# Mõõduteooria

Abistav õppematerjal kursustele

**“MTMM.00.014 Mõõt ja Lebesgue'i integraal (6 EAP)”**

ja

**“MTMM.00.102 Mõõduteooria (6 EAP)”**

Märt Põldvere

29. mai 2026. a.

# Sisukord

# I peatükk.
# Mõõduga ruumid

## § 1. Sissejuhatus

Hulkasid, mille elementideks on mingi etteantud hulga alamhulgad, nimetame edaspidi *((alam)hulkade) kogumiteks.* Hulga $X$ kõigi alamhulkade kogumit tähistame sümboliga $\mathcal{P}(X)$. Funktsioone, mille määramispiirkonnaks on mingi alamhulkade kogum, nimetame *hulgafunktsioonideks.*

### 1.1. Hulkade "mõõtmine"

Mõõduteooria (ja integraaliteooria) teke oli motiveeritud vajadusega "mõõta" etteantud hulga alamhulki. Toome mõned esimesena pähetulevad näited niisuguse "mõõtmise" kohta:

- tasandilise kujundi pindala leidmine — hulga $\mathbb{R}^2$ alamhulkade "mõõtmine";
- ruumilise keha ruumala leidmine — hulga $\mathbb{R}^3$ alamhulkade "mõõtmine";
- ruumilise keha massi leidmine — hulga $\mathbb{R}^3$ alamhulkade "mõõtmine";
- antud juhusliku katse puhul mingi sündmuse tõenäosuse leidmine — selle juhusliku katse elementaarsündmuste hulga alamhulkade "mõõtmine".

Kõigi näitena toodud "mõõtmiste" puhul tuleb meil lahendada kaks ülesannet. Kui meil on vaja "mõõta" hulga $X$ alamhulki, siis me peame

(1) defineerima, mida antud kontekstis "mõõtmine" tähendab, s.t. eraldama välja teatava alamhulkade kogumi $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ — niisuguste alamhulkade kogumi, mida me oskame "mõõta" (nn. "mõõtuvate" alamhulkade kogumi) — ning defineerima hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, mis seab igale alamhulgale $A \in \mathfrak{A}$ vastavusse tema "mõõdu" $\mu(A)$;

(2) leidma tõhusad vahendid "mõõtuvate" alamhulkade "mõõtude" väljarehkendamiseks konkreetsetel juhtudel.

Sündmuste käigust ette rutates olgu öeldud, et esimene ülesanne sunnib meid sisse tooma *mõõdu* mõiste, teine aga *integraali* mõiste.

Illustreerime kirjeldatud kahest etapist koosnevat "mõõtmisprotseduuri" tasandilise kujundi pindala leidmise ülesande varal.

### 1.1.1. Tasandilise kujundi pindala mõiste

Meenutame, kuidas matemaatilise analüüsi kursuses defineeritakse tasandilise kujundi pindala. Mõisteid "tasand" ja "ruum $\mathbb{R}^2$", samuti mõisteid "tasandiline kujund" ja "ruumi $\mathbb{R}^2$ alamhulk" kasutame me järgnevas sünonüümidena.

**Definitsioon 1.1.** *Hulkkülikuks* nimetatakse kinnist lihtsat murdjoont. *Hulknurgaks* nimetatakse tasandi osa, mida piirab hulkkülik. *Hulknurksummaks* nimetatakse lõpliku arvu hulknurkade ühendit.

Hulknurksumma pindala saab defineerida loomulikul viisil: hulknurksumma on esitatav lõpliku arvu paarikaupa lõikumatute sisemustega kolmnurkade ühendina, tema pindala defineeritakse kui nende kolmnurkade pindalade summa. (Kolmnurga pindala defineeritakse nagu elementaargeomeetrias: "alus korda kõrgus jagatud kahega".) Hulknurksumma $Q \subset \mathbb{R}^2$ pindala tähistame me sümboliga $S(Q)$.

Tasandilise kujundi pindala defineeritakse hulknurksumma pindala kaudu.

**Definitsioon 1.2.** Olgu $K \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk. Arvu

$$\overline{S}(K) = \inf\{S(Q)\colon\ Q \text{ on hulknurksumma, } Q \supset K\}$$

nimetatatakse kujundi $K$ *Jordani*[1] *välismõõduks*. Arvu

$$\underline{S}(K) = \begin{cases} \sup\bigl\{S(Q)\colon\ Q \text{ on hulknurksumma, } Q \subset K\bigr\}, & \text{kui } K^\circ \neq \emptyset; \\ 0, & \text{kui } K^\circ = \emptyset, \end{cases}$$

nimetatakse kujundi $K$ *Jordani sisemõõduks*. (Sümbol $K^\circ$ tähistab hulga $K$ sisemust. Märgime, et $K^\circ \neq \emptyset$ parajasti siis, kui leidub hulknurksumma, mis sisaldub hulgas $K$.)

**Märkus 1.1.** Alternatiivne võimalus Jordani sise- ja välismõõdu defineerimiseks on asendada definitsioonis 1.2 hulknurksummad *koordinaatristküliksummadega* (koordinaatristküliksumma on niisuguste ristkülikute lõplik ühend, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedega) või *diaadiliste ruutude* lõplike ühenditega (vt. § IV.4). Jordani sise- ja välismõõdu mõistete sisu jääb seejuures samaks.

Kui $\overline{S}(K) = \underline{S}(K)$, siis öeldakse, et kujund $K$ on *Jordani mõttes mõõtuv*. Arvu

$$S(K) = \overline{S}(K) = \underline{S}(K)$$

nimetatakse sel juhul kujundi $K$ *pindalaks* ehk *Jordani mõõduks*.

Jordani mõõdu mõistel on üks oluline puudus: *Jordani mõttes mõõtuvaid hulki on liiga vähe.* Vajadus omistada pindala ka Jordani mõttes mittemõõtuvatele hulkadele motiveerib meid Jordani mõõdu mõistet üldistama.

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) — prantsuse matemaatik.

**Märkus 1.2.** Jordani mõõt ruumi $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) alamhulkade jaoks defineeritakse analoogiliselt juhuga $m = 2$. Seejuures võib Jordani sise- ja välimõõdu definitsiooni 1.2 üldistuses juhu $m \in \mathbb{N}$ jaoks kasutada *hulktahuksummasid* (hulktahuksumma on hulknurksumma loomulik üldistus juhu $m \geqslant 2$ jaoks), *koordinaatristtahuksummasid* (koordinaatristtahuksumma on koordinaatristkülik-summa loomulik üldistus juhu $m \in \mathbb{N}$ jaoks) või *diaadiliste kuupide* ühendeid (vt. § III.4).

### 1.1.2. Riemanni[2] integraali mõiste

Vajadus rehkendada konkreetsetel juhtudel välja tasandilise kujundi pindala viib meid *Riemanni integraali* mõisteni. Riemanni integraal on tõhus matemaatiline tööriist *kõvertrapetsi* pindala arvutamiseks. Meenutame, et kui $f$ on lõigus $[a, b]$ määratud mittenegatiivne funktsioon, siis tasandi punktihulka

$$\big\{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$$

nimetatakse *kõvertrapetsiks.*

Meenutame, kuidas defineeritakse Riemanni integraal.

Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Tähistame sümboliga $T$ lõigu $[a, b]$ jaotusviisi punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N})$$

ning

$$M_j = \sup\big\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\big\}, \quad j = 1, \dots, n, \qquad S(T) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}),$$

$$m_j = \inf\big\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\big\}, \quad j = 1, \dots, n, \qquad s(T) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}).$$

Summasid $S(T)$ ja $s(T)$ nimetatakse (lõigu $[a, b]$ jaotusviisile $T$ vastavateks) funktsiooni $f$ *Darboux'*[3] *ülemsummaks* ja funktsiooni $f$ *Darboux' alamsummaks.*

Matemaatilise analüüsi kursusest teame, et

- lõigu $[a, b]$ mis tahes jaotusviiside ja $T$ ja $T'$ korral

  $$S(T) \geqslant s(T'),$$

  s.t. *ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem ühestki Darboux' alamsummast.*

Siit järeldub, et

- funktsiooni $f$ kõikvõimalike Darboux' ülemsummade hulk lõigus $[a, b]$ on alt tõkestatud (alumiseks tõkkeks on funktsiooni $f$ suvaline Darboux' alamsumma selles lõigus);

[2]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) — saksa matemaatik.
[3]Jean Gaston Darboux (1842–1917) — prantsuse matemaatik.

- funktsiooni $f$ kõikvõimalike Darboux' alamsummade hulk lõigus $[a, b]$ on ülalt tõkestatud (ülemiseks tõkkeks on funktsiooni $f$ suvaline Darboux' ülemsumma selles lõigus).

**Definitsioon 1.3.** Tähistame

$$\overline{D}\text{-}\int_a^b f := \inf\bigl\{S(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ jaotusviis}\bigr\},$$
$$\underline{D}\text{-}\int_a^b f := \sup\bigl\{s(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ jaotusviis}\bigr\}.$$

**Märkus 1.3.** Rõhutame, et pidevuse aksioomi põhjal on need inf ja sup lõplikud.

Arvusid $\overline{D}\text{-}\int_a^b f$ ja $\underline{D}\text{-}\int_a^b f$ nimetatakse vastavalt *Darboux' ülemiseks integraaliks* ja *Darboux' alumiseks integraaliks* funktsioonist $f$ (üle lõigu $[a, b]$).

Niisiis,

- Darboux' ülemine integraal funktsioonist $f$ üle lõigu $[a, b]$ on funktsiooni $f$ kõikvõimalike (lõigu $[a, b]$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' ülemsummade hulga alumine raja;
- Darboux' alumine integraal funktsioonist $f$ üle lõigu $[a, b]$ on funktsiooni $f$ kõikvõimalike (lõigu $[a, b]$ jaotusviisidele vastavate) Darboux' alamsummade hulga ülemine raja.

On ilmne, et *lõigu* $[a, b]$ *mis tahes jaotusviisi* $T$ *korral*

$$S(T) \geqslant \overline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant s(T).$$

**Definitsioon 1.4.** Kui $\overline{D}\text{-}\int_a^b f = \underline{D}\text{-}\int_a^b f$, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on *Riemanni mõttes integreeruv* lõigus $[a, b]$. Darboux' integraalide $\overline{D}\text{-}\int_a^b f$ ja $\underline{D}\text{-}\int_a^b f$ ühist väärtust nimetatakse sel juhul *Riemanni integraaliks* funktsioonist $f$ (üle lõigu $[a, b]$) ja tähistatakse sümboliga

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad R\text{-}\int_a^b f \quad \text{või lihtsalt} \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad \int_a^b f.$$

Niisiis, kui funktsioon $f$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a, b]$, siis

$$R\text{-}\int_a^b f = \overline{D}\text{-}\int_a^b f = \underline{D}\text{-}\int_a^b f.$$

Lihtne on veenduda, et

- *kui funktsioon $f$ on mittenegatiivne lõigus $[a, b]$, siis $f$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a, b]$ parajasti siis, kui kõvertrapets*

$$\mathcal{D} = \bigl\{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\bigr\}$$

  *on Jordani mõttes mõõtuv. Sellisel juhul $R\text{-}\int_a^b f = S(\mathcal{D})$, s.t. $R\text{-}\int_a^b f$ on kõnealuse kõvertrapetsi pindala.*

Riemanni integraalil on kaks olulist puudust.

- Riemanni mõttes integreeruvaid funktsioone on liiga vähe — Riemanni integraal on defineeritud vaid lõigus tõkestatud funktsioonide jaoks. Samas leidub ka lõigus tõkestatud funktsioone, mis pole Riemanni mõttes integreeruvad selles lõigus. (Klassikaline näide niisugusest funktsioonist on Dirichlet'[4] funktsioon.)

- Riemanni integraal käitub piirväärtuste suhtes ebastabiilselt. Üldjuhul, isegi siis, kui piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} R\text{-}\int_a^b f_n$ ja piirfunktsioon $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ eksisteerivad,

$$\lim_{n\to\infty} R\text{-}\int_a^b f_n \neq R\text{-}\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

s.t. üldjuhul me ei saa Riemanni integraalis piirväärtusega integraali märgi alla minna.

**Märkus 1.4.** Kui me oskaksime "mõistlikul viisil" defineerida iga alamhulga $E \subset \mathbb{R}$ jaoks tema "pikkuse" $\lambda(E)$, s.t. me oskaksime defineerida hulgafunktsiooni $\lambda\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$, mis rahuldab tingimust

$$E_1,\dots,E_n \subset \mathbb{R}\ \ (n\in\mathbb{N}),\ E_i\cap E_j=\emptyset,\ i\neq j, \quad \Longrightarrow \quad \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^n E_j\Big)=\sum_{j=1}^n \lambda(E_j),$$

siis saaksime me defineerida lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsiooni $f$ Darboux' summad mitte ainult selle lõigu jaotusviiside jaoks osalõikudeks, vaid lõigu $[a,b]$ mis tahes jaotusviisi jaoks: kui $T$ on lõigu $[a,b]$ jaotusviis (suvalisteks) alamhulkadeks $E_1,\dots,E_n \subset [a,b]$ $(n\in\mathbb{N})$ (s.t. $E_1,\dots,E_n\subset[a,b]$ on paarikaupa lõikumatud alamhulgad, mille ühend on $[a,b]$), siis saaksime defineerida "Darboux' summad"

$$S(T)=\sum_{j=1}^n \sup_{z\in E_j} f(z)\ \lambda(E_j) \quad \text{ja} \quad s(T)=\sum_{j=1}^n \inf_{z\in E_j} f(z)\ \lambda(E_j).$$

"Darboux' integraalid" ja funktsiooni $f$ "integreeruvuse" defineeriksime siis analoogiliselt traditsioonilise juhuga:

$$\overline{D}\text{-}\int_a^b f := \inf\big\{S(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ jaotusviis (suvalisteks alamhulkadeks)}\big\},$$
$$\underline{D}\text{-}\int_a^b f := \sup\{s(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ jaotusviis (suvalisteks alamhulkadeks)}\big\};$$

funktsiooni $f$ loeksime "integreeruvaks", kui $\overline{D}\text{-}\int_a^b f = \underline{D}\text{-}\int_a^b f$; "integraali" funktsioonist $f$ üle lõigu $[a,b]$ defineeriksime sel juhul kui tema "Darboux' integraalide" ühise väärtuse. (Et niisugusel "integraalil" oleks vähegi mõistlik geomeetriline sisu, tuleks "hulga pikkus" $\lambda$ defineerida nii, et iga lõigu $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ korral $\lambda([\alpha,\beta])=\beta-\alpha$).

**Pseudoteoreem.** *Iga lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon on märkuses defineeritud integreeruvuse mõttes integreeruv.*

Moraal eelnevast pseudoteoreemist on järgmine: mida rohkem hulga $\mathbb{R}$ alamhulki me oskame mõistlikul viisil "mõõta", seda paremate omadustega integraali me saaksime defineerida.

[4] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) — prantsuse matemaatik.

Miks me kasutame siin eesliidet “pseudo”? Aga sellepärast, et selle teoreemi üks oluline eeldus — võimalikkus defineerida “mõistlikul viisil” reaalarvude alamhulkade “pikkust” — on meil tõestamata. Kuigi selline hulga “pikkuse” “mõistlik” defineerimine on võimalik (sellel küsimusel peatume põgusalt käesoleva peatüki paragrahvis 5), ei kasutata Riemanni integraali üldistamisel eespool kirjeldatud skeemi. Põhjus on siin selles, et soovitav oleks saada integraali defineerimiseks skeem, mille loomulik üldistus võimaldaks defineerida integraali ka ruumides $\mathbb{R}^m$, kus $m \geqslant 2$. Juhul $m = 2$ ülaltoodud skeem rakendub — hulga pindala on võimalik “piisavalt mõistlikul viisil” defineerida kõigi alamhulkade $E \subset \mathbb{R}^2$ jaoks; niisiis saab loomulikul viisil defineerida ka tasandi tõkestatud alamhulgal määratud tõkestatud funktsiooni “Darboux’ summad” ning seega ka integraal — juhul $m \geqslant 3$ see skeem aga enam ei rakendu: $m \geqslant 3$ korral pole ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulkade “ruumala” võimalik “piisavalt mõistlikul viisil” defineerida (see järeldub käesoleva paragrahvi teoreemist 1.2 — Banach–Tarski paradoksist).

Pseudoteoreemi tõestus. Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Lihtne on veenduda, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f$. (“Darboux’ integraalid” $\overline{D}\text{-}\int_a^b f$ ja $\underline{D}\text{-}\int_a^b f$ on siin defineeritud nii, nagu märkuses.)

**Ülesanne 1.1.** Veenduda, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f$.

Seega jääb funktsiooni $f$ integreeruvuseks näidata, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f \leqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f$. Selleks valime arvud $m, M \in \mathbb{R}$ selliselt, et iga $x \in [a,b]$ korral $m \leqslant f(x) < M$. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulgad

$$E_j^n := \left\{x \in [a,b]\colon\ m + (j-1)\,\tfrac{M-m}{n} \leqslant f(x) < m + j\,\tfrac{M-m}{n}\right\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

ning tähistame sümboliga $T_n$ lõigu $[a,b]$ jaotusviisi hulkadeks $E_1^n, \ldots, E_n^n$. Siis mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\begin{aligned}
\overline{D}\text{-}\textstyle\int_a^b f - \underline{D}\text{-}\int_a^b f \leqslant S(T_n) - s(T_n) &= \sum_{j=1}^n \sup_{z \in E_j^n} f(z)\ \lambda(E_j^n) - \sum_{j=1}^n \inf_{z \in E_j^n} f(z)\ \lambda(E_j^n) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \left(m + j\,\frac{M-m}{n}\right) \lambda(E_j^n) - \sum_{j=1}^n \left(m + (j-1)\,\frac{M-m}{n}\right) \lambda(E_j^n) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{M-m}{n}\, \lambda(E_j^n) = \frac{M-m}{n} \sum_{j=1}^n \lambda(E_j^n) = \frac{M-m}{n}\, \lambda\left(\bigcup_{j=1}^n E_j^n\right) \\
&= \frac{M-m}{n}\, \lambda\big([a,b]\big) = \frac{M-m}{n}\,(b-a),
\end{aligned}$$

millest protsessis $n \to \infty$ järeldub, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f - \underline{D}\text{-}\int_a^b f \leqslant 0$, nagu soovitud. □

## 1.2. Jordani mõõdu mõiste laiendamise mittevõimalikkus ruumi $\mathbb{R}^m$ kõigile alamhulkadele

Olgu $m \in \mathbb{N}$. Selles punktis seame endale eesmärgiks üldistada Jordani mõõdu mõiste ruumi $\mathbb{R}^m$ kõigile alamhulkadele. Märgime, et

- juhul $m = 1$ tähendab see hulga “pikkuse” mõiste üldistamist sirge kõigile alamhulkadele;
- juhul $m = 2$ tähendab see kujundi pindala mõiste üldistamist kõigile tasandilistele kujunditele;

- juhul $m = 3$ tähendab see keha ruumala mõiste üldistamist kõigile ruumilistele kehadele.

Teisisõnu, meie eesmärk on defineerida hulgafunktsioon $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ selliselt, et

(1) iga Jordani mõttes mõõtuva hulga $E \subset \mathbb{R}^m$ korral oleks $\mu(E)$ hulga $E$ Jordani mõõt (s.t. $\mu$ on Jordani mõõdu *jätk* kõigi alamhulkade kogumile $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$);

(2) hulgafunktsiooni $\mu$ omadused vastaksid võimalikult täpselt meie eelmatemaatilisele ettekujutusele hulga "pikkuse"/pindala/ruumala omadustest.

Milline on meie eelmatemaatiline ettekujutus neist omadustest? Igati loomulik on nõuda, et hulgafunktsioon $\mu$ rahuldaks järgmisi tingimusi:

1° $\mu$ on *loenduvalt aditiivne* (ehk *σ-aditiivne*), s.t.

$$E_j \subset \mathbb{R}^m,\ j = 1,2,\ldots,\ \ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j, \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j);$$

2° $\mu$ on *invariantne nihete, pöörete ja peegelduste suhtes*, s.t.

$$E, F \subset \mathbb{R}^m,\ E \cong F \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = \mu(F)$$

(siin valem $E \cong F$ tähendab, et hulgad $E$ ja $F$ on *kongruentsed,* s.t. hulk $E$ on teisendatav hulgaks $F$ nihete, pöörete ja peegelduste abil);

3° $\mu\Big(\underbrace{[0,1) \times \cdots \times [0,1)}_{m \text{ tegurit}}\Big) = 1.$

**Märkus 1.5.** *Poollahtine ühikkuup* $\overbrace{[0,1) \times \cdots \times [0,1)}^{m \text{ tegurit}}$ on Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures tema Jordani mõõt on 1; niisiis, kui $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ on Jordani mõõdu jätk, siis kehtib 3°. Teiselt poolt, pole raske tõestada, et kui $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ rahuldab tingimusi 1° ja 3° ning on nihke suhtes invariantne (s.t. rahuldab teoreemi 1.1 tingimust 2°°), siis $\mu$ on Jordani mõõdu jätk.

Unistada on tore, aga elu on karm. Järgnev teoreem purustab meie unelmad.

**Teoreem 1.1.** *Ei eksisteeri niisugust hulgafunktsiooni* $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$, *mis rahuldab tingimusi* 1°, 3° *ja*

2°° $\mu$ *on* invariantne nihete suhtes, *s.t.*

$$\mu(E + x) = \mu(E) \quad \textit{mis tahes } E \subset \mathbb{R}^m \textit{ ja } x \in \mathbb{R}^m \textit{ korral.}$$

Meenutame, et kui $E \subset \mathbb{R}^m$ ja $x \in \mathbb{R}^m$, siis hulga $E$ nihe $E + x$ on defineeritud võrdusega $E + x := \{z + x\colon\ z \in E\} \subset \mathbb{R}^m$.

Teoreemi 1.1 tõestus. Jälgitavuse huvides esitame teoreemi tõestuse vaid juhu $m = 1$ jaoks. Juhtudel $m \geqslant 2$ on tõestus analoogiline.

