MÕÕDUTEOORIA (MTMM.00.102)
2026.a. kevadsemester

Kordamisküsimused eksamitestiks

IV pt.

1. Märgiga mõõt, Hahni lahutus; märgiga mõõtude vastastikune singulaarsus, Jordani lahutus, märgiga mõõdu positiivne variatsioon, negatiivne variatsioon ja täisvariatsioon; integraal märgiga mõõdu järgi.

2. Märgiga mõõdu absoluutne pidevus (etteantud mõõdu suhtes), sellega samaväärsed tingimused lõpliku märgiga mõõdu jaoks; märgiga mõõdu Lebesgue'i lahutus (etteantud mõõdu suhtes); märgiga mõõdu Radon–Nikodými tuletis (etteantud mõõdu järgi), tarvilik ja piisav tingimus selle integreeruvuseks; Radon–Nikodými tuletise roll integraalide arvutamisel; Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem.

3. Kompleksmõõt, tema täisvariatsioon; kompleksmõõtude vastastikune singulaarsus, kompleksmõõdu absoluutne pidevus (eteantud mõõdu suhtes); komplekse funktsiooni (Boreli mõttes) mõõtuvuse ning tema reaal- ja imaginaarosade mõõtuvuse vahekord, integraal kompleksest funktsioonist; kompleksmõõdu Radon–Nikodými tuletis (etteantud mõõdu järgi), Lebesgue–Radon–Nikodými teoreemi kompleksne versioon; kompleksmõõdu täisvariatsiooni olulisemad omadused.

V pt.

(siin kõikjal on X lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum)

0. Kompaktse kandjaga ja lõpmatuses hääbuvad pidevad funktsioonid ruumis X (ruumid $C_c(X,\mathbb{R})$, $C_c(X)$, $C_0(X,\mathbb{R})$ ja $C_0(X)$)); Urõsoni lemma ja Tietze jätkamisteoreem (lokaalselt kompaktsed versioonid); ruumide $C_c(X,\mathbb{R})$ ja $C_0(X,\mathbb{R})$ (ning $C_c(X)$) ja $C_0(X)$) vahekord.

1. Positiivsed lineaarsed funktsionaalid ruumil $C_c(X,\mathbb{R})$, nende pidevusomadused; Radoni mõõt; content, regulaarne content; üldine skeem Radoni mõõtude genereerimiseks lähtudes content-itest; Rieszi esitusteoreem (positiivsete lineaarsete funktsionaalide esitus ruumil $C_c(X,\mathbb{R})$ Radoni mõõtude kaudu).

2. Radoni mõõtude regulaarusomadused, kompaktsetel hulkadel lõpliku Boreli mõõdu regulaarsus lokaalselt kompaktses Hausdorffi ruumis, kus iga lahtine hulk on σ-kompaktne; alamruumi $C_c(X,\mathbb{R})$ (või kompleksel juhul $C_c(X)$) tihedus ruumis $L_1(\mu)$, Luzini teoreem; poolpidevad funktsioonid, tarvilikud ja piisavad tingimused funktsioonid poolpidevuseks, poolpidevate funktsioonide mõõtuvus; monotoonse koonduvuse teoreem alt poolpidevate funktsioonide perede jaoks.

3. Pidevad positiivsed lineaarsed funktsionaalid ruumil $C_c(X,\mathbb{R})$; pidevad positiivsed lineaarsed funktsionaalid ruumil $C_0(X,\mathbb{R})$, nende "Jordani lahutus"; märgiga ja kompleksmõõdu regulaarsus; Rieszi esitusteoreem (ruumide $C_0(X,\mathbb{R})$ ja $C_0(X)$ kaasruumide kirjeldus).

4. Ruumi X Baire'i σ-algebra, selle kirjeldus kompakstse kandjaga pidevate funktsioonide mõõtuvuse kaudu ja lõpmatuses hääbuvate pidevate funktsioonide mõõtuvuse kaudu; Baire'i mõõt, ruumi X kompaktsetel Baire'i hulkadel lõpliku Baire'i mõõdu regulaarsusomadused ruumi X σ-tõkestatud Baire'i hulkadel; ruumi X kompaktsetel Baire'i hulkadel lõplike Baire'i mõõtude ja Radoni mõõtude vahekord ruumis X; Rieszi esitusteoreem (positiivsete lineaarsete funktsionaalide esitus ruumil $C_c(X,\mathbb{R})$ Baire'i mõõtude kaudu).

VI pt.

1. Lokaalselt integreeruv funktsioon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, tema Lebesgue'i hulk, Lebesgue'i punktid; Lebesgue'i diferentseerimisteoreem lokaalselt integreeruva funktsiooni Lebesgue'i hulgast; nicely shrinking hulkade pere, Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi versioon nicely shrinking hulkade pere jaoks; Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi versioon kompaktsetel hulkadel lõplike märgiga Boreli mõõtude ja Boreli kompleksmõõtude jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$.

2. Muutuja vahetuse valem Lebesgue'i integraalis ruumis $\mathbb{R}^n$; mõõtuva hulga teisenduse mõõtuvus diferentseeruva teisenduse juhul; jakobiaani absoluutväärtus kui kera pideva teisenduse ja kera mõõtude suhte piirväärtus raadiuse lähenemisel nullile; lineaarteisenduse determinandi absoluutväärtus kui mõõdu skaleerimistegur.

