja A ,
- 4) B ja D ,
- 5) C ja A ,

ning lisasid, et antud vastustest 4 on sellised, kus üks osa on õige, teine osa on väär, üks vastus on aga täiesti väär. Kes lahendasid ära kõik ülesanded?

IV VÕISTLUS

1. N keskkooli vanemates klassides on 356 õpilast. Ankeedi andmetel loeb nendest järjekindlalt

ajalehte „Noorte Hääl“	83 õpilast,
ajalehte „Edasi“	122 õpilast,
ajakirja „Horisont“	176 õpilast,
kogumikku „Matemaatika ja kaasaeg“	18 õpilast,
„Noorte häält“ ja „Edasit“	55 õpilast,
„Noorte häält“ ja „Horisonti“	24 õpilast,
„Noorte häält“ ning „Matemaatikad ja kaasaeg“	2 õpilast,
„Edasit“ ja „Horisonti“	30 õpilast,
„Edasit“ ning „Matemaatikad ja kaasaeg“	5 õpilast,
„Horisonti“ ning „Matemaatikad ja kaasaeg“	1 õpilane,
kõiki 4 väljaannet	1 õpilane.

Mitu õpilast loeb järjekindlalt ainult üht nimetatud väljaannetest? Mitu õpilast ei loe ühtki neist, kui on teada, et ainult kolme väljaande lugejaid ei ole.

2. Regulaarset tetraeedrit, mille serva pikkus on a , lõigati tasandiga, mis läbib ühe serva keskpunkti ja on paralleelne kahe omavabel mittelõikuva servaga. Leida lõikamisel tekkinud tasandilise kujundi pindala.

Märkus. Regulaarseks tetraeedriks nimetatakse kolmnurkset püramiidi, mille kõik servad on võrdsed.

3. Õpilane pidi korrutama kaks kolmekohalist arvu ja tulemuse jagama viiekohalise arvuga. Ta ei märganud aga korrutamismärki ja luges korrutiseisvad arvud übeks kuuekohaliseks arvuks, mistõttu saadud täisarvuline jagatis osutus kolm korda suuremaks tõelisest. Leida kõik kolm arvu.
4. Ostja A maksis kassasse 47,5 m paela eest 25 rubla. Ostja B maksis aga 83 m sama sorti paela eest 100 rbl. Kassiir eksis raha tagasiandmisel ja ulatas kummalegi ostjale nii mitu kopikat, kui mitu rubla nad oleksid pidanud saama. Vea selgitamisel ilmnes, et kassiir oli saanud mõlemalt ostjalt kokku täpselt nii palju raha, kui palju maksis nende poolt ostetud pael. Seepärast sai vea kõrvaldada nii, et ostja A maksis ostjale B 64 rbl. ja mingi arvu kopikaid. Kui palju maksis 1 m paela?

V VÕISTLUS

1. Lahendada võrrand

$$x + \log 1 + 2^x = x \log 5 + \log 6.$$

2. Kolmnurga pindala avaldub seosena $S = a^2 - (b - c)^2$. Leida nurk α .

3. Lahendada võrrand $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ ja leida, millistel parameetri p väärtustel on sellel võrrandil reaalarvuline lahend.
4. Leida järgmise avaldise väärtus:

$$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}}}}\dots$$

VI VÕISTLUS

1. Leida neljakohaline arv, mis on täisruut ja mille kaks viimast numbrit on võrdsed ning kaks esimest numbrit on võrdsed.
2. Tõestada, et mis tahes kolmnurgas on kahe külje korrutis võrdne kolmandale küljele tõmmatud kõrguse ja kolmnurga ümberringjoone diameetri korrutisega.
3. Määrata x , kui
 - õpilane A ütleb: 1) x pöördväärtus ei ole väiksem kui 1,
2) x ei sisalda numbrit 6,
3) $x^3 < 221$;
 - õpilane B ütleb: 1) x on paarisarv,
2) x on algarv,
3) x on arvu 5 kordne;
 - õpilane C ütleb: 1) x on irratsionaalarv,
2) x on väiksem kui 6,
3) x on naturaalarvu ruut;
 - õpilane D ütleb: 1) x on suurem kui 20,
2) x on vähemalt kolmekohaline positiivne arv,
3) x ei ole väiksem kui 10.

On teada, et iga õpilase vastustest on vähemalt üks õige ja vähemalt üks väär.

- #### 4. Lahendada võrrand

$$3^{|x-\frac{1}{4}|+2} - 4 \sin 2\pi x = 5.$$

VII VÕISTLUS

1. Millise parameetri a väärtuse korral on võrrandi $x^2 - ax + a - 1 = 0$ lahendite ruutude summa väikseim (minimaalne)?

2. Ringjoone, mille keskpunkt on O , ümber on joonestatud puutujanelinurk $ABCD$. Tõestada, et $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.
3. Leida $\frac{1}{3}$ suuremad harilikud murrud, mille väärtus ei muutu, kui nende lugejaid suurendada mingi arvu võrra ja nimetajaid suurendada sama arv korda.
4. Lahendada võrratus $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.
5. Kolmnurga kaks kõrgust on mitte väiksemad külgedest, millega nad on risti. Tõestada, et niisuguse kolmnurga kaks nurka on 45° .
6. Leida $\cos(\alpha - \beta)$, kui $\cos \alpha + \cos \beta = a$ ja $\sin \alpha + \sin \beta = b$.

VIII VÕISTLUS

1. Võrdhaarse kolmnurga alusele joonestatud kõrgus on m võrra suurem selle kolmnurga siseringjoone raadiusest r . Leida kolmnurga alus ja ümberringjoone raadius R , kui kolmnurga aluse lähisnurk on α .
2. Veendunud, et $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$,
 $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$,
 $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$,
 tuletada valem $\sqrt{x + \frac{x}{x^2 - 1}} = x\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$.
3. Ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega $R = 10\text{cm}$ puudutab seesmiselt kaht erineva raadiusega ringjoont keskpunktidega O_1 ja O_2 . Sisemised ringjooned puudutavad ka teineteist. Leida kolmnurga OO_1O_2 ümbermõõt, kui $\angle O_1OO_2 = 30^\circ$.
4. Madis sündis 19. sajandil. 1901. aastal oli ta vanust tähistava arvu numbrite summa võrdne sünniaasta numbrite summaga. Mis aastal sündis Madis?
5. Tõestada, et $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ on täisarv iga paarisarvulise n korral.

6. Teostada tehe, kui erinevad tähed tähistavad erinevaid numbreid.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ \times \quad e\ d \\ \hline g\ g\ g\ d \\ +\ e\ f\ f\ f \\ \hline h\ d\ d\ i\ d \end{array}$$

IX VÕISTLUS

1. Tõestada, et lõikudes moodustavad rööpküliku sisenurkade poolitajad ristküliku, mille diagonaalid on võrdsed rööpküliku kahe lähiskülje vahega.
2. Tõestada, et ei leidu kolmekohalist algarvu, mille numbrid oleksid aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks.
3. Üheksa samahinnalist raamatut maksavad kokku 11 rubla kopikatega, 13 samasugust raamatut maksavad aga 15 rubla kopikatega. Leida ühe raamatu hind.

4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

leides eelnevalt korrutise xy .

5. Kolmnurgale ABC , milles $a = 2$, $b = 3$ ja $\gamma = 60^\circ$, on joonestatud ümberringjoon. Leida nende kolme ringjoone raadiused, mis läbivad kolmnurga ABC kahte tippu ning ümberringjoone keskpunkti.
6. Arvud 12; 14; 37 ja 65 moodustavad võrrandi $xy - xz + yt = 182$ lahendi. Määrata iga tähe väärtus.

X VÕISTLUS

1. Tõestada, et võrdsete alustega ja võrdsete tipunurkadega kolmnurkadest on võrdhaarne kolmnurk suurima ümbermõõduga.

Näpunäide. mõelge, mis on selliste kolmnurkade tippude poolt moodustatud punktihulgaks, kui kolmnurga alus jääb samaks.

2. Tõestada, et igasuguste trapetsite korral nende haarade pikenduste lõikepunkt, diagonaalide lõikepunkt ning aluste keskpunktid asetsevad ühel ja samal sirgel.

3. Kaks venda otsustasid hakata tegelema lambakasvatusega, nad müüsid om ühise omandi – lehmakarja – ja jaotasid saadud raha eest ostetud lambad omavahel. Iga lehma eest saadi nii mitu dollarit, kui palju oli algselt karjas lehma, iga lamba hinaks oli 10 dollarit. Lõpuks jäi vendadel üle alla 10 dollari, millest piisas täpselt noore oina ostuks. Nüüd oli ostetud loomi paarisarv ning jaotamine lihtsam, Ilmselt peab aga see vendadest, kes sai noore oina, saama teiselt teatava summa. Kui suur summa tuleb maksta?
4. Lahendada võrrand

$$\cos 2x + \log_4 \left(\frac{1}{2} \sin x \right) + 2 \cos x \left(\log_{\frac{1}{2}} \sin x \right) = 2 \cos x + \sin^2 x \left(\log_2 \sin^2 x \right).$$

5. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27. \end{cases}$$

XI VÕISTLUS

1. Tõestada, et $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ jagub 19-ga, kui $n \in \mathbb{N}$.
2. Tõestada, et $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
3. Olgu D vabalt võetud punkt kolmnurga ABC välisnurga C poolitajal. Tõestada, et $AC + BC \leq AD + BD$.
4. Võrdkülgse kolmnurka küljega a joonestatakse siseringjoon ja sellele puutuja lõigud paralleelselt kolmnurga külgedega, nii et igas kolmnurgas tekib uus kolmnurk. Igale saadud kolmnurgale joonestatakse jälle siseringjoon ja sellele puutuja lõigud, nii saadakse 9 uut kolmnurka jne. Leida tekkivate ringide pindalade summa piirväärtus, kui protsessi jätkatakse lõpmatult.
5. Koolis toimunud maleturniiril jõudsid finaali Jaan, Jüri, Kalle ja Ülo. Igaühel tuli mängida üks partii ülejäänutega. Punktid otsustati kokku võtta järgmiselt: iga võistleja saab punkti nende partiide eest, mis ta ise võidab, ja ka nende partiide eest, mille võidab see, kes temale kaotas. Jaan kaotas Ülole, kuid võitis võistlused. Kalle jäi viimaseks. Millised olid Jüri partiide tulemused?

XII VÕISTLUS

1. Õpilasel on metallraha kokku 1 rbl., kusjuures mündid on 10-kopikalised ja väärtuselt väiksemad kui 10 kopikat. Kui võtta üks igat liiki müntidest, saame kokku 15 kopikat. Mitu iga väärtusega münti on õpilasel, kui kõige suurema väärtusega münte on 4 võrra rohkem ülejäänutest?
2. Milliste aritmeetiliste jadade korral ei sõltu jada n esimese liikme summa ja n järgneva liikme summa suhe liikmete arvust?
3. Lahendada võrrand

$$\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}.$$

kui sümbol $\lfloor a \rfloor$ tähendab suurimat täisarvu, mis ei ole suurem kui arv a . Näiteks $\lfloor 6,5 \rfloor = 6$, $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$, $\lfloor 6 \rfloor = 6$.

4. Leida, mitu lahendit on võrrandil $0,01x = \sin x$.
5. Kaks väliselt puutuvat ringjoont asuvad kolmandas ringis, mida kumbki neist puudutab sisemiselt. Kõigi kolme ringjoone keskpunktid asuvad ühel ja samal sirgel. Leida see osa suure ringi pindalast, mis jääb väljapoole väikseid ringe, kui väikeste ringjoonte ühisest punktist tõmmatud puutuja lõik, mis jääb suure ringi sisse, on t .

XIII VÕISTLUS

1. Kahe naturaalarvu summa on 145. Üks nendest arvudest lõpeb numbriga 2. Kui see number 2 ära kustutada, jäävad alles numbrid, millest teine arv on moodustatud. Leida need naturaalarvud.
2. Kaasõpilase sünnipäeval kohtusid neli õpilast: Ernst, Franz, Karl ja Martin, kelle perekonnanimed (mitte samas järjekorras) on Altmann, Müller, Neubert ja Träger. Igal neist oli sünnipäevalapse jaoks kingitus kaasas.

On teada:

- 1) Martinil olid lilled, Altmannil pastapliats, Mülleril raamat, Karlil kompevikikarp.
- 2) Esimesena lahkus Martin, teisena Neubert, siis Ernst ja lõpuks Müller.

Millised on nende õpilaste ees- ja perekonnanimed?

3. Lahenda võrrand

$$\frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}.$$

4. Kolmnurgas ABC on $\angle ABC = \beta = 45^\circ$. Küljel BC on märgitud punkt P nii, et $3BP = CB$ ja $\angle APC = \delta = 60^\circ$. Leida $\angle ACB$.
5. Lõpmatu geomeetrilise jada liikmed on positiivsed, kusjuures jada iga liige, alates teisest, on suurem kõigi temale eelnevate liikmete summast. Leida jada tegur q .

XIV VÕISTLUS

1. Võrdhaarse trapetsi alused on 10 cm ja 8 cm ning diagonaal poolitab teravnurga. Leida trapetsi übermõõt.

2. Leida x naturaalarvuline väärtus, mis rahuldab võrrandit

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3.$$

3. Tõestada, et kahe järjestikuse paaritu naturaalarvu summa jagub 4-ga ja iga 4-ga jaguv arv on kahe järjestikuse paaritu arvu summa.

4. Leida võrrandi $x^2 - y^2 = 21$ täisarvulised lahendid.

5. Ain, Ivar, Vahur ja Peeter võistlesid 60 m jooksus. Kui pärast jooksu küsiti, millises järjekorras nad lõpetasid, vastasid poisid järgmist:

Ain: „Mina olin esimene ja Vahur viimane“.

Ivar: „Mina jäin viimaseks, aga Ain oli teine“.

Vahur: „Mina olin esimene ja Ivar oli kolmas“.

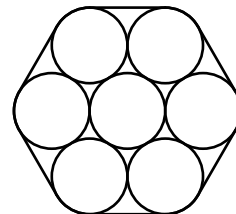
Peeter: „Mina olin Ainist parem ja Ivar oli teine“.

Millises järjekorras lõpetasid poisid jooksu, kui hiljem selgus, et iga poisi vastuses oli üks osa õige ja teine osa väär?

6. Kaks töölisest said ühesuguse ülesande valmistada teatud arvu detaile. Esimene tööline täitis ülesande tähtajaks. Teine täitis tähtajaks ainult 90% ülesandest, kusjuures tal jäi puudu nii palju detaile, kui esimene tegi 40 minutiga. Kui teine tööline oleks teinud tunnis 3 detaili rohkem, siis oleks ta ülesande täitnud 95%-liselt. Mitu detaili pidi tegema kumbki tööline?

XV VÕISTLUS

1. Tõestada, et $p^2 - 1$ jagub alati arvuga 24, kui p on kolmest suurem algarv.
2. Seitse võrdse raadiusega ringi on joonisel 1 näidatud viisil piiratud joonega. Leida tekkinud kujundi ümbermõõt ja pindala, kui ringide raadius on r .



Joonis 1

3. Leida a nii, et võrrandi $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ lahendite ruutude summa oleks minimaalne (s.t. väikseim).
4. Lahendada võrratus

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1.$$

5. Aita ja Rein tutvusid uusaastapäeval 1953. Vestluse käigus läks jutt vanusele ja Aita ütles: „Olen nii vana kui minu sünniaasta numbrite summa.“ Mõningase mõtlemise järel õnnitles Rein Aitat sünnipäeva puhul. Kuidas sai Rein teada, et Aital on sünnipäev? Kui vanaks sai Aita?

XVI VÕISTLUS

1. Leida kõik siisuguste naturaalarvude paarid, millesse kuuluvate arvude ruutude vahe võrdub nende aritmeetilise keskmise neljakordsega.
2. Isekülgses kolmnurgas KLM on nurga KML poolitaja ja külje KL lõikepunkt tähistatud tähega P . Moodustatakse kaks täisnurkset kolmnurka, neist ühe kaatetid võrduvad lõikudega PK ja ML , teise kaatetid on võrdsed lõikudega KM ja PL . Leida nende kolmnurkade pindalade suhe.
3. Leida kõik reaalarvude paarid $(x; y)$, mis rahuldavad võrrandit

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2.$$

4. Kuubi ja regulaarse oktaedri ümber kujundatud kerade raadiused on võrdsed. Leida kuubi ja oktaedri sisse kujundatud kerade raadiuste suhe.

Märkus. 1) Regulaarne oktaeder on tahk, mille pind koosneb kaheksast võrdkülgsest kolmnurgast.

2) Keha ümber kujundatud kera puhul asuvad keha kõik tipud kere pinnal

3) Keha sisse kujundatud kera puutub antud keha kõiki tahke.

5. Funktsiooni $f(x)$ on teada, et

1) $f(1) = 1$,

2) iga $x \neq 0$ korral $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$,

3) iga x_1 ja x_2 korral, kui $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ ja $x_1 + x_2 \neq 0$, kehtib võrdus $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Leida $f\left(\frac{5}{7}\right)$.