Defineerime hulgas $[0, 1)$ ekvivalentsiseose $\sim$ järgmiselt:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q} \qquad \bigl(x, y \in [0, 1)\bigr).$$

**Ülesanne 1.2.** Tõestada, et $\sim$ on ekvivalentsiseos hulgas $[0, 1)$.

Vaatleme faktorhulka $[0, 1)/\sim$. Olgu $N \subset [0, 1)$ mingi selline hulk, mis sisaldab faktorhulga $[0, 1)/\sim$ igast ekvivalentsiklassist ühe ja ainult ühe elemendi (märgime, et valikuaksioomi põhjal niisugune hulk $N$ eksisteerib). Tähistame iga $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ korral

$$N_q = \Bigl\{x + q\colon\ x \in N \cap [0, 1 - q)\Bigr\} \cup \Bigl\{x + q - 1\colon\ x \in N \cap [1 - q, 1)\Bigr\}.$$

(Piltlikult väljendudes saame hulga $N_q$ järgmiselt: kõigepealt nihutame hulga $N$ arvteljel $q$ ühiku võrra paremale; seejärel aga nihutame selle osa hulgast $N$, mis esialgse nihutamise järel jäi väljapoole poollõiku $[0, 1)$, ühe ühiku võrra vasakule tagasi.) Paneme tähele, et

(1) $\displaystyle\bigcup_{q \in [0,1)\cap\mathbb{Q}} N_q = [0, 1)$;

(2) $q, r \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $q \neq r \quad \Longrightarrow \quad N_q \cap N_r = \emptyset$.

**Ülesanne 1.3.** Tõestada väited (1) ja (2).

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et eksisteerib funktsioon $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, mis rahuldab tingimusi 1°, 2°° ja 3°. Paneme tähele, et sel juhul

$$\mu(N_q) = \mu(N) \quad \text{iga } q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q} \text{ korral.}$$

Tõepoolest, mis tahes $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ korral

$$\begin{aligned}
\mu(N_q) &= \mu\Bigl(\bigl\{x + q\colon\ x \in N \cap [0, 1 - q)\bigr\} \cup \bigl\{x + q - 1\colon\ x \in N \cap [1 - q, 1)\bigr\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots\Bigr) \\
&= \mu\Bigl(\bigl\{x + q\colon\ x \in N \cap [0, 1 - q)\bigr\}\Bigr) + \mu\Bigl(\bigl\{x + q - 1\colon\ , x \in N \cap [1 - q, 1)\bigr\}\Bigr) \\
&\qquad\qquad + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots \\
&= \mu\Bigl(N \cap [0, 1 - q)\Bigr) + \mu\Bigl(N \cap [1 - q, 1)\Bigr) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots \\
&= \mu\Bigl(\bigl(N \cap [0, 1 - q)\bigr) \cup \bigl(N \cap [1 - q, 1)\bigr) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots\Bigr) \\
&= \mu(N).
\end{aligned}$$

**Ülesanne 1.4.** Tõestada, et $\mu(\emptyset) = 0$. (Märgime, et käesoleva tõestuse seisukohalt on see ülesanne tarbetu.)

Seega

$$1 = \mu\Big([0,1)\Big) = \mu\left(\bigcup_{q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} N_q\right) = \sum_{q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} \mu(N_q) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \mu(N) = 0; \\ \infty, & \text{kui } \mu(N) > 0. \end{cases}$$

Saadud vastuolu tõestab teoreemi. □

Niisiis, meie maksimuprogramm — defineerida tingimusi 1°–3° rahuldav Jordani mõõdu jätk $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ — jääb (objektiivsetel asjaoludel) täitmata. Kuna Jordani mõõdu võimaliku jätku $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ puhul me omadustest 2° ja 3° loobuda ei raatsi, siis ei jää meil ilmselt muud üle, kui nõrgendada tingimust 1°, näiteks nõudes, et see jätk rahuldaks järgmist tingimust:

1°° $\mu$ on *aditiivne,* s.t.

$$E, F \subset \mathbb{R}^m,\ E \cap F = \emptyset \quad\Longrightarrow\quad \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

**Märkus 1.6.** Järgmises peatükis integraali omadusi uurides mõistame, et idee asendada siin tingimus 1° nõrgema tingimusega 1°° pole eriti hea — selle arvelt kannataksid integraali omadused. See on üks põhjusi, miks me selle idee varsti hülgame.

Osutub, et juhtudel $m = 1$ ja $m = 2$ niisugune Jordani mõõdu jätk $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$, mis rahuldab tingimusi 1°°, 2° ja 3°, tõepoolest eksisteerib (põgusalt peatume me sel teemal käesoleva peatüki paragrahvis 5), kuid, nagu järeldub järgnevast teoreemist, juhtudel $m \geqslant 3$ mitte.

**Teoreem 1.2** (Banach[5]–Tarski[6] paradoks, 1924)**.** *Olgu $m \geqslant 3$ ning olgu tõkestatud hulgad $A, B \subset \mathbb{R}^m$ sellised, et $A^\circ, B^\circ \neq \emptyset$ (s.t. hulkadel $A$ ja $B$ leidub sisepunkte). Siis leiduvad naturaalarv $n \in \mathbb{N}$ ja alamhulgad*

$$A_1, \dots, A_n \subset A \quad \textit{ja} \quad B_1, \dots, B_n \subset B$$

*selliselt, et*

(1) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{j=1}^n A_j = A$;

(2) $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{j=1}^n B_j = B$;

(3) $A_j \cong B_j$, $j = 1, \dots, n$ *(s.t. hulgad $A_j$ ja $B_j$ on omavahel kongruentsed).*

BANACH–TARSKI PARADOKSI TÕESTUS on siin esitamiseks liiga pikk ja algebraline. □

Banach–Tarski paradoksi sobib iseloomustama sõna *kontraintuitiivne.* Näiteks, kui võtta $A$ rolli mingi väike kera ja $B$ rolli mingi suur kera ruumis $\mathbb{R}^3$, siis teoreem 1.2 ütleb, et me saame lõhkuda $A$ — väikese kera — lõplikuks arvuks tükkideks, millest (vajaduse korral asendades mõne tüki tema peegeldusega) on võimalik kokku

[5] Stefan Banach (1892–1945) — poola matemaatik.
[6] Alfred Tarski (1902–1983) — poola matemaatik.

laduda $B$ — suur kera! Vastuolu meie eelmatemaatiliste ootustega ruumi $\mathbb{R}^3$ struktuuri suhtes tekib siin ilmselt sellest, et väikese kera tükkidest suurt kera kokku ladudes tekiks meile justkui ei tea kust ruumala juurde. Tegelikult siin aga mingit vastuolu ei ole: osal tükkidest ei tarvitse ruumala olla. Nimelt, ruumala pole mitte ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulkade meist sõltumatult eksisteeriv omadus, vaid hulgafunktsioon ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulkadel, mille me ise peame defineerima. Banach–Tarski paradoks ütleb meile, et sellise hulgafunktsiooni, mis vastaks meie ootustele ruumala omaduste suhtes, määramispiirkond ei saa olla ruumi $\mathbb{R}^3$ kõigi alamhulkade kogum: kui me tahame, et ruumala omadused vastaksid meie eelmatemaatilistele ootustele, siis tuleb osa ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulki jätta ilma ruumalata.

**Ülesanne 1.5.** Järeldada teoreemist 1.2, et kui $m \geqslant 3$, siis ei eksisteeri niisugust Jordani mõõdu jätku $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$, mis rahuldab tingimusi $1^{\circ\circ}$, $2^{\circ\circ}$ ja $3^\circ$.

Olukord tekitab nõutust. Mida teha? Ei jää muud üle, kui

- *tuleb loobuda nõudest, et tingimusi* $1^\circ$–$3^\circ$ *rahuldav Jordani mõõdu jätk oleks defineeritud ruumi* $\mathbb{R}^m$ *kõigi alamhulkade kogumil* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ *ning piirduda Jordani mõõdu jätkamisega kogumi* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ *mingile alamkogumile, mis sisaldaks olulisemaid praktikas ettetulevaid ruumi* $\mathbb{R}^m$ *alamhulki.*

Selliselt püsitatud eesmärgini me ka jõuame. Käesoleva loengukursuse I peatükis konstrueerime Jordani mõõdu soovitud omadustega jätku kogumi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ küllalt suurele alamkogumile juhul $m = 1$, III peatükis konstrueerime ta juhul $m \geqslant 2$. Seejuures hõlmab meie teooriaarendus hoopis laiemat konteksti kui ruum $\mathbb{R}^m$ — me vaatleme hulgafunktsioone abstraktsetel hulkadel (seda eelkõige tõenäosusteooria, aga ka mitmete teiste matemaatika valdkondade, näiteks funktsionaalanalüüsi vajadusi silmas pidades). Loengukursuse II peatükis defineerime Riemanni integraali üldistuse (samuti hoopis laiemas kontekstis kui ruum $\mathbb{R}^m$) — *Lebesgue'i*[7] *integraali,* mille omadused on oluliselt paremad, kui Riemanni integraalil.

[7]Henri Léon Lebesgue (1875–1941) — prantsuse matemaatik.

# § 2. $\sigma$-algebrad

Selles paragrahvis tutvume teatavat tüüpi kogumitega — *algebrate* ja *$\sigma$-algebratega.* Märgime, et meie teooriaarenduses alates järgmisest paragrahvist keskset rolli mängivate hulgafunktsioonide — *mõõtude* — määramispiirkonnaks on just nimelt seda tüüpi kogumid.

## 2.1. $\sigma$-algebra mõiste

Olgu $X$ mingi hulk.

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et kogum $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on (hulga $X$ alamhulkade) *algebra,* kui

A1° $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$;

A2° $A \in \mathfrak{A} \implies A^c \in \mathfrak{A}$;

A3° $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Järgnevalt loetleme mõned algebrate põhiomadused.

Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra. Siis

A4° $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$;

A5° $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \setminus B \in \mathfrak{A}$;

A6° $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}, \bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}$.

Omaduste A4° ja A5° tõestuseks märgime, et De Morgani[8] valemite põhjal

$$A \cap B = \big((A \cap B)^c\big)^c = (A^c \cup B^c)^c \quad \text{ja} \quad A \setminus B = A \cap B^c.$$

Omadus A6° järeldub omadustest A3° ja A4° induktsiooni teel.

**Definitsioon 2.2.** Öeldakse, et kogum $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on (hulga $X$ alamhulkade) *$\sigma$-algebra,* kui

A1° $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$;

A2° $A \in \mathfrak{A} \implies A^c \in \mathfrak{A}$;

A3°° $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots \implies \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}$.

**Ülesanne 2.1.** Tõestada, et iga $\sigma$-algebra on algebra.

Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ $\sigma$-algebra. Kuna iga $\sigma$-algebra on algebra, siis rahuldab $\mathfrak{A}$ tingimusi A4°–A6°. Lisaks sellele

[8] Augustus De Morgan (1806–1871) — inglise matemaatik.

A6°° $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \dots \implies \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.

Omaduse A6°° tõestuseks märgime, et De Morgani valemite põhjal

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left[\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c\right]^c = \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right]^c.$$

**Ülesanne 2.2.** Olgu $\mathfrak{A}$ algebra. Tõestada, et

(a) kui kehtib implikatsioon

$$A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, 2, \dots,\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \quad \implies \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A},$$

siis $\mathfrak{A}$ on $\sigma$-algebra;

(b) kui kehtib implikatsioon

$$A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, 2, \dots,\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \quad \implies \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A},$$

siis $\mathfrak{A}$ on $\sigma$-algebra.

**Definitsioon 2.3.** Paari $(X, \mathfrak{A})$, kus $X$ on mingi hulk ning kogum $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on $\sigma$-algebra, nimetatakse *mõõtuvaks ruumiks.* $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$ hulki nimetatakse $\mathfrak{A}$-*mõõtuvateks hulkadeks* (või, kui $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$ roll on kontekstist selge, ka lihtsalt *mõõtuvateks hulkadeks*).

Järgnevalt toome mõned lihtsad näited algebratest ja $\sigma$-algebratest.

**Näide 2.1.** Olgu $X$ mingi hulk. Siis

(a) kogum $\{\emptyset, X\}$ on hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra;

(b) kogum $\mathcal{P}(X)$ on hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra;

(c) hulga $X$ kõigi lõplike ja *koolõplike* alamhulkade kogum

$$\mathcal{F}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon\ A \text{ on lõplik või } A^c \text{ on lõplik}\}$$

on hulga $X$ alamhulkade algebra.

**Ülesanne 2.3.** Tõestada, et hulga $X$ lõplike ja koolõplike alamhulkade kogum $\mathcal{F}(X)$ on $\sigma$-algebra parajasti siis, kui hulk $X$ on lõplik.

NÄPUNÄIDE. Iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva alamhulga.

## 2.2. Alamhulkade kogumi poolt genereeritud $\sigma$-algebra

Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

**Definitsioon 2.4.** Vähimat hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebrat, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$, nimetatakse *kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud $\sigma$-algebraks.*

Kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud $\sigma$-algebrat tähistame edaspidi sümboliga $\sigma(\mathcal{E})$.

Siinkohal kerkib loomulik küsimus $\sigma$-algebra definitsiooni korrektsusest. Täpsemalt:

(1) Kas niisuguseid hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebraid, mis sisaldavad kogumit $\mathcal{E}$, üleüldse leidub?

(2) Kas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavate hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebrate hulgas on olemas vähim, s.t. niisugune, mis sisaldub igas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavas $\sigma$-algebras?

Vastus neile mõlemale küsimusele on jaatav:

(1) Hulga $X$ kõigi alamhulkade kogum $\mathcal{P}(X)$ on $\sigma$-algebra, kusjuures $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

(2) Kõigi kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavate hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebrate ühisosa on $\sigma$-algebra, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$. See ühisosa on vähim kogumit $\mathcal{E}$ sisaldav $\sigma$-algebra, sest ta sisaldub igas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavas hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebras.

**Ülesanne 2.4.** Tõestada, et kõigi kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavate hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebrate ühisosa on $\sigma$-algebra, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$.

Niisiis,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \text{ on } \sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{E} \subset \mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)}} \mathfrak{A}.$$

Edasises kasutame me korduvalt järgmist lihtsat lemmat.

**Lemma 2.1.** *Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $\mathfrak{A}$ hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra. Kui kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ rahuldab tingimust $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}$, siis ka $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{A}$.*

TÕESTUS. Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}$. Kuna $\mathfrak{A}$ on $\sigma$-algebra, siis $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, seega $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. □

## 2.3. Boreli[9] $\sigma$-algebra

**Definitsioon 2.5.** Topoloogilise ruumi $X$ lahtiste hulkade kogumi poolt genereeritud $\sigma$-algebrat nimetatakse *ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebraks.* Ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebra hulki nimetatakse selle ruumi *Boreli hulkadeks.*

Ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat tähistame edaspidi sümboliga $\mathcal{B}_X$. Ruumi $X$ kõigi lahtiste hulkade kogumit tähistame edaspidi sümboliga $\tau_X$; niisiis definitsiooni kohaselt $\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X)$.

**Ülesanne 2.5.** Tõestada, et topoloogilise ruumi $X$ kinniste alamhulkade kogum $\mathcal{F}_X$ genereerib ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebra, s.t. $\sigma(\mathcal{F}_X) = \mathcal{B}_X$.

Järgnevalt tutvustame topoloogilise ruumi Boreli hulkade hierarhiat kirjeldavat terminoloogiat.

**Definitsioon 2.6.** Olgu $X$ topoloogiline ruum.

Öeldakse, et hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on *hulk tüüpi $G_\delta$* (ehk *$G_\delta$-tüüpi hulk* ehk lihtsalt $G_\delta$), kui ta on esitatav ruumi $X$ lahtiste alamhulkade loenduva ühisosana, s.t.

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \qquad \text{kus } U_j \in \mathcal{P}(X),\ j \in \mathbb{N}, \text{ on ruumi } X \text{ lahtised alamhulgad.}$$

Öeldakse, et hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on *hulk tüüpi $F_\sigma$* (ehk *$F_\sigma$-tüüpi hulk* ehk lihtsalt $F_\sigma$), kui ta on esitatav ruumi $X$ kinniste alamhulkade loenduva ühendina, s.t.

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j, \qquad \text{kus } H_j \in \mathcal{P}(X),\ j \in \mathbb{N}, \text{ on ruumi } X \text{ kinnised alamhulgad.}$$

**Märkus 2.1.** Terminid $G_\delta$ ja $F_\sigma$ võttis kasutusele juba Hausdorff[10]: tähtedega "$G$" ja "$F$" tähistas ta vastavalt lahtiseid ja kinniseid hulki (tähed "$G$" ja "$F$" tulenevad vastavalt saksakeelsest terminist "Gebiet" (piirkond) ja prantsuskeelsest terminist "fermé" (kinnine)); indeksid "$\delta$" ja "$\sigma$" aga viitavad vastavalt saksakeelsetele terminitele "Durchschnitt" (ühisosa) ja "Summe" (summa).

Boreli hulkade edasine klassifikatsioon järgib sama printsiipi:
$G_{\delta\sigma}$ on $G_\delta$-de loenduv ühend,
$F_{\sigma\delta}$ on $F_\sigma$-de loenduv ühisosa jne.

NB! Seda "käesoleva paragrahvi lisa" pole olemas!

Rõhutame, et see klassifikatsioon ei ole ammendav. (Selle ammendavuse küsimusega tegeleme me käesoleva paragrahvi lisas).

Selles punktis kirjeldame me ruumi $\mathbb{R}$ Boreli $\sigma$-algebrat. Selleks on aga otstarbekas esmalt õppida veidi paremini tundma ruumi $\mathbb{R}$ lahtiste hulkade struktuuri.

Edasises mõistame me mõiste "vahemik" all lisaks tõkestatud vahemikele ka tõkestamata vahemikke, s.t. vahemikeks nimetame me hulkasid

$$(a, b), \quad (c, \infty), \quad (-\infty, d), \quad (-\infty, \infty), \qquad \text{kus } a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b.$$

[9] Félix Edouard Justin Emile Borel (1871–1956) — prantsuse matemaatik.
[10] Felix Hausdorff (1868–1942) — saksa matemaatik.

**Teoreem 2.2.** *Ruumi $\mathbb{R}$ mis tahes mittetühi lahtine hulk esitub paarikaupa lõikumatute vahemike ülimalt loenduva ühendina.*

Kuna iga vahemik on esitatav tõkestatud vahemike loenduva ühendina, siis järeldub teoreemist 2.2

**Järeldus 2.3.** *Ruumi $\mathbb{R}$ mis tahes mittetühi lahtine hulk esitub tõkestatud vahemike loenduva ühendina.*

TEOREEMI 2.2 TÕESTUS. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ mittetühi lahtine hulk. Defineerime iga $x \in \mathcal{U}$ korral

$$a_x = \inf\Big\{a \in \mathbb{R}\colon\ (a,x] \subset \mathcal{U}\Big\} \quad \text{ja} \quad b_x = \sup\Big\{b \in \mathbb{R}\colon\ [x,b) \subset \mathcal{U}\Big\}.$$

Märgime, et $a_x$ ja $b_x$ on korrektselt defineeeritud, sest niisugused $a, b \in \mathbb{R}$, $a < x < b$, mille korral $(a,b) \subset \mathcal{U}$, eksisteerivad (tõepoolest, hulga $\mathcal{U}$ lahtisuse tõttu on $x$ hulga $\mathcal{U}$ sisepunkt ning seega leidub $\varepsilon > 0$ selliselt, et $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathcal{U}$). Seejuures võib juhtuda, et $a_x = -\infty$ ja/või $b_x = \infty$.

Paneme tähele, et iga $x \in \mathcal{U}$ korral

(1) $(a_x, b_x) \subset \mathcal{U}$;

(2) $(a_x, b_x)$ on suurim punkti $x$ sisaldav vahemik, mis sisaldub hulgas $\mathcal{U}$.

**Ülesanne 2.6.** Tõestada, väited (1) ja (2).

Tähistame $I_x = (a_x, b_x)$, $x \in \mathcal{U}$. Paneme tähele, et mis tahes $x, y \in \mathcal{U}$ korral kas $I_x = I_y$ või $I_x \cap I_y = \emptyset$.

Tõepoolest, olgu $x, y \in \mathcal{U}$ sellised, et $I_x \neq I_y$. Oletame vastuväiteliselt, et $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Siis kehtib vähemalt üks järgmistest rangetest sisalduvustest:

$$I_x \subsetneq I_x \cup I_y \quad \text{või} \quad I_y \subsetneq I_x \cup I_y.$$

Kuna $I_x \cup I_y$ kui lõikuvate vahemike ühend on vahemik, siis esimesel juhul poleks $I_x$ suurim punkti $x$ sisaldav hulgas $\mathcal{U}$ sisalduv vahemik, teisel juhul aga poleks $I_y$ suurim punkti $y$ sisaldav hulgas $\mathcal{U}$ sisalduv vahemik.

Kuna iga $x \in \mathcal{U}$ korral sisaldab vahemik $I_x$ mingi ratsionaalarvu, siis

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} I_x = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}} I_x.$$

Defineerime hulgas $\mathcal{U} \cap \mathbb{Q}$ ekvivalentsiseose $\rho$ järgmiselt:

$$x \;\rho\; y \quad :\Longleftrightarrow \quad I_x = I_y, \qquad x, y \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}.$$

**Ülesanne 2.7.** Tõestada, et $\rho$ on ekvivalentsiseos hulgas $\mathcal{U} \cap \mathbb{Q}$.

Olgu $N \subset \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}$ mingi selline hulk, mis sisaldab faktorhulga $(\mathcal{U} \cap \mathbb{Q})/\rho$ igast ekvivalentsiklassist ühe ja ainult ühe elemendi (märgime, et valikuaksioomi põhjal niisugune hulk $N$ eksisteerib). Siis

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}} I_x = \bigcup_{x \in N} I_x.$$

Olemegi esitanud hulga $\mathcal{U}$ paarikaupa lõikumatute vahemike ülimalt loenduva ühendina (sest kogumi $\{I_x\colon\ x \in N\}$ vahemikud on paarikaupa lõikumatud ja hulga $N$ võimsus on ülimalt loenduv). $\square$

*__Ülesanne 2.8.__ Tõestada, et separaablis meetrilises ruumis on iga mittetühi lahtine hulk esitatav lahtiste kerade ülimalt loenduva ühendina.

**Teoreem 2.4.** *Igaüks järgmistest ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade kogumitest genereerib ruumi $\mathbb{R}$ Boreli $\sigma$-algebra $\mathcal{B}_\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \big\{(a,b)\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_2 &= \big\{[a,b)\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_3 &= \big\{[a,b]\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_4 &= \big\{(a,b]\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_5 &= \big\{(-\infty,b]\colon\ b \in \mathbb{R}\big\};\\
\mathcal{E}_6 &= \big\{(-\infty,b)\colon\ b \in \mathbb{R}\big\};\\
\mathcal{E}_7 &= \big\{[a,\infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\};\\
\mathcal{E}_8 &= \big\{(a,\infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}.
\end{aligned}$$

Teoreemi 2.4 tõestus tugineb järeldusele 2.3 ja lemmale 2.1.