3. Mittekahaneva funktsiooni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ katkevuspunktide hulga ülimalt loenduvus, tema diferentseeruvus peaaegu kõikjal; (reaalmuutuja) funktsiooni täisvariatsioonifunktsioon ja täisvariatsioon; tõkestatud variatsiooniga funktsioonide $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lihtsamad omadused, tõkestatud variatsiooniga funktsiooni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Jordani lahutus, "normaliseeritud" tõkestatud variatsiooniga funktsioonid; kompleksed/lõplikud märgiga Boreli mõõdud ruumis $\mathbb{R}$ ja ruum NBV; funktsiooni $F \in NBV$ poolt määratud komplekse/lõpliku märgiga Boreli mõõdu singulaarsus ja absoluutne pidevus Lebesgue'i mõõdu suhtes funktsiooni F omaduste kaudu, absoluutselt pidevad funktsioonid; Newton–Leibnizi valemid Lebesgue'i integraali jaoks; Boreli kompleksmõõdu diskreetsus ja pidevus ruumis $\mathbb{R}$, tema standardseid lahutusi.

VII pt.

1. Ruumi L_p ($1 \leqslant p < \infty$) mõiste; kumerad funktsioonid, Hölderi ja Minkowski võrratused; ruum L_p ($1 \leqslant p < \infty$) kui Banachi ruum; ruum L_∞ kui Banachi ruum;

2. Ruumi $L_p(\mu)$ ($1 \leqslant p < \infty$) kaasruum; ruumid $ba(\mathfrak{A})$ ja $ba_\mu(\mathfrak{A})$, integraal funktsioonist $f \in L_\infty$ hulgafunktsiooni $F \in ba_\mu(\mathfrak{A})$ järgi, ruumi $L_\infty(\mu)$ kaasruum;

Eksamiteoreemid

Loend tulemustest, mis katab ära suulisel eksamil tõestamisele kuuluva. Kandilistes sulgudes olevad numbrid viitavad teoreemidele/lausetele/lemmadele loengukonspektis. Tudengilt vastamisel nõutav(ad) tõestus(t)e osa(d) saavad olema eksamipiletis täpselt välja toodud.

1. Märgiga mõõdu Hahni ja Jordani lahutusteoreemid [IV.1.2&4].
2. Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem (lõpliku mõõdu juht) [IV.2.7&9].
3. Kompleksmõõdu täisvariatsiooni olulisemaid omadusi [IV.3.8–11].
4. Üldine skeem Radoni mõõtude genereerimiseks lähtudes content-itest [V.1.4–6]
5. Rieszi esitusteoreem (positiivsed lineaarsed funktsionaalid kompaktse kandjaga pidevate funktsioonide ruumil) [V.1.3].
6. Radoni mõõtude regulaarsusomadused [V.2.1–4].
7. Luzini teoreem [V.2.6].
8. Jordani lahutus lõpmatuses hääbuvate pidevate funktsioonide ruumi kaasruumis [V.3.3].
9. Rieszi esitusteoreem (ruumide $C_0(X)$ ja $C_0(X, \mathbb{R})$ kaasruumid) [V.3.9].
10. Hardy–Littlewoodi maksimaalfunktsioon. Maksimaalteoreem ja katmislemma [VI.1.2&3].
11. Lebesgue'i diferentseerimisteoreem (Lebesgue'i hulgast), tema tugevam versioon (nicely shrinking hulkade perede jaoks) [VI.1.4&5].
12. Lebesgue'i diferentseerimisteoreem kompaktsetel hulkadel lõplike märgiga Boreli mõõtude ja Boreli kompleksmõõtude jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$ [VI.1.6].
13. Muutuja vahetuse valem Lebesgue'i integraalis [VI.2.1].
14. Lebesgue'i mõttes mõõtuva hulga "diferentseeruva" kujutise mõõtuvus [VI.2.2].
15. Lineaarteisenduse determinant kui (Lebesgue'i) mõõdu skaleerimistegur [VI.2.4].
16. Kera pideva kujutuse ja kera (Lebesgue'i) mõõtude suhte piirväärtus raadiuse lähenemisel nullile [VI.2.3&7].
17. Mittekahaneva funktsiooni katkevuspunktide hulga ülimalt loenduvus; mittekahaneva funktsiooni diferentseeruvus peaaegu kõikjal [VI.3.1].
18. Boreli kompleksmõõdu absoluutse pidevusega ja singulaarsusega samaväärsed tingimused Lebesgue'i mõõdu suhtes ruumis $\mathbb{R}$ seda kompleksmõõtu määrava "normaliseeritud" tõkestatud variatsiooniga funktsiooni terminites [VI.3.5&6].
19. Newton–Leibnizi valemid Lebesgue'i integraali jaoks ruumis $\mathbb{R}$ [VI.3.7&9].
20. Ruumi $L_p(\mu)$ ($1 \leqslant p < \infty$) kaasruum (lõpliku mõõdu juht) [VII.2.3 (lõpliku mõõdu juht) ja asjassepuutuvad fragmendid samas jaotises sellele teoreemile eelnevas osas].