XVII VÕISTLUS

1. Milline kahekohaline täisarv väheneb 14 korda, kui kustutada tema viimane number?
2. Hoiustajale arvestati aasta hoiukassas olnud rahasummalt 15 rbl. intressi, mis lisati hoiusele. Uue aasta algul lisas hoiustaja sellele veel 85 rbl. ja jättis kogu rahasumma üheks aastaks hoiukassasse. Aasta möödumisel oli hoius suurem koos teise aasta intressiga 420 rbl. Kui suur oli esialgne hoius ja mitu protsenti maksis hoiukassa intressi?
3. Leida avaldise $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$ täpne väärtus.
4. Näidata, et summa $\cos \alpha + \cos(72^\circ + \alpha) + \cos(144^\circ + \alpha) + \cos(216^\circ + \alpha) + \cos(288^\circ + \alpha)$ ei sõltu nurgast α .
5. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b . Hüpotenuusile on ehitatud ruut. Leida selle ruudu keskpunkti kaugus täisnurga tipust.

XVIII VÕISTLUS

1. Leida tegurid, kui

$$\begin{array}{r}
 x \ x \ x \ x \ x \\
 \times \quad \quad 3 \ 4 \ x \\
 \hline
 7 \ 8 \ 3 \ 4 \ x \\
 x \ x \ x \ x \ x \ x \\
 + \ 2 \ 3 \ 5 \ 0 \ 3 \ 8 \\
 \hline
 x \ x \ x \ x \ x \ x \ 6
 \end{array}$$

2. Lahenda võrrand

$$|x + 2| + |x| + |x - 2| = 4.$$

3. Kaks mootorpaati, millel on seisvas vees ühesugune kiirus (v km/h), sõidavad erinevates jõgedes: üks kiire vooluga jões, teine aeglase vooluga jões. Nad läbivad päriveroolu sama vahemaa (s km) ja sõidavad vastuvoolu esialgsesse kohta tagasi. Kummal mootorpaadil kulus selleks vähem aega?
4. Leida võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad, kui selle trapetsi diagonaal jaotab trapetsi kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks.
5. Leida kuus järjestikust paarisarvu, mille ruutude summa on arv, mille moodustavad neli ühesugust numbrit.

XIX VÕISTLUS

1. 10 toru läbimõõduga 52 cm on asetatud virna nii, et alumises reas on 4 toru, järgmises 3, siis 2 ning lõpuks 1 toru. Kui kõrge on see torude virn?
2. Leida joonte

$$y = x^2 - 12x + 40 \quad \text{ja} \quad y^2 - 12y = x - 40$$

lõikepunktid.

3. Kui suur on ringjoone raadius, kui ringjoone keskpunktiks on punkt $O_1(6; 0)$ ja on teada, et sellel ringjoonel on ringjoonega $x^2 + y^2 = 2$ ühine puutuja, mis on paralleelne sirgega $y = x$?
4. Leida

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \quad \text{kui} \quad \sin \alpha + \cos \alpha = a.$$

5. Uurida funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{kui } |x| \geq 1, \\ x^3, & \text{kui } |x| < 1. \end{cases}$$

Joonestada funktsiooni graafik. Arvutada funktsiooni graafiku, x -telje ning sirgetega $x = -2$ ja $x = 2$ piiratud pinnatüki suurus.

ÜLESANNETE LAHENDUSED

1*.1. Tähistame murru A kujul $\frac{a}{b}$, siis $B = \frac{a+1}{b+2}$ ja

$$A - B = \frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+2} = \frac{2a-b}{b(b+2)}.$$

Et $2a > b$, siis $A - B > 0$ ja $A > B$.

Vastus. $A > B$.

1.2. Kolmnurga pindala valemite $S = pr$ ja $\frac{abc}{4R}$ põhjal

$$pr = \frac{abc}{4R}. \quad (1)$$

Aritmeetilise jada definitsiooni kohaselt

$$b - a = c - b \text{ ehk } 2b = a + c.$$

Et $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$, siis saab seosele (1) anda kuju

$$3br = \frac{abc}{2R},$$

millest

$$ac = 6Rr.$$

1.3. Enne kodust väljumist tuleb panna kell käima ja jätta meelde kella näit. Sõbra juures peab kohe vaatama õiget kellaaega ja jätma selle meelde. Sõbra juurest lahkudes vaatame jälle kella, olgu selle näit a . Kodus tuleb viivitamatult kella vaadata ning leida kaua oldi kodunt ära. See ajanäitude vahe on kahekordne teel oleku aeg pluss sõbra juures viibimise aeg. Olgu teel oleku aeg b , siis

$$b = \frac{\text{koduse kella ajanäitude vahe} - \text{sõbra juures viibimise aeg}}{2}$$

Õige kellaaeg on $a + b$.

*Esimene number näitab, mitmenda võistluse ülesannetega on tegemist.

- 1.4. Lahutame I võrrandist II ja II võrrandist III võrrandi. Tulemuseks saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (y - z)(x + y + z) = 9 \\ (x - y)(x + y + z) = 9, \end{cases} \quad (2)$$

millest $y - z = x - y$ ehk $2y = x + y$. Asendame $x + y$ asemele $2y$ süsteemi (2) II võrrandis, saame et

$$x = \frac{3}{y} + y. \quad (3)$$

Asendame nüüd x leitud avaldisega lähtesüsteemi I võrrandis. Tulemuseks saame biruutvõrrandi $3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$, millest $y_{1,2} = \pm 3$ ja $y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Muutuja x väärtused saame seosest (3) ning muutuja z väärtused lähtesüsteemi teisest või kolmandast võrrandist.

Vastus.

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -3 \\ z_2 = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ y_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ z_3 = -\frac{8\sqrt{3}}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{10\sqrt{3}}{3} \\ y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ z_4 = \frac{8\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

- 1.5. Teisendame ülesandes antud avaldist järgmiselt:

$$\begin{aligned} a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) &= \\ &= a^2(c - b) + (bc^2 - b^2c) + (ab^2 - ac^2) = \\ &= a^2(c - b) + bc(c - b) - a(c - b)(c + b) = \\ &= (c - b)(a^2 + bc - ac - ab) = \\ &= (c - b)[a(a - c) - b(a - c)] = \\ &= (a - b)(a - c)(c - b). \end{aligned}$$

Ülesande tingimuste kohaselt ei ole saadud korrutis null.

- 2.1. Kuna $A + B + C = \pi$, siis A , B ja C saavad olla kolmnurga nurkadeks.

Lähteandmetest järeldub, et $\sin A = \frac{2}{3} \sin C$ ja

$$\sin B = \frac{5}{6} \sin C.$$

Siinusteoreemi kasutades saame, et

$$\begin{aligned}a &= 2R \sin A = \frac{4}{3}R \sin C, \\b &= 2R \sin B = \frac{5}{3}R \sin C \text{ ja} \\c &= 2R \sin C\end{aligned}$$

Koosinusteoreemi kasutades saame, et

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{25}{9}R^2 \sin^2 C + 4R^2 \sin^2 C - \frac{16}{9}R^2 \sin^2 C}{2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{3}R^2 \sin^2 C} = \\&= \frac{3}{4}; \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\frac{16}{9}R^2 \sin^2 C + 4R^2 \sin^2 C - \frac{25}{9}R^2 \sin^2 C}{\frac{16}{3}R^2 \sin^2 C} = \\&= \frac{9}{16}; \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{16}{9}R^2 \sin^2 C + \frac{25}{9}R^2 \sin^2 C - 4R^2 \sin^2 C}{\frac{40}{9}R^2 \sin^2 C} = \\&= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

$$\text{Seega } \cos A : \cos B : \cos C = \frac{3}{4} : \frac{9}{16} : \frac{1}{8} = 12 : 9 : 2.$$

2.2. Teeme ülesande tingimustele vastava joonise (joon. 2).

Et ringjooned lõikuvad paarikaupa täisnurga all, siis on ringjoone lõikepunktideks M , N ja P puutujad risti. Kolmnurk $O_1O_2O_3$ on võrdkülgne, ringjoone kaartega on ta jaotatud 7 osaks. Tähistame otsitava pindala x -ga ning ülejäänud ühesugused pindalad vastavalt a ja b -ga. Siis

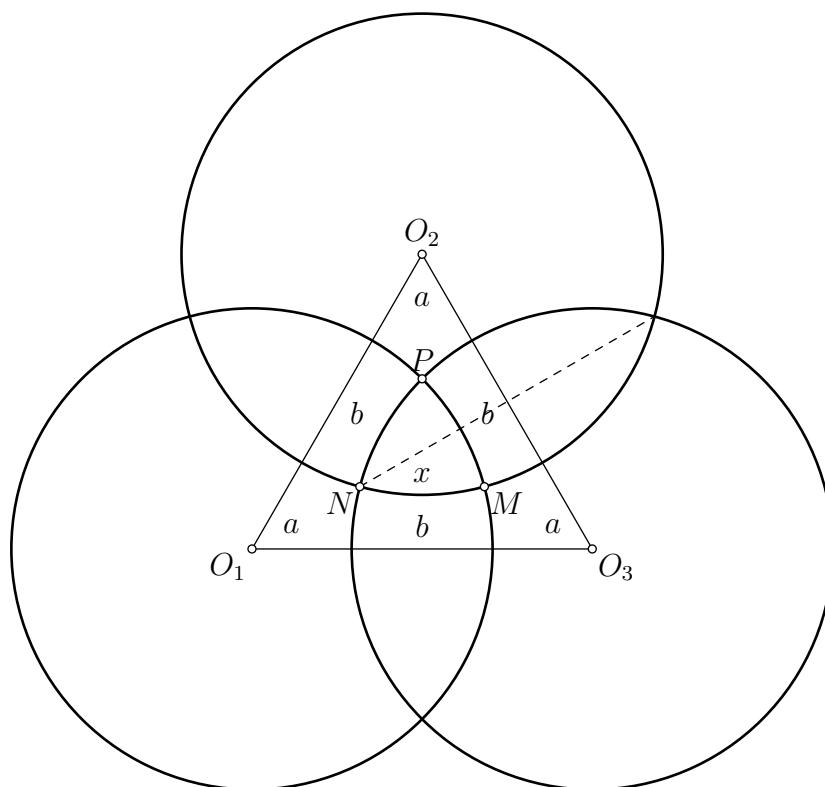
$$S_{\Delta} = x + 3a + 3b.$$

Et ringjooned lõikuvad täisnurga all, siis $O_1P \perp PO_3$ ja $O_1P = PO_3 = r$. Kolmnurgast O_1PO_3 $O_1O_3 = r\sqrt{2}$. Seega

$$S_{\Delta} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

ning

$$x + 3a + 3b = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}.$$



Joonis 2

Kolmnurga $O_1O_2O_3$ ja ringi ühisosa on sektor, mille pindala on $x + a + 2b$. Sektori pindala valemi kohaselt on aga

$$x + a + 2b = \frac{\pi r^2}{6}.$$

Ringi segmendi pindala valemi järgi on

$$2 \cdot \frac{x + b}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

ehk $x + b = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$, sest $\angle O_1O_3P = \frac{\pi}{4}$.

Seega

$$\begin{cases} x + 3a + 3b = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \\ x + a + 2b = \frac{\pi r^2}{6} \\ x + b = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}, \end{cases}$$

millest $x = \frac{r^2}{4}(2\sqrt{3} + \pi - 6)$.

Vastus. Ühisosa pindala on $\frac{r^2}{4}(2\sqrt{3} + \pi - 6)$.

2.3.

$$\begin{cases} x + y - z = 15 \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{y} + \frac{5}{z} = 3 \\ xy - xz + yz = 75 \end{cases}$$

Korrutame teist võrrandit avaldisega xyz , saame

$$5(yz - xz + xy) = 3xyz.$$

See võrrand koos süsteemi kolmanda võrrandiga annab, et

$$5 \cdot 75 = 3xyz \quad \text{ehk} \quad xyz = 125.$$

Korrutame süsteemi kolmandat võrrandit x -ga. Siis

$$x^2y - x^2z + xyz = 75x$$

ehk

$$x^2(y - z) + xyz - 75x = 0.$$

Avaldame selles süsteemi esimesest võrrandist $y - z = 15 - x$, seejärel saame

$$\begin{aligned}x^2(15 - x) + 125 - 75x &= 0, \\x^3 - 15x^2 + 75x - 125 &= 0, \\(x - 5)^3 &= 0, \\x &= 5.\end{aligned}$$

Vastus.

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 5(\sqrt{2} + 1) \\ z_1 = 5(\sqrt{2} - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 5(1 - \sqrt{2}) \\ z_2 = -5(1 + \sqrt{2}) \end{cases}.$$

- 2.4. Osutite äravahetamisel on mõte, kui osutid on kohakuti. 12 tunni jooksul teeb minutiosuti 12 pööret, tunniosuti aga ühe pöörde, seega minutiosuti kiirus on 12 korda suurem kui tunniosuti kiirus. Sel ajal, kui tunniosuti läbib $\frac{12}{a} = 1 + \frac{1}{a}$, s.t. kui $a = 11$. Tähendab, et järgmise osutite kohtumiseni läbib tunniosuti ringist $\frac{1}{11}$ osa. Ööpäevaga teeb tunniosuti 2 täispööret ja selle aja jooksul on $2 : \frac{1}{11} = 22$ kohakuti olekut (kui ei arvesta esimest kohakuti olekut). Arvestades ka esimest kohakuti olekut, on osutite äravahetamisel ööpäeva jooksul $22 + 1 = 23$ korda mõte.

Vastus. 23 korda.

- 2.5. Ülesande tingimuste kohaselt:

$$\begin{aligned}a_1 - a_0 &= 1, \text{ millest } a_1 = 1 + 0 = 1, \\a_2 - a_1 &= 2, \text{ millest } a_2 = 2 + 1 = 3, \\a_3 - a_2 &= 3, \text{ millest } a_3 = 3 + 3 = 6, \\a_4 - a_3 &= 4, \text{ millest } a_4 = 4 + 6 = 10, \\a_5 - a_4 &= 5, \text{ millest } a_5 = 10 + 5 = 15, \text{ jne.}\end{aligned}$$

Ilmneb, et selle jada üldliige avaldub valemiga $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Seega tuleb leida summa $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$. Antud summa avaldub kujul $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Tõestame selle matemaatilise induktsiooni abil.

Kui $n = 1$, siis antud summa on õige ($S_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$).

Olgu summa õige mis tahes $n = k$ korral. Näitame, et märgitud summa on õige, kui $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}. \end{aligned}$$

- 3.1. Olgu antud kolmnurk nurkadega α , β ja γ . Viime antud võrduses -1 paremalt poolelt vasakule ja teisendame nii saadud võrduse vasaku poole korrutiseks.

$$2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 1 + \cos 2\gamma = 0,$$

ehk

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos^2 \gamma = 0.$$

Et $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, siis $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ ja teisendatav võrdus saab kuju

$$\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 0,$$

ehk

$$\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta = 0.$$

Järelikult, kas

- 1) $\cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ$ või
- 2) $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ või
- 3) $\cos \beta = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$.

Tähendab, kolmnurk on igal juhul täisnurkne.

- 3.2. **Esimene** lahendus.

Olgu $AB = BC$ (joon. 3). Tähistame kolmnurga ümberringjoone keskpunkti tähega $\ddot{U}$ ja siseringjoone keskpunkti tähega S .

Kolmnurga välisnurga omaduse põhjal

samuti $\angle KAS = 2\angle BAS = 2\angle SAC$.

Seega $\angle KAC = \angle KSA \Rightarrow AK = KS$, s.t. $\triangle AKS$ on vördhaarne.

Olgu $K\ddot{U}$ pikenduse lõikepunkt ringjoonega M . Saame täisnurkse kolmnurga AKM , mis osutub sarnaseks kolmnurgaga CST (kahe nurga järgi). Seega

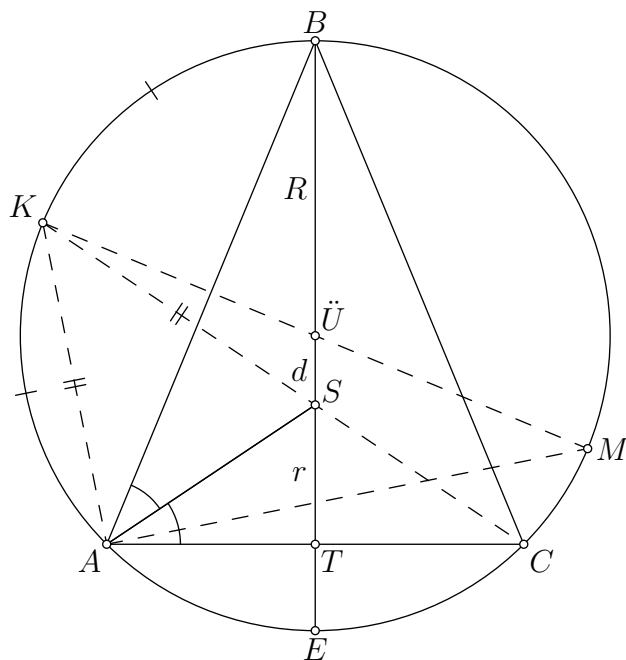
Et $ST = r$ ja $MK = 2R$, siis $\frac{CS}{2R} = \frac{r}{AK}$, ehk $2Rr = CS \cdot AK$. Tähistame sise- ja välisringjoone keskpunktide vahelise kauguse tähega d , siis $BS = R + d$ ja $SE = R - d$. Kuna kõõlud KC ja BE lõikuvad, siis $KS \cdot$

$SC = ES \cdot SB$. Järelikult $2Rr = (R + d)(R - d)$, sest $AK = KS$. Pärast teisendamist saame, et $d^2 = R^2 - 2Rr$, millest

$$d = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Teine lahendus.