Teoreemi 2.4 tõestuseks piisab näidata, et

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} \overset{(1)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_1) \overset{(2)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_2) \overset{(3)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_3) \overset{(4)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_4) \overset{(5)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_5) \overset{(6)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_6) \overset{(7)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_7) \overset{(8)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_8) \overset{(9)}{\subset} \mathcal{B}_\mathbb{R}.$$

(1). Kuna järelduse 2.3 põhjal on ruumi $\mathbb{R}$ iga mittetühi lahtine hulk esitatav tõkestatud vahemike loenduva ühendina, siis $\tau_\mathbb{R} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ (sümbol $\tau_\mathbb{R}$ tähistab ruumi $\mathbb{R}$ lahtiste alamhulkade kogumit) ning järelikult lemma 2.1 põhjal ka $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\tau_\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

(2). Lemma 2.1 põhjal piisab sisalduvuse (2) tõestuseks näidata, et $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{b-a}{2n}, b) \in \sigma(\mathcal{E}_2).$$

(4). Lemma 2.1 põhjal piisab sisalduvuse (4) tõestuseks näidata, et $\mathcal{E}_3 \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \tfrac{1}{n}, b] \in \sigma(\mathcal{E}_4).$$

(5). Lemma 2.1 põhjal piisab sisalduvuse (5) tõestuseks näidata, et $\mathcal{E}_4 \subset \sigma(\mathcal{E}_5)$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{E}_5).$$

**Ülesanne 2.9.** Tõestada sisalduvused (3) ja (6)–(9).

□

## 2.4. Üks edasise teooriaarenduse seisukohalt oluline näide ühest ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade algebrast

Käesoleva paragrahvi lõpetame näitega ühest ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade algebrast, mis etendab olulist osa meie edasises teooriaarenduses.

**Näide 2.2.** Tähistame

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a, b),\ [c, \infty),\ (-\infty, d),\ (-\infty, \infty) :\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ning

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} A_j :\ \ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j\right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

s.t. $\mathcal{B}$ on kogumi $\mathcal{H}$ paarikaupa mittelõikuvate hulkade lõplike ühendite kogum.

Näitame, et $\mathcal{B}$ on algebra. Seda võib teha algebra aksioomide A1°–A3° vahetu kontrollimise teel, mis on aga küllaltki tülikas (kuigi lihtne). Seepärast on otstarbekam tõestada eelnevalt üks abitulemus, mida me vajame ka käesoleva konspekti III peatükis.

**Definitsioon 2.7.** Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$.

Öeldakse, et kogum $\mathcal{G}$ on *poolalgebra,* kui

SA1° $\emptyset \in \mathcal{G}$;

SA2° $A, B \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$;

SA3° iga $A \in \mathcal{G}$ korral leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N}$) selliselt, et

$$A^c = \bigcup_{j=1}^{n} B_j,$$

s.t. kogumi $\mathcal{G}$ iga hulga täiend esitub kogumi $\mathcal{G}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõpliku ühendina.

Lihtne on veenduda, et kogum $\mathcal{H}$ on poolalgebra.

**Teoreem 2.5.** *Olgu $X$ mingi hulk ning olgu kogum $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ poolalgebra. Siis kogum*

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : \quad n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{G},\, A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j \right\}$$

*on algebra.*

*Teisisõnu, poolalgebra paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogum on algebra.*

Kuna kogum $\mathcal{H}$ on poolalgebra, siis järeldub teoreemist 2.5, et kogum $\mathcal{B}$ on algebra. Seejuures $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

TEOREEMI 2.5 TÕESTUS.

**Ülesanne 2.10.** Tõestada teoreem 2.5.

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt veenduda, et kui $A, B \in \mathcal{A}$, siis ka $A \cap B \in \mathcal{A}$.

□

## 2.5. Harjutusülesandeid

**Ülesanne 2.11.** Olgu $X, Y \neq \emptyset$ ning olgu $f\colon X \to Y$.

**[A]** Olgu $B, B_j \subset Y$, $j = 1, 2, \ldots$. Tõestada, et

(a) $f^{-1}(B^c) = \big(f^{-1}(B)\big)^c$;

(b) $f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j)$.

**[B]**

(a) Olgu kogumid $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ $\sigma$-algebrad. Tõestada, et kogumid

$$\mathcal{C} := \big\{f^{-1}[B]\colon\ B \in \mathfrak{B}\big\} \quad \text{ja} \quad \mathcal{D} := \big\{B \in \mathfrak{B}\colon\ f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}\big\}$$

on $\sigma$-algebrad;

(b) Olgu $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. Tähistame

$$\mathcal{E} := \big\{f^{-1}[B]\colon\ B \in \mathcal{F}\big\} \quad \text{ja} \quad \mathcal{C} := \big\{f^{-1}[B]\colon\ B \in \sigma(\mathcal{F})\big\}.$$

Tõestada, et $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$.

ÜKS VEIDI ÜLDISEM NÄPUNÄIDE OSA **[B]**, (b), SISALDUVUSE $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{E})$ TÕESTUSEKS. Sageli on meil vaja näidata, et igal hulgal mingist (mingi hulga $Y$ alamhulkade) $\sigma$-algebrast $\mathfrak{S}$ on teatav omadus $(P)$, s.t. tähistades $\mathcal{D} := \{B \in \mathfrak{S}\colon$ hulgal $B$ on omadus $(P)\}$, on vaja näidata, et $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D}$. Selleks piisab näidata, et

(1) kogum $\mathcal{D}$ on (hulga $Y$ alamhulkade) $\sigma$-algebra;

(2) leidub alamkogum $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ nii, et $\sigma(\mathcal{F}) = \mathfrak{S}$ (s.t. kogum $\mathcal{D}$ sisaldab mingi $\sigma$-algebrat $\mathfrak{S}$ genereeriva alamkogumi $\mathcal{F}$),

sest väidete (1) ja (2) kehtides $\mathfrak{S} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}$. (Loomulikult sobib kirjeldatud tõestusskeem ainult väga spetsiifiliste olukordade jaoks, sest üldjuhul ei tarvitse vaadeldud ülesandepüstituses ei tingimus (1) ega ka tingimus (2) kehtida.)

Kuidas rakendada eelnevat tõestusskeemi ülesande 2.11, **[B]**, (b), sisalduvuse $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{E})$ tõestuseks? Aga, nimelt, sisalduvuse $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{E})$ tõestuseks tuleb näidata, et iga $B \in \sigma(\mathcal{F})$ korral $f^{-1}[B] \in \sigma(\mathcal{E})$, s.t. tähistades $\mathcal{D} := \{B \in \sigma(\mathcal{F})\colon f^{-1}[B] \in \sigma(\mathcal{E})\}$, tuleb näidata, et $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}$.

**Ülesanne 2.12.** Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $Y \subset X$.

(a) Olgu kogumid $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ $\sigma$-algebrad. Tõestada, et kogumid

$$\mathcal{C} := \big\{A \in \mathfrak{A}\colon\ A \cap Y \in \mathfrak{B}\big\} \subset \mathcal{P}(X) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{D} := \big\{A \cap Y\colon\ A \in \mathfrak{A}\big\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

on $\sigma$-algebrad.

(b) Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Tähistame

$$\mathcal{F} := \big\{A \cap Y\colon\ A \in \mathcal{E}\big\} \subset \mathcal{P}(Y) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{D} := \big\{A \cap Y\colon\ A \in \sigma(\mathcal{E})\big\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Tõestada, et $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$.

**Ülesanne 2.13.** Olgu $(X, \tau_X)$ topoloogiline ruum ning olgu $Y \subset X$. Üldise topoloogia kursusest teame, et siis $Y$ on topoloogine ruum nn. alamruumi topoloogia

$$\tau_Y := \{U \cap Y\colon\ U \in \tau_X\}$$

suhtes. Tõestada, et

$$\mathcal{B}_Y = \{E \cap Y\colon\ E \in \mathcal{B}_X\}.$$

(Sümbolid $\mathcal{B}_X$ ja $\mathcal{B}_Y$ tähistavad vastavalt ruumide $X$ ja $Y$ Boreli $\sigma$-algebraid, s.t. $\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X)$ ja $\mathcal{B}_Y = \sigma(\tau_Y)$).

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesannet 2.12, (b).

**Ülesanne 2.14.** Olgu $X$ ja $Y$ mingid hulgad. Meenutame, et hulkade $X$ ja $Y$ otsekorrutis $X \times Y$ on defineeritud võrdusega

$$X \times Y := \big\{(x, y)\colon\ x \in X,\ y \in Y\big\},$$

s.t. $X \times Y$ on kõikvõimalike järjestatud paaride $(x, y)$ hulk, kus $x \in X$ ja $y \in Y$.

Kui $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$ ja $x \in X$, siis hulga $E$ $x$-lõige $E_x$ on defineeritud võrdusega

$$E_x := \{y \in Y\colon\ (x, y) \in E\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

**[A]** Olgu $E, E_j \in \mathcal{P}(X \times Y)$, $j = 1, 2, \ldots$, ning olgu $x \in X$. Tõestada, et

$$(E_x)^c = (E^c)_x \qquad \text{ja} \qquad \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x.$$

**[B]** Olgu $x \in X$.

(a) Olgu kogumid $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ ja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ $\sigma$-algebrad. Tõestada, et kogumid

$$\mathcal{G} := \big\{E \in \mathfrak{C}\colon\ E_x \in \mathfrak{B}\big\} \subset \mathcal{P}(X \times Y) \quad \text{ja} \quad \mathcal{D} := \big\{E_x\colon\ E \in \mathfrak{C}\big\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

on $\sigma$-algebrad.

(b) Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$. Tähistame

$$\mathcal{F} := \big\{E_x\colon\ E \in \mathcal{E}\big\} \subset \mathcal{P}(Y) \quad \text{ja} \quad \mathcal{D} := \big\{E_x\colon\ E \in \sigma(\mathcal{E})\big\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Tõestada, et $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$.

**Ülesanne 2.15.** Olgu $A \subset \mathbb{R}$ ning olgu $r \in \mathbb{R}$. Meenutame, et hulga $A$ nihe $A + r$ ja kordne $rA$ on defineeritud vastavalt võrdustega

$$A + r := \{a + r\colon\ a \in A\} \quad \text{ja} \quad rA := \{ra\colon\ a \in A\}.$$

**[A]** Olgu $A, A_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$, ning olgu $r \in \mathbb{R}$. Tõestada, et

(a)

$$(A+r)^c = A^c + r \quad \text{ja} \quad \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + r = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j + r)$$

(NÄPUNÄIDE: $x \in A + r$ parajasti siis, kui $x - r \in A$);

(b) kui $r \neq 0$, siis

$$(rA)^c = rA^c \quad \text{ja} \quad r\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (rA_j)$$

(NÄPUNÄIDE: $r \neq 0$ korral $x \in rA$ parajasti siis, kui $\frac{x}{r} \in A$).

**[B]** Tõestada, et ruumis $\mathbb{R}$ iga Boreli hulga nihe ja kordne on Boreli hulgad.

NÄPUNÄIDE. Veenduda, et kogum $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \colon\ E + r \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ ja } rE \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ iga } r \in \mathbb{R} \text{ korral}\}$ on $\sigma$-algebra, kusjuures $\mathcal{E}$ sisaldab $\sigma$-algebrat $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ genereeriva kogumi $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) \colon\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

# § 3. Mõõdud

## 3.1. Mõõdu mõiste ja põhiomadused

Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra.

**Definitsioon 3.1.** Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ on *aditiivne,* kui

M1° $A, B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Aditiivse hulgafunktsiooni olulisemad omadused on formuleeritud järgnevas teoreemis.

**Teoreem 3.1.** *Olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ aditiivne hulgafunktsioon. Siis*

M0° *kui leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A) < \infty$ (s.t. $\mu$ ei ole samaselt võrdne lõpmatusega), siis*

$$\mu(\emptyset) = 0;$$

*vastasel korral*

$$\mu(\emptyset) = \infty;$$

M1°' *kui hulgad $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ on paarikaupa lõikumatud, siis*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j);$$

M2° $\mu$ *on* monotoonne, *s.t.*

$$A, B \in \mathfrak{A},\ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B);$$

M3° $\mu$ *on* subtraktiivne, *s.t.*

$$A, B \in \mathfrak{A},\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A);$$

M4° $\mu$ *on* subaditiivne, *s.t.*

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

TÕESTUS. M0°. Eksisteerigu hulk $A \in \mathfrak{A}$, mille korral $\mu(A) < \infty$. Kuna hulgafunktsioon $\mu$ on aditiivne, siis

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset),$$

millest võrratuse $\mu(A) < \infty$ tõttu järeldub, et $\mu(\emptyset) = 0$.

Omadus M1°' järeldub hulgafunktsiooni $\mu$ aditiivsusest induktsiooni teel.

M2°. Olgu $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B$. Siis

$$\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(B).$$

M3°. Olgu $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$. Siis

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(B),$$

järelikult

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

M4°. Olgu $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ ($n \in \mathbb{N}$). Tähistame

$$B_1 = A_1 \quad \text{ja} \quad B_j = A_j \setminus \left( \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \right), \; j = 2, \dots, n.$$

Siis $\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j$, kusjuures hulgad $B_1, \dots, B_n$ on paarikaupa lõikumatud ning $B_j \subset A_j$, $j = 1, \dots, n$. Seega

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

□

**Ülesanne 3.1.** Tõestada, et kui hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ on aditiivne ning paarikaupa lõikumatud hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \dots$, on sellised, et $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}$, siis

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

**Definitsioon 3.2.** Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ on *σ-aditiivne* (ehk *loenduvalt aditiivne*), kui

$$\text{M1}^{\circ\circ} \quad A_j \in \mathfrak{A}, j = 1, 2, \dots, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A} \implies \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

Märgime, et kui algebra $\mathfrak{A}$ on $\sigma$-algebra, siis tähendab tingimus "$\mu$ on $\sigma$-aditiivne", et kehtib implikatsioon

$$A_j \in \mathfrak{A}, \; j = 1, 2, \dots, \; A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j \quad \implies \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j),$$

sest sel juhul mis tahes $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \dots$, korral alati $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}$.

**Ülesanne 3.2.** Tõestada, et $\sigma$-aditiivne hulgafunktsioon on aditiivne.

Kuna $\sigma$-aditiivne hulgafunktsioon on aditiivne, siis on $\sigma$-aditiivsel hulgafunktsioonil $\mu$ aditiivse hulgafunktsiooni omadused M0°–M4°. Ülejäänud $\sigma$-aditiivse hulgafunktsiooni olulisemad omadused on formuleeritud järgnevas teoreemis.

**Teoreem 3.2.** *Olgu hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ $\sigma$-aditiivne. Siis*

M4$^{\circ\circ}$ $\mu$ *on* loenduvalt subaditiivne, *s.t.*

$$A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j);$$

M5$^{\circ}$ *kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, on sellised, et*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \quad ja \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}, \tag{3.1}$$

*siis*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n); \tag{3.2}$$

M6$^{\circ}$ *kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, on sellised, et*

$$\mu(A_1) < \infty, \quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \quad ja \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}, \tag{3.3}$$

*siis*

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3.4}$$

Tõestus. M4$^{\circ\circ}$. Olgu hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$. Tähistame

$$B_1 = A_1 \quad \text{ja} \quad B_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right),\ j = 2, 3, \ldots .$$

Siis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, kusjuures hulgad $B_j$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud ning $B_j \subset A_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Seega

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

M5$^{\circ}$. Rahuldagu hulgad $A_j$, $j = 1, 2, \ldots$, tingimusi (3.1). Tähistame

$$A_0 = \emptyset \quad \text{ja} \quad B_j = A_j \setminus A_{j-1},\ j = 1, 2, \ldots .$$

Siis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, kusjuures hulgad $B_j$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud; seega

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

M6$^{\circ}$. Rahuldagu hulgad $A_j$, $j = 1, 2, \ldots$, eeldusi (3.3). Kuna

(1) De Morgani valemite põhjal $\mu\big(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^\infty A_j\big) = \mu\big(\bigcup_{j=1}^\infty (A_1 \setminus A_j)\big)$;

(2) sisalduvuste $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ tõttu $A_1 \setminus A_1 \subset A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \setminus A_3 \subset \cdots$ ning järelikult omaduse M5° põhjal $\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_1 \setminus A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$,

siis

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcap_{j=1}^\infty A_j\right) &= \mu\left(A_1 \setminus \left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^\infty A_j\right)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^\infty A_j\right)\\
&= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_1 \setminus A_j)\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)\\
&= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\Big(\mu(A_1) - \mu(A_n)\Big) = \mu(A_1) - \Big(\mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).
\end{aligned}$$

□

**Märkus 3.1.** On ilmne, et võrdus (3.4) jääb kehtima, kui asendada eeldustes (3.3) tingimus "$\mu(A_1) < \infty$" nõrgema tingimusega "mingi $j_0 \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A_{j_0}) < \infty$". Käesoleva punkti viimasest ülesandest näeme, et selle tingimuse mitte kehtides ei tarvitse enam kehtida ka võrdus (3.4).

**Ülesanne 3.3.** Olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ aditiivne hulgafunktsioon. Tõestada, et

(a) kui $\mu$ rahuldab tingimust M5°, siis $\mu$ on $\sigma$-aditiivne;

(b) kui $\mu$ on lõplik ja rahuldab tingimust M6°, siis $\mu$ on $\sigma$-aditiivne;

(c) kui $\mu$ on lõplik ja rahuldab tingimust

M6°° $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots,\ \bigcap_{j=1}^\infty A_j = \emptyset \implies \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

siis $\mu$ on $\sigma$-aditiivne;

**Märkus 3.2.** Kui aditiivne hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on lõplik, siis tingimusest M6° järeldub tingimus M6°°, seega järeldub ülesande väitest (c) tema väide (b) (ning ühtlasi on tingimused M6° ja M6°° samaväärsed).

**Definitsioon 3.3.** Hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ nimetatakse *mõõduks,* kui

M0°° $\mu(\emptyset) = 0$;

M1°° $\mu$ on $\sigma$-aditiivne.

**Definitsioon 3.4.** Kolmikut $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kus $X$ on mingi hulk, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on algebra ning $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on mõõt, nimetatakse *eelmõõduga ruumiks.* Mõõtu $\mu$ nimetatakse seejuures ka *eelmõõduks.*

Kolmikut $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kus $X$ on mingi hulk, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on $\sigma$-algebra ning $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on mõõt, nimetatakse *mõõduga ruumiks.*

Kui $\mu(X) = 1$, siis nimetatakse mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *tõenäosusruumiks.* Mõõtu $\mu$ nimetatakse sel juhul *tõenäosusmõõduks.*

Kui $\mu(X) < \infty$, siis öeldakse, et (eel)mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on *lõplik.* Sel juhul öeldakse ka, et mõõt $\mu$ on *lõplik.*

Öeldakse, et (eel)mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on *σ-lõplik,* kui hulk $X$ on esitatav kujul

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \text{kus } A_j \in \mathfrak{A} \text{ ja } \mu(A_j) < \infty,\ j = 1, 2, \ldots .$$

Sel juhul öeldakse ka, et mõõt $\mu$ on *σ-lõplik.*

**Ülesanne 3.4.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\sigma$-lõplik eelmõõduga ruum. Tõestada, et

(a) leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, nii, et $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$;

(b) leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, nii, et $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

**Ülesanne 3.5.** Tuua näide mõõduga ruumist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ning hulkadest $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, mis rahuldavad tingimusi $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ ja $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$, kuid mitte tingimust (3.4).

NÄPUNÄIDE. Tutvuda kõigepealt näitega 3.1.

## 3.2. Näiteid mõõduga ruumidest

**Näide 3.1.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum.
Defineeerime hulgafunktsiooni $c\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ seosega

$$c(A) = \begin{cases} 0, & \text{kui } A = \emptyset; \\ \text{hulga } A \text{ elementide arv}, & \text{kui hulk } A \text{ on lõplik;} \\ \infty, & \text{kui hulk } A \text{ on lõpmatu,} \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Lihtne on kontrollida, et $c$ on mõõt.

**Ülesanne 3.6.** Tõestada, et hulgafunktsioon $c$ on mõõt.

Mõõtu $c$ nimetatakse *loendamismõõduks.*

**Näide 3.2.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $x \in X$.
Defineeerime hulgafunktsiooni $\delta_x\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ seosega

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A; \\ 0, & \text{kui } x \notin A, \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Lihtne on kontrollida, et $\delta_x$ on mõõt.

**Ülesanne 3.7.** Tõestada, et hulgafunktsioon $\delta_x$ on mõõt.

Mõõtu $\delta_x$ nimetatakse *Diraci*[11] *mõõduks* (punktis $x$) või ka *punktmassiks* (punktis $x$).

Järgnev näide, mis mängib tähtsat rolli ka edasises teooriaarenduses, on eelmistest juba oluliselt sisukam.

[11]Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) — inglise matemaatik.

**Näide 3.3.** Tähistame (nagu ka näites 2.2)

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a,b),\ [c,\infty),\ (-\infty,d),\ (-\infty,\infty):\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a<b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ning

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} A_j:\quad n\in\mathbb{N},\ A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{H},\ A_i\cap A_j=\emptyset,\ i\neq j\right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

s.t. $\mathcal{B}$ on kogumi $\mathcal{H}$ paarikaupa mittelõikuvate hulkade lõplike ühendite kogum. Näites 2.2 tõestasime, et $\mathcal{B}$ on algebra.

Olgu $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon.

Selles näites konstrueerime ühe mõõdu $\mu_F\colon \mathcal{B}\to[0,\infty]$ selliselt, et

$$\mu_F\big([a,b)\big) = F(b)-F(a) \quad \text{mis tahes } a,b\in\mathbb{R},\ a<b, \text{ korral.} \tag{3.5}$$

Niisiis, kui defineerida funktsioon $F$ seosega $F(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, siis

$$\mu_F\big([a,b)\big) = b-a.$$

Paneme tähele, et, tähistades

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) \quad \text{ja} \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

(märgime, et funktsiooni $F$ monotoonsuse tõttu need piirväärtused eksisteerivad), peab tingimust (3.5) rahuldav mõõt $\mu_F$ rahuldama tingimusi

$$\begin{aligned}
\mu_F(\emptyset) &= 0,\\
\mu_F\big([a,b)\big) &= F(b)-F(a), \quad a,b\in\mathbb{R},\ a<b,\\
\mu_F\big([c,\infty)\big) &= F(\infty)-F(c), \quad c\in\mathbb{R},\\
\mu_F\big((-\infty,d)\big) &= F(d)-F(-\infty), \quad d\in\mathbb{R},\\
\mu_F\big((-\infty,\infty)\big) &= F(\infty)-F(-\infty).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

**Ülesanne 3.8.** Tõestada, et kui $\mu_F$ on mõõt algebral $\mathcal{B}$, mis rahuldab tingmust (3.5), siis kehtivad tingimused (3.6).

Defineerimegi kõigepealt hulgafunktsiooni $\mu_F$ väärtused kogumi $\mathcal{H}$ hulkadel võrdustega (3.6).

**Ülesanne 3.9.** Tõestada, et kui paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{H}$ ($n\in\mathbb{N}$) on sellised, et $\bigcup_{j=1}^n A_j\in\mathcal{H}$, siis

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\mu_F(A_j).$$

Jätkame hulgafunktsiooni $\mu_F$ algebrale $\mathcal{B}$ (ja tähistame selle jätku samuti sümboliga $\mu_F$), defineerides $A\in\mathcal{B}$ korral

$$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{n}\mu_F(A_j),$$

kus paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ on sellised, et $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Hulgafunktsiooni $\mu_F$ definitsiooni korrektsus ja $\mu_F$ aditiivsus järeldub vahetult järgnevast ülesandest. Veelgi enam, sealt järeldub ka, et $\mu_F$ on ainus tingimust (3.5) rahuldav aditiivne hulgafunktsioon algebral $\mathcal{B}$.

**Ülesanne 3.10.** Olgu $\mathcal{S}$ (mingi hulga $X$ alamhulkade) poolalgebra ning rahuldagu hulgafunktsioon $\nu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ tingimust

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}\ (n \in \mathbb{N}),\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j).$$

Olgu $\mathcal{A}$ poolalgebra $\mathcal{S}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite algebra, s.t.

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : \quad n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \right\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Defineerime hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ seosega

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j), \quad A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j).$$

(I) Tõestada, et

(a) $\mu$ on korrektselt defineeritud;

(b) $\mu$ on aditiivne;

(c) $\mu$ on ainus aditiivne hulgafunktsioon algebral $\mathcal{A}$, mille puhul $\mu(A) = \nu(A)$ iga $A \in \mathcal{S}$ korral.

(II) Tõestada, et kui

$$A_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \dots,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j),$$

siis $\mu$ on $\sigma$-aditiivne.

**Teoreem 3.3.** *Hulgafunktsioon $\mu_F$ on mõõt.*

Teoreemi 3.3 tõestus toetub oluliselt mõõdu regulaarsuse mõistele; me esitame ta käesoleva paragrahvi järgmises punktis.

**Definitsioon 3.5.** Olgu $X$ mingi hulk ning olgu kogumid $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ sellised, et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

Öeldakse, et hulgafunktsioon $\nu\colon \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ on hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *jätk (kogumile $\mathfrak{B}$),* kui

$$\nu(A) = \mu(A) \quad \text{iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Sel juhul öeldakse ka, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ on hulgafunktsiooni $\nu\colon \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ *ahend* (kogumile $\mathfrak{A}$).

Hulgafunktsiooni $\nu$ ahendit kogumile $\mathfrak{A}$ tähistatakse sümboliga $\nu|_{\mathfrak{A}}$. Niisiis, kui hulgafunktsioon $\nu$ on hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ jätk, siis kirjutatakse $\nu|_{\mathfrak{A}} = \mu$.

Järgmises paragrahvis esitame skeemi, kuidas jätkata mõõt $\mu$ algebral $\mathfrak{A}$ teatavaks mõõduks selle algebra poolt genereeritud $\sigma$-algebral $\sigma(\mathfrak{A})$. Mida see meile annab? Näites 3.3, lähtudes mittekahanevast vasakult pidevast funktsioonist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konstrueerisime teataval algebral $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mõõdu $\mu_F$, mis rahuldab tingimust (3.5). Kui me oskame jätkata mõõdu $\mu_F$ mingiks mõõduks algebra $\mathcal{B}$ poolt genereeritud $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, siis, tähistades selle jätku samuti sümboliga $\mu_F$, saame mõõdu $\mu_F\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$, mis rahuldab tingimust (3.5). Niisiis, kui defineerida funktsioon $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ võrdusega $G(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ning tähistada $m := \mu_G\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$, siis $m$ on mõõt ruumi $\mathbb{R}$ Boreli $\sigma$-algebral $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, mis rahuldab tingimust

$$m\big([a,b)\big) = b - a \quad \text{mis tahes } a,b \in \mathbb{R},\ a < b \text{ korral.}$$

Pole paha, mis?

## 3.3. Mõõdu regulaarsus

**Definitsioon 3.6.** Olgu $X$ topoloogiline ruum ning olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Öeldakse, et monotoonne hulgafunktsioon $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,\infty]$ on

- *väljast regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{E}$, kui

  $$\rho(E) = \inf\big\{\rho(D)\colon \text{ hulga } D \in \mathcal{E} \text{ sisemus } D^\circ \supset E\big\}$$

  (sel juhul öeldakse ka, et hulk $E$ on (hulgafunktsiooni $\rho$ suhtes) *väljast regulaarne* ehk *väljast $\rho$-regulaarne*);

- *seest regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{E}$, kui

  $$\rho(E) = \sup\big\{\rho(C)\colon \text{ hulga } C \in \mathcal{E} \text{ sulund } \overline{C} \text{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E\big\}$$

  (sel juhul öeldakse ka, et hulk $E$ on (hulgafunktsiooni $\rho$ suhtes) *seest regulaarne* ehk *seest $\rho$-regulaarne*);

- *regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{E}$, kui ta on hulgal $E$ nii väljast kui ka seest regulaarne (sel juhul öeldakse ka, et hulk $E$ on (hulgafunktsiooni $\rho$ suhtes) *regulaarne* ehk *$\rho$-regulaarne*);

- *regulaarne,* kui ta on regulaarne kogumi $\mathcal{E}$ kõikidel hulkadel.

**Märkus 3.3.** Kompaktne hulk $K$ Hausdorffi topoloogilises ruumis on kinnine; niisiis $K = \overline{K}$ on Boreli hulk. Siit järeldub, et kui $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum ning kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ sisaldab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat (s.t. $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}_X$), siis monotoonne hulgafunktsioon $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,\infty]$ on

(a) väljast regulaarne hulgal $E \in \mathcal{E}$ parajasti siis, kui

$$\rho(E) = \inf\big\{\rho(U)\colon \text{ hulk } U \in \mathcal{E} \text{ on lahtine ja } U \supset E\big\};$$

(b) seest regulaarne hulgal $E \in \mathcal{E}$ parajasti siis, kui

$$\rho(E) = \sup\bigl\{\rho(K)\colon \text{ hulk } K \in \mathcal{E} \text{ on kompaktne ja } K \subset E\bigr\}.$$

Märgime, et iga meetriline ruum on Hausdorffi topoloogiline ruum.

Teoreem 3.3 järeldub vahetult järgnevast teoreemist.

**Teoreem 3.4.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum, olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra ning olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ aditiivne hulgafunktsioon. Kui hulgafunktsioon $\mu$ on regulaarne, siis ta on $\sigma$-aditiivne.*

Tõestus.

***Ülesanne 3.11.** Tõestada teoreem 3.4.

□

Järeldamaks teoreemist 3.4, et hulgafunktsioon $\mu_F$ näites 3.3 (ja ka teoreemis 3.3) on mõõt, jääb vaid veenduda, et $\mu_F$ on regulaarne.

**Ülesanne 3.12.** Tõestada, et hulgafunktsioon $\mu_F\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ näites 3.3 on regulaarne.

## 3.4. Mõõduga ruumi täield

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum.

**Definitsioon 3.7.** Öeldakse, et hulk $N \in \mathcal{P}(X)$ on *$\mu$-hüljatav,* kui leidub hulk $F \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(F) = 0$ ja $N \subset F$.

Kui mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge, siis öeldakse $\mu$-hüljatava hulga kohta ka lihtsalt *hüljatav hulk.*

Ruumi $X$ $\mu$-hüljatavate hulkade kogumit tähistame sümboliga $\mathcal{N}(\mu)$ või, kui mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge, siis ka lihtsalt $\mathcal{N}$. Niisiis

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mu) = \bigl\{N \in \mathcal{P}(X)\colon \quad \text{leidub hulk } F \in \mathfrak{A},\ \mu(F) = 0, \text{ nii, et } N \subset F\bigr\}.$$

Definitsiooni kohaselt *hulk on hüljatav parajasti siis, kui ta on mingi nullmõõduga hulga alamhulk.* Seega on ka iga nullmõõduga hulk hüljatav. Juhime tähelepanu, et *hulga hüljatavus ei tähenda üldjuhul, et tema mõõt on null,* sest üldjuhul ei tarvitse $\mu$-hüljatav hulk kuuluda mõõdu $\mu$ määramispiirkonda $\mathfrak{A}$. Küll aga järeldub mõõdu monotoonsusest, et *iga mõõtuva (s.t. $\sigma$-algebrasse $\mathfrak{A}$ kuuluva) hüljatava hulga mõõt on null.* Niisiis, *hüljatava hulga mõõt kas ei ole määratud või on null.*

**Ülesanne 3.13.** Tõestada, et hüljatavate hulkade ülimalt loenduv ühend on hüljatav hulk.

**Definitsioon 3.8.** Öeldakse, et mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on *täielik,* kui $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathfrak{A}$ (s.t. kõik $\mu$-hüljatavad hulgad kuuluvad $\sigma$-algebrasse $\mathfrak{A}$). Sel juhul öeldakse ka, et mõõt $\mu$ on *täielik.*

On ilmne, et *kui ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on täielik, siis hulga $N \subset X$ hüljatavus tähendab, et $\mu(N) = 0$.*

**Teoreem 3.5.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mu)$ (s.t. $\mathcal{N}$ on hulga $X$ kõikide $\mu$-hüljatavate alamhulkade kogum). Tähistame*

$$\overline{\mathfrak{A}} = \big\{A \cup N\colon\ A \in \mathfrak{A},\ N \in \mathcal{N}\big\}$$

*ning defineerime hulgafunktsiooni $\overline{\mu}\colon\ \overline{\mathfrak{A}} \to [0, \infty]$ seosega*

$$\overline{\mu}(E) = \mu(A), \quad E \in \overline{\mathfrak{A}},\ E = A \cup N,\ A \in \mathfrak{A},\ N \in \mathcal{N}.$$

*Siis*

(a) *kogum $\overline{\mathfrak{A}}$ on $\sigma$-algebra,*

(b) *$\sigma$-algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ on vähim $\sigma$-algebra, mis sisaldab nii $\sigma$-algebrat $\mathfrak{A}$ kui ka kogumit $\mathcal{N}$ (teisisõnu, $\overline{\mathfrak{A}} = \sigma(\mathfrak{A} \cup \mathcal{N})$);*

(c) *hulgafunktsioon $\overline{\mu}$ on mõõt;*

(d) *mõõt $\overline{\mu}$ mõõdu $\mu$ ainus jätk $\sigma$-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$;*

(e) *mõõduga ruum $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ on täielik.*

**Definitsioon 3.9.** Mõõduga ruumi $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ teoreemist 3.5 nimetatakse *mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täieldiks.* $\sigma$-algebrat $\overline{\mathfrak{A}}$ nimetatakse seejuures *$\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$ täieldiks* (mõõdu $\mu$ suhtes) ning mõõtu $\overline{\mu}$ *mõõdu $\mu$ täieldiks.*

Teisisõnu, mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täieldiks nimetatakse mõõduga ruumi $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$, kus

(1) $\overline{\mathfrak{A}}$ on vähim hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra, mis sisaldab nii $\sigma$-algebrat $\mathfrak{A}$ kui ka ruumi $X$ kõiki $\mu$-hüljatavaid alamhulki;

(2) mõõt $\overline{\mu}$ on mõõdu $\mu$ jätk $\sigma$-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$ (märgime, et teoreemi 3.5 põhjal on niisugune mõõt $\overline{\mu}$ üheselt määratud).

Teoreemi 3.5 tõestus. (a). Kõigepealt paneme tähele, et $\emptyset \in \overline{\mathfrak{A}}$ (sest $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, kusjuures $\emptyset \in \mathfrak{A}$ ja $\emptyset \in \mathcal{N}$) ning $X \in \overline{\mathfrak{A}}$ (sest $X = X \cup \emptyset$, kusjuures $X \in \mathfrak{A}$ ja $\emptyset \in \mathcal{N}$).

Näitame nüüd, et suvalise $E \in \overline{\mathfrak{A}}$ korral ka $E^c \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Olgu $E \in \overline{\mathfrak{A}}$. Siis leiduvad hulgad $A \in \mathfrak{A}$ ja $N \in \mathcal{N}$ selliselt, et $E = A \cup N$. Kuna hulk $N$ on $\mu$-hüljatav, siis leidub hulk $F \in \mathfrak{A}$, $\mu(F) = 0$, selliselt, et $N \subset F$. Paneme tähele, et

$$E^c = (A \cup N)^c = (A \cup F)^c \cup (F \setminus E).$$

**Märkus 3.4.** Viimase võrduse kirjapanekul on abiks joonise tegemine.

**Ülesanne 3.14.** Veenduda, et $(A \cup N)^c = (A \cup F)^c \cup (F \setminus E)$.

Kuna $(A \cup F)^c \in \mathfrak{A}$ ja $F \setminus E \in \mathcal{N}$ (sest $F \setminus E$ on nullmõõduga hulga $F \in \mathfrak{A}$ alamhulk), siis $E^c \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Väite (a) tõestuseks jääb näidata, et kui $E_j \in \overline{\mathfrak{A}}$, $j = 1, 2, \ldots$, siis ka $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \overline{\mathfrak{A}}$.

**Ülesanne 3.15.** Veenduda selles.

(b).

**Ülesanne 3.16.** Tõestada, et $\overline{\mathfrak{A}} = \sigma(\mathfrak{A} \cup \mathcal{N})$.

(c). Veendume kõigepealt, et hulgafunktsioon $\overline{\mu}$ on korrektselt defineeritud, s.t. $\overline{\mu}(E)$ ei sõltu hulga $E \in \overline{\mathfrak{A}}$ esitusest kujul $E = A \cup N$, kus $A \in \mathfrak{A}$ ja $N \in \mathcal{N}$. Selleks peame veenduma, et kui $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ja $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ on sellised, et $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, siis $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Olgu $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ja $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ sellised, et $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Siis leiduvad hulgad $F_1, F_2 \in \mathfrak{A}$, selliselt, et $\mu(F_1) = \mu(F_2) = 0$ ning $N_1 \subset F_1$ ja $N_2 \subset F_2$. Kuna

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup F_2,$$

siis mõõdu $\mu$ monotoonsuse ja subaditiivsuse tõttu

$$\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2 \cup F_2) \leqslant \mu(A_2) + \mu(F_2) = \mu(A_2).$$

Analoogiliselt saame, et ka $\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1)$ ning seega $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

**Ülesanne 3.17.** Tõestada, et hulgafunktsioon $\overline{\mu}$ on mõõt.

(d).

**Ülesanne 3.18.** Tõestada, et $\overline{\mu}$ on mõõdu $\mu$ jätk $\sigma$-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$.

**Ülesanne 3.19.** Tõestada, et $\overline{\mu}$ on mõõdu $\mu$ ainus jätk $\sigma$-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$.

(e).

**Ülesanne 3.20.** Tõestada, et $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\overline{\mu})$, s.t. hulk $N \in \mathcal{P}(X)$ on $\overline{\mu}$-hüljatav parajasti siis, kui ta on $\mu$-hüljatav.

**Ülesanne 3.21.** Tõestada, et mõõduga ruum $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ on täielik.

□

## 3.5. Harjutusülesandeid

**Ülesanne 3.22.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $\mu_1, \mu_2 \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mõõdud. Tõestada, et

(a) $\mu_1 + \mu_2 \colon \mathfrak{A} \ni A \mapsto \mu_1(A) + \mu_2(A) \in [0, \infty]$ on mõõt;

(b) $\mu_1 + \mu_2$ on $\sigma$-lõplik parajasti siis, kui $\mu_1$ ja $\mu_2$ on $\sigma$-lõplikud.

**Ülesanne 3.23.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $A_j, B_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$. Tõestada, et

(a) $\mu\big((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)\big) \leqslant \mu(A_1 \setminus B_1) + \mu(A_2 \setminus B_2)$;

(b) $\mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus B_j)$;

(c) $\mu\big((A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cap B_2)\big) \leqslant \mu(A_1 \setminus B_1) + \mu(A_2 \setminus B_2)$;

(d) $\mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus B_j)$.

**Ülesanne 3.24.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum, kus $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum, ning olgu $\mu_1, \mu_2 \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ lõplikud mõõdud. Tõestada, et $\mu_1 + \mu_2$ on regulaarne parajasti siis, kui $\mu_1$ ja $\mu_2$ on regulaarsed.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat.

**Ülesanne 3.25.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum, kus $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum, ning olgu $E \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) kui $\mu$ on hulgal $E$ seest regulaarne, siis $\mu$ on täiendil $E^c$ väljast regulaarne;

(b) kui $X$ on kompaktne ja $\mu$ on hulgal $E$ väljast regulaarne, siis $\mu$ on täiendil $E^c$ seest regulaarne;

(b') kui $\mu$ on hulgal $X$ seest regulaarne ja hulgal $E$ väljast regulaarne, siis $\mu$ on täiendil $E^c$ seest regulaarne.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat.

**Ülesanne 3.26.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum, kus $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum, ning olgu $A, B \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) kui $\mu$ on hulkadel $A$ ja $B$ väljast regulaarne, siis $\mu$ on ka ühendil $A \cup B$ ja ühisosal $A \cap B$ väljast regulaarne;

(b) kui $\mu$ on hulkadel $A$ ja $B$ seest regulaarne, siis $\mu$ on ka ühendil $A \cup B$ ja ühisosal $A \cap B$ seest regulaarne.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat.

**Ülesanne 3.27.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum, kus $X$ on $\sigma$-kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum (s.t. Hausdorffi topoloogiline ruum, mis esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina) ning $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$. Tõestada, et kui $\mu$ on väljast regulaarne ning lõplik ruumi $X$ kompaktsetel hulkadel, siis $\mu$ on regulaarne.

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt veenduda, et kui $K, E \in \mathfrak{A}$, kus $K$ on kompaktne, siis $\mu$ on hulgal $K \cap E$ seest regulaarne. Selleks kasutada mõõdu $\mu$ väljast regulaarsust hulgal $K \cap E^c$.

**Ülesanne 3.28.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum, kus $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum. Tõestada, et

(a) kui $\mu$ on hulgal $X$ seest regulaarne, siis

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathfrak{A} \colon \ \mu \text{ on hulgal } A \text{ regulaarne}\}$$

on $\sigma$-algebra (selle väite tõestamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat);

(b) kui $\mathfrak{A} = \mathcal{B}_X$ (s.t. $\mu$ on lõplik Boreli mõõt) ja $\mu$ on ruumi $X$ igal lahtisel hulgal seest regulaarne, siis $\mu$ on regulaarne.

***Ülesanne 3.29.** Tõestada, et iga lõplik Boreli mõõt täielikus separaablis meetrilises ruumis on regulaarne.

NÄPUNÄIDE. Ülesande 3.28 põhjal piisab näidata, et lõplik Boreli mõõt täielikus separaablis meetrilises ruumis on igal lahtisel hulgal seest regulaarne. Selleks kasutada Hausdorffi teoreemi.

**Ülesanne 3.30.** Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täield. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) $E \in \overline{\mathfrak{A}}$;

(ii) $E = A \cup N_1$, kus $A \in \mathfrak{A}$, $N_1 \in \mathcal{N}$, $A \cap N_1 = \emptyset$;

(iii) $E = B \setminus N_2$, kus $B \in \mathfrak{A}$, $N_2 \in \mathcal{N}$;

(iv) $E = B \setminus N_3$, kus $B \in \mathfrak{A}$, $N_3 \in \mathcal{N}$, $N_3 \subset B$;

(v) leiduvad $A, B \in \mathfrak{A}$ nii, et $A \subset E \subset B$ ja $\mu(B \setminus A) = 0$.

**Ülesanne 3.31.** Tõestada, et mõõduga ruum on $\sigma$-lõplik parajasti siis, kui tema täield on $\sigma$-lõplik.

**Ülesanne 3.32.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $X \supset Y \in \mathfrak{A}$. Tähistame

$$\mathfrak{B} := \{A \cap Y \colon A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathcal{P}(Y) \quad \text{ja} \quad \nu = \mu|_{\mathfrak{B}},$$

s.t. $\nu(B) = \mu(B)$, $B \in \mathfrak{B}$. Ülesandest 2.12 teame, et $\mathfrak{B}$ on $\sigma$-algebra, seega $\nu$ on mõõt. Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ ja $(Y, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\nu})$ vastavalt mõõduga ruumide $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ täieldid. Tõestada, et

(a) $\mathcal{N}(\nu) = \{N \cap Y \colon N \in \mathcal{N}(\mu)\}$;

(b) $\overline{\mathfrak{B}} = \{E \cap Y \colon E \in \overline{\mathfrak{A}}\}$;

(c) $\overline{\nu} = \overline{\mu}|_{\overline{\mathfrak{B}}}$.

**Ülesanne 3.33.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum, kus $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum. Tõestada, et $\mu$ on regulaarne parajasti siis, kui tema täield $\overline{\mu}$ on regulaarne.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat.

# § 4. Välismõõdud

Kõikjal selles paragrahvis olgu $X$ mingi hulk.

**Definitsioon 4.1.** Olgu $\mu_0$ mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ning olgu algebra $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

Öeldakse, et mõõt $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0,\infty]$ on mõõdu $\mu_0$ *jätk* algebrale $\mathfrak{B}$ ja kirjutatakse $\mu|_{\mathfrak{A}} = \mu_0$ (loetakse: $\mu$ ahend algebrale $\mathfrak{A}$ on $\mu_0$), kui

$$\mu(A) = \mu_0(A) \quad \text{iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Selles paragrahvis esitame skeemi, kuidas jätkata algebral defineeritud mõõt selle algebra poolt genereeritud $\sigma$-algebrale. Selleks toome sisse järgneva mõistete-aparatuuri.

**Definitsioon 4.2.** Hulgafunktsiooni $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ nimetatakse *välismõõduks,* kui

OM1° $\lambda(\emptyset) = 0$;

OM2° $\lambda$ on *monotoonne,* s.t.

$$A, B \in \mathcal{P}(X),\ A \subset B \ \Rightarrow\ \lambda(A) \leqslant \lambda(B);$$

OM3° $\lambda$ on *loenduvalt subaditiivne,* s.t.