Olgu $AC = CB$, O – siseringjoone keskpunkt ja O_1 – välisringjoone keskpunkt (joon. 4). Lõik BD on nurga ABC poolitaja $OK \perp ED$ ja



Joonis 3

millest

$$AD^2 = 2R \cdot LD.$$

Näitame, et $OD = AD$.

AO on nurga BAC poolitaja. $\angle CAD = \angle DBC$, kuna toetuvad samale kõõlule DC .

Järelikult

$$\angle DAO = \angle DAC + \angle CAO = \angle DBC + \angle OAB = \angle DBA + \angle OAB.$$

Kolmnurga välisnurga omaduse põhjal aga $\angle AOD = \angle DBA + \angle OAB$.

Ilmnes, et $\angle AOD = \angle DAO$, järelikult ja $AD = DO$. Arvestades viimati saadud võrdust võtab avaldis (5) kuju

$$OO_1^2 = R^2 + 2Rr$$

ehk

$$d = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

3.3. Süsteemi üks lahend on ilmselt

$$x = y = z = 0.$$

Kui $x \neq y \neq z \neq 0$, siis antud süsteemi võib esitada kujul

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \\ \frac{5}{6} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \\ \frac{4}{3} = \frac{1}{x} = \frac{1}{z} \end{cases} \quad (6)$$

Liidame võrrandite vastavad pooled ja jagame tulemuse 2-ga:

$$\frac{11}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Asendades saadud võrrandis viimasest võrrandisüsteemist (6) vastavad võrrandid, saame, et $x_2 = 1$, $y_2 = 2$ ja $z_2 = 3$.

$$Vastus. \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = 3. \end{cases}$$

3.4. *Vastus.* A ja D.

4.1. Ülesande andmetest parema ülevaate saamiseks koostame tabeli.

	NH	MK	E	H
NH	a	1	54	23
MK	1	b	4	11
E	54	4	c	29
H	23	11	29	d
Kokku	82	17	121	175

Tähistame ainult NH lugejad a -ga, ainult MK lugejad b -ga, ainult E lugejad c -ga ja ainult H lugejad d -ga.

Et kõiki 4 väljaannet loeb ainult 1 õpilane, siis tabeli andmeid arvestades saame:

$$\begin{aligned} a &= 82 - 54 - 23 - 1 - 1 = 4, \\ b &= 17 - 1 - 4 - 11 - 1 = 1, \\ c &= 121 - 54 - 29 - 4 - 1 = 34, \\ d &= 175 - 23 - 29 - 11 - 1 = 112. \end{aligned}$$

Ainult üht väljaannet loeb järjekindlalt:

$$4 + 1 + 34 + 112 = 151.$$

Kaht väljaannet loeb:

$$54 + 23 + 1 + 29 + 4 + 11 = 122.$$

Ühtki väljaannet ei loe:

$$356 - 122 - 151 - 1 = 82.$$

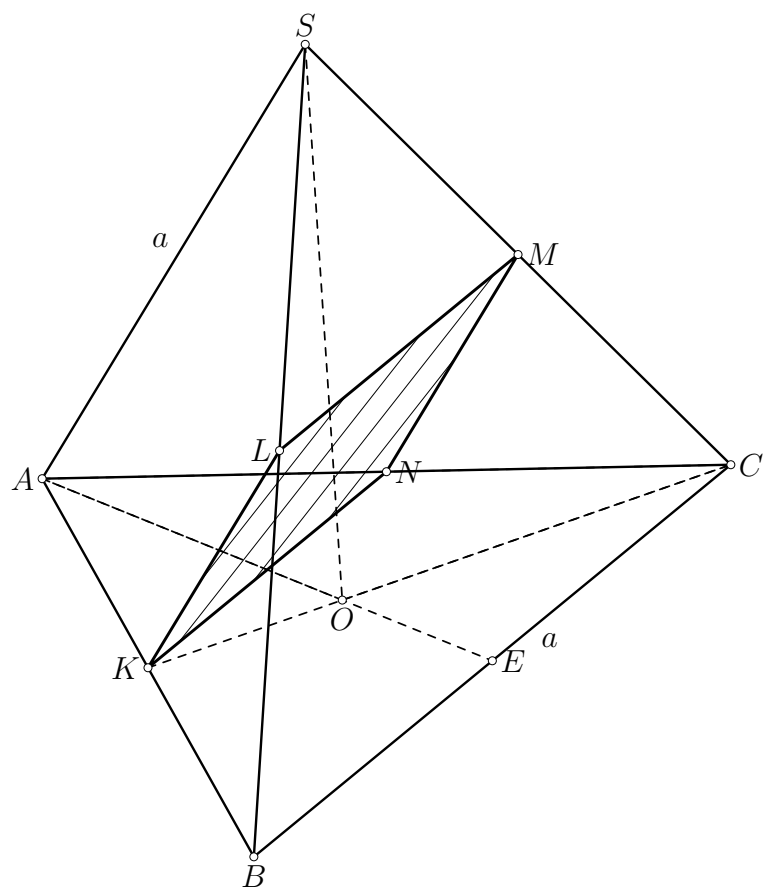
Vastus. Ainult üht väljaannet loeb järjekindlalt 151 õpilast, ühtki väljaannet ei loe järjekindlalt 82 õpilast.

4.2. Olgu $MC = MC = \frac{a}{2}$ (joon. 5)

Kuna tasand $IMNK \parallel BC$, siis ka $BC \parallel LM$ ja järelikult on lõik LM kolmnurga BSC kesklõik ja seetõttu $LM = \frac{a}{2}$.

Analoogiliselt saame, et

$$MN = \frac{a}{2}.$$



Joonis 5

Olgu SO tetraeedri kõrgus, siis $SO \perp ABC$ ja ka $SO \perp BC$. Selgub, et ka $BC \perp \triangle ASE$, sest $BC \perp AE$ ja $BC \perp SO$. Järelikult ka $BC \perp AS$, millest omakorda järeldub, et $LM \perp MN$. Seega on kujund $KLMN$ ruut ja $S_{KLMN} = \frac{a^2}{4}$.

Vastus. Lõiketasandi pindala on $\frac{a^2}{4}$ pinnaühikut.

- 4.3. Olgu kolmekohalised arvud x ja y ning viiekohaline arv z . Lähtudes andmetest, saame võrrandi

$$\frac{1000x + y}{z} = \frac{3xy}{z},$$

millest

$$1000x + y = 3xy.$$

Sellest võrrandist järeldub:

- 1) y jagub x -ga, s.t. $y = kx$, kus k on kas 1; 2; ..., või 9,
- 2) $1000x + y$ jagub 3-ga, s.t. $(1000 + k)x$ jagub 3-ga, järelikult k on kas 2 või 5 või 8.

Kui $k = 2$, siis $x = 167$ ja $y = 334$. Kuna x ja y on kolmekohalised täisarvud, siis $k \neq 5$ ja $k \neq 8$.

Leiame z . Saame, et

$$\frac{xy}{z} = \frac{2 \cdot 167^2}{z}, \quad z = 55\,778.$$

Vastus. Otsitavad arvud on 167, 334 ja 55 778.

- 4.4. Olgu 1 m paela hind x rbl. ja ostja A pidi tagasi saama a rbl. ja b kopikat ning ostja B pidi saama tagasi c rbl. ja d kopikat, siis

$$25 - 47,5x = a + 0,01b$$

ning A sai kassast $(b + 0,01a)$ rbl., ja

$$100 - 83x = c + 0,01d$$

ning B sai kassast $(d + 0,01c)$ rbl. Summaarselt said nad tagasi õige rahasumma, tähendab

$$b + 0,01a + d + 0,01c = a + 0,01b + c + 0,01d, \text{ s.t.}$$

$$a + c = b + d.$$

Ostja A sai tagasi 64 rbl. ja e kop. võrra rohkem, s.t.

$$b + 0,01a - (a + 0,01b) = 64 + 0,01e,$$

millest

$$b - a = 64 + 0,01(b - a + e).$$

Et $b - a$ on täisarv, siis $b - a + e$ on kas 0 või saja kordne. Kuid $0 < a < 25$, $0 < b$ ja $e < 100$, seepärast

$$b - a + e = \begin{cases} 0 \\ 100 \end{cases} \quad \text{ja} \quad b - a = \begin{cases} 64 \\ 65 \end{cases}.$$

Kui $b = a + 65$, siis $d = c - 65$ ja

$$2500 - 4750x = 100a + b \quad \text{ning} \quad 10000 - 8300x = 100c + d,$$

millest

$$95c - 166a = 5465.$$

See võrrand tuleb lahendada täisarvude hulgas:

$$\begin{aligned} a &= \frac{95c - 5465}{166} = -33 + \frac{13 + 95c}{166}, & \text{kus} \quad \frac{13 + 95c}{166} &= p; \\ c &= \frac{166p - 13}{95} = 2p + \frac{-24p - 13}{95}, & \text{kus} \quad \frac{-24p - 13}{95} &= q; \\ p &= \frac{-95q - 13}{24} = -4q + \frac{q - 13}{24}, & \text{kus} \quad \frac{q - 13}{24} &= r; \\ q &= 24r + 13; \\ p &= -96r - 52; \\ c &= -166r - 91 \quad \text{ja} \\ a &= -95r - 85. \end{aligned}$$

Järelikult r on kas -1 või -2 või -3 või $\dots$

Kui $r = -1$, siis $a = 10$, $b = 75$, $c = 75$ ja $d = 10$.

Kui $r = -2$, siis $a = 105$, mis ei sobi, sest $a < 25$.

Samuti ei sobi $r = -3$, $r = -4$ jne.; seega $r < -1$. Võimatuks osutub ka $b - a = 64$.

Vastus. Paela 1 m hind oli 30 kopikat.

5.1. Teisendame võrrandit järgmiselt:

$$\begin{aligned}x + \log(1 + 2^x) &= x \log 5 + \log 6, \\ \log 10^x + \log(1 + 2^x) &= \log 5^x + \log 6, \\ \log [10^x(1 + 2^x)] &= \log(5^x \cdot 6), \\ 10^x(1 + 2^x) &= 5^x \cdot 6.\end{aligned}$$

Viimase võrrandi mõlemad pooled võib jagada avaldisega 10^x , sest $10^x \neq 0$. Saame

$$1 + 2^x = 6 \cdot \frac{1}{2^x},$$

millest

$$2^{2x} + 2^x - 6 = 0.$$

Viimase ruutvõrrandi lahendid on $2^x = 2$ ja $2^x = -3$ (ei sobi), millest $x = 1$.

Vastus. $x = 1$.

5.2. Kolmnurga pindala $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$.

Seega saab ülesandes antud tingimuse esitada kujul

$$\frac{bc \sin \alpha}{2} = a^2 - (b - c)^2.$$

Koosinusteoreemist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\frac{bc \sin \alpha}{2} &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha - (b^2 - 2bc + c^2), \\ \frac{bc \sin \alpha}{2} &= 2bc(1 - \cos \alpha), \\ \frac{\sin \alpha}{2} &= 2(1 - \cos \alpha). \\ \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2} &= 2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Et $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$, siis $4 \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$ ja siit $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$, millest omakorda $\frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{1}{4}$ ja

$$\alpha = 2 \arctan \frac{1}{4} \approx 2 \cdot 14^\circ 02' = 28^\circ 04'.$$

Vastus. $\alpha = 2 \arctan \frac{1}{4}$ ehk $\alpha \approx 28^\circ 04'$.

5.3. $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

Et võrrandi vasak pool on mittenegatiivne, siis $x \geq 0$ ja võime võrrandi mõlemad pooled ruutu tõsta. Saame

$$x^2 - p + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} + 4(x^2 - 1) = x^2,$$

millest

$$4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = p + 4 - 4x^2.$$

Viimases võrrandis peab olema $p + 4 - 4x^2 \geq 0$ ja esialgsest võrrandist $x \geq 0$. Tõstes võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} 16(x^2 - p)(x^2 - 1) = (p + 4 - 4x^2)^2, \\ x \geq 0, \\ p + 4 - 4x^2 \geq 0, \\ x^2 - p \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} 8(2 - p)x^2 = (4 - p)^2, \\ x \geq 0, \\ x^2 \leq \frac{p + 4}{4}, \\ x^2 \geq p, \\ x^2 \geq 1. \end{cases}$$

Selles süsteemis $x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)}$.

Võrrandi parem pool peab olema positiivne, sest $x^2 \geq 1$. Seega $p < 2$. Leiame muutuja x :

$$x = \pm \frac{4 - p}{2\sqrt{2(2 - p)}}.$$

Negatiivne väärtus lahendiks ei sobi, sest $x \geq 1$, s.t.

$$x = \frac{4 - p}{2\sqrt{2(2 - p)}}.$$

Süsteemist

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)}, \\ x^2 \leq \frac{4 + p}{4}, \end{cases}$$

saame, et $\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \leq \frac{p+4}{4}$ millest omakorda

$$\frac{16 - 8p + p^2 - 4p + 2p^2 - 16 + 8p}{8(2-p)} \leq 0,$$

$$\frac{p(3p-4)}{8(2-p)} \leq 0,$$

$$\frac{p(3p-4)}{p-2} \geq 0.$$

Kui $p < 2$, siis peab olema $p(3p-4) \leq 0$.

Vastuse loeme jooniselt 6: $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$.

Vastus. Kui $0 < p < \frac{4}{3}$, siis on võrrandi lahend

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}} \text{ reaalarv.}$$



Joonis 6

5.4.

$$\begin{aligned} \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}\dots}}} &= 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} \cdot 3^{\frac{1}{32}} \dots = \\ &= 3^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots)} \cdot 5^{(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots)} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{45}. \end{aligned}$$

Vastus. $\sqrt[3]{45}$.

6.1. Olgu neljakohaline arv

$$N = \overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b).$$

Et N on täisruut, siis $100a + b = 11t^2$, kuna 11 on algarv. Teisiti kirjutades $99a + a + b = 11t^2$, millest järeldub, et $(a+b)$ peab jaguma 11-ga.

Kuna $0 < a < 9$, $0 < b < 9$, siis $a + b = 11$ ehk $b = 11 - a$.

Nüüd $100a + (11 - a) = 11t^2$, millest

$$9a + 1 = t^2, \quad \text{kus } a = 1, 2, \dots, 9.$$

Sobib ainult $a = 7$ ja siis $t = 8$ ja $b = 4$. Seega $N = 7744 = 88^2$.

Vastus. 7744.

- 6.2. Kasutame kolmnurga pindala valemeid $S = \frac{ch}{2}$ ja $S = \frac{abc}{4R}$, kus R on kolmnurga ümberringjoone raadius. Seega

$$\frac{ch}{2} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow ab = 2hR,$$

millest $ab = hd$, kus d on kolmnurga ümberringjoone diameeter.

- 6.3. D ütlusest võib kolme tingimuse põhjal järeldada, et x ei saa olla väiksem 10-st. Seega ei sobi A 1. tingimus. Väär on ka A ütluse 3. tingimus. C ütlusest on väär 1. ja 2. tingimus. Seega on õige C 3. tingimus, s.t. et x on naturaalarvu ruut.

Viimase lause põhjal ei sobi B ütlusest 1., sest sellisel juhul peaks D ütluses olema kõik laused õiged.

Järelikult on x arvu 5 kordne ning paaritu arvu täisruut, seega $x = 25$.

Vastus. $x = 25$.

- 6.4. Igal x väärtusel on $|4 \sin 2\pi x| \leq 4$ ja $3 \left| x - \frac{1}{4} \right| + 2 \geq 9$.

Avaldise $3 \left| x - \frac{1}{4} \right| + 2$ minimaalne väärtus on $3^2 = 9$, kui $x = \frac{1}{4}$. Sellisel juhul $4 \sin 2\pi x = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$.

Vastus. $x = \frac{1}{4}$.

- 7.1. Viète'i teoreemi põhjal

$$x_1 + x_2 = a \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 = a - 1$$

ning

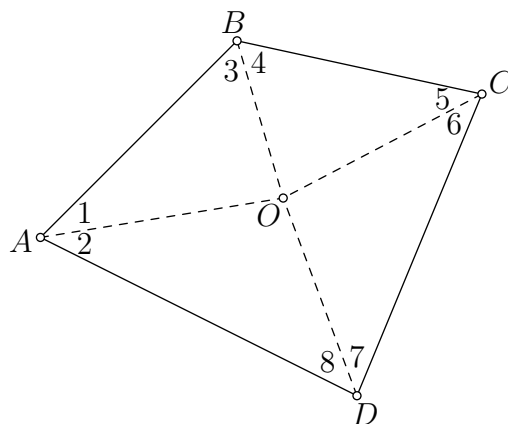
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1.$$

$x_1^2 + x_2^2$ on minimaalse väärtusega, kui $a = 1$.

Vastus. $a = 1$.

- 7.2. Jooniselt 7 näeme, et

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) \quad \text{ja} \quad \angle COD = 180^\circ - (\angle 6 + \angle 7),$$



Joonis 7

mistõttu

$$\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7).$$

Et $\angle 1 = \angle 2$,
 $\angle 3 = \angle 4$,
 $\angle 5 = \angle 6$ ja
 $\angle 7 = \angle 8$, siis

$$\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ,$$

kuna kumera nelinurga sisenurkade summa on 360° .