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j), \quad E_j \in \mathcal{P}(X),\ j = 1, 2, \dots .$$

**Lemma 4.1.** *Olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ja hulgafunktsioon $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,\infty]$ sellised, et*

$$\emptyset, X \in \mathcal{E} \quad \textit{ja} \quad \rho(\emptyset) = 0.$$

*Siis hulgafunktsioon $\rho^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, mis on defineeritud seosega*

$$\rho^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j)\colon\ A_j \in \mathcal{E},\ j = 1, 2, \dots,\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}, \quad E \in \mathcal{P}(X),$$

*on välismõõt.*

Tõestus. Kõigepealt märgime, et hulgafunktsiooni $\rho^*$ definitsioon on korrektne, sest iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral leiduvad hulgad $A_j \in \mathcal{E}$, $j = 1, 2, \dots$, nii, et $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. (Me võime võtta näiteks $A_j = X$, $j = 1, 2, \dots$.)

Vahetult on konrollitav, et $\rho^*(\emptyset) = 0$ ning $\rho^*$ on monotoonne.

**Ülesanne 4.1.** Tõestada, et $\rho^*(\emptyset) = 0$ ning $\rho^*$ on monotoonne.

Olgu $E_j \in \mathcal{P}(X)$, $j = 1, 2, \ldots$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et

$$\rho^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j).$$

Selleks aga piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral

$$\rho^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j) + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Valime iga $j \in \mathbb{N}$ korral hulgad $A_i^j \in \mathcal{E}$, $i = 1, 2, \ldots$, selliselt, et

$$E_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^j \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i^j) \leqslant \rho^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ilmselt $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^j = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_i^j$ ning seega

$$\begin{aligned}
\rho^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \rho(A_k)\colon\ A_k \in \mathcal{E},\ k = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right\} \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} \rho(A_i^j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i^j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\rho^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Olgu $\lambda\colon\ \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ välismõõt.

**Definitsioon 4.3.** Öeldakse, et hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on $\lambda$-*mõõtuv* (ehk välismõõdu $\lambda$ *suhtes mõõtuv*), kui

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \quad \text{iga } E \in \mathcal{P}(X) \text{ korral.}$$

On selge, et *hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on $\lambda$-mõõtuv parajasti siis, kui*

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \leqslant \lambda(E) \quad \textit{iga } E \in \mathcal{P}(X),\ \lambda(E) < \infty, \textit{ korral}$$

(sest vastupidine võrratus kehtib välismõõdu subaditiivsuse tõttu alati ning juhul, kui $\lambda(E) = \infty$, kehtib see võrratus triviaalselt).

Hulga $X$ kõigi $\lambda$-mõõtuvate alamhulkade kogumit tähistame edaspidi sümboliga $\mathcal{M}(\lambda)$.

**Teoreem 4.2** (Carathéodory[12] teoreem)**.** *Olgu* $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *välismõõt. Siis*

(a) $\mathcal{M}(\lambda)$ *on $\sigma$-algebra (s.t. kõigi $\lambda$-mõõtuvate hulkade kogum on $\sigma$-algebra);*

(b) $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ *(s.t. välismõõdu $\lambda$ ahend kõigi $\lambda$-mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebrale $\mathcal{M}(\lambda)$) on täielik mõõt.*

Tõestus. (a). Tõestamaks, et $\mathcal{M}(\lambda)$ on $\sigma$-algebra, piisab näidata, et

(a1) $\mathcal{M}(\lambda)$ on algebra;

(a2) kui hulgad $A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud, siis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$.

(a1). Kõigepealt paneme tähele, et $\emptyset \in \mathcal{M}(\lambda)$ ning kui $A \in \mathcal{M}(\lambda)$, siis ka $A^c \in \mathcal{M}(\lambda)$.

**Ülesanne 4.2.** Tõestada, et

(1) $\emptyset \in \mathcal{M}(\lambda)$;

(2) kui $A \in \mathcal{M}(\lambda)$, siis ka $A^c \in \mathcal{M}(\lambda)$.

Olgu $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$. Veendumaks, et $\mathcal{M}(\lambda)$ on algebra, jääb näidata, et $A \cup B \in \mathcal{M}(\lambda)$, s.t. iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda\bigl(E \cap (A \cup B)\bigr) + \lambda\bigl(E \cap (A \cup B)^c\bigr) = \lambda(E).$$

Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Arvestades, et hulgad $A$ ja $B$ on $\lambda$-mõõtuvad, saame, et

$$\begin{aligned}
&\lambda\bigl(E \cap (A \cup B)\bigr) + \lambda\bigl(E \cap (A \cup B)^c\bigr) \\
&\qquad = \lambda\bigl(E \cap (A \cup B) \cap A\bigr) + \lambda\bigl(E \cap (A \cup B) \cap A^c\bigr) + \lambda(E \cap A^c \cap B^c) \\
&\qquad = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c \cap B) + \lambda(E \cap A^c \cap B^c) \\
&\qquad = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \\
&\qquad = \lambda(E).
\end{aligned}$$

(a2). Olgu hulgad $A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots$, paarikaupa lõikumatud. Väite (a) tõestuseks jääb näidata, et $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$, s.t. iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lambda\left(E \cap \Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Bigr)^c\right) \leqslant \lambda(E).$$

Selleks paneme esmalt tähele, et kui hulgad $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$ on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\lambda\bigl(E \cap (A \cup B)\bigr) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B) \quad \text{iga } E \in \mathcal{P}(X) \text{ korral.} \tag{4.1}$$

Tõepoolest, kui hulgad $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$ on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\begin{aligned}
\lambda\bigl(E \cap (A \cup B)\bigr) &= \lambda\bigl(E \cap (A \cup B) \cap A\bigr) + \lambda\bigl(E \cap (A \cup B) \cap A^c\bigr) \\
&= \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B).
\end{aligned}$$

[12] Constantin Carathéodory (1873–1950) — kreeka päritolu saksa matemaatik.

Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Kuna hulgad $A_j$, $j = 1, 2, \dots$, on paarikaupa lõikumatud, siis saame tingimusest (4.1) induktsiooni teel, et

$$\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(E \cap A_j) \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E \cap A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E \cap A_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda(E \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right).
\end{aligned}$$

Teiselt poolt

$$\lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)^c\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right). \tag{4.2}$$

Tõepoolest, kuna $E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c \subset E \cap (\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j)^c \subset E \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)^c$, $n = 1, 2, \dots$, ning $\lambda$ on monotoonne, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)^c\right) \leqslant \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\Big)^c\right) \leqslant \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right);$$

niisiis piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)^c\right)$ eksisteerib, kusjuures kehtib (4.2).

Seega

$$\begin{aligned}
\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &+ \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)^c\right) \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lambda(E) \\
&= \lambda(E),
\end{aligned}$$

sest kuna $\mathcal{M}(\lambda)$ on algebra, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$.

(b). Veendumaks, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on mõõt, paneme kõigepealt tähele, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on aditiivne hulgafunktsioon.

Tõepoolest, mis tahes $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$, $A \cap B = \emptyset$, korral järeldub $\lambda$-mõõtuvuse definitsioonist, et

$$\lambda(A \cup B) = \lambda\big((A \cup B) \cap A\big) + \lambda\big((A \cup B) \cap A^c\big) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Kuna aditiivne hulgafunktsioon on $\sigma$-aditiivne parajasti siis, kui ta on loenduvalt subaditiivne, siis $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on mõõt (sest $\lambda$ (ja seega ka $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$) on loenduvalt subaditiivne ning $\lambda(\emptyset) = 0$).

Veendumaks, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on täielik mõõt, paneme kõigepealt tähele, et kehtib implikatsioon

$$N \in \mathcal{P}(X),\ \lambda(N) = 0 \quad \Longrightarrow \quad N \in \mathcal{M}(\lambda).$$

Tõepoolest, kui $N \in \mathcal{P}(X)$ on selline, et $\lambda(N) = 0$, siis $\lambda$ monotoonsuse tõttu iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral $\lambda(E \cap N) + \lambda(E \cap N^c) \leqslant \lambda(N) + \lambda(E) = \lambda(E)$; järelikult $N \in \mathcal{M}(\lambda)$.

**Ülesanne 4.3.** Tõestada, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on täielik mõõt.

□

**Teoreem 4.3.** *Olgu $\mu$ mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ja olgu hulgafunktsioon $\mu^*\colon\ \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ defineeritud seosega*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1,2,\ldots,\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}, \quad E \in \mathcal{P}(X). \tag{4.3}$$

*Siis*

(a) *hulgafunktsioon $\mu^*$ on välismõõt;*

(b) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ *(s.t. kõik algebra $\mathfrak{A}$ hulgad on $\mu^*$-mõõtuvad);*

(c) $\mu^*|_{\mathfrak{A}} = \mu$ *(s.t. $\mu^*(A) = \mu(A)$ iga $A \in \mathfrak{A}$ korral).*

Seosega (4.3) defineeritud välismõõtu $\mu^*$ nimetatakse *mõõduga $\mu$ assotsieeruvaks välismõõduks.*

Teoreemi 4.3 tõestus. Väide (a) järeldub vahetult lemmast 4.1.

(b). Olgu $A \in \mathfrak{A}$. Väite tõestuseks peame näitama, et $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$, s.t. iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E). \tag{4.4}$$

Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Tingimuse (4.4) kehtivuseks piisab veenduda, et kui hulgad $B_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1,2,\ldots$, sellised, et $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, siis

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

Tõepoolest, sel juhul

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)\colon\ B_j \in \mathfrak{A},\ j = 1,2,\ldots,\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right\} = \mu^*(E).$$

Olgu hulgad $B_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Kuna $A \cap B_j$, $A^c \cap B_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, kusjuures $E \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j$ ja $E \cap A^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A^c \cap B_j$, siis

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A^c \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \big(\mu(A \cap B_j) + \mu(A^c \cap B_j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big((A \cap B_j) \cup (A^c \cap B_j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).
\end{aligned}$$

(c). Olgu $A \in \mathfrak{A}$. Väite tõestuseks peame näitama, et $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Veendumaks, et $\mu(A) \geqslant \mu^*(A)$, tähistame $B_1 = A$ ja $B_j = \emptyset$, $j = 2, 3, \ldots$; siis

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \geqslant \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \colon\ A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, 2, \ldots,\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\} = \mu^*(A).$$

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Selleks, fikseerides vabalt hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, piisab veenduda, et $\mu(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$:

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

□

Nüüd me oleme võimelised esitama skeemi, kuidas jätkata algebral defineeritud mõõt selle algebra poolt genereeritud $\sigma$-algebrale.

Olgu $\mu_0$ mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ning olgu $\mu_0^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mõõduga $\mu_0$ assotsieeruv välismõõt, s.t.

$$\mu_0^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \colon\ A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, 2, \ldots,\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad E \in \mathcal{P}(X).$$

Tähistame $\mu = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$. Siis

(a) $\mu$ on mõõt (Carathéodory teoreemi põhjal on $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ mõõt; kuna teoreemi 4.3 põhjal $\mathfrak{A} \subset \mathcal{M}(\mu_0^*)$, siis ka $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}(\mu_0^*)$ (sest $\mathcal{M}(\mu_0^*)$ on Carathéodory teoreemi põhjal $\sigma$-algebra); seega on ka $\mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ mõõt);

(b) $\mu$ on mõõdu $\mu_0 \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ jätk algebra $\mathfrak{A}$ poolt genereeritud $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$ (sest teoreemi 4.3 põhjal iga $A \in \mathfrak{A}$ korral $\mu(A) = \mu_0^*(A) = \mu_0(A)$).

Niisiis me oleme jätkanud mõõdu $\mu_0$ algebralt $\mathfrak{A}$ selle algebra poolt genereeritud $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$.

Mõõtusid $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ ja $\mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ nimetatakse mõõdu $\mu_0$ *Carathéodory–Hahni*[13] *jätkudeks.*

Ülalkirjeldatud skeemi (eel)mõõdu $\mu_0$ jätkamiseks algebralt $\mathfrak{A}$ selle algebra poolt genereeritud $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$ (ning ka $\mu_0^*$-mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebrale $\mathcal{M}(\mu_0^*)$) nimetame edaspidi *Carathéodory–Hahni skeemiks.*

**Teoreem 4.4** (Hahni jätkamisteoreem)**.** *Olgu $\mu_0$ mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Tähistame $\mu = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$. Siis*

(a) *$\mu$ on mõõdu $\mu_0$ jätk algebra $\mathfrak{A}$ poolt genereeritud $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$;*

(b) *kui mõõt $\nu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0,\infty]$ on mõõdu $\mu_0$ mingi jätk, siis iga $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ korral $\nu(A) \leqslant \mu(A)$; seejuures, kui $\mu(A) < \infty$, siis $\nu(A) = \mu(A)$;*

(c) *kui mõõt $\mu_0$ on $\sigma$-lõplik, siis $\mu$ on mõõdu $\mu_0$ ainus jätk $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$.*

Tõestus. Väide (a) on tõestatud teoreemile eelnevas arutelus.

(b). Olgu $\nu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0,\infty]$ mõõdu $\mu_0$ mingi jätk.

Kõigepealt näitame, et iga $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ korral $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

Olgu $A \in \sigma(\mathfrak{A})$. Kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, on sellised, et $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, siis

$$\nu(A) \leqslant \nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j);$$

järelikult ka

$$\nu(A) \leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A}, = 1, 2, \ldots,\ A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right\} = \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

Olgu nüüd $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ selline, et $\mu(A) < \infty$. Väite tõestuseks jääb näidata, et $\mu(A) \leqslant \nu(A)$. Selleks valime hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, selliselt, et $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ ja

$$\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) < \mu_0^*(A) + 1 = \mu(A) + 1 < \infty.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et hulgad $A_j$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud.

Tõepoolest, kui tähistada $A_1' = A_1$ ja $A_j' = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$, $j = 2, 3, \ldots$, siis $A_j' \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, ja $A_i' \cap A_j' = \emptyset$, kui $i \neq j$; seejuures

$$A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty A_j' \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j') \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) < \mu(A) + 1.$$

[13] Hans Hahn (1879–1934) — austria matemaatik.

Tähistame $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Kuna

$$\mu(C) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \nu(C),$$

siis

$$\mu(A) + \mu(C \setminus A) = \mu(C) = \nu(C) = \nu(A) + \nu(C \setminus A)$$

Kuna eelnevalt tõestatu põhjal $\mu(C \setminus A) \geqslant \nu(C \setminus A)$, siis järeldub siit, et $\mu(A) \leqslant \nu(A)$.

(c). Olgu mõõt $\mu_0$ $\sigma$-lõplik ning olgu $\nu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0,\infty]$ mõõdu $\mu_0$ mingi jätk. Teoreemi tõestuseks peame näitama, et $\nu = \mu$, s.t. $\nu(A) = \mu(A)$ iga $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ korral.

Olgu $A \in \sigma(\mathfrak{A})$. Mõõdu $\mu_0$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, selliselt, et $\mu_0(A_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, ja $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$ (s.t. hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud). Seega

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap A_j)\\ = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap A_j\right) = \mu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A \cap X) = \mu(A),\end{aligned}$$

sest iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A \cap A_j) \leqslant \mu(A_j) = \mu_0(A_j) < \infty$ ning järelikult väite (b) põhjal $\nu(A \cap A_j) = \mu(A \cap A_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. □

**Lause 4.5.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu_0)$ eelmõõduga ruum ning olgu $\mu_1 = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ ja $\mu_2 = \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ (s.t. mõõdud $\mu_1\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0,\infty]$ ja $\mu_2\colon \mathcal{M}(\mu_0^*) \to [0,\infty]$ on (eel)mõõdu $\mu_0$ Carathéodory–Hahni jätkud). Siis $\mu_0^* = \mu_1^* = \mu_2^*$.*

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu_0)$ eelmõõduga ruum. Carathéodory teoreemist 4.2 ja teoreemist 4.3 teame, et $\big(X, \mathcal{M}(\mu_0^*), \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}\big)$ on mõõduga ruum, kusjuures $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ on (eel)mõõdu $\mu_0$ jätk. Lausest 4.5 järeldub, et Carathéodory–Hahni skeem ei võimalda mõõtu $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ (ning seega ka (eel)mõõtu $\mu_0$) $\sigma$-algebrast $\mathcal{M}(\mu_0^*)$ enam "kaugemale" jätkata.

Lause 4.5 ning ka järgneva teoreemi 4.6 tõestusel on abiks, kui eelnevalt lahendada

**Ülesanne 4.4.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Tõestada, et

(a) iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \inf\{\mu(A)\colon\ A \in \mathfrak{A},\ A \supset E\}\\ &= \min\{\mu(A)\colon\ A \in \mathfrak{A},\ A \supset E\};\end{aligned}$$

(b) hulk $N \in \mathcal{P}(X)$ on $\mu$-hüljatav parajasti siis, kui $\mu^*(N) = 0$.

LAUSE 4.5 TÕESTUS.

**Ülesanne 4.5.** Tõestada lause 4.5.

NÄPUNÄIDE. Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $\mu_0^*(E) \geqslant \mu_1^*(E) \geqslant \mu_2^*(E) \geqslant \mu_0^*(E)$. Siin esimese kahe võrratuse tõestuseks kasutada välismõõtude $\mu_0^*$, $\mu_1^*$ ja $\mu_2^*$ definitsioone ning asjaolu, et $\mu_0 = \mu_0^*|_{\mathfrak{A}}$, $\mu_1 = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ ja $\mu_2 = \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$. Võrratuse $\mu_2^*(E) \geqslant \mu_0^*(E)$ tõestuseks kasutada ülesannet 4.4, (a).

□

Olgu $\mu_0$ mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Carathéodory teoreemist ja teoreemist 4.3 järeldub, et mõõt $\mu_0$ on jätkatav mitte ainult algebra $\mathfrak{A}$ poolt genereeritud $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$, vaid ka $\mu_0^*$-mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebrale $\mathcal{M}(\mu_0^*)$, mis sisaldab $\sigma$-algebrat $\sigma(\mathfrak{A})$. Tekib loomulik küsimus: milline on $\sigma$-algebrate $\sigma(\mathfrak{A})$ ja $\mathcal{M}(\mu_0^*)$ vahekord? Me teame, et alati $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}(\mu_0^*)$, kuid kas on võimalik ka nende $\sigma$-algebrate võrdsus? Osalise vastuse sellele küsimusele annab järgnev teoreem.

**Teoreem 4.6.** *Olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik mõõt $\sigma$-algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Siis mõõduga ruum $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)})$ on mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täield.*

Teoreemist 4.6 järeldub muuhulgas, et kui $\sigma$-lõplik mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on täielik, siis $\mathcal{M}(\mu^*) = \mathfrak{A}$ ning seega ei võimalda Carathéodory–Hahni skeem mõõtu $\mu$ $\sigma$-algebralt $\mathfrak{A}$ enam "kaugemale" jätkata.

TEOREEMI 4.6 TÕESTUS.

***Ülesanne 4.6.** Tõestada teoreem 4.6.

NÄPUNÄIDE. Mugav on kasutada ülesannet 4.4.

□

**Järeldus 4.7.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu_0)$ $\sigma$-lõplik eelmõõduga ruum. Siis mõõduga ruum $(X, \mathcal{M}(\mu_0^*), \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)})$ on mõõduga ruumi $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})})$ täield.*

TÕESTUS. Olgu $\mu\colon\ \sigma(\mathfrak{A}) \to [0, \infty]$ eelmõõdu $\mu_0$ Carathéodory–Hahni jätk. Kuna $\mu_0$ on $\sigma$-lõplik, siis ka $\mu$ on $\sigma$-lõplik, seega teoreemi 4.6 põhjal on $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)})$ mõõduga ruumi $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu)$ täield. Kuna $\mu = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ ning lause 4.5 põhjal $\mu^* = \mu_0^*$, siis $(X, \mathcal{M}(\mu_0^*), \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)})$ on ruumi $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})})$ täield. □

**Ülesanne 4.7.** Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk, olgu $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ välismõõt ning olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)\colon\ E_j \in \mathcal{E},\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset E\right\}$$

Tõestada, et hulk $A \subset X$ on $\lambda$-mõõtuv parajasti siis, kui iga $E \in \mathcal{E}$ korral

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) = \lambda(E).$$

**Ülesanne 4.8.** Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra ning olgu $\mu$ lõplik mõõt $\sigma$-algebral $\sigma(\mathfrak{A})$. Tõestada, et kui $E \in \sigma(\mathfrak{A})$, siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(A \triangle E) < \varepsilon$.

# § 5. Boreli mõõdud ruumis $\mathbb{R}$

## 5.1. Boreli mõõdud ruumis $\mathbb{R}$. Lebesgue–Stieltjesi[14] mõõdud

**Definitsioon 5.1.** *Boreli mõõtudeks* topoloogilises ruumis $X$ nimetatakse mõõtusid, mille määramispiirkonnaks on selle ruumi Boreli $\sigma$-algebra $\mathcal{B}_X$.

Tähistame (nagu ka paragrahvides 2 ja 3)

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a,b),\ [c,\infty),\ (-\infty,d),\ (-\infty,\infty):\quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a<b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ning

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} A_j:\quad n\in\mathbb{N},\ A_1,\dots,A_n\in\mathcal{H},\ A_i\cap A_j=\emptyset,\ i\neq j\right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

s.t. $\mathcal{B}$ on kogumi $\mathcal{H}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogum. Näites 2.2 tõestasime, et $\mathcal{B}$ on algebra.

Olgu $F\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Tähistame

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) \quad \text{ja} \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

(märgime, et funktsiooni $F$ monotoonsuse tõttu need piirväärtused eksisteerivad). Defineerime hulgafunktsiooni $\mu_F^0\colon\ \mathcal{H}\to[0,\infty]$ seostega

$$\begin{aligned}
\mu_F^0(\emptyset) &= 0,\\
\mu_F^0\big([a,b)\big) &= F(b)-F(a), \quad a,b\in\mathbb{R},\ a<b,\\
\mu_F^0\big([c,\infty)\big) &= F(\infty)-F(c), \quad c\in\mathbb{R},\\
\mu_F^0\big((-\infty,d)\big) &= F(d)-F(-\infty), \quad d\in\mathbb{R},\\
\mu_F^0\big((-\infty,\infty)\big) &= F(\infty)-F(-\infty)
\end{aligned}$$

ning jätkame selle hulgafunktsiooni algebrale $\mathcal{B}$, defineerides $A\in\mathcal{B}$ korral

$$\mu_F^0(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_F^0(A_j),$$

kus paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{H}$ $(n\in\mathbb{N})$ on sellised, et $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Näites 3.3 veendusime, et $\mu_F^0$ on mõõt (selles näites kirjutasime lihtsuse mõttes $\mu_F^0$ asemel $\mu_F$).

**Ülesanne 5.1.** Tõestada, et mõõt $\mu_F^0$ on $\sigma$-lõplik.

[14] Thomas Jan Stieltjes (1856–1894) — hollandi matemaatik (viimased kümme aastat oma elust tegutses Prantsusmaal).

Kuna mõõt $\mu_F^0$ on $\sigma$-lõplik, siis Hahni teoreemi põhjal on tema Carathéodory–Hahni jätk $\mu_F := {\mu_F^0}^*|_{\sigma(\mathcal{B})}$ tema ainus jätk $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Mõõtu $\mu_F\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,\infty]$ nimetatame edaspidi *funktsioonile $F$ vastavaks Boreli mõõduks ruumis $\mathbb{R}$.*

Täpse ülevaate mittekahanevate vasakult pidevate funktsioonide $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja ruumi $\mathbb{R}$ Boreli mõõtude vahekorrast annab

**Teoreem 5.1.** (a) *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Siis leidub parajasti üks mõõt $\mu\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,\infty]$ selliselt, et mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral*

$$\mu\big([a,b)\big) = F(b) - F(a).$$

*Seejuures $\mu = \mu_F$. Kui $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mingi selline mittekahanev vasakult pidev funktsioon, et $\mu_G = \mu_F$, siis leidub konstant $C \in \mathbb{R}$ nii, et*

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) *Olgu mõõt $\mu\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,\infty]$ selline, et iga tõkestatud hulga $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ korral $\mu(A) < \infty$. Siis on funktsioon*

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big([0,x)\big), & \text{kui } x > 0; \\ 0, & \text{kui } x = 0; \\ -\mu\big([x,0)\big), & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

*mittekahanev ja vasakult pidev, kusjuures $\mu = \mu_F$.*

Tõestus.

**Ülesanne 5.2.** Tõestada teoreem 5.1.

□

Carathéodory teoreemi kohaselt on ${\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)}$ (s.t. mõõduga $\mu_F^0$ assotsieeruva välismõõdu ${\mu_F^0}^*$ ahend ruumi $\mathbb{R}$ ${\mu_F^0}^*$-mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebrale $\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)$) täielik mõõt, s.t. $\big(\mathbb{R}, \mathcal{M}({\mu_F^0}^*), {\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)}\big)$ on täielik mõõduga ruum.

Tähistame

$$\mathcal{M}_F = \mathcal{M}({\mu_F^0}^*) \quad \text{ja} \quad \overline{\mu}_F = {\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)} = {\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}_F}.$$

$\sigma$-algebrat $\mathcal{M}_F$ nimetatakse (funktsioonile $F$ vastavaks) *Lebesgue–Stieltjesi $\sigma$-algebraks* ning selle $\sigma$-algebra hulki (funktsioonile $F$ vastavateks) *Lebesgue–Stieltjesi hulkadeks.* Mõõtu $\overline{\mu}_F$ nimetatakse (funktsioonile $F$ vastavaks) *Lebesgue–Stieltjesi mõõduks.*

Kuna mõõt $\mu_F^0$ on $\sigma$-lõplik, siis järelduse 4.7 põhjal on mõõduga ruum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \overline{\mu}_F)$ mõõduga ruumi $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu_F)$ täield.

Saab näidata, et ruum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu_F)$ pole kunagi täielik; niisiis alati $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subsetneqq \mathcal{M}_F$ (vt. märkust 5.7).

Kuna mõõt $\overline{\mu}_F$ on Boreli mõõdu $\mu_F$ jätk ning seejuures ainus jätk $\sigma$-algebrale $\mathcal{M}_F$, siis kirjutame edaspidises lihtsuse mõttes $\overline{\mu}_F$ asemel sageli ka $\mu_F$.

Kui $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, siis tähistatakse Lebesgue–Stieltjesi mõõtu $\overline{\mu}_F$ (ning ka Boreli mõõtu $\mu_F = \overline{\mu}_F|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$) sümboliga $m$ ning $\sigma$-algebrat $\mathcal{M}_F$ sümboliga $\mathcal{L}$. $\sigma$-algebrat $\mathcal{L}$ nimetatakse (ruumi $\mathbb{R}$) *Lebesgue'i $\sigma$-algebraks* ning selle $\sigma$-algebra hulki (ruumi $\mathbb{R}$) *Lebesgue'i hulkadeks.* Mõõtu $m$ nimetatakse *Lebesgue'i mõõduks* (ruumis $\mathbb{R}$).

**Märkus 5.1.** Teoreemist 5.1, (a), järeldub, et Lebesgue'i mõõt $m$ on ainus ruumi $\mathbb{R}$ Boreli $\sigma$-algebral määratud mõõt, mis rahuldab mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral tingimust $m\big([a,b)\big) = b - a$. Lebesgue'i mõõt on ka ainus Lebesgue'i $\sigma$-algebral määratud mõõt, mis seda tingimust rahuldab (sest Lebesgue'i $\sigma$-algebra on Boreli $\sigma$-algebra täield mõõdu $m$ suhtes).

**Ülesanne 5.3.** Olgu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tõestada, et

(a) $\{a\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, kusjuures $m\big(\{a\}\big) = 0$ (s.t. ühepunktiline hulk ruumis $\mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv, kusjuures tema Lebesgue'i mõõt on null);

(b) $m\big([a,b)\big) = m\big((a,b)\big) = m\big((a,b]\big) = m\big([a,b]\big) = b - a$;

(c) $m\big([c,\infty)\big) = m\big((c,\infty)\big) = m\big((-\infty,d)\big) = m\big((-\infty,d]\big) = m\big((-\infty,-\infty)\big) = \infty$;

(d) kui hulk $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on ülimalt loenduv, siis $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, kusjuures $m(A) = 0$.

Vahetult Lebesgue–Stieltjesi mõõdu definitsioonist järeldub, et iga $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned}
{\mu_F^0}^*(E) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F^0(B_j)\colon\ B_j \in \mathcal{B},\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset E\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_F^0(A_k)\colon\ A_k \in \mathcal{H},\ k = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F^0\big([a_j,b_j)\big)\colon\ a_j,b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j,b_j) \supset E\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big([a_j,b_j)\big)\colon\ a_j,b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j,b_j) \supset E\right\}.
\end{aligned}$$

**Lause 5.2.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Siis iga $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ korral*

$${\mu_F^0}^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,b_j)\big)\colon\ a_j,b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j,b_j) \supset E\right\} =: \nu_F(E).$$

*Muuhulgas, iga $E \in \mathcal{M}_F$ korral*

$$\mu_F(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,b_j)\big)\colon a_j,b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j,b_j) \supset E\right\}. \tag{5.1}$$

Tõestus. Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Lause tõestuseks piisab näidata, et ${\mu_F^0}^*(E) = \nu_F(E)$.

Kui tõkestatud vahemikud $(a_j, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, on sellised, et $\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \supset E$, siis valides iga $j \in \mathbb{N}$ korral paarikaupa lõikumatud poollõigud $[a_j^i, b_j^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, nii, et $(a_j, b_j) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_j^i, b_j^i)$ (sellised poollõigud ilmselt leiduvad), kehtib sisalduvus $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_j^i, b_j^i) \supset E$, seega teoreemile eelneva võrdusteahela põhjal

$$
{\mu_F^0}^*(E) \leqslant \sum_{j,i=1}^{\infty} \mu_F\big([a_j^i, b_j^i)\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\big([a_j^i, b_j^i)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j, b_j)\big);
$$

järelikult ${\mu_F^0}^*(E) \leqslant \nu_F(E)$.

Lause tõestuseks jääb näidata, et $\nu_F(E) \leqslant {\mu_F^0}^*(E)$, milleks, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab näidata, et $\nu_F(E) \leqslant {\mu_F^0}^*(E) + 2\varepsilon$. Teoreemile eelneva võrdusteahela põhjal leiduvad poollõigud $[a_j, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et

$$
\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j) \supset E \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big([a_j, b_j)\big) \leqslant {\mu_F^0}^*(E) + \varepsilon.
$$

Funktsiooni $F$ vasakult pidevuse tõttu leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral $c_j < a_j$ nii, et

$$
F(c_j) > F(a_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}.
$$

Nüüd $\bigcup_{j=1}^{\infty}(c_j, b_j) \supset \bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j) \supset E$ ning järelikult

$$
\begin{aligned}
\nu_F(E) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((c_j, b_j)\big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big([c_j, b_j)\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\big(F(b_j) - F(c_j)\big) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\Big(F(b_j) - F(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big([a_j, b_j)\big) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j} \leqslant {\mu_F^0}^*(E) + 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

Erijuhul $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, saame lausest 5.2, et iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$
{\mu_F^0}^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \supset E\right\} \tag{5.2}
$$

ning, muuhulgas, iga $E \in \mathcal{L}$ korral (sümbolid $\mathcal{L}$ ja $m$ tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i $\sigma$-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$)

$$
m(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \supset E\right\}. \tag{5.3}
$$

## 5.2. Lebesgue–Stieltjesi mõõtude regulaarsus

Meenutame (vt. § 3.3), et kui $X$ on topoloogiline ruum ning $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on algebra, siis öeldakse, et mõõt $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on *regulaarne,* kui iga hulga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) &\overset{(1)}{=} \inf\Big\{\mu(D)\colon \text{ hulga } D \in \mathfrak{A} \text{ sisemus } D^\circ \supset E\Big\}\\ &\overset{(2)}{=} \sup\Big\{\mu(C)\colon \text{ hulga } C \in \mathfrak{A} \text{ sulund } \overline{C} \text{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E\Big\}.\end{aligned}$$

Kui kehtib võrdus (1), siis öeldakse et $\mu$ on hulgal $E$ *väljast regulaarne.* Kui kehtib võrdus (2), siis öeldakse et $\mu$ on hulgal $E$ *seest regulaarne.* Kui $\mu$ on igal hulgal $E \in \mathfrak{A}$ väljast regulaarne, siis öeldakse, et $\mu$ on väljast regulaarne. Kui $\mu$ on igal hulgal $E \in \mathfrak{A}$ seest regulaarne, siis öeldakse, et $\mu$ on seest regulaarne.

**Märkus 5.2.** Kompaktne hulk $K$ Hausdorffi topoloogilises ruumis on kinnine; niisiis $K = \overline{K}$ on Boreli hulk. Siit järeldub, et kui $X$ on Hausdorffi topoloogiline ruum ning algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sisaldab kõiki ruumi $X$ Boreli hulki, (s.t. $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$), siis mõõt $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on regulaarne parajasti siis, kui suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\Big\{\mu(U)\colon \text{ hulk } U \subset X \text{ on lahtine ja } U \supset E\Big\}\\ &= \sup\Big\{\mu(K)\colon \text{ hulk } K \subset X \text{ on kompaktne ja } K \subset E\Big\}.\end{aligned}$$

Märgime, et iga meetriline ruum on Hausdorffi topoloogiline ruum.

**Teoreem 5.3.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Lebesgue–Stieltjesi mõõt $\mu_F$ on regulaarne.*

Teoreem 5.3 järeldub vahetult järgnevast teoreemist.

**Teoreem 5.4.** *Olgu $X$ Hausdorffi topoloogiline ruum ning olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra. Kui $\sigma$-lõplik mõõt $\mu_0\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on regulaarne, siis ka tema Carathéodory–Hahni jätk $\mu\colon \mathcal{M}(\mu_0^*) \to [0,\infty]$ on regulaarne.*

**Märkus 5.3.** Kirjeldame alternatiivseid mooduseid mõõtude $\mu_F$ regulaarsuse tõestuseks.

(I) Mõõdu $\mu_F$ väljast regulaarsus järeldub lausest 5.2 (täpsemalt, valemist (5.1)); $\mu_F$ regulaarsus järeldub ülesandest 3.27.

**Ülesanne 5.4.** Järeldada lausest 5.2 (täpsemalt, valemist (5.1)), et mõõt $\mu_F$ on väljast regulaarne. Järeldamaks ülesandest 3.27 mõõdu $\mu_F$ regulaarsust, veenduda, et

(a) meetriline ruum $\mathbb{R}$ on $\sigma$-kompaktne;

(b) mõõt $\mu_F$ on lõplik ruumi $\mathbb{R}$ kompaktsetel hulkadel.

(II) Käesoleva õpiku teoreemis V.2.4 tõestame, et kui lokaalselt kompaktse Hausdorffi ruumi $X$ iga lahtine hulk on $\sigma$-kompaktne (s.t. esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina), siis iga Boreli mõõt ruumis $X$, mis on lõplik kompaktsetel hulkadel, on regulaarne. (Topoloogilist ruumi nimetatakse ***lokaalselt kompaktseks,*** kui tema igal punktil leidub kompaktne ümbrus.) Teoreemist V.2.4 järeldub ahendi $\mu_F|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ regulaarsus. Mõõdu $\mu_F$ regulaarsus järeldub nüüd ülesandest 3.33 (sest $\mu_F$ on $\mu_F|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ täield).

**Ülesanne 5.5.** Veenduda, et

(a) meetriline ruum $\mathbb{R}$ on lokaalselt kompaktne;

(b) iga lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}$ on $\sigma$-kompaktne.

Näpunäide. Väite (b) tõestuseks kasutada teoreemi 2.2 või järeldust 2.3.

TEOREEMI 5.4 TÕESTUS. Olgu $\sigma$-lõplik mõõt $\mu_0\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ regulaarne. Veendumaks, et mõõdu $\mu_0$ Carathéodory–Hahni jätk $\mu\colon \mathcal{M}(\mu_0^*) \to [0,\infty]$ on regulaarne, peame näitama, et $\mu$ on nii seest kui ka väljast regulaarne. Fikseerime vabalt $E \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$.

(a) Veendumaks, et $\mu$ on väljast regulaarne, peame näitama, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $D \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ nii, et

$$D^\circ \supset E \quad \text{ja} \quad \mu(D) \leqslant \mu(E) + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Carathéodory–Hahni jätku definitsiooni põhjal leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, selliselt, et

$$\bigcup_{j=1}^\infty A_j \supset E \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mõõdu $\mu_0$ regulaarsuse tõttu leiduvad hulgad $D_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, selliselt, et

$$D_j^\circ \supset A_j \quad \text{ja} \quad \mu_0(D_j) \leqslant \mu_0(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \qquad \text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Tähistame $D := \bigcup_{j=1}^\infty D_j \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$, siis $D^\circ \supset \bigcup_{j=1}^\infty D_j^\circ \supset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \supset E$ ning

$$\begin{aligned}\mu(D) &\leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(D_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(D_j) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \Big(\mu_0(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\Big)\\ &= \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) + \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Veendumaks, et mõõt $\mu$ on seest regulaarne, peame näitama, et leiduvad hulgad $C_j \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$, $j = 1, 2, \ldots$, selliselt, et

$$\text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral on sulund } \overline{C_j} \text{ kompaktne ja } \overline{C_j} \subset E \text{ ning } \mu(C_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E). \tag{5.4}$$

Selleks piisab näidata, et

(•) *kui $A \in \mathfrak{A}$, kusjuures $\mu(A) < \infty$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $C \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ nii, et*

$$\textit{sulund } \overline{C} \textit{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E \cap A \quad \textit{ning} \quad \mu(C) > \mu(E \cap A) - \varepsilon.$$

Tõepoolest, mõõdu $\mu_0$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et

$$\mu(A_j) < \infty \text{ iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral,} \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \qquad \text{ja} \qquad X = \bigcup_{j=1}^\infty A_j.$$

Kui kehtib väide (•), siis saame iga $j \in \mathbb{N}$ korral leida hulga $C_j \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ nii, et

$$\text{sulund } \overline{C_j} \text{ on kompaktne ja } \overline{C_j} \subset E \cap A_j \quad \text{ning} \quad \mu(C_j) > \mu(E \cap A_j) - \frac{1}{j}.$$

Aga nüüd kehtivad tingimused (5.4).

Tõepoolest, kontrollimist vajab vaid, et $\mu(C_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$, aga see järeldub koonduvusest $\mu(E\cap A_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$. Viimase koonduvuse põhjenduseks märgime, et $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E\cap A_j$, kusjuures $E \cap A_1 \subset E \cap A_2 \subset \cdots$.

Tõestame nüüd väite ($\bullet$). Olgu hulk $A \in \mathfrak{A}$ selline, et $\mu_0(A) < \infty$, ning olgu $\varepsilon > 0$. Mõõdu $\mu_0$ seest regulaarsuse tõttu leidub hulk $K \in \mathfrak{A}$ selliselt, et

$$\text{sulund } \overline{K} \text{ on kompaktne ja } \overline{K} \subset A \quad \text{ning} \quad \mu(K) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tõestuse osa (a) põhjal teame, et $\mu$ on väljast regulaarne, järelikult leidub hulk $D \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ selliselt, et

$$D^\circ \supset A \setminus E \quad \text{ja} \quad \mu(D) \leqslant \mu(A \setminus E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tähistame $C := K \setminus D$; siis $C \subset \overline{K} \setminus D^\circ$ ja seega $\overline{C} \subset \overline{K} \setminus D^\circ$, järelikult $\overline{C}$ on kompaktne (sest $\overline{C}$ on kompaktse hulga $\overline{K}$ kinnine alamhulk), $\overline{C} \subset \overline{K} \setminus D^\circ \subset A \setminus (A \setminus E) = E \cap A$ ning

$$\begin{aligned}
\mu(C) &\geqslant \mu(K) - \mu(D) \\
&> \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2} - \left(\mu(A \setminus E) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mu(A) - \mu(A \setminus E) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \mu(E \cap A) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

**Teoreem 5.5.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon ning olgu $E \in \mathcal{M}_F$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad lahtine hulk $U \supset E$ ja kinnine hulk $H \subset E$ selliselt, et $\mu_F(U \setminus H) < \varepsilon$.*

Tõestus.

**Ülesanne 5.6.** Tõestada teoreem 5.5.

Näpunäide. Kasutades mõõdu $\mu_F$ $\sigma$-lõplikkust ning regulaarsust, konstrueerida kõigepealt lahtine hulk $U \supset E$ selliselt, et $\mu_F(U \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Analoogiliselt saab leida lahtise hulga $V \supset E^c$ selliselt, et $\mu_F(V \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Võtta $H = V^c$.

□

Järgnev lihtne järeldus teoreemist 5.5 kirjeldab Lebesgue–Stieltjesi $\sigma$-algebra $\mathcal{M}_F$ hulki.

Meenutame, et kui $X$ on topoloogiline ruum, siis öeldakse, et

- hulk $D \in \mathcal{P}(X)$ on $G_\delta$, kui ta on esitatav ruumi $X$ lahtiste alamhulkade loenduva ühisosana;

- hulk $C \in \mathcal{P}(X)$ on $F_\sigma$, kui ta on esitatav ruumi $X$ kinniste alamhulkade loenduva ühendina.

**Teoreem 5.6.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $E \in \mathcal{M}_F$;

(ii) $E = G \setminus N_1$, *kus* $G \in \mathcal{M}_F$ *on* $G_\delta$ *ja* $N_1 \in \mathcal{M}_F$ *on selline, et* $\mu_F(N_1) = 0$;

(iii) $E = H \cup N_2$, *kus* $H \in \mathcal{M}_F$ *on* $F_\sigma$ *ja* $N_2 \in \mathcal{M}_F$ *on selline, et* $\mu_F(N_2) = 0$.

TÕESTUS. Implikatsioonide (ii)⇒(i) ja (iii)⇒(i) kehtivus on ilmne, sest $\mathcal{M}_F$ on $\sigma$-algebra ning seega kinnine hulgateoreetilise vahe ja ühendi võtmise operatsioonide suhtes.

(i)⇒(iii) ja (i)⇒(ii). Olgu $E \in \mathcal{M}_F$. Teoreemi 5.5 põhjal leiduvad iga $j \in \mathbb{N}$ korral lahtine hulk $U_j \supset E$ ja kinnine hulk $H_j \subset E$ nii, et $\mu_F(U_j \setminus H_j) < \frac{1}{j}$. Tähistame

$$G := \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \quad N_1 := G \setminus E, \quad H := \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j, \quad N_2 := E \setminus H;$$

siis $G$ on $G_\delta$, $E = G \setminus N_1$, $H$ on $F_\sigma$, $E = H \cup N_2$; seega jääb järelduse tõestuseks näidata, et $\mu_F(N_1) = \mu_F(N_2) = 0$.

**Ülesanne 5.7.** Tõestada, et $\mu_F(N_1) = \mu_F(N_2) = 0$.

□

**Teoreem 5.7.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon ning olgu hulk $E \in \mathcal{M}_F$ selline, et $\mu_F(E) < \infty$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad paarikaupa lõikumatud tõkestatud vahemikud $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ selliselt, et*

$$\mu_F\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j)\right) < \varepsilon.$$

Meenutame, et hulkade $A$ ja $B$ *sümmeetriline vahe* $A \triangle B$ on defineeritud seosega

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

TEOREEMI 5.7 TÕESTUS.

**Ülesanne 5.8.** Tõestada teoreem 5.7.

NÄPUNÄIDE. Kasutada lauset 5.2 (täpsemalt, valemit (5.1)).

□

## 5.3. Lebesgue'i hulga nihke ja kordse Lebesgue'i mõõt. Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu

Olgu $E \subset \mathbb{R}$ ja $r \in \mathbb{R}$. Meenutame, et hulga $E$ *nihe* $E+r$ ja *kordne* $rE$ on defineeritud vastavalt seostega

$$E + r = \{x + r\colon\ x \in E\} \quad \text{ja} \quad rE = \{rx\colon\ x \in E\}.$$

**Ülesanne 5.9.** Tõestada, et $m$-hüljatava hulga nihe ja kordne on $m$-hüljatavad, s.t., kui $E \in \mathcal{N}(m)$ ja $r \in \mathbb{R}$, siis ka $E + r, rE \in \mathcal{N}(m)$.

NÄPUNÄIDE. Kasutada fakti, et (ülesande 4.4, (b), ja teoreemi 4.5 põhjal) $E \in \mathcal{N}(m)$ parajasti siis, kui ${\mu_F^0}^*(E) = 0$, kus $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ning võrdust (5.2).

**Teoreem 5.8.** *Olgu $E \in \mathcal{L}$ ja $r \in \mathbb{R}$. Siis*

(a) *$E + r \in \mathcal{L}$, kusjuures $m(E + r) = m(E)$;*

(b) *$rE \in \mathcal{L}$, kusjuures $m(rE) = |r|\, m(E)$.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 5.10.** Tõestada teoreem 5.8.

NÄPUNÄIDE. Sisalduvuste $E + r \in \mathcal{L}$ ning $rE \in \mathcal{L}$ tõestuseks kasutada asjaolu, et $\mathcal{L}$ on Boreli $\sigma$-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ täield Lebesgue'i mõõdu $m$ suhtes, ning fakte, et ruumis $\mathbb{R}$ Boreli hulga nihe ja kordne on Boreli hulgad ning $m$-hüljatava hulga nihe ja kordne on $m$-hüljatavad (vt. ülesandeid 2.15 ning 5.9).