Seega ka $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

7.3. Olgu murd $\frac{m}{n}$, siis ülesande tingimuste põhjal $\frac{m}{n} > \frac{1}{3}$, millest $n < 3m$.

Samuti $\frac{m+x}{nx} = \frac{m}{n}$, millest $m = \frac{x}{x-1}$.

Lugeja m on täisarv vaid siis, kui $x = 2$ ja $m = 2$.

Et $n < 3m$, siis $n < 6$, s.t. $n \in \{3, 4, 5\}$.

Vastus. Otsitavad murrud on $\frac{2}{5}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}$

7.4. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0, \end{cases}$$

millest $-1 \leq x \leq 3$. Kuna $\frac{1}{2} > 0$, siis

$$\begin{aligned}\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 0 &\implies \sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} \implies \\ &\implies 3-x > x+1 \implies \\ &\implies x < 1\end{aligned}$$

Süsteemi

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x < 1 \end{cases}$$

lahendiks on $-1 \leq x \leq 1$. Viimase tingimuse korral võime võrratuse mõlemad pooled tõsta ruutu.

Saame

$$(\sqrt{x-3} - \sqrt{x+1})^2 > \frac{1}{4},$$

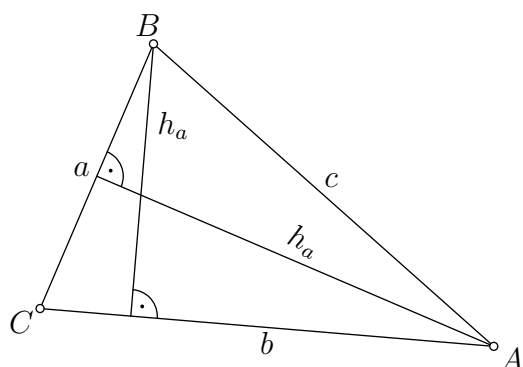
millest

$$64x^2 - 128x + 33 > 0.$$

Selle võrratuse lahendid on $x < 1 - \frac{\sqrt{41}}{8}$ ja $x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$. Arvestades määramispiirkonda, saame vastuseks $-1 < x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

$$\text{Vastus. } L = \left[-1; 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \right].$$

7.5. Ülesande tingimuste kohaselt $h_a \geq a$ ja $h_b \geq b$ (joon. 8). Et $h_a \perp a$



Joonis 8

ja b on a suhtes kaldu (sammast punktist tõmmatud rist- ja kaldlõik), siis $b \geq h_a$, samuti $a \geq h_b$. Nüüd oleme saanud, et $a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$. Viimane võrratus on võimalik vaid siis, kui $a = h_a = b = h_b = a$, s.t. kolmnurk ABC on võrdhaarne ja täisnurkne ning tema kaks nurka on 45° .

7.6. Tõstame ülesandes antud seoste mõlemad poole ruutu. Saame

$$a^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \text{ ja} \\ b^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Liidame viimaste võrduste vastavad pooled:

$$a^2 + b^2 = 2 + 2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta),$$

millest

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}.$$

$$\text{Vastus. } \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}.$$

8.1. Olgu $BO_2 = R, h = m + r, BO_1 = m$ (joon. 9). Kolmnurkadest ABD ja EBO saame vastavalt:

$$AD = (m + r) \cot \alpha \text{ ja} \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{r}{m}.$$

Millest $r = m \cos \alpha$.

$$AC = 2(m + m \cos \alpha) \cot \alpha = 2m \cot \frac{\alpha}{2} \cos \alpha.$$

Siinusteoreemist: $\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 2R$, millest

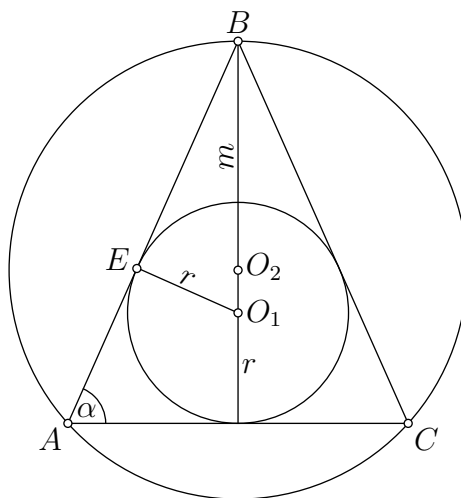
$$R = \frac{AC}{2 \sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{2m \cot \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Vastus. Alus on $2m \cot \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$, ümberringjoone raadius $R = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

$$8.2. \quad \begin{aligned} \sqrt{2\frac{2}{3}} &= \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \sqrt{3\frac{3}{8}} &= \sqrt{\frac{27}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}, \\ \sqrt{4\frac{4}{15}} &= \sqrt{\frac{64}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}. \end{aligned}$$

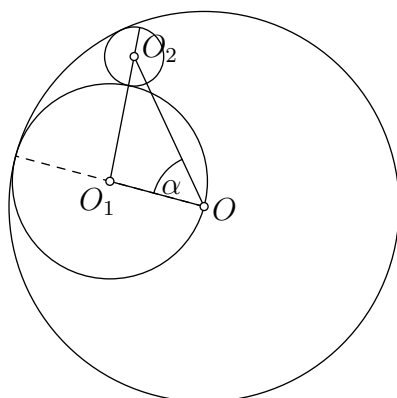
Järelikult:

$$\sqrt{x + \frac{x}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 1}} = x \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$



Joonis 9

8.3. Antud on, et $R = 10$ cm, $\alpha = 30^\circ$ (joon. 10).



Joonis 10

Nüüd $OO_1 = 10 - r_1$,
 $OO_2 = 10 - r_2$ ja
 $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

$$\ddot{U} = (10 - r_1) + (10 - r_2) + (r_1 + r_2),$$

millest

$$\ddot{U} = 20 \text{ cm.}$$

Vastus. Kolmnurga OO_1O_2 ümbermõõt on 20 cm.

Ülesandes on andmeid ülearu ($\alpha = 30^\circ$).

8.4. Ülesande lahendamisel peame vaatlema eraldi kahte juhtu

- 1) kui Madise sünnipäev 1901. aastal on juba olnud,
- 2) kui Madise sünnipäev 1901. aastal ei ole veel olnud.

1) Olgu Madise vanus $10a + b$ aastat, kusjuures

$$0 < a < 9 \quad \text{ja} \quad a \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$\text{ning} \quad 0 < b < 9 \quad \text{ja} \quad b \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Siis on Madise sünniaasta:

$$1901 - 10a - b = 1000 + 800 + (90 - 10a) + (11 - b).$$

Kui $b \geq 2$, siis $a + b = 1 + 8 + (9 - a) + (11 - b) \implies 2(a + b) = 29 \implies a + b = 14.5$, mis aga ei sobi, sest ei vasta tingimustele (1) ja (2).

Kui $b = 1$, siis $a + b = 1 + 8 + (10 - a) + (1 - b) \implies 2a = 18 \implies a = 9$. Siit vanus 91 aastat ja sünniaasta 1810.

Kui $b = 0$, siis $a + b = 1 + 8 + (10 - a) + (1 - b) \implies 2a = 20 \implies a = 10$, mis on aga vastuolus tingimusega (1).

- 2) Kui Madise sünnipäev 1901. aastal ei ole veel olnud, siis on Madise sünniaasta:

$$\begin{aligned} 1900 - 10a - b &= 1000 + 800 + (90 - 10a) + (10 - b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + b = 1 + 8 + 9 - a + 10 - b \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + b = 14. \end{aligned}$$

Lähtudes sellest, et $a + b = 14$, koostame tabeli

		Vanus	Sünniaasta	Summa
$a = 5$	$b = 9$	59	1841	14
$a = 6$	$b = 8$	68	1832	14
$a = 7$	$b = 7$	77	1823	14
$a = 8$	$b = 6$	86	1814	14
$a = 9$	$b = 5$	95	1805	14

Teised väärtused ei vasta tingimusele.

Vastus. Kui Madise sünnipäev on 1901. aastal juba olnud, siis on ta sündinud 1810. aastal, kui sünnipäev ei ole veel olnud, siis võib ta olla sündinud 1841, 1832, 1814 või 1805. aastatel.

8.5. Olgu $n = 2k$, siis antud avaldis saab kuju

$$\begin{aligned} \frac{2k}{12} + \frac{4k^2}{8} + \frac{8k^3}{24} &= \frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} = \frac{k + 3k^2 + 2k^3}{6} = \frac{k(2k^2 + 3k + 1)}{6} = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+3-2)}{6} = \\ &= \frac{3k(k+1)}{6} + \frac{2k(k+1)(k-1)}{6}. \end{aligned}$$

Viimane kuju näitab, et antud avaldis jagub 6-ga, sest kui esimene liidetav jagub 6-ga ja teine liidetav jagub 6-ga, siis jagub ka nende summa 6-ga.

8.6.

$$\begin{array}{r}
 a\ b\ c\ d \\
 \cdot \quad e\ d \\
 \hline
 g\ g\ g\ d \\
 +\ e\ f\ f\ f \\
 \hline
 h\ d\ d\ i\ d
 \end{array}$$

Ilmselt $a = 1$, sest muidu ei oleks teise osakorrutise esimene number e . d võib olla kas 5 või 6, sest korrutis $d \cdot d$ peab lõppema d -ga. $d = 6$, kuna 5 ei sobi, sest siis $e \cdot d$ lõpeb kas 0 või 5-ga. 5 siia ei sobi, sest $f \neq d$. 0 ei sobi ka, sest $f + g$ on kahekohaline.

Kuna $i + 1 = d$, siis $i = 5$.

Et $g + f$ peab lõppema 5-ga, siis $g = 7$ või $g = 8$ ja $f = 7$ või $f = 8$.

Teame, et $e \leq 4$ ja $b \leq 4$, sest nende korrutis on ühekohaline.

Siit $f = 8$, sest $e \cdot d$ peab lõppema f -ga. Vaatleme võimalikke korrutisi:

$$2 \cdot 6 = 12 - \text{ei sobi,}$$

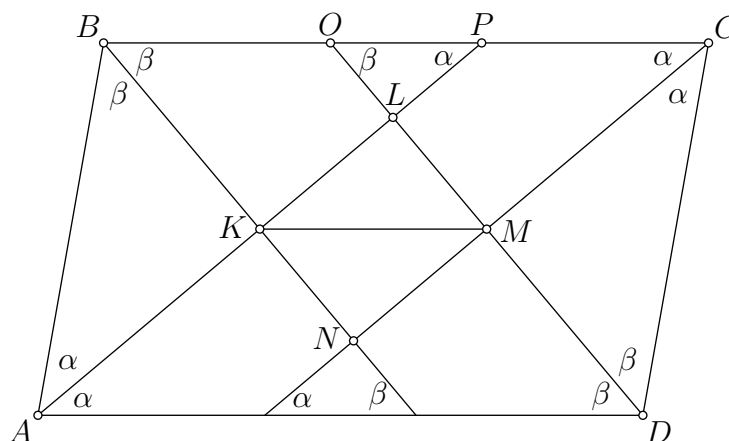
$$3 \cdot 6 = 18 - \text{sobib, siit } f = 8 \text{ ja } e = 3,$$

$$4 \cdot 6 = 24 - \text{ei sobi,}$$

kuna $e + 1 = h$, siis $h = 4$. Kuna $b = e = h$, siis $b = 2$. Korrutis $e \cdot d$ peab lõppema 4-ga, seega $c = 9$ ($c \neq 4$, sest $h = 4$).

Vastus.

$$\begin{array}{r}
 1\ 2\ 9\ 6 \\
 \cdot \quad 3\ 6 \\
 \hline
 7\ 7\ 7\ 6 \\
 +\ 3\ 8\ 8\ 8 \\
 \hline
 4\ 6\ 6\ 5\ 6
 \end{array}$$



Joonis 11

9.1. Joonestame rööpküliku $ABCD$ kõikide nurkade poolitajad (joon. 11).

$$1) \quad 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$\alpha + \beta = 90^\circ$, järelikult $\angle AKB = 90^\circ$ ja $\angle LKN = 90^\circ$.

$\triangle BNC$: $\alpha + \beta = 90^\circ$ ja $\angle BNC = 90^\circ$.

$\triangle ALD$: $\angle ALD = 90^\circ$.

Kuna nelinurga $KLMN$ kolm nurka on täisnurgad, siis ka $\angle LMN = 90^\circ$. Järelikult on kujund $KLMN$ ristkülik.

$$2) \quad \triangle BKP: \angle BKP = \alpha \text{ ja } AB = BP, \text{ sest võrdsete külgede vastas-} \\ \text{nurgad on võrdsed.}$$

Jooniselt 11 näeme, et $PC = BC - BP$ ehk $PC = BC - AB$.

Kuna $KM = PC$, siis ka $KM = BC - AB$.

9.2. Kolmekohalise arvu, mille numbrid moodustavad aritmeetilise jada järjestikused liikmed, võib välja kirjutada kujul:

$$100a_1 + 10(a_1 + d) + (a_1 + 2d)$$

ehk

$$111a_1 + 12d = 3(37a_1 + 4d).$$

See arv jagub kolmega. Järelikult iga kolmekohaline arv, mille numbrid moodustavad aritmeetilise jada järjestikused liikmed, jagub 3-ga ja ei ole kunagi algarv.

9.3. Ühe raamatu hind olgu x kopikat.

$$\begin{cases} 1100 \text{ kop.} < 9x < 1200 \text{ kop.} \\ 1500 \text{ kop.} < 13x < 1600 \text{ kop.,} \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} 122\frac{2}{9} \text{ kop.} < x < 133\frac{1}{3} \text{ kop.} \\ 115\frac{5}{13} \text{ kop.} < x < 123\frac{1}{13} \text{ kop.} \end{cases}$$

ehk

$$122\frac{1}{9} < x < 123\frac{1}{13} \text{ kop.}$$

Kuna $x \in \mathbb{Z}^+$, siis $x = 123$ kop.

Vastus. Raamatu hind on 1 rbl. 23 kop.

9.4. Teisendame süsteemi esimest võrrandit järgmiselt:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 &= 17, \\x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 &= 17, \\(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 &= 17.\end{aligned}\tag{7}$$

Olgu $x^2 + y^2 = u$ ning $xy = v$, siis võrrand (7) saab kuju

$$u^2 - 2v^2 = 17.$$

Võtame lähtesüsteemi teise võrrandi ruutu ja kasutame tehtud asendusi:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 1, \\x^2 + y^2 + 2xy &= 1, \\u + 2v &= 1,\end{aligned}$$

millest $u = 1 - 2v$. Nüüd saab esialgne võrrandisüsteem kuju

$$\begin{cases} u^2 - 2v^2 = 17 \\ u + 2v = 1 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} u^2 - 2v^2 = 17 \\ u^2 = 1 - 4v + 4v^2, \end{cases}$$

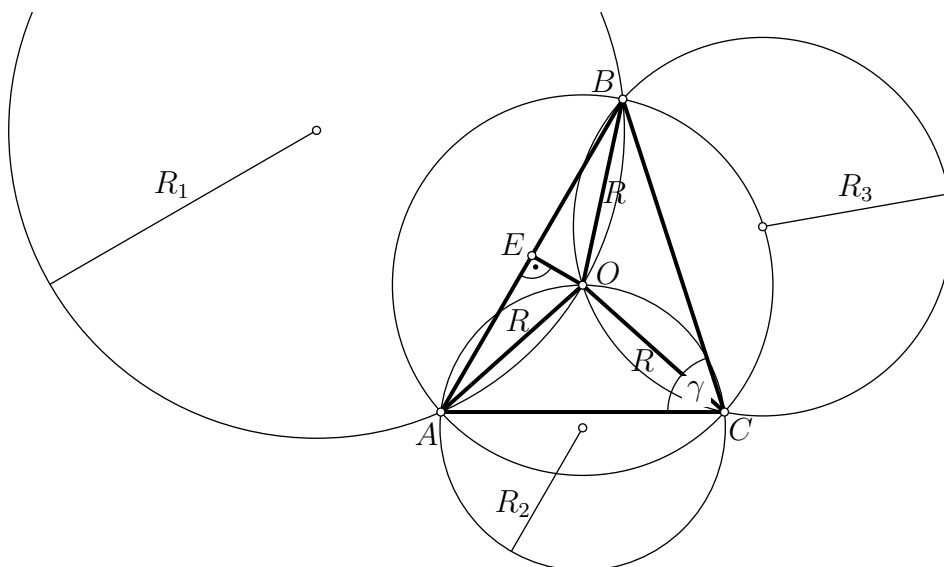
millest $v^2 - 2v - 8 = 0$ ja $v_1 = 4$ ning $v_2 = -2$.