Võrduste $m(E + r) = m(E)$ ja $m(rE) = |r|\, m(E)$ tõestamisel kasutada võrdust (5.3).

□

Kuna Lebesgue'i mõõt $m$ on teoreemi 5.8 põhjal nihke suhtes invariantne ning $m\big([0, 1)\big) = 1$, siis järeldub teoreemist 1.1 Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu.

**Järeldus 5.9.** *Eksisteerib Lebesgue'i mõttes mittemõõtuv hulk, s.t. $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

**Ülesanne 5.11.** Tõestada, et kui hulk $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ omab sisepunkte, s.t. $E^\circ \neq \emptyset$, siis hulk $E$ sisaldab mingi Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga.

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt näidata, et eksisteerib poollõik $[a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), mis sisaldab mingi Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga, ning seejärel rakendada teoreemi 5.8.

Kehtib ülesande 5.11 väitest üldisem tulemus.

**Lause 5.10.** *Olgu hulk $A \in \mathcal{L}$ selline, et $m(A) > 0$. Siis hulk $A$ sisaldab mingi Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga.*

LAUSE 5.10 TÕESTUSE SKEEM. Üldisust kitsendamata võimne eeldada, et mingi $k \in \mathbb{Z}$ korral $A \subset [k, k+1)$ (põhjendada!) ning, et, veelgi enam, $A \subset [0, 1)$ (põhjendada!). Teoreemi 1.1 tõestuse põhjal võib eeldada, et $A \subset N_q$ mingi $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ korral (põhjendada!), ning et $A$ on kompaktne (sest Lebesgue'i mõõdu regulaarsuse tõttu sisaldab $A$ kompaktse hulga, mille Lebesgue'i mõõt on $> 0$).

Lause tõestuseks piisab nüüd näidata, et

($\bullet$) leidub $\delta > 0$ nii, et $(-\delta, \delta) \subset A - A$,

sest sel juhul ka $(-\delta, \delta) \subset N_q - N_q$, mis on võimatu (sest ainus hulgas $N_q - N_q$ sisalduv ratsionaalarv on null (põhjendada!)).

Väite ($\bullet$) tõestuseks paneme tähele, et tingimus $(-\delta, \delta) \subset A - A$ on samaväärne tingimusega

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad (A + x) \cap A \neq \emptyset \tag{5.5}$$

(põhjendada!). Nüüd piisab väite ($\bullet$) tõestuseks tõestada järgnev lemma.

**Lemma 5.11.** *Olgu $X$ meetriline ruum ning olgu kompaktne hulk $A \subset X$ ja lahtine hulk $U \subset X$ sellised, et $A \subset U$. Siis leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad A + x \subset U. \tag{5.6}$$

Tõepoolest, oletame, et lemma on tõestatud. Lebesgue'i mõõdu regulaarsuse tõttu leidub lahtine hulk $U \supset A$ nii, et $m(U) < 2m(A)$. Olgu $\delta > 0$ selline, et kehtib (5.6). Oletame vastuväiteliselt, et väide ($\bullet$) ei kehti. Siis ka (5.5) ei kehti, seega mingi $x \in (-\delta, \delta)$ korral $(A + x) \cap A = \emptyset$. Aga nüüd

$$2m(A) > m(U) \geqslant m\big(A \cup (A + x)\big) = m(A) + m(A + x) = 2m(A),$$

vastuolu.

**Ülesanne 5.12.** Tõestada lemma 5.11.

□

## 5.4. Täiendavaid märkusi

**Märkus 5.4.** Meie defineerisime oma käsitluses Lebesgue–Stieltjesi mõõdud lähtudes *vasakult* pidevatest mittekahanevatest funktsioonidest: kui $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on vasakult pidev mittekahanev funktsioon, siis me defineerisime (üheselt määratud) mõõdu $\mu_F^0$ poolalgebra

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a, b),\ [c, \infty),\ (-\infty, d),\ (-\infty, \infty):\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite algebral, mis rahuldab tingimust $\mu_F^0\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; Lebesgue–Stieltjesi mõõdud defineerisime kui selliste mõõtude $\mu_F^0$ Carathéodory–Hahni jätkud (${\mu_F^0}^*$-mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebrale).

Alternatiivne skeem Lebesgue–Stieltjesi mõõtude defineerimiseks lähtub *paremalt* pidevatest mittekahanevatest funktsioonidest: kui $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on paremalt pidev mittekahanev funktsioon, siis defineeritakse (üheselt määratud) mõõt $\nu_F^0$ poolalgebra

$$\mathcal{H}' = \Big\{\emptyset,\ (a, b],\ (c, \infty),\ (-\infty, d],\ (-\infty, \infty):\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite algebral, mis rahuldab tingimust $\nu_F^0\big((a, b]\big) = F(b) - F(a)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; Lebesgue–Stieltjesi mõõdud defineeritakse kui selliste mõõtude $\nu_F^0$ Carathéodory–Hahni jätkud (${\nu_F^0}^*$-mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebrale).

Märgime, et kumbki skeem annab tulemuseks ühe ja sama Lebesgue–Stieltjesi mõõtude klassi.

**Märkus 5.5.** Ajalooliselt defineeris Lebesgue välismõõdu $m^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ seosega

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \supset E \right\}, \quad E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

(märgime, et tähistus $m^*$ mingeid vastuolusid endaga kaasa ei too, sest lause 4.5 ja valemi (5.2) põhjal langeb Lebesgue'i poolt defineeritud välismõõt $m^*$ kokku Lebesgue'i mõõduga $m$ assotsieeruva välismõõduga $m^*$) ja luges hulga $A \subset \mathbb{R}$ mõõtuvaks, kui iga tõkestatud vahemiku $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korral

$$m^*\Big((a,b) \cap A\Big) + m^*\Big((a,b) \setminus A\Big) = m^*\Big((a,b)\Big) = b - a.$$

Meie lähtusime oma käsitluses Carathéodory poolt hiljem kasutusele võetud mõistest "antud välismõõdu suhtes mõõtuv hulk": kui $X \neq 0$ on mingi hulk ja $\lambda \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on välismõõt, siis hulk $A \subset X$ on $\lambda$-mõõtuv, kui iga $E \subset X$ korral

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) = \lambda(E).$$

Lihtne on veenduda, et hulk $A \subset \mathbb{R}$ on Lebesgue'i definitsiooni järgi mõõtuv parajasti siis, kui ta on meie käsitluse järgi Lebesgue'i mõttes mõõtuv, s.t. $A \in \mathcal{L}$, s.t. $A$ on $m^*$-mõõtuv (võrdus $m^* = {\mu_F^0}^*$, kus $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, järeldub lausest 4.5): kuna $m^*\big((a,b)\big) = b - a$, siis järeldub nende kahe mõõtuvuse definitsiooni samaväärsus ülesandest 4.7.

**Ülesanne 4.7.** Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk, olgu $\lambda \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ välismõõt ning olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j) \colon\ E_j \in \mathcal{E},\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset E \right\}.$$

Tõestada, et hulk $A \subset X$ on $\lambda$-mõõtuv parajasti siis, kui iga $E \in \mathcal{E}$ korral

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) = \lambda(E).$$

**Märkus 5.6.** Ülesandes 5.3 veendusime, et ruumi $\mathbb{R}$ iga loenduva alamhulga Lebesgue'i mõõt on null. Tekib loomulik küsimus: kas leidub ruumi $\mathbb{R}$ alamhulki, mille Lebesgue'i mõõt on null ning mille võimsus ületab loenduva hulga võimsuse? Vastus sellele küsimusele on jaatav, näide sellisest hulgast on *Cantori*[15] *hulk.*

**Näide 5.1.** Tähistame

$$\begin{aligned}
&C_1 = [0, 1],\\
&C_2 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1],\\
&C_3 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1],\\
&\ldots
\end{aligned}$$

jne. (Piltlikult väljendudes: kui on antud hulk $C_j$ ($j \in \mathbb{N}$), siis jagame kõik selle hulga lõigud kolmeks pikkuselt võrdseks osaks; hulk $C_{j+1}$ saadakse hulga $C_j$ igast lõigust keskmise vahemiku väljajätmise tagajärjel.) Tähistame $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$. Hulka $C$ nimetatakse *Cantori hulgaks.* Saab näidata, et

[15] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) — saksa matemaatik (sündis Venemaal Peterburis, kus elas kuni 11. eluaastani).

- $\operatorname{card}(C) = \mathfrak{c}$ (s.t. hulga $C$ võimsus on kontiinuumi võimsus);
- $m(C) = 0$ (s.t. Cantori hulga Lebesgue'i mõõt on null).

**Märkus 5.7.** Saab näidata, et *iga vasakult pideva mittekahaneva funktsiooni $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korral $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneqq \mathcal{M}_F$*. Esitame selle väite tõestuse skeemi.

Lähtuvalt vasakult pidevast mittekahanevast funktsioonist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstrueeritakse hulk $C_F \subset \mathbb{R}$ nii, et

- $\operatorname{card}(C_F) = \mathfrak{c}$ (s.t. hulga $C_F$ võimsus on kontiinuumi võimsus);
- $\mu_F(C_F) = 0$.

(Hulk $C_F$ on Cantori hulga modifikatsioon, tema konstrueerimisel lähtutakse samuti teatavast lõigust, mida siis hakatakse teatava eeskirja järgi kolmeks jagama ja "keskmisi kolmandikke välja viskama".) Kuna $\mu_F$ on täielik mõõt, siis funktsioonile $F$ vastav Lebesgue–Stieltjesi $\sigma$-algebra $\mathcal{M}_F$ sisaldab kõik hulga $C_F$ alamhulgad, s.t. $\mathcal{P}(C_F) \subset \mathcal{M}_F$. Seega $\operatorname{card}(\mathcal{M}_F) = \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)$, sest

$$\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) = \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(C_F)\big) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{M}_F) \leqslant \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big).$$

Teiselt poolt, saab näidata, et $\operatorname{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c}$. Niisiis,

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c} = \operatorname{card}(\mathbb{R}) < \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) = \operatorname{card}(\mathcal{M}_F),$$

järelikult $\mathcal{M}_F \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$.

**Märkus 5.8.** Ruumi $\mathbb{R}$ alamhulk võib olla "topoloogiliselt suur", kuid "mõõduteoreetiliselt väike", samuti ka vastupidi — "topoloogiliselt väike", kuid "mõõduteoreetiliselt suur". Seda asjaolu illustreerib järgnev näide.

**Näide 5.2.** Iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub lahtine hulk $E \subset [0,1]$, mis on selles lõigus kõikjal tihe ja $m(E) < \varepsilon$. Sellisel juhul hulk $F = [0,1] \setminus E$ on eikusagil tihe (s.t. tal ei ole sisepunkte) ning $m(F) > 1 - \varepsilon$.

Tõepoolest, olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame $E_0 = \mathbb{Q} \cap (0,1)$; siis $E_0$ on loenduv hulk ning seega me võime ta esitada kujul $E_0 = \{e_j\colon j \in \mathbb{N}\}$. Tähistame iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E_j = (e_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, e_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) \cap (0,1)$ ning $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Siis hulk $E \subset [0,1]$ on lahtine ruumis $\mathbb{R}$, ta on kõikjal tihe lõigus $[0,1]$ ja

$$m(E) < \sum_{j=1}^{\infty} m\Big((e_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, e_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}})\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

**Ülesanne 5.13.** Tõestada, et hulk $F = [0,1] \setminus E$ on eikusagil tihe (s.t. tal ei ole sisepunkte) ning $m(F) > 1 - \varepsilon$.

**Märkus 5.9.** Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu (järelduse 5.9) tõestus tugineb valikuaksioomile (vt. teoreemi 1.1 tõestust). R. M. Solovay tõestas aastal 1970, et (populaarselt väljendudes) *ilma valikuaksioomi kasutamata pole Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu võimalik tõestada* (selle väite täpne matemaatiline formuleering nõuaks süvenemist aksiomaatilise hulgateooria tehnilistesse nüanssidesse; seepärast me jätame ta siinkohal ära toomata).

**Märkus 5.10.** Lebesgue'i mõõtu saab jätkata nihke suhtes invariantseks mõõduks teatavale ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade $\sigma$-algebrale $\mathfrak{A} \supsetneqq \mathcal{L}$. (Teoreemist 1.1 järeldub siiski, et see $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.)

**Märkus 5.11.** Lebesgue'i mõõtu saab jätkata ruumi $\mathbb{R}$ kõigi alamhulkade kogumil määratud nihke suhtes invariantseks aditiivseks hulgafunktsiooniks. Teisisõnu, leidub nihke suhtes invariantne aditiivne hulgafunktsioon $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ nii, et $\mu|_{\mathcal{L}} = m$.

# II peatükk.
# Lebesgue'i integraal

Kõikjal selles ja järgnevates peatükkides EELDAME VAIKIMISI, ET MÕÕTUVA RUUMI (erijuhul mõõduga ruumi) ALUSEKS OLEV HULK ON MITTETÜHI. Selline kokkulepe võimaldab meil jätta vaatluse alt välja tühja funktsiooni (mille määramispiirkond on tühi hulk ning mis on ühtlasi ainus tühjal hulgal määratud funktsioon), aidates seega oluliselt säästa meie kõigi vaimset tervist.

## § 1. Mõõtuvad funktsioonid

### 1.1. Mõõtuva funktsiooni mõiste. Lihtsamad mõõtuvuskriteeriumid

**Definitsioon 1.1.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ ja $(Y, \mathfrak{B})$ mõõtuvad ruumid.

Öeldakse, et funktsioon $f\colon X \to Y$ on $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-*mõõtuv,* kui

$$f^{-1}[B] \in \mathfrak{A} \quad \text{iga hulga } B \in \mathfrak{B} \text{ korral.}$$

(Meenutame, et $f^{-1}[B] = \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}$.)

Kui $\sigma$-algebrate $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-mõõtuvaid funktsioone ka lihtsalt *mõõtuvateks* funktsioonideks.

**Ülesanne 1.1.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{B})$ ja $(Z, \mathfrak{C})$ mõõtuvad ruumid. Tõestada, et kui funktsioon $f\colon X \to Y$ on $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-mõõtuv ning funktsioon $g\colon Y \to Z$ on $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$-mõõtuv, siis funktsioonide $f$ ja $g$ kompositsioon $gf\colon X \to Z$ on $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$-mõõtuv.

Kontrollimaks, kas etteantud funktsioon $f\colon X \to Y$ on mõõtuv, tuleb definitsiooni kohaselt testida, kas iga hulga $B \in \mathfrak{B}$ originaal funktsiooni $f$ suhtes kuulub $\sigma$-algebrasse $\mathfrak{A}$. Järgmine teoreem näitab, et sellisel testimisel võib piirduda ka väiksema kogumiga kui $\mathfrak{B}$.

**Teoreem 1.1.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ ja $(Y, \mathfrak{B})$ mõõtuvad ruumid ning olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ selline, et $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$ (s.t. $\sigma$-algebra $\mathfrak{B}$ on genereeritud kogumi $\mathcal{E}$ poolt). Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f\colon X \to Y$ on $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-mõõtuv;*

(ii) *$f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$ iga $B \in \mathcal{E}$ korral.*

TÕESTUS. (i)⇒(ii) on ilmne, sest $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$.

(ii)⇒(i). Kehtigu tingimus (ii). Tähistame

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathfrak{B} \colon f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}\}.$$

Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $\mathcal{D}$ on $\sigma$-algebra (vt. ülesannet I.2.11, **[B]**, (a)). Aga nüüd $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ (sest tingimuse (ii) põhjal $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$). □

**Definitsioon 1.2.** Olgu $X$ ja $Y$ topoloogilised ruumid.

Öeldakse, et funktsioon $f \colon X \to Y$ on *Boreli mõttes mõõtuv,* kui ta on $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mõõtuv. (Meenutame, et sümbol $\mathcal{B}_X$ tähistab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat.)

Teoreemist 1.1 järeldub

**Teoreem 1.2.** *Olgu $X$ ja $Y$ topoloogilised ruumid. Iga pidev funktsioon $f \colon X \to Y$ on Boreli mõttes mõõtuv.*

TÕESTUS. Olgu funktsioon $f \colon X \to Y$ pidev. Tähistame

$$\tau_X = \{A \subset X \colon A \text{ on lahtine hulk}\} \quad \text{ja} \quad \tau_Y = \{B \subset Y \colon B \text{ on lahtine hulk}\}.$$

Kuna funktsioon on pidev parajasti siis, kui kõigi lahtiste hulkade originaalid tema suhtes on lahtised, siis

$$f^{-1}[B] \in \tau_X \subset \mathcal{B}_X \quad \text{iga } B \in \tau_Y \text{ korral.}$$

Et aga Boreli $\sigma$-algebra definitsiooni kohaselt $\mathcal{B}_Y = \sigma(\tau_Y)$ (s.t. ruumi $Y$ Boreli $\sigma$-algebra on genereeritud ruumi $Y$ kõigi lahtiste alamhulkade kogumi $\tau_Y$ poolt), siis järeldub siit teoreemi 1.1 põhjal, et funktsioon $f$ on Boreli mõttes mõõtuv. □

**Definitsioon 1.3.** Öeldakse, et funktsioon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Boreli mõttes mõõtuv,* kui ta on $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-mõõtuv.

Öeldakse, et funktsioon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lebesgue'i mõttes mõõtuv,* kui ta on $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-mõõtuv. (Meenutame, et sümbol $\mathcal{L}$ tähistab ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i $\sigma$-algebrat.)

**Ülesanne 1.2.** Tõestada, et kui funktsioon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv, siis on ta ka Lebesgue'i mõttes mõõtuv.

Kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum ja $Y$ on topoloogiline ruum, siis öeldakse, et funktsioon $f \colon X \to Y$ on *Boreli mõttes $\mathfrak{A}$-mõõtuv,* kui ta on $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}_Y)$-mõõtuv.

Kui $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse Boreli mõttes $\mathfrak{A}$-mõõtuvaid funktsioone ka lihtsalt *Boreli mõttes mõõtuvateks* funktsioonideks või *mõõtuvateks* funktsioonideks.

**Järeldus 1.3.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon X \to \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f$ on mõõtuv;*

(ii) $\{x \in X\colon\ f(x) < a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral;*

(iii) $\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral;*

(iv) $\{x \in X\colon\ f(x) > a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral;*

(v) $\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral.*

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et mis tahes $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}
\big\{x \in X\colon\ f(x) < a\big\} &= f^{-1}\big[(-\infty, a)\big],\\
\big\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant a\big\} &= f^{-1}\big[(-\infty, a]\big],\\
\big\{x \in X\colon\ f(x) > a\big\} &= f^{-1}\big[(a, \infty)\big],\\
\big\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant a\big\} &= f^{-1}\big[[a, \infty)\big].
\end{aligned}$$

Igaüks kogumitest

$$\big\{(-\infty, a)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}, \quad \big\{(-\infty, a]\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}, \quad \big\{(a, \infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}, \quad \big\{[a, \infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}$$

genereerib ruumi $\mathbb{R}$ Boreli $\sigma$-algebra (vt. teoreemi I.2.4). Seega järeldub väidete (i)–(v) samaväärsus vahetult teoreemist 1.1. □

## 1.2. Laiendatud reaalarvuliste väärtustega funktsioonid

Edasises hakkame vaatlema laiendatud reaalarvuliste väärtustega — $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega — funktsioone, s.t. funktsioone, mis lisaks reaalarvulistele väärtustele võivad omandada ka väärtusi $-\infty$ ja $\infty$. (Meenutame, et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.)

Teatavasti on $\overline{\mathbb{R}}$ meetriline ruum kauguse

$$\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

suhtes. Märgime, et kaugusega $\rho$ ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ alamruumis $\mathbb{R}$ defineeritud alamruumi topoloogia $\tau_{(\mathbb{R},\rho)}$ ja ruumi $\mathbb{R}$ loomulik (s.t. eukleidilise kaugusega $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, määratud) topoloogia $\tau_{\mathbb{R}}$ langevad ühte, s.t. ruumis $\mathbb{R}$ on kauguste $\rho$ ja $d$ suhtes ühed ja samad lahtised hulgad.

**Ülesanne 1.3.** Veenduda, et $\tau_{\mathbb{R}} = \tau_{(\mathbb{R},\rho)}$.

Näpunäide. Veenduda, et formaalne ühikoperaator $j\colon\ (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho)$, $jx = x$, $x \in \mathbb{R}$, ning tema pöördoperaator on pidevad ning kasutada fakti, et lahtise hulga originaal pideva kujutuse suhtes on lahtine.

Edasises tähistame sümbolitega $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ ja $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ vastavalt meetrilise ruumi $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ lahtiste hulkade kogumit ja Boreli $\sigma$-algebrat. Osutub, et

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})\colon\ E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} = \big\{B \cup I\colon\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ I \in \mathcal{P}\big(\{-\infty\}, \{\infty\}\big)\big\}. \quad (1.1)$$

**Ülesanne 1.4.** Tõestada võrdused (1.1).

NÄPUNÄIDE. Ülesannete 1.3 ja I.2.13 põhjal

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{E \cap \mathbb{R} \colon E \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\}. \tag{1.2}$$

Kuna $\{-\infty\}$ ja $\{\infty\}$ kui meetrilise ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ ühepunktilised hulgad on kinnised, siis $\{-\infty\}, \{\infty\} \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ning seega ka $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \big(\{-\infty\} \cup \{\infty\}\big) \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Seega järeldub võrdusest (1.2), et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Saab näidata, et igaüks hulga $\overline{\mathbb{R}}$ alamhulkade kogumitest

$$\mathcal{E}_1 := \big\{[-\infty, a) \colon a \in \mathbb{R}\big\}, \qquad \mathcal{E}_2 := \big\{[-\infty, a] \colon a \in \mathbb{R}\big\},$$
$$\mathcal{E}_3 := \big\{(a, \infty] \colon a \in \mathbb{R}\big\}, \qquad \mathcal{E}_4 := \big\{[a, \infty] \colon a \in \mathbb{R}\big\}$$

genereerib ruumi $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ Boreli $\sigma$-algebra.

**Ülesanne 1.5.** Tõestada, et $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4)$.

NÄPUNÄIDE. Näidata, et

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \overset{(\bullet)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \overset{(\bullet\bullet)}{\subset} \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}.$$

Sisalduvuse $(\bullet)$ tõestuseks piisab näidata, et $\tau_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ (põhjendada!), milleks omakorda, arvestades, et $U \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ korral $U \cap \mathbb{R} \in \tau_{\mathbb{R}}$, piisab näidata, et $\tau_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ (selleks kasutada järeldust I.2.3) ning $\{-\infty\}, \{\infty\} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. Sisalduvuse $(\bullet\bullet)$ tõestuseks kasutada võrdusi (1.1).