Teades xy väärtust võime koostada uued võrrandisüsteemid:

$$\begin{aligned}1) \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2. \end{cases} \\2) \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 4, \end{cases} \text{ millest } x^2 - x + 4 = 0 \text{ ja } x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2}.\end{aligned}$$

Seega ei anna teine juht reaalarvulisi lahendeid.

$$Vastus. \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$



Joonis 12

9.5. Koosinusteoreemi abil leiame külje c väärtuse (joon. 12):

$$c^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}.$$

Avaldame kolmnurga ABC pindala kahel erineval viisil:

$$S_{ABC} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{abc}{4R},$$

millest $R = \sqrt{\frac{7}{3}}.$

Olgu kolmnurga AOB ümberringjoone raadius R_1 . Selle leidmiseks avaldame ka kolmnurga AOB pindala erinevate valemite kaudu:

$$S_{AOB} = \frac{OB \cdot AO \cdot \sin 2\gamma}{2} = \frac{BO \cdot OA \cdot AB}{4R_1} \Rightarrow \frac{\sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4R_1},$$

millest $R_1 = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$. Võrdhaarse kolmnurga BOC pindala on $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Olgu selle kolmnurga ümberringjoone raadius R_3 . Siis $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{7}{3} \cdot 2}{4R_3},$

millest $R_3 = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$

Vastus. Ringjoonte raadiused on $\frac{\sqrt{21}}{3}$, $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ja $\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

9.6. Et $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$, siis võib antud võrrandi esitada kujul

$$x(y - z) + yt = 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \quad (1)$$

Kui summa ja esimene liidetav jagub mingi arvuga, siis peab ka teine liidetav jaguma sama arvuga.

Arv 14 jagub 7-ga ja arv 65 jagub 13-ga. Võrrandis (1) parem pool jagub $7 \cdot 13$ -ga.

Seega $x \neq 14$ ja $x \neq 65$, sest lähteülesande tingimuste kohaselt yt ei saa sisaldada tegureid 7 ja 13, kui $x = 14$ või $x = 65$.

Järelikult on x kas 12 või 37 ja y kas 37 või 12. Ülejäänud muutujate väärtuste jaoks on siis järgmised võimalused:

z on kas 14 või 65 ja t on kas 65 või 14.

Tähendab $xy = 12 \cdot 37 = 444$ ning antud võrrand saab kuju

$$444 - xz + yt = 182,$$

millest

$$xz - yt = 262.$$

Siit järeldub, et $xz > yt$.

Kontrollime, millised väärtused täidavad saadud tingimust.

1. $xz = 12 \cdot 14$ ja $yt = 37 \cdot 65$ ei sobi, sest $12 \cdot 14 = 168$ ja $37 \cdot 65 = 2405$, kusjuures $168 < 2405$.
2. $xz = 12 \cdot 65$ ja $yt = 37 \cdot 14$ sobib, sest $12 \cdot 65 = 780$ ja $37 \cdot 14 = 518$, kusjuures $780 > 518$.
3. $xz = 37 \cdot 14$ ja $yt = 12 \cdot 65$ ei sobi, sest $37 \cdot 14 = 518$ ja $12 \cdot 65 = 780$, kusjuures $518 < 780$.
4. $xz = 37 \cdot 65$ ja $yt = 12 \cdot 14$ sobib, sest $37 \cdot 65 = 2405$ ja $12 \cdot 14 = 168$, kusjuures $2405 > 168$.

Niisiis, x on 14 või 37,
 y on 37 või 12,
 z on 14 või 65,
 t on 65 või 14.

Kontrollist nähtub, et väärtused $x = 37$, $y = 12$, $z = 65$, $t = 14$ ei sobi.

Seega $xz = 12 \cdot 65 = 780$,

$$xy = 12 \cdot 37 = 444,$$

$$yt = 37 \cdot 14 = 518 \text{ ja}$$

$$444 - 780 + 518 = 182.$$

$$\text{Vastus. } \begin{cases} x = 12, \\ y = 37, \\ z = 14, \\ t = 65. \end{cases}$$

- 10.1. Olgu $\triangle ABC$ võrdhaarne, kusjuures $AB = BC$ (joon. 13). Uuritavate kolmnurkade tipud paiknevad $\triangle ABC$ ümberringjoonel ja ainult seal.

Joonestame teise ringjoone keskpunktiga B nii, et see läbiks $\triangle ABC$ teisi tippu A ja C .

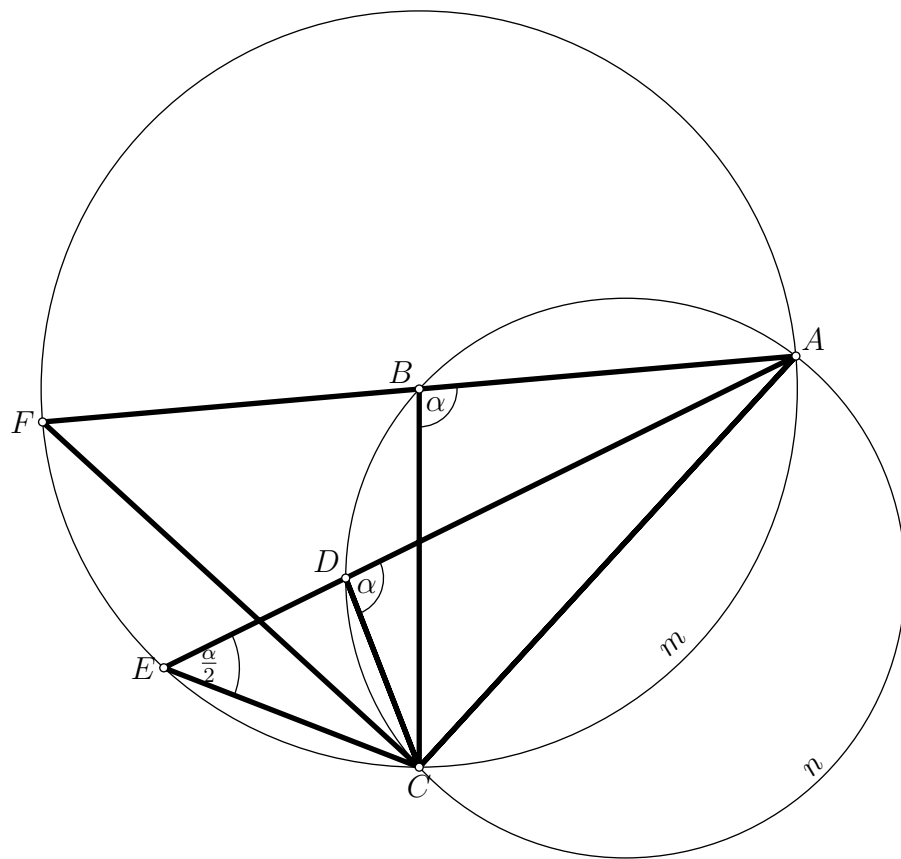
Joonestame suvalise, mitte võrdhaarse $\triangle ADC$. Pikendame lõigud AB ja AD lõikumiseni teise ringjoonega vastavalt punktides F ja E . Olgu $\angle ABC = \alpha$, siis $\angle AEC = \frac{\alpha}{2}$ kui piirdenurk, mis toetub kaarele AmC . $\angle CDA = \angle CBA = \alpha$ kui kaarele AnC toetuvad piirdenurgad.

Kuna $\angle EDC = 180^\circ - \alpha$, siis $\angle ECD = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (180^\circ - \alpha) = \frac{\alpha}{2}$.

Võrdsete nurkade vastas asetsevad kolmnurga võrdsed küljed, mistõttu $DE = DC$ ja $BF = BC$ kui raadiused. $AB + BF > AD + DE$, sest diameeter on kõõlust suurem. Siis ka $AB + BC > AD + DC$. Liidame võrratuse mõlemale poolele AC :

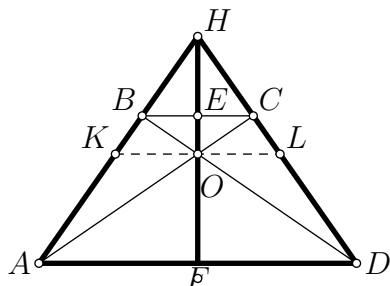
$$AB + BC + AC > AD + DC + AC,$$

järelikult $\ddot{U}_{ABC} > \ddot{U}_{ADC}$.



Joonis 13

10.2. Näitame, et $BE = EC$ ja $AF = FD$ (joon 14).



Joonis 14

$\triangle ABD \sim \triangle KBO$ ja $\triangle ACD \sim \triangle OCL$ kahe nurga järgi. Seega

$$\frac{KO}{AD} = \frac{BK}{AB} \text{ ja } \frac{CL}{CD} = \frac{OL}{AD}.$$

Et $BC \parallel KL \parallel AD$, siis $\frac{BK}{BA} = \frac{CL}{CD}$,
järelkult $\frac{KO}{AD} = \frac{OL}{AD}$, millest $KO = OL$.

Kuna $\triangle KHO \sim \triangle AHF$ ja $\triangle OHL \sim \triangle FHD$, siis $\frac{HO}{HF} = \frac{KO}{AF} = \frac{OL}{FB}$, millest $AF = FB$.

Et $\triangle BHE \sim \triangle KHO$ ja $\triangle HEC \sim \triangle HOL$, siis $\frac{HE}{HO} = \frac{BE}{KO} = \frac{EC}{OL}$,
millest $BE = EC$.

Seega paiknevad punktid H , E , O ja F ühel sirgel.

10.3. Ülesande tingimustest järeldub:

- 1) lehmade müügist saadud summas kümneliste arv on paaritu arv;
- 2) lehmade müügist saadud rahasumma on täisarvu ruut:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

kus $0 \leq a < \infty$, $1 \leq b \leq 9$.

Näeme, et kümnelisi saab olla paaritu arv parajasti siis, kui ühelistel kohal seisab 6. (Liidetav $20ab$ annab paarisarvu, seega 4^2 või 6^2 peab andma lisaks paaritu arvu kümnelisi).

Seega on oina hind 6 dollarit, mis on 4 dollarit väiksem lamba hinnast. Kompensatsiooniks tuleb hüvitada saadud kahjust pool, seega tuleb hüvitada 2 dollarit.

10.4. Viime logaritmid alusele 2. Selleks kasutame valemit

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

$$\begin{aligned}
& \cos 2x + \frac{\log_2(\frac{1}{2} \sin x)}{\log_2 4} + 2 \cos x \cdot \frac{\log_2 \sin x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \\
& = 2 \cos x + \sin^2 x \cdot \log_2 \sin^2 x, \\
& \cos 2x + \frac{\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \sin x}{2} - 2 \cos x \log_2 \sin x = \\
& = 2 \cos x + 2 \sin^2 x \log_2 \sin x, \\
& \cos 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \sin x - 2 \cos x \log_2 \sin x - 2 \cos x - \\
& \quad - 2 \sin^2 x \log_2 \sin x = 0, \\
& \left(\cos 2x - 2 \cos x - \frac{1}{2} \right) + \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - 2 \cos x - 2 \sin^2 x \right) \log_2 \sin x = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{1}{2} - 2 \cos x - 2 + 2 \cos^2 x = 0, \\
& 2 \cos^2 x - 2 \cos x - \frac{3}{2} = 0, \\
& 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\text{millest } \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

Kontroll näitab, et $-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ on võõrlahend.

$$2) \quad \log_2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\text{millest } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ja } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

$$\text{Vastus. } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

10.5. Süsteemi teisest võrrandist järeldub, et

$$x \neq 0, \quad y \neq 0 \quad \text{ja} \quad z \neq 0.$$

Teisendame teist võrrandit järgmiselt:

$$\frac{yz + xz + xy}{xyz} = 1 \Rightarrow \frac{27}{xyz} = 1 \Rightarrow xyz = 27.$$

Korrutame süsteemi kolmanda võrrandi mõlemaid pooli z -ga:

$$\begin{aligned}xyz + xz^2 + yz^2 &= 27z \Rightarrow xyz + (x + y)z^2 = 27z \Rightarrow \\&\Rightarrow 27 + (x + y)z^2 = 27z.\end{aligned}$$

Esimesest võrrandist $x + y = 9 - z$, seega

$$\begin{aligned}27 + (9 - z)z^2 &= 27z \Rightarrow 27 + 9z^2 - z^3 - 27z = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow (z - 3)^3 = 0,\end{aligned}$$

millest $z = 3$. Süsteemi esimesest ja teisest võrrandist saame nüüd, et $x = 3$ ja $y = 3$.

Vastus. $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

11.1. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$\begin{aligned}7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n &= 7 \cdot 25^n + (19 - 7) \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 19 \cdot 6^n - 7 \cdot 6^n = \\&= 19 \cdot 6^n + 7(25^n - 6^n).\end{aligned}$$

Avaldis $19 \cdot 6^n$ jagub 19-ga. Ka vahe $25^n - 6^n$ jagub $25 - 6 = 19$ -ga, seega kogu avaldis jagub 19-ga.

11.2. Olgu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} = x$.

Kasutame võrratuse omadust $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$. Selle põhjal kehtib seos

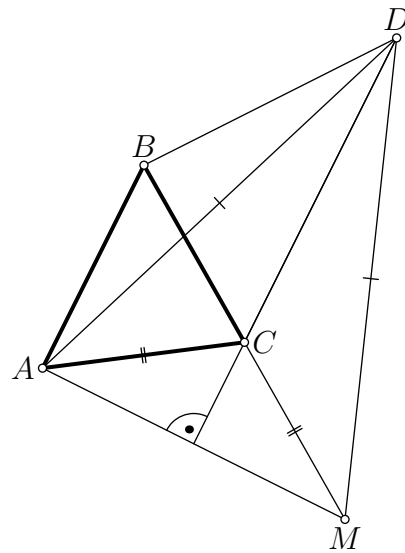
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Teisendame saadud võrratuse paremat poolt ja kasutades x väärtust:

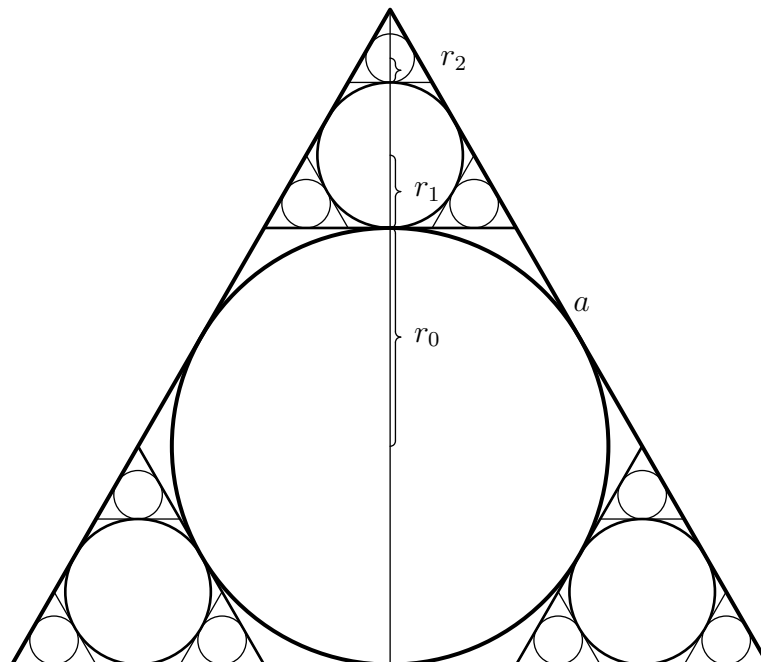
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} &< \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} (2n+1)}; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} &< \frac{1}{x(2n+1)}.\end{aligned}$$

Seega $x < \frac{1}{x(2n+1)}$. Kuna $x > 0$, siis $x^2 < \frac{1}{2n+1}$ ja $x < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11.3. Olgu punkt D kolmnurga külje BC pikendamisel tekkinud välisnurga C poolitajal (joon. 15). Joonestame $CM = AC$, siis $AD = DM$. Näeme, et $MC + BC < MD + BD$, ehk $AC + BC < AD + BD$. Kui $D \equiv C$, siis $AC + BC = AD + BD$, seega $AC + BC \leq AD + BD$.



Joonis 15



Joonis 16

11.4. Lähtekolmnurga külg on a , selle kolmnurga kõrgus $h_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Selle kolmnurga siseringi raadius r_0 on $\frac{1}{3}$ sellest kõrgusest, seega $r_0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, ja siseringi pindala

$$S_0 = \frac{\pi a^2 \cdot 3}{36} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Järgmise kolmnurga kõrgus h_1 on $\frac{1}{3}$ lähtekolmnurga kõrgusest, seega $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Selle kolmnurga siseringi raadius on $\frac{1}{3}$ sellest kõrgusest, seega $x_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12}$ ja siseringi pindala $S_1 = \frac{\pi a^2 \cdot 3}{18^2} = \frac{\pi a^2 \cdot 3}{18 \cdot 18} = \frac{\pi a^2}{12 \cdot 3^2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{1}{3^2} \cdot S_0$. Et selliseid ringe on 3, siis kolme ringi pindalade summa on $\frac{1}{3} S_0$. Kolmanda kolmnurga kõrgus $h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{18}$, siseringi raadius $r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{18 \cdot 3}$ ja siseringi pindala $S_2 = \frac{\pi a^2 \cdot 3}{18^2 \cdot 3^2} = \frac{\pi a^2}{18^2 \cdot 3}$. Et selliseid ringe on 9, siis nende pindalade summa

$$9S_2 = \frac{9\pi a^2}{18 \cdot 18 \cdot 3} = \frac{\pi a^2}{3^2 \cdot 12} = \frac{1}{3^2} \cdot S_0.$$

Sellisel viisil jätkata lõpmatult.

Kõikide ringide pindalade summa piirväärtuse saab leida lõpmatu kahaneva geomeetrilise jada (alates teisest liikmest) summa valemi abil:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \frac{1}{3}S_0 + \frac{1}{3^2}S_0 + \dots = S_0(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots) = \\ &= S_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = S_0 \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi a^2}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Vastus. } S = \frac{\pi a^2}{8}.$$

- 11.5. Jüri võitis Kalle ja Ülo, kaotas Jaanile, sai 4 punktiga II kohta. Kuna iga võistleja saab punkte ka nende võitude eest, mida saavutab see, kes talle kaotas, siis ei tohtinud Ülo rohkem partiisid võita. Selleks, et võitjaks tulla, ei tohtinud Jaan rohkem kaotusi saada (I-ks oleks tulnud Jüri või Kalle). Seega on Jaanil punkte 5. Jüri ja Kalle omavahelise mängu peab võitma Jüri, sest muidu ei jääks Kalle viimasele kohale.

JAAN		V	V	K	I
JÜRI	K		V	V	II
KALLE	K	K		V	IV
ÜLO	V	K	K		III

- 12.6. 10-kopikaline on õpilasel kindlasti. Seega on summas 15 kindlasti 10. Üle jääb 5 kopikat. 1-kopikalist ei saa õpilasel olla, sest $5 = 1 + 1 + 3$ või $5 = 2 + 2 + 1$. Et igast olemasolevast mündist peab võtma vaid ühe, siis peaks summaks 15 olema:

- 1) 2- ja 3-kopikaline ning 10-kopikaline ($10 + 2 + 3 = 15$);
- 2) 5- ja 10-kopikaline ($10 + 5 = 15$).

Esimesel juhul saab koostada võrrandi $10x + 3z + 2y = 100$, kus x on 10-kopikaliste arv, y on 2-kopikaliste arv ja z on 3-kopikaliste arv. Kuna kõige suurema väärtusega münste on 4 võrra rohkem ülejäänutest, siis

$$\begin{aligned} 10(z + y + 4) + 3z + 2y &= 100, \\ 13z + 12y &= 60. \end{aligned}$$

Et $z \in \mathbb{Z}^+$ ja $y \in \mathbb{Z}^+$, siis sellel võrrandil ei ole lahendeid.

Teisel juhul:

$$10x + 5(x - 4) = 100 \Rightarrow 15x = 120,$$

millest $x = 8$. Kuna 10-kopikalisi on 8, siis 5-kopikalisi on 4.

Vastus. Õpilasel on 4 5-kopikalist ja 8 10-kopikalist.

- 12.7. Ülesande tingimuste kohaselt on jadas $2n$ liiget.

$$n \text{ esimese liikme summa } S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

n järgmise liikme summa $S_2 = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} \cdot n$ ja

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2} &= \frac{a_1 + a_n \cdot n}{2} : \frac{(a_{n+1} + a_{2n}) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_n)2n}{(a_{n+1} + a_{2n})2n} = \\ &= \frac{a_1 + a_n}{a_{n+1} + a_{2n}}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ a_{n+1} &= a_1 + (n+1-1)d = a_1 + nd \\ a_{2n} &= a_1 + (2n-1)d,\end{aligned}$$

siis $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2a_1 + (3n-1)d}.$

Suhe ei sõltu liikmete arvust n , kui $d = 2a_1$, sest siis

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{d + (n-1)d}{d + (3n-1)d} = \frac{dn}{3dn} = \frac{1}{3},$$

Järelikult, 1) kui $d = 2a_1$, siis $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{7}$,

2) kui $d = 0$, siis $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

12.8. Arvestades täisosa tähendust, saame võrratuse

$$\frac{15x-7}{5} \leq \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-7}{5} + 1,$$

kus $\frac{15x-7}{5}$ on täisarv. Võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} \frac{15x-7}{5} \leq \frac{5+6x}{8} \\ \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-7}{5} + 1 \end{cases}$$

lahend on $\frac{41}{90} < x \leq \frac{9}{10}$.

Olgu täisarv $k = \frac{15x-7}{5}$, siis $x = \frac{5k+7}{15}$. Andes arvule k täisarvulised väärtused 0 ja 1, saame $x = \frac{7}{15}$ ja $x = \frac{4}{5}$, mis rahuldavad lähevõrratust.

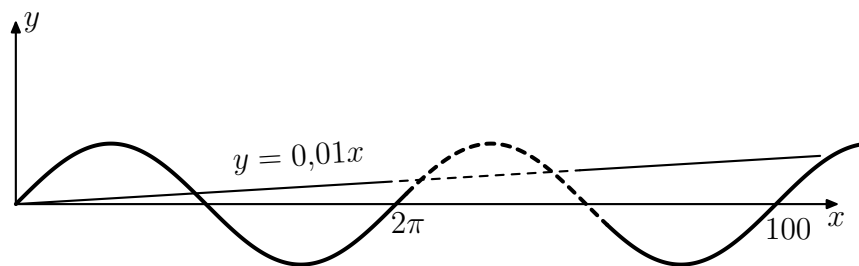
Vastus. $x_1 = \frac{7}{15}$ ja $x_2 = \frac{4}{5}$.

- 12.9. Kui x_0 on võrrandi $\sin(x) = 0,01x$ lahend, siis on lahendiks ka $-x_0$. Järelikult on negatiivsete ja positiivsete lahendite arvud võrdsed. Võrrandi lahendiks on ka $x = 0$.

Leiame ainult positiivsete lahendite arvu. Võrrandi lahend ei ole suurem kui 100:

$$|x| = 100|\sin x| \leq 100 \cdot 1 = 100.$$

Kasutame graafilist lahendusviisi. Jaotame x -teljel vahemiku 0-st kuni 100-ni 2π pikkusteks lõikudeks, kusjuures viimane lõik võib olla väiksem.

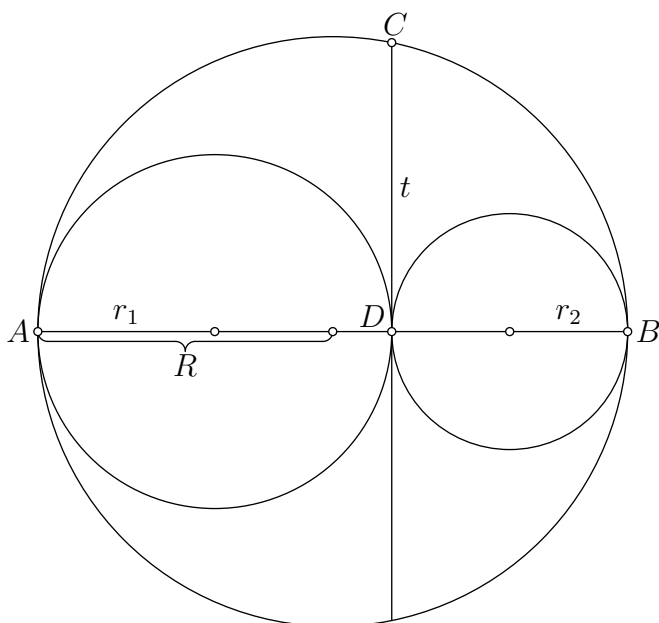


Joonis 17

Esimesse perioodi kuulub üks positiivne lahend ja lahend $x = 0$. Igas järgmises perioodis on 2 lahendit. Kuna $15 < \frac{100}{2\pi} < 16$, siis on x -teljel 15 täisperioodi ja veel osa perioodist. Et $100 - 15 \cdot 2\pi > 5 > \pi$, siis on viimases lõigus samuti kaks lahendit.

Positiivseid lahendeid on seega $1 + 14 \cdot 2 + 2 = 31$ ja kokku on antud võrrandil lahendeid $31 \cdot 2 + 1 = 63$.

- 12.10. Olgu suure ringi raadius R , seesmiste ringide raadiused r_1 ja r_2 (joon. 18), siis otsitav pindala $S = \pi R^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi [R^2 - (r_1^2 + r_2^2)]$.



Joonis 18

Kuna $2R = 2r_1 + 2r_2$, siis
 $R = r_1 + r_2$.

Kolmnurk ABC on täisnurkne, kus $CD = \frac{1}{2}t$ on kõrgus. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrguse teoreemi põhjal

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 4r_1r_2,$$

millest

$$t^2 = 16r_1r_2. \quad (8)$$

Süsteemist

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = R \\ 16r_1r_2 = t^2 \end{cases}$$

saame, et $(r_1 + r_2)^2 = R^2$ ehk $r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = R^2$ ja võrdust (8) arvestades $r_1^2 + r_2^2 = R^2 - \frac{t^2}{8}$. Kuna $S = \pi [R^2 - (r_1^2 + r_2^2)]$, siis $S = \frac{\pi t^2}{8}$.

$$\text{Vastus. } S = \frac{\pi t^2}{8}.$$

- 13.1. Esimene arv peab olema kolmekohaline. Olgu selle arvu sajaliste number a ja kümneliste number b . Tingimuste kohaselt saame võrrandi $(100a + 10b + 2) + 10a + b = 145$, millest

$$\begin{aligned} 110a + 11b &= 143, \\ 10a + b &= 13, \end{aligned}$$

järelikult

$$a = \frac{13 - b}{10} = 1 + \frac{3 - b}{10}.$$

Et a oleks täisarv, peab $b = 3$ ja $a = 1$.

Vastus. 132 ja 13.

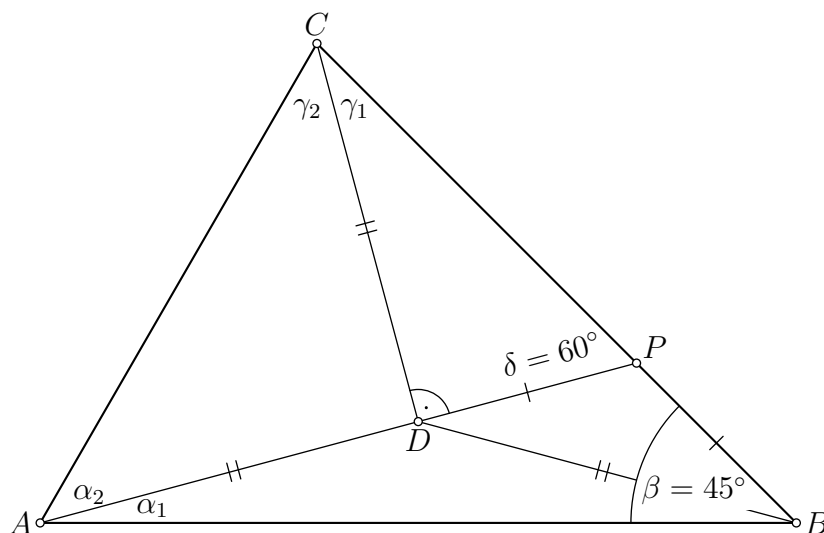
- 13.2. Esimesest seosest järeldub, et Martin ja Karl ei saa olla Altmann ega Müller. Teisest seosest järeldub, et Martin ei saa olla Neubert ja Ernst ei saa olla Müller ega Neubert. Seega on õpilaste nimed: Martin Träger, Karl Neubert, Ernst Altmann, Frany Müller.

- 13.3. Teisendame antud võrrandit järgmiselt:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} &= \frac{3}{x}, \\ \frac{4(x - \sqrt{x^2 + x})}{-x} - \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{-x} &= \frac{3}{x}, \\ \frac{4x - 4\sqrt{x^2 + x} - x - \sqrt{x^2 + x}}{-x} &= \frac{3}{x}, \\ \frac{3x - 5\sqrt{x^2 + x}}{-x} &= \frac{3}{x}, \\ 3x - 5\sqrt{x^2 + x} &= -3, \\ 3(x + 1) &= 5\sqrt{x(x + 1)}, \\ 9(x + 1)^2 &= 25(x + 1)x, \\ (x + 1) \cdot [9(x + 1) - 25x] &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Siit } x_1 = -1 \text{ ja } x_2 = \frac{9}{16}.$$

- 13.4. Joonestame $CD \perp AP$ (joon. 19).



Joonis 19

Et $\angle DCP = \gamma_1 = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$, siis $2DP = CP$. Kuna ülesande tingimustest ka $2BP = CP$, siis $DP = BP$ ja kolmnurk DPB on võrdhaarne, milles $\angle PBD = \angle PDB = 30^\circ$.

Et $\angle PCD = \angle PBD$, $BD = CD$, $\angle ABD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ja $\angle DAB = \delta - \beta = 15^\circ$, siis osutub kolmnurk ABD samuti võrdhaarseks, mistõttu ka $AD = BD$.

Et $AD = BD$ ja $BD = CD$, siis $AD = CD$, järelikult ka $\alpha_2 = \gamma_2$. Kuna $\alpha_2 + \gamma_2 = 90^\circ$ ja kolmnurk ACD on võrdhaarne, siis $\gamma_2 = \alpha_2 = 45^\circ$ ja järelikult

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

Vastus. $\angle ACB = 75^\circ$.

13.5. Olgu antud geomeetriline jada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Tingimuste kohaselt $a_k > s_{k-1}$ ehk $a_1 q^{k-1} > \frac{a_1(q^{k-1} - 1)}{q - 1}$. Et $a_1 > 0$

ja $q > 1$, siis $\frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} < q^{k-1}$, millest

$$q^k - q^{k-1} > q^{k-1} - 1 \text{ ja } q^k + 1 > 2q^{k-1}.$$

Jagame selle võrratuse mõlemad pooled positiivse suursegaga q^{k-1} :

$$q + \frac{1}{q^{k-1}} > 2.$$

Kui $k \rightarrow \infty$, siis $q \geq 2$.

Teine lahendusviis.

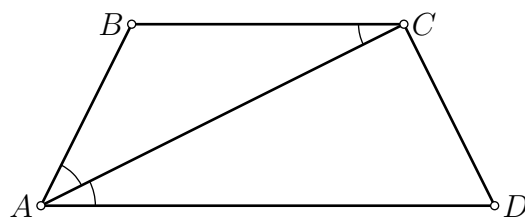
$$a_1 q^k > \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1}, \text{ millest } q^k > \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

Kui $q > 1$, siis $q^{k+1} - 2q^k + 1 > 0$ ehk $q^k(q - 2) + 1 > 0$ ja $q^k < \frac{1}{2 - q}$.

Kui $1 < q < 2$, siis $q^k < \frac{1}{2 - q}$ ei kehti. Seega $q \geq 2$.

Vastus. $q \geq 2$.

- 14.1. $\angle BCA = \angle BAC$
(joon. 20), seega on kolmnurk ABC võrdhaarne ja $AB = BC = 8$ cm, $CD = 8$ cm ning



$$\begin{aligned} \tilde{U} &= AD + BC + 2AB = \\ &= 10 + 8 + 16 = 34 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Joonis 20

Vastus. 34 cm.

- 14.2. Kirjutame selle võrrandi kujul

$$\frac{(x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + 2 + 1}{x} = 3.$$

Murru lugejas on aritmeetilise jada liikmete summa, kusjuures $a_1 = 1$, $a_n = x - 1$ ja $n = x - 1$. Antud võrrand saab nüüd kuju

$$\frac{\frac{1+x-1}{2} \cdot (x-1)}{x} = 3,$$

millest

$$\frac{x(x-1)}{2x} = 3,$$

$x^2 - 7x = 0$ ja $x_1 = 7$ ning $x_2 = 0$ (osutub võõrlahendiks).

Vastus. $x = 7$.

14.3. Kaks järjestikust paaritud arvu on $2n - 1$ ja $2n + 1$.

- a) Nende summa on $4n$, mis jagub arvuga 4.
 b) Iga 4-ga jaguvat arvu võib kirjutada aga kahe järjestikuse paaritu arvu summana kujul

$$4n = (2n - 1) + (2n + 1).$$

14.4. Kirjutame võrrandi $x^2 - y^2 = 21$ kujul $(x+y)(x-y) = 21$, kus $x \neq y \neq 0$ ja $x + y$ ning $x - y$ on täisarvud.

$$\begin{array}{llll} \text{Et } 21 \cdot 1 = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 1 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = 11 \\ y = 10; \end{cases} \\ \text{et } 1 \cdot 21 = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 21 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = 11, \\ y = -10; \end{cases} \\ \text{et } 3 \cdot 7 = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = -2; \end{cases} \\ \text{et } 7 \cdot 3 = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 2; \end{cases} \\ \text{et } (-1) \cdot (-21) = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -21 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = -11 \\ y = 10; \end{cases} \\ \text{et } (-21) \cdot (-1) = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = -21 \\ x - y = -1 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = -11 \\ y = -10; \end{cases} \\ \text{et } (-3) \cdot (-7) = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = -7 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 2; \end{cases} \\ \text{et } (-7) \cdot (-3) = 21, & \text{siis} & \begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = -3 \end{cases} & \text{ja} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = -2; \end{cases} \end{array}$$

14.5. Kõigepealt lähtume sellest, et Aini ütlus: „Mina I“ on õige. Siis Ivarile jääb õigeks vastuseks „Mina IV“. Kuid sellisel juhul ei jää Vahurile üldse õiget vastust. Järelikult on Aini ütlusest õige „Vahur IV“. Ivari ütlusest selgub, et Ain oli II. Vahuri ütlusest järeldub, et Ivar oli III ja Peetri ütlusest järeldub, et Peeter oli I.

Vastus. Peeter – I, Ain – II, Ivar – III ja Vahur – IV.

- 14.6. Olgu töölistele antud aeg x tundi ja esimese tööliste poolt ühes tunnis valmistatud detailide arv y . Esimene tööline pidi seega valmistama xy detaili.

Teisel töölisel jäi tegemata $0,1xy$ detaili, see on $\frac{2}{3}y$ detaili.

Tähendab, et $0,1xy = \frac{2}{3}y$ ehk $3xy = 20y$. Kuna $y \neq 0$, siis $3x = 20$, millest $x = \frac{20}{3}$ h = 6 h 40 min.

Teise tööliste tunnitoodang on $0,9y$ detaili. Oleks ta tunnis teinud 3 detaili rohkem, oleks detailide arv $(0,9y + 3)$, tema kogutoodang aga $(0,9y + 3)x = 0,95xy$. Kuna $x \neq 0$, siis $0,9y + 3 = 0,95y$, millest $0,05y = 3$ ja $y = 60$. Täheandab,

$$xy = \frac{20 \cdot 60}{3} = 400 \text{ detaili.}$$

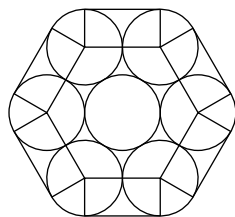
Vastus. Kumbki tööline pidi valmistama 400 detaili.

- 15.1. Kirjutame antud avaldise kujul

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1).$$

Kuna p on algarv, siis $p - 1$ ja $p + 1$ on paarisarvud, neist üks jagub 2-ga, teine 4-ga. Kuna arvude $p - 1$ ja $p + 1$ vahele on võimalik paigutada arv p , siis saame kolm järjestikust arvu, millest üks jagub kindlasti 3-ga. Järelikult $p^2 - 1$ jagub 24-ga.

- 15.2. Antud kujund koosneb järgmistest osadest (joon. 21):



Joonis 21

- 1) korrapärane kuusnurk, mille külge on $2r$;
- 2) 6 60° kesknurga sektorit;
- 3) 6 ristkülikut külgedega r ja $2r$. endfigure

Korrapärase kuusnurga pindala $S_6 = 6r^2\sqrt{3}$, 6 sektori pindala on πr^2 ja 6 ristküliku pindala on $12r^2$.

Kogu kujundi pindala $S = 6r^2\sqrt{3} + \pi r^2 + 12r^2 = r^2(\pi + 12 + 6\sqrt{3})$.

Antud kujundi ümbermõõt koosneb järgmistest osadest:

- 1) 6 kaart kesknurgaga 60° ja raadiusega r ,

2) 6 lõiku pikkusega $2r$.

Kaarte pikkuste summa on $2r$, lõikude pikkuste summa on $12r$, seega kujundi ümbermõõt

$$\ddot{U} = 2\pi r + 12r + 2r(\pi + 6).$$

Vastus. Selle kujundi pindala on $r^2(\pi + 12 + 6\sqrt{3})$ ja ümbermõõt on $2r(\pi + 6)$.

15.3. Võrrandist $x^2 + (2 - a) \cdot x - a - 3 = 0$, saame, et

$$x_1 + x_2 = a - 2 \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 = -a - 3. \quad (9)$$

Tõstame avaldise (9) ruutu, saame

$$x^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = a^2 - 4a + 4,$$

millest

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= a^2 - 4a + 4 + 2a + 6 = a^2 - 2a + 10 = \\ &= (a^2 - 2a + 1) + 9 = (a - 1)^2 + 9. \end{aligned}$$

Saadud avaldise väärtus on minimaalne, kui $a = 1$.

Vastus. $a = 1$.

15.4. Võrratusest $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$ järeldeb, et

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ x-x > 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad -1 < x < 1.$$

Et $\sqrt{1+x} > 0$ ja $\sqrt{1-x} > 0$, siis

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \geq \sqrt{1-x^2} \quad (10)$$

Selle võrratuse parem pool on mittenegatiivne, järelikult

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} > 0,$$

millest

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} &> \sqrt{1+x}, \\ 1-x &> 1+x \end{aligned}$$

niisiis $x < 0$.

Arvestades saadud tingimusi $-1 < x < 0$ lahendame võrratuse (10). Selleks tõstame võrratuse $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \geq \sqrt{1-x^2}$ mõlemad pooled ruutu:

$$1 - x + 1 + x - 2\sqrt{1-x^2} \geq 1 - x^2,$$

millest

$$1 + x^2 \geq 2\sqrt{1-x^2}.$$

Et mõlemad pooled on positiivsed, siis

$$1 + 2x^2 + x^4 - 4 + 4x^2 \geq 0$$

millest

$$x^4 + 6x^2 - 3 \geq 0.$$

Tähistame $x^2 = a$, siis

$$a^2 + 6a - 4 \geq 0,$$

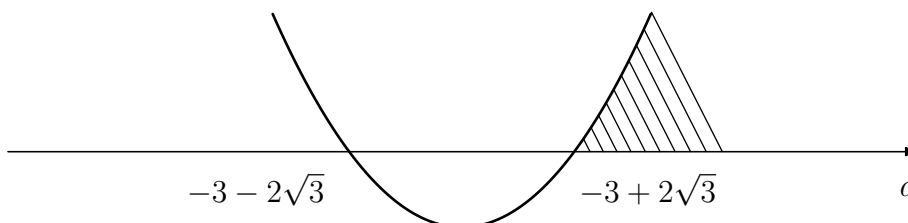
millest $a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{12}$.

Nüüd $a_1 = -3 - \sqrt{12}$, mis sobib, sest $a > 0$; $a_2 = -3 + \sqrt{12} = -3 + 2\sqrt{3}$. Seega $a > -3 + 2\sqrt{3}$ (joon. 22) ehk

$$x_2^2 > -3 + 2\sqrt{3},$$

millest

$$x^2 + (3 - 2\sqrt{3}) > 0.$$



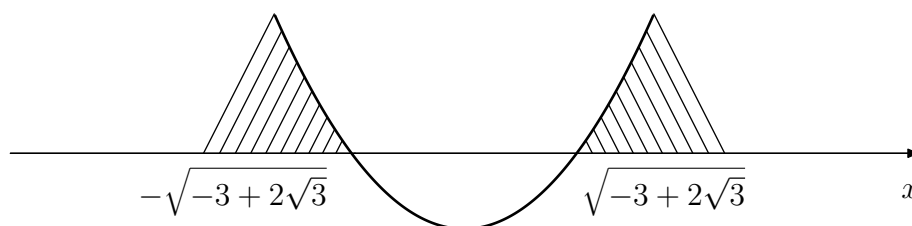
Joonis 22

Avaldise $x^2 + (3 - 2\sqrt{3})$ nullkohad on

$$x_1 = -\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}} \quad \text{ja} \quad x_2 = \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}.$$

Et $x < 0$, siis on võrratuse lahend (joon. 23)

$$1 < x < -\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}.$$



Joonis 23

15.5. Aita sünniaasta on $1900 + 10a + b$, kus

$$0 \leq a \leq 5 \quad \text{ja} \quad 0 \leq b \leq 9.$$

Kui Aita sündis eelmisel sajandil, siis

$$(1 + 8 + 9 + 9)_{\max} = 27,$$

ei sobi.

Kui oletada, et Aita sünnipäev oli 1. jaanuaril, on vanus

$$1 + 9 + a + b = 1953 - (1900 + 10 * a + b),$$

millest

$$11a + 2b = 43,$$

$$a = 4 - \frac{1 + 2b}{11}.$$

Et vähendaja oleks täisarv, peab olema

$$b = 5 \quad \text{ja} \quad a = 3,$$

s.t. Aita sündis 1935. aastal.

Kui arvata, et Aita sünnipäev oli viimati 1952. aastal, on

$$1 + 9 + a + b = 1952 - (1900 + 10a + b)$$

millest

$$11a + 2b = 42,$$

$$a = \frac{42 - 2b}{11} = \frac{33 + 9 - 2b}{11} = 3 + \frac{9 - 2b}{11}.$$

Siin lahend puudub.

Järelikult sündis Aita 1935. aastal ja on 18-aastane.

- 16.1. Olgu otsitav naturaalarvude paar $(x; y)$, kusjuures $x \in \mathbb{N}$ ja $y \in \mathbb{N}$. Tingimuste kohaselt

$$x^2 - y^2 = 2(x + y),$$

millest

$$(x + y)(x - y) = 2(x + y).$$

Kui 1) $x + y \neq 0$, siis

$$x - y = 2,$$

$$y = x - 2 \text{ ja } x \geq 2.$$

Arvupaarid $(x; x - 2)$.

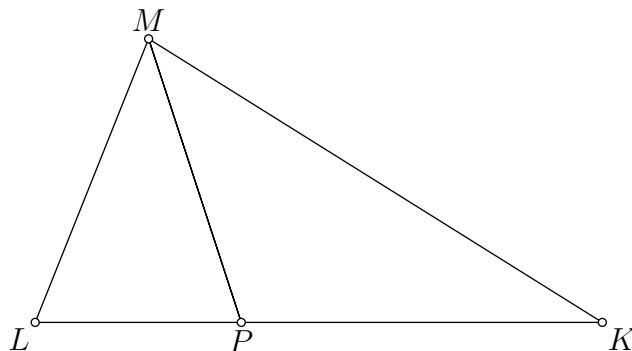
Kui 2) $x + y = 0$, siis

$$x = y = 0 \text{ ja saame teise arvupaari } (0; 0).$$

Vastus. Arvupaarid on $(0, 0)$ ja $(x, x - 2)$, kus $x \geq 2$ ja $x \in \mathbb{N}$

- 16.2. Lahendamisel kasutame teoreemi kolmnurga sisenurga poolitajast, selle põhjal $\frac{PM}{LM} = \frac{PK}{KM}$ (joon. 24), millest

$$KM \cdot PL = PK \cdot LM \quad \text{ehk} \quad \frac{KM \cdot PM}{2} = \frac{PK \cdot LM}{2},$$



Joonis 24

$$S_1 = \frac{KM \cdot PL}{2} \text{ on ühe}$$

tekkinud kolmnurga

$$\text{pindala ja } S_2 = \frac{PK \cdot LM}{2} \text{ on tei-}$$

se kolmnurga pindala

$$\text{Et } S_1 = S_2, \text{ siis } S_1 : S_2 = 1$$

Vastus. Kolmnurkade pindalade suhe on 1.

16.3. Et $\sqrt{1+x-3y} \geq 0$ ja $\sqrt{2x-4y+1} \geq 0$, siis

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geq 1 \quad \text{ja} \quad 3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geq 1.$$

Et summa oleks võrdne kahega, peab

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} = 1 \quad \text{ja} \quad 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 1,$$

s.t.

$$\sqrt{1+x-3y} = 0 \quad \text{ja} \quad \sqrt{2x-4y+1} = 0.$$

Lahendame saadud võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x-3y} = 0 \\ \sqrt{2x-4y+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x-3y = 0 \\ 2x-4y+1 = 0, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

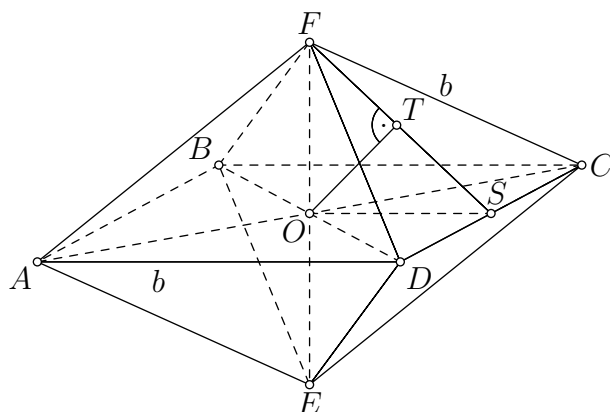
Vastus. Võrrandit rahuldab reaalarvude paar $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

16.4. Olgu r_1 regulaarse oktaeedri ja r_2 kuubi ümber kujundatud kerade raadiused, b oktaeedri serv ja a kuubi serv (joon. 25, ja joon. 26). Siis

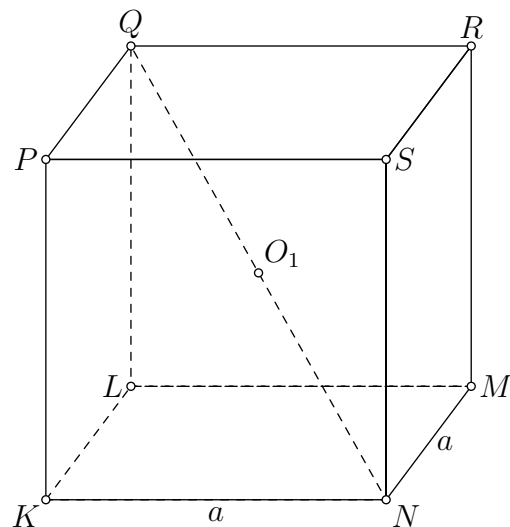
$$r_1 = OD = \frac{b\sqrt{2}}{2}, \quad r_2 = O_1N = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad SF = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Kuna } r_1 = r_2, \text{ siis } \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ millest } a = b\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Olgu r'_1 oktaeedrisse kujundatud kera raadius ja r'_2 kuubisse kujundatud kera raadius.



Joonis 25



Joonis 26

Siis

$$r_2' = \frac{a}{2} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ja

$$r_1' = OT = \frac{2OS \cdot OF}{2 \cdot SF} = \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Järelikult $r_2' : r_1' = 1$.

Vastus. Kuubisse ja oktaeedrisse ehitatud kerade raadiuste suhe on 1.

16.5. Antud ülesandes $x = \frac{5}{7}$.

Teise omaduse põhjal $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$, millest

$$f(x) = x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ja} \quad f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{25}{49} \cdot f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{25}{49} \cdot f\left(1 + \frac{2}{5}\right).$$

Kolmanda ja esimese omaduse põhjal võib saadud avaldist teisendada järgmiselt:

$$f\left(1 + \frac{2}{5}\right) = f(1) + f\left(\frac{2}{5}\right) = 1 + f\left(\frac{2}{5}\right),$$

seega

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{25}{49} \left[1 + f\left(\frac{2}{5}\right) \right].$$

Arvutame $f\left(\frac{2}{5}\right)$, lähtudes teisest omadusest:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{5}\right) &= \frac{4}{25} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{25} \left[f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{4}{25} \left[f(1) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{4}{25} \left[2 + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{4}{25} \left[2 + \frac{1}{2} \right] = \frac{2}{5}, \text{ sest } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot f(2) = \\ &= \frac{1}{4} [f(1) + f(1)] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Asendame $f\left(\frac{2}{5}\right)$ väärtuse avaldises (8):

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{25}{49} \left[1 + f\left(\frac{2}{5}\right) \right] = \frac{25}{49} \left[1 + \frac{2}{5} \right] = \frac{25}{49} \cdot \frac{7}{5} = \frac{5}{7}.$$

Vastus. $f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{5}{7}$.

- 17.1. Olgu otsitav arv $10a + b$. Kui sellest arvust lahutame arvu b , siis nii saadud arv a on 14 korda antud arvust väiksem, s.t.

$$10a + b = 14a \quad \text{ehk} \quad 4a = b.$$

Et arv b on ühekohaline, siis $a < 3$, s.t. $a = 1$ või $a = 2$ ja $b = 4$ või $b = 8$. Mõlemad arvud 14 ja 28 rahuldavad ülesande tingimusi.

- 17.2. Olgu intressi suurus $x\%$, siis esialgne hoius oli $\frac{15 \cdot 100}{x} = \frac{1500}{x}$ rbl. Teise aasta algul oli hoius $\frac{1500}{x} + 15 + 85 = \left(\frac{1500}{x} + 100\right)$ rbl. Teise aasta intress on $\frac{x}{100} \left(\frac{1500}{x} + 100\right)$ rbl, ja hoiusumma koos intressiga on $\left(\frac{x}{100} + 1\right) \left(\frac{1500}{x} + 100\right)$ rbl. Seega saame võrrandi

$$\left(\frac{x}{100} + 1\right) \left(\frac{1500}{x} + 100\right) = 420,$$

millest

$$\frac{1500}{x} + 115 + x = 420,$$

$$x^2 - 305x + 1500 = 0,$$

$$x_1 = 5 \text{ ja } x_2 = 300 \text{ (ei sobi).}$$

Esialgne hoius $\frac{1500}{5} = 300$ rbl.

Vastus. Intress oli 5%, esialgne hoius 300 rbl.

17.3. Olgu $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = a$.

Tõstame võrduse mõlemad pooled kuupi:

$$\begin{aligned} a^3 &= 20 + \sqrt{392} + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})^2(20 - \sqrt{392})} + \\ &\quad + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})^2} + 20 - \sqrt{392} \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} a^3 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})} \left(\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + 20 - \sqrt{392} \right) \\ a^3 &= 40 + 6a. \end{aligned}$$

Teisendame saadud võrrandit järgmiselt:

$$\begin{aligned} a^3 - 6a - 64 + 24 &= 0, \\ (a^3 - 64) - (6a - 24) &= 0, \\ (a - 4)(a^2 + 4a + 16) - 6(a - 4) &= 0, \\ (a - 4)(a^2 + 4a + 16 - 6) &= 0, \\ (a - 4)(a^2 + 4a + 10) &= 0, \end{aligned}$$

millest $a_1 = 4$ ja $a_2 = -2 \pm \sqrt{-6}$ (ei sobi).

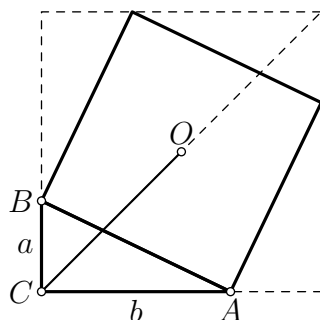
Vastus. $a = 4$.

17.4. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$\begin{aligned} &\cos \alpha + \cos(72^\circ + \alpha) + \cos(288^\circ + \alpha) + \cos(144^\circ + \alpha) + \\ &\quad + \cos(216^\circ + \alpha) = \cos \alpha + 2 \cos(180^\circ + \alpha) \cos 108^\circ + \\ &\quad + 2 \cos(180^\circ + \alpha) \cos 36^\circ = \cos \alpha + 2 \cos \alpha \cos 72^\circ - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos 36^\circ = [1 + 2(\cos 72^\circ - \cos 36^\circ)] \cos \alpha = \\ &= (1 - 4 \sin 54^\circ \sin 18^\circ) \cos \alpha = (1 - 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ) \cos \alpha = \\ &= \left(1 - \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \cos \alpha = \\ &= \left(1 - \frac{2 \cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \cdot \cos \alpha = \\ &= \left(1 - \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \cos \alpha = \left(1 - \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

- 17.5. Ehitame ruudu igale küljele antud kolmnurgaga võrdsed kolmnurgad (joon. 27). Otsitav kaugus on võrdne uue ruudu diagonaali poolega,

$$\text{s.t. } CO = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$$



Joonis 27

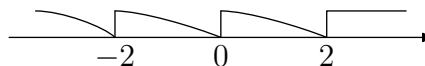
- 18.1. Et viimane osakorrutis on teada, siis esimene tegur on

$$235038 : 3 = 78346.$$

Teine tegur on 341, kuna korrutise viimane number on 6.

- 18.2. Vaatleme eraldi joonisel 28 kujutatud vahemikke

- 1) $x < -2$;
- 2) $-2 \leq x < 0$;
- 3) $0 \leq x < 2$ ja
- 4) $x \geq 2$.



Joonis 28

Kui $x < -2$, siis $-(x+2) - x - (x-2) = 4$, millest $x = -\frac{4}{3}$. See ei sobi, sest on vastuolu tingimusega $x < -2$. Kui $-2 \leq x < 0$, siis $x+2 - x - (x-2) = 4$, millest $x = 0$. Ka see lahend ei sobi, sest on vastuolus antud tingimusega.

Kui $0 \leq x < 2$, siis $x+2 + x - (x-2) = 4$, millest $x = 0$.

Kui $x \geq 2$, siis $x+2 + x + x - 2 = 4$, millest $x = \frac{4}{3}$.

Ka see lahend ei sobi.

Vastus. $x = 0$.

- 18.3. Olgu voolu kiirused v_1 ja v_2 , kusjuures $v_1 > v_2$. Kiirema vooluga jões kulus mootorpaadil edasi-tagasi sõiduks

$$t_1 = \frac{s}{v + v_1} + \frac{s}{v - v_1} = \frac{2sv}{v^2 - v_1^2} \text{ tundi.}$$

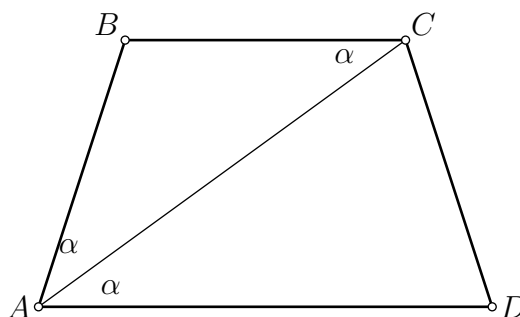
Aeglasema vooluga jões kulus mootorpaadil edasi-tagasi sõiduks

$$t_2 = \frac{s}{v + v_2} + \frac{s}{v - v_2} = \frac{2sv}{v^2 - v_2^2} \text{ tundi.}$$

Et $v_1 > v_2$, siis $v^2 - v_1^2 < v^2 - v_2^2$, millest järeldub, et $t_1 > t_2$.

Vastus. Aeglasema vooluga jões liikaval paadil kulus edasi-tagasi sõiduks vähem aega.

- 18.4. Ülesande tingimuste kohaselt $AB = BC$ ja $AC = AD$ (joon. 29).



Joonis 29

Olgu $\angle CAD = \alpha$, siis ka $\angle ACB = \alpha$ ja $\angle BAC = \alpha$. Võrdhaarses kolmnurgas ACD

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Võrdhaarse trapetsi alusnurgad on võrdsed. Järelikult $2\alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, millest $\alpha = 36^\circ$ ja $2\alpha = 72^\circ$.

Vastus. 72° .

- 18.5. Olgu kuus järjestikust paarisarvu $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, 2n + 8$ ja $2n + 10$.

Ülesande tingimuste kohaselt

$$(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 + (2n + 6)^2 + (2n + 8)^2 + (2n + 10)^2 = \overline{\alpha\alpha\alpha},$$

kus α on mingi number. Pärast teisendamist

$$4(6n^2 + 30n + 55) = \overline{\alpha\alpha\alpha}.$$

Neljakohalise arvu kirjutame järguühikute summana:

$$\overline{\alpha\alpha\alpha} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\alpha + \alpha, \text{ millest } \overline{\alpha\alpha\alpha} = 1111\alpha$$

Seega $4(6n^2 + 30n + 55) = 1111\alpha$. Viimasest võrdusest järeldub, et α peab olema 4-ga jaguv number, s.t. kas 4 või 8.

Kui $\alpha = 4$, siis

$$6n^2 + 30n + 55 = 1111,$$

ehk

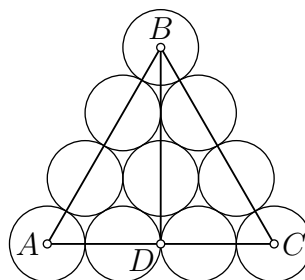
$$n^2 + 5n - 176 = 0,$$

millest $n_1 = 11$, $n_2 = -16$. $\alpha = 8$ ei sobi.

Vastus. 22, 24, 26, 28, 30, 32 või $-32, -30, -28, -26, -24, -22$.

- 19.1. Võrdkülgse kolmnurga ABC külge on 156 cm ja selle kolmnurga kõrgus $BD = 156 \sin 60^\circ = 78\sqrt{3}$ (cm) (joon. 30). Torude virn on toru läbimõõdu võrra kõrgem kui BD . Seega virna kõrgus on

$$78\sqrt{3} + 52 = 26(3\sqrt{3} + 2) \text{ (cm)}.$$



Joonis 30

- 19.2. Joonte lõikepunktide leidmiseks leiame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y = x^2 - 12x + 40, \\ x = y^2 - 12y + 40. \end{cases}$$

lahendid.

Lahutame võrrandite vastavad pooled:

$$y - x = x^2 - y^2 - 12x + 12y,$$

millest

$$y - x + (y - x)(y + x) - 12(y - x) = 0$$

ehk

$$(y - x)(y + x - 11) = 0.$$

Kui $y - x = 0$, siis lähtevõrrandisüsteemist saame, et

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 5, \end{cases}$$

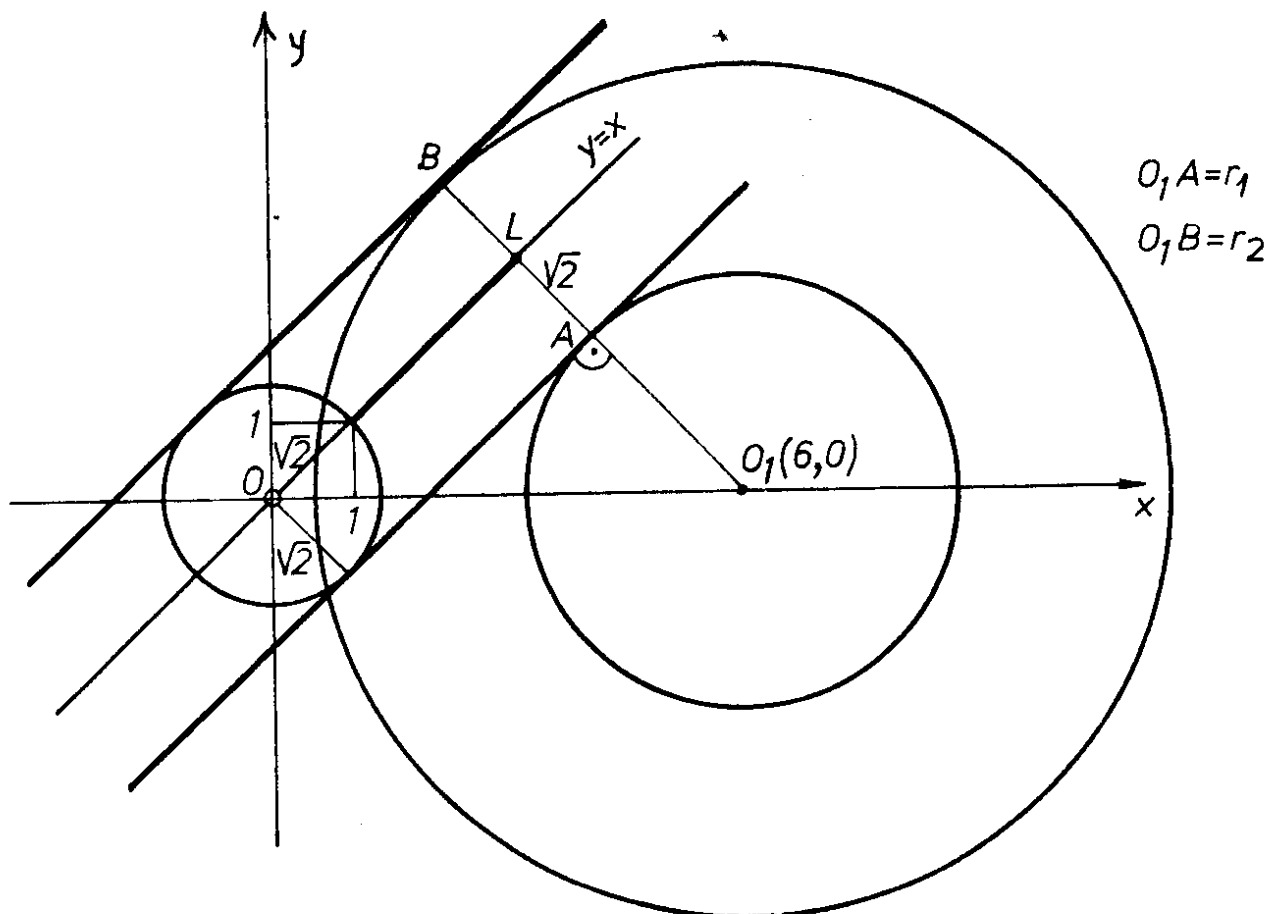
Kui $y + x - 11 = 0$, siis lähtevõrrandisüsteemist saame, et

$$\begin{cases} x_3 = \frac{11 + \sqrt{5}}{2} \\ y_3 = \frac{11 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{11 - \sqrt{5}}{2} \\ y_4 = \frac{11 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

V a s t u s. Joonte lõikepunktid on $(8; 8)$, $(5; 5)$,
 $(\frac{11 + \sqrt{5}}{2}; \frac{11 - \sqrt{5}}{2})$ ja $(\frac{11 - \sqrt{5}}{2}; \frac{11 + \sqrt{5}}{2})$.

9.3. Ringjoone $x^2 + y^2 = 2$ keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja raadius on $\sqrt{2}$. Olgu otsitavate ringjoonte raadiused r_1 ja r_2 (joon. 31).

Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga OLO_1 hüpotenuus on 6 ja kaatetid $OL = LO_1 = r_1 + \sqrt{2}$.



Joon. 31

Pythagorase teoreemi põhjal $OL^2 + LO_1^2 = OO_1^2$ ehk
 $2(r_1 + \sqrt{2})^2 = 36$, millest $r_1 + \sqrt{2} = \sqrt{18}$ ja $r_1 = 2\sqrt{2}$.

Teise ringjoone raadius $r_2 = O_1L = 4\sqrt{2}$.

V a s t u s. Raadiused on $2\sqrt{2}$ ja $4\sqrt{2}$.

19.4. Leiame m väärtused, mille puhul ülesanne on lahenduv.

Korrutame ja jagame võrduse $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ vasakut poolt arvuga $\sqrt{2}$, siis saame

$$\sqrt{2}(\sin \alpha \cos 45^\circ + \cos \alpha \sin 45^\circ) = m \quad \text{ehk}$$

$$\sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ) = m, \text{ millest } \sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Järelikult $\left| \frac{m}{\sqrt{2}} \right| \leq 1$, s. t. $|m| \leq \sqrt{2}$.

Avaldisele $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ võib liita $\pm 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$,
 siis $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$
 $= 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \quad (1)$

Tõstame võrduse $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ mõlemad pooled ruutu,
 siis $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2$.

Sellest seosest saab, et

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 - 1 \quad \text{ja}$$

$$4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = m^4 - 2m^2 - 1, \text{ millest}$$

$$2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{m^4 - 2m^2 - 1}{2}.$$

Asendame viimase seose avaldises (1) ja näeme, et

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{-m^4 + 2m^2 + 1}{2}.$$

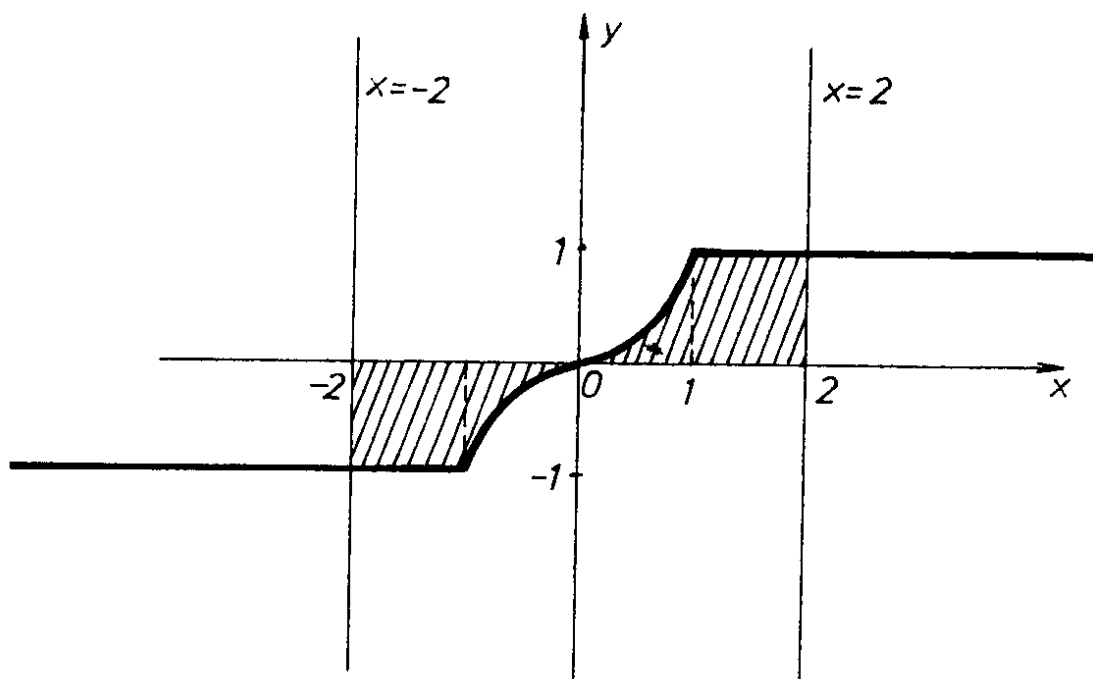
19.5. Uurimiseks on kasulik esitada antud funktsioon järgmisel kujul:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kui } x \leq -1 \\ m^3, & \text{kui } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{kui } x \geq 1 \end{cases}$$

Selgub, et

- a) funktsiooni määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk;
- b) funktsioon on paaritu;
- c) funktsiooni nullkoht on $x = 0$, positiivsuspiirkond on $x > 0$ ja negatiivsuspiirkond on $x < 0$;

- d) vahemikus $-1 < x < 1$ on funktsioon kasvav;
 kui $x \geq 1$, siis on funktsiooni väärtus 1;
 kui $x < -1$, siis on funktsiooni väärtus -1;
 e) ekstreemumkohad puuduvad;
 f) käänukoht on $x = 0$,
 kumeruspiirkond on $-1 < x < 0$ ja
 nõgususpiirkond on $0 < x < 1$.



Joon. 32

Vahemikus $|x| < 1$ leiame pindala määratud integraali abil (joon. 32)

$$S_1 = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Sellele pindalale tuleb liita 2 ruudu pindala (pindalad vahemikes $[-2; -1]$ ja $[1; 2]$):

$$S_2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Kogu pindala $S = \frac{1}{2} + 2 = 2,5$ ruutühikut.

V a s t u s. Pinnatüki suurus on 2,5 ruutühikut.

S i s u k o r d

Ülevaade viie kooli võistlustest matemaatikas	3
Ülesannete tekstid	7
Ülesannete lahendused	21

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ ЭСТОНСКОЙ ССР. Соревнования пяти школ по математике. Составитель Э. Мейдла. На эстонском языке.

Toimetaja H. Saarsoo. Trükki antud 17.12.84. Paber 60x84/16.
Arvestuspoognaid 3,41. Trükipoognaid 4,75. Trükiarv 2500
Eesti NSV Haridusministeerium, Tallinn, Tõnismägi 11. VÕT-i
rotaprint, Tallinn, Sakala 23. Tell. nr 275. Hind 10 kop.