Seega järeldub teoreemist 1.1 (analoogiliselt järelduse 1.3 tõestusega)

**Järeldus 1.4.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f$ on mõõtuv;*

(ii) $\{x \in X \colon f(x) < a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral;*

(iii) $\{x \in X \colon f(x) \leqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral;*

(iv) $\{x \in X \colon f(x) > a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral;*

(v) $\{x \in X \colon f(x) \geqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral.*

Järeldusi 1.3 ja 1.4 võrreldes näeme, et *funktsioon $f \colon X \to \mathbb{R}$ on mõõtuv parajasti siis, kui ta on mõõtuv tõlgendatuna funktsioonina $X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

**Ülesanne 1.6.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuv funktsioon. Tõestada, et:

(a) $\{x \in X \colon a \leqslant f(x) < b\} \in \mathfrak{A}$ mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(b) $\{x \in X \colon a < f(x) < b\} \in \mathfrak{A}$ mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(c) $\{x \in X \colon a < f(x) \leqslant b\} \in \mathfrak{A}$ mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(d) $\{x \in X \colon a \leqslant f(x) \leqslant b\} \in \mathfrak{A}$ mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(e) $\{x \in X \colon f(x) = a\} \in \mathfrak{A}$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral;

(f) $\{x \in X \colon f(x) = \infty\} \in \mathfrak{A}$;

(g) $\{x \in X \colon f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{A}$.

**Ülesanne 1.7.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tõestada, et järgmised tingimused on samaväärsed:

(i) funktsioon $f$ on mõõtuv;

(ii) $\{x \in X\colon\ f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $\alpha \in \mathbb{Q}$ korral;

(iii) $\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $\alpha \in \mathbb{Q}$ korral;

(iv) $\{x \in X\colon\ f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $\alpha \in \mathbb{Q}$ korral;

(v) $\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $a \in \mathbb{Q}$ korral.

Aritmeetilised tehted funktsioonidega $f, g\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ defineeritakse punktiviisi. Täpsemalt, funktsioonide $f$ ja $g$ summa $f+g$, vahe $f-g$, korrutis $fg$ ja jagatis $f/g$ on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), \quad x \in X,\\ (fg)(x) &= f(x)\, g(x), \quad x \in X,\\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Märgime, et funktsioonid $f+g$, $f-g$ ja $f/g$ ei tarvitse olla määratud kogu ruumis $X$. (Näiteks summa $f+g$ ei ole määratud parajasti nendes punktides $x \in X$, mille korral $f(x) = \infty$ ja $g(x) = -\infty$ või $f(x) = -\infty$ ja $g(x) = \infty$.)

## 1.3. Tehted mõõtuvate funktsioonidega

Järgnevast teoreemist nähtub, et mõõtuvate $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioonide hulk on aritmeetiliste tehete suhtes kinnine.

**Teoreem 1.5.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f, g\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuvad funktsioonid. Järgmised funktsioonid on mõõtuvad:*

(a) $cf \quad (c \in \mathbb{R})$;

(b) $f + g$ *(eeldusel, et ta on määratud);*

(c) $f - g$ *(eeldusel, et ta on määratud);*

(d) $f^2$ *(siin $f^2 = ff$);*

(e) $fg$;

(f) $1/g$ *(eeldusel, et ta on määratud);*

(g) $f/g$ *(eeldusel, et ta on määratud).*

Teoreemi 1.5 väite (e) tõestuse kirjapaneku lihtsustamise huvides on siinkohal otstarbekas sisse tuua hulga karakteristliku funktsiooni mõiste.

**Definitsioon 1.4.** Olgu $X$ mingi mittetühi hulk ning olgu $E \subset X$.
Funktsiooni $\chi_E\colon\ X \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in E; \\ 0, & \text{kui } x \notin E, \end{cases} \qquad x \in X,$$

nimetatakse *hulga $E$ karakteristlikuks funktsiooniks* ehk (eriti tõenäosusteoorias) *hulga $E$ indikaatorfunktsiooniks.*

**Ülesanne 1.8.** Tõestada, et kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum ja $E \subset X$, siis funktsioon $\chi_E$ on mõõtuv parajasti siis, kui $E \in \mathfrak{A}$.

**Ülesanne 1.9.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum, olgu $A \in \mathfrak{A}$ ning olgu $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon. Tõestada, et siis ka funktsioon $f\chi_A$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv.

Teoreemi 1.5 tõestus. (a). Olgu $c \in \mathbb{R}$. Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Järelduse 1.4 põhjal piisab funktsiooni $cf$ mõõtuvuseks näidata, et

$$A := \big\{x \in X\colon\ cf(x) < a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Kuna

$$A = \begin{cases} \big\{x \in X\colon\ f(x) < a/c\big\}, & \text{kui } c > 0; \\ \big\{x \in X\colon\ f(x) > a/c\big\}, & \text{kui } c < 0; \\ X, & \text{kui } c = 0 \text{ ja } a > 0; \\ \emptyset, & \text{kui } c = 0 \text{ ja } a \leqslant 0, \end{cases}$$

siis funktsiooni $f$ mõõtuvuse tõttu järelduse 1.4 põhjal igal juhul $A \in \mathfrak{A}$.

(b). Olgu funktsioon $f + g$ määratud, s.t.

$$\big\{x \in X\colon\ \ f(x) = \infty \text{ ja } g(x) = -\infty \ \text{ või } \ f(x) = -\infty \text{ ja } g(x) = \infty\big\} = \emptyset.$$

Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Tõestamaks, et funktsioon $f$ on mõõtuv, piisab näidata, et

$$A := \big\{x \in X\colon\ f(x) + g(x) < a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Selleks aga piisab näidata, et

$$A = B := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big\{x \in X\colon\ f(x) < q\big\} \cap \big\{x \in X\colon\ g(x) < a - q\big\}$$

(sest funktsioonide $f$ ja $g$ mõõtuvuse tõttu $B \in \mathfrak{A}$).

Sisalduvus $B \subset A$ on ilmne, sest kui $x \in B$, siis mingi $q \in \mathbb{Q}$ korral $f(x) < q$ ja $g(x) < a - q$, seega $f(x) + g(x) < q + a - q = a$, s.t. $x \in A$.

Jääb veel veenduda, et $A \subset B$. Fikseerime vabalt $x \in A$. Näitame, et siis ka $x \in B$, s.t. leidub $q \in \mathbb{Q}$ nii, et

$$f(x) < q \quad \text{ja} \quad g(x) < a - q.$$

Kuna $f(x) + g(x) < a$, siis $f(x) < a - g(x)$, järelikult leidub arv $q \in \mathbb{Q}$ selliselt, et $f(x) < q < a - g(x)$. Kuna aga sel juhul $g(x) < a - q$, siis $x \in B$ ning seega $A \subset B$.

(c). Olgu funktsioon $f - g$ määratud, s.t.

$$\big\{x \in X\colon\ \ f(x) = g(x) = \infty \text{ või } f(x) = g(x) = -\infty\big\} = \emptyset.$$

Siis $f - g = f + (-1)g$; seega järeldub funktsiooni $f - g$ mõõtuvus vahetult väidetest (a) ja (b).

(d). Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Tõestamaks, et funktsioon $f^2$ on mõõtuv, piisab näidata, et

$$A := \big\{x \in X\colon\ f(x)^2 < a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Kuna

$$A = \begin{cases} \emptyset, & \text{kui } a \leqslant 0; \\ \Big\{x \in X\colon\ -\sqrt{a} < f(x) < \sqrt{a}\Big\}, & \text{kui } a > 0, \end{cases}$$

siis järelduse 1.4 põhjal igal juhul $A \in \mathfrak{A}$.

(e).

Märgime esmalt, et kui funktsioonid $f$ ja $g$ oleksid lõplikud, siis

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right) \tag{1.3}$$

ning funktsiooni $fg$ mõõtuvus järelduks vahetult väidetest (a), (b), (c) ja (d). Kui aga $f$ ja/või $g$ ei ole lõplik, siis see mõttekäik läbi ei lähe, sest sel juhul pole võrduse (1.3) parem pool määratud. Seepärast tuleb väite (e) tõestuseks üldjuhul seda mõttekäiku veidi modifitseerida.

Tähistame

$$\begin{aligned} A &= \big\{x \in X\colon\ f(x), g(x) \in (-\infty, \infty)\big\}, \\ B &= \big\{x \in X\colon\ f(x)\, g(x) = \infty\big\}, \\ C &= \big\{x \in X\colon\ f(x)\, g(x) = -\infty\big\}, \\ D &= \Big\{x \in X\colon\quad f(x) = \pm\infty \text{ ja } g(x) = 0 \ \text{ või } \ g(x) = \pm\infty \text{ ja } f(x) = 0\Big\}. \end{aligned}$$

**Ülesanne 1.10.** Tõestada, et $A, B, C, D, E \in \mathfrak{A}$.

Paneme tähele, et hulgad $A, B, C, D$ on paarikaupa lõikumatud, $A \cup B \cup C \cup D = X$ ning

$$f(x)\, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(\big(f(x) + g(x)\big)^2 - f(x)^2 - g(x)^2\Big), & \text{kui } x \in A; \\ \infty, & \text{kui } x \in B; \\ -\infty, & \text{kui } x \in C; \\ 0, & \text{kui } x \in D, \end{cases}$$

s.t.

$$f\,g = \frac{1}{2}\left((f\,\chi_A + g\,\chi_A)^2 - f^2\,\chi_A - g^2\,\chi_A\right) + \infty\,\chi_B + (-\infty)\,\chi_C.$$

Väidete (a)–(d) ja ülesannete 1.8 ja 1.9 põhjal on funktsioon $f\,g$ mõõtuv.

(f). Olgu funktsioon $1/g$ määratud, s.t. $g(x) \neq 0$, $x \in X$.

**Ülesanne 1.11.** Tõestada, et funktsioon $1/g$ on mõõtuv.

(g). Olgu funktsioon $f/g$ määratud, s.t.

$$\big\{x \in X\colon\ g(x) = 0 \text{ või } |f(x)| = |g(x)| = \infty\big\} = \emptyset.$$

Siis $f/g = f \cdot 1/g$, seega järeldub funktsiooni $f/g$ mõõtuvus vahetult väidetest (f) ja (e). $\square$

**Ülesanne 1.12.** Olgu $(X,\mathfrak{A})$ mõõtuv ruum, olgu $f,g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ mõõtuvad funktsioonid ning olgu $c\in\mathbb{R}$. Tõestada, et seostega

$$h_1(x)=\begin{cases} f(x)+g(x), & \text{kui summa } f(x)+g(x) \text{ on määratud:}\\ c, & \text{kui summa } f(x)+g(x) \text{ pole määratud,}\end{cases}$$

ja

$$h_2(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \text{kui jagatis } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ on määratud;}\\ c, & \text{kui jagatis } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pole määratud,}\end{cases}$$

defineeritud funktsioonid $h_1,h_2\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ on mõõtuvad.

Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $f,g,f_n\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$, $n=1,2,\ldots$. Defineerime funktsioonid

$$\begin{aligned}
\max\{f,g\}\colon X\ni x &\longmapsto \max\{f(x),g(x)\}\in\overline{\mathbb{R}},\\
\min\{f,g\}\colon X\ni x &\longmapsto \min\{f(x),g(x)\}\in\overline{\mathbb{R}},\\
\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon X\ni x &\longmapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\in\overline{\mathbb{R}},\\
\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon X\ni x &\longmapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\in\overline{\mathbb{R}},\\
\limsup_{n\to\infty} f_n\colon X\ni x &\longmapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\in\overline{\mathbb{R}},\\
\liminf_{n\to\infty} f_n\colon X\ni x &\longmapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\in\overline{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

Kui iga $x\in X$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, siis saame defineerida ka funktsiooni

$$\lim_{n\to\infty} f_n\colon X\ni x\longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Siinkohal on otstarbekas meenutada, et ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ elementide jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ülemine piirväärtus* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ja *alumine piirväärtus* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ defineeritakse vastavalt võrdustega

$$\limsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} a_k \quad\text{ja}\quad \liminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} a_k.$$

Juhime tähelepanu, et need mõlemad piirväärtused eksisteerivad, sest jada $(\sup_{k\geqslant n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ on mittekasvav ning jada $(\inf_{k\geqslant n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ on mittekahanev; niisiis

$$\limsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} a_k=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n} a_k \quad\text{ja}\quad \liminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} a_k=\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geqslant n} a_k.$$

Meenutame, et ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ elementide jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ osajadade piirväärtusi nimetatakse selle jada osapiirväärtusteks. Saab näidata, et

(1) jada $(a_n)$ ülemine piirväärtus $\limsup_{n\to\infty} a_n$ on selle jada suurim osapiirväärtus;

(2) jada $(a_n)$ alumine piirväärtus $\liminf_{n\to\infty} a_n$ on selle jada vähim osapiirväärtus.

**Ülesanne 1.13.** Tõestada väited (1) ja (2).

Väidetest (1) ja (2) järeldub, et *ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ elementide jadal $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eksisteerib piirväärtus parajasti siis, kui tema ülemine ja alumine piirväärtus on võrdsed, kusjuures sellisel juhul*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\limsup_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

**Ülesanne 1.14.** Veenduda selles.

Märgime veel, et ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ elementide jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ülemist piirväärtust ja alumist piirväärtust tähistatakse ka vastavalt sümbolitega

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad\text{ja}\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

**Teoreem 1.6.** *Olgu* $(X, \mathfrak{A})$ *mõõtuv ruum ning olgu* $f, g, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *mõõtuvad funktsioonid. Siis ka funktsioonid*

$$\max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

*on mõõtuvad. Kui piirväärtus* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *eksisteerib, siis ta on mõõtuv funktsioon.*

TÕESTUS. (a) Tõestamaks, et funktsioon $\max\{f, g\}$ on mõõtuv, peame näitama, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral

$$A := \big\{x \in X \colon \ \max\{f, g\}(x) \leqslant a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Kuna

$$A = \big\{x \in X \colon \ \max\{f(x), g(x)\} \leqslant a\big\} = \{x \in X \colon \ f(x) \leqslant a\} \cap \{x \in X \colon \ g(x) \leqslant a\},$$

siis funktsioonide $f$ ja $g$ mõõtuvuse tõttu $A \in \mathfrak{A}$.

(b) Veendumaks, et funktsioon $\min\{f, g\}$ on mõõtuv, märgime, et

$$\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}.$$

Teoreemi 1.5, (a), põhjal on funktsioonid $-f$ ja $-g$ mõõtuvad, seega tõestuse osas (a) tõestatu põhjal ka funktsioon $\max\{-f, -g\}$ on mõõtuv ning järelikult teoreemi 1.5, (a), põhjal ka funktsioon $-\max\{-f, -g\}$ on mõõtuv, s.t. funktsioon $\min\{f, g\}$ on mõõtuv.

(c) Tõestamaks, et funktsioon $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ on mõõtuv, peame näitama, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral

$$A := \{x \in X \colon \ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leqslant a\} \in \mathfrak{A}.$$

Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Kuna

$$A = \{x \in X \colon \ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \colon \ f_n(x) \leqslant a\},$$

siis funktsioonide $f_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ mõõtuvuse tõttu $A \in \mathfrak{A}$.

(d)

**Ülesanne 1.15.** Tõestada, et funktsioon $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ on mõõtuv.

(e) Veendumaks, et funktsioon $\limsup_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv, meenutame, et

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k.$$

Kuna funktsioonid $f_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ on mõõtuvad, siis tõestuse osas (c) tõestatu põhjal ka funktsioonid $\sup_{k\geqslant n} f_k$, $n = 1, 2, \ldots,$ on mõõtuvad ning järelikult tõestuse osas (d) tõestatu põhjal ka funktsioon $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k$ on mõõtuv, s.t. funktsioon $\limsup_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv.

(f)

**Ülesanne 1.16.** Tõestada, et funktsioon $\liminf_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv.

(g) Kui eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} f_n$, siis

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

ning funktsiooni $\lim_{n\to\infty} f_n$ mõõtuvus järeldub funktsiooni $\limsup_{n\to\infty} f_n$ mõõtuvusest (või ka funktsiooni $\liminf_{n\to\infty} f_n$ mõõtuvusest). □

## 1.4. Lihtsad mõõtuvad funktsioonid

Meenutame karakteristliku funktsiooni definitsiooni.

**Definitsioon 1.5.** Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $E \subset X$.

Funktsiooni $\chi_E \colon X \to \mathbb{R}$, kus

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in E; \\ 0, & \text{kui } x \notin E, \end{cases} \qquad x \in X,$$

nimetatakse *hulga $E$ karakteristlikuks funktsiooniks* ehk (eriti tõenäosusteoorias) *hulga $E$ indikaatorfunktsiooniks.*

**Ülesanne 1.17.** Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $A, B, A_j \subset X$, $j = 1, 2, \dots$. Tõestada, et

(a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$;

(b) kui $A \cap B = \emptyset$, siis $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

(c) kui $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, siis $\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} = \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}$.

Ülesandes 1.8 veendusime, et kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum, siis *hulga $E \in \mathcal{P}(X)$ karakteristlik funktsioon $\chi_E$ on mõõtuv parajasti siis, kui hulk $E$ on mõõtuv (s.t. $E \in \mathfrak{A}$).*

**Definitsioon 1.6.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum.

- Öeldakse, et funktsioon $\phi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on *lihtne mõõtuv funktsioon,* kui ta on esitatav kujul

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}, \qquad \text{kus } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ ja } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}. \tag{1.4}$$

Märgime, et teoreemi 1.5 põhjal on lihtne mõõtuv funktsioon tõepoolest mõõtuv. Juhime tähelepanu, et *vastavalt definitsioonile ei saa lihtne mõõtuv funktsioon omandada väärtusi $\infty$ ega $-\infty$.*

- Esitust (1.4) nimetatakse funktsiooni $\phi$ *kanooniliseks esituseks,* kui $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$.

On ilmne, et lihtsa mõõtuva funktsiooni kanooniline esitus ei ole üheselt määratud.

- Esitust (1.4) nimetatakse funksiooni $\phi$ *standardesituseks,* kui
  (1) $A_1, \dots, A_n \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, ning $\bigcup_{j=1}^n A_j = X$;
  (2) $\alpha_i \neq \alpha_j$, kui $i \neq j$.

Märgime, et kui (1.4) on funktsiooni $\phi$ standardesitus, siis funktsiooni $\phi$ väärtuste hulk on $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ning iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $A_j = \{x \in X\colon\ \phi(x) = \alpha_j\}$.

Edasises hakkame kasutama järgmisi tähistusi. Olgu $X$ mingi hulk ning olgu $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \dots$. Me kirjutame

- $f \geqslant g$ (või $g \leqslant f$), kui $f(x) \geqslant g(x)$ iga $x \in X$ korral; sealhulgas, kui $f(x) \geqslant 0$ iga $x \in X$ korral, siis kirjutame $f \geqslant 0$;
- $f_n \to f$, kui $f_n(x) \to f(x)$ iga $x \in X$ korral;
- $f_n \nearrow f$, kui $f_n(x) \nearrow f(x)$ iga $x \in X$ korral, s.t. $f_n \to f$, kusjuures $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \cdots$ iga $x \in X$ korral.

**Teoreem 1.7.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, mõõtuv funktsioon. Siis leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \dots$, nii, et*

(1) *$\phi_n \geqslant 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral;*

(2) *$\phi_n \nearrow f$;*

(3) *kui funktsioon $f$ on tõkestatud hulgas $B \subset X$, siis $\phi_n \to f$ ühtlaselt hulgas $B$.*

Tõestus. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame

$$E_k^n = \left\{x \in X\colon\ \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^{2n} - 2, 2^{2n} - 1,$$

ja $E_{2^{2n}}^n = \left\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant 2^n\right\}$ ning defineerime

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \chi_{E_k^n}.$$

Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral on $\phi_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ lihtne mõõtuv funktsioon, kusjuures $\phi_n \geqslant 0$.

Selgitame veel funktsioonide $\phi_n$, $n = 1, 2, \dots$, konstrueerimist. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Poollõik $[0, 2^n)$ jaotatakse $2^{2n}$ võrdse pikkusega poollõiguks, igaüks pikkusega $\frac{1}{2^n}$:

$$\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \dots, \left[\frac{2^{2n}-2}{2^n}, \frac{2^{2n}-1}{2^n}\right), \left[\frac{2^{2n}-1}{2^n}, 2^n\right).$$

Olgu $x \in X$. Kui $f(x) < 2^n$, siis $f(x)$ kuulub ühte nendest poollõikudest, ehk, täpsemalt, mingi $k \in \left\{0, 1, 2, \dots, 2^{2n} - 2, 2^{2n} - 1\right\}$ korral $\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}$. Sellisel juhul defineeritakse $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Kui aga $f(x) \geqslant 2^n$, siis defineeritakse $\phi_n(x) = 2^n$.

On ilmne, et kui $f(x) < 2^n$, siis $|f(x) - \phi_n(x)| = f(x) - \phi_n(x) < \frac{1}{2^n}$ (vt. joonis ?.?, kus $n = 1$).

**Ülesanne 1.18.** Tõestada väited (2) ja (3).

□

**Definitsioon 1.7.** Olgu $X \neq \emptyset$ ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Defineerime funktsioonid

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{ja} \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

ehk, teisisõnu,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \geqslant 0; \\ 0, & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X,$$

ja

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} 0, & \text{kui } f(x) \geqslant 0; \\ -f(x), & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X.$$

Funktsioone $f^+$ ja $f^-$ nimetatakse vastavalt *funktsiooni $f$ positiivseks ja negatiivseks osaks.*

On selge, et

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

kus *funktsiooni $f$ absoluutväärtus* (ehk *moodul*) $|f|\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on defineeritud seosega

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad x \in X.$$

**Ülesanne 1.19.** Tõestada, et $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

On ilmne, et kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõduga ruum ja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, siis

$$f \text{ on mõõtuv} \iff f^+ \text{ ja } f^- \text{ on mõõtuvad} \implies |f| \text{ on mõõtuv.}$$

**Ülesanne 1.20.** Tõestada, et

(a) $f$ on mõõtuv $\iff$ $f^+$ ja $f^-$ on mõõtuvad $\implies$ $|f|$ on mõõtuv;

(b) üldjuhul ei järeldu absoluutväärtuse $|f|$ mõõtuvusest funktsiooni $f$ mõõtuvus.

Järgmisest teoreemist nähtub, et *funktsioon on mõõtuv parajasti siis, kui ta on mingi lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada piirväärtus.*

**Teoreem 1.8.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum. Funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mõõtuv parajasti siis, kui leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\phi_n \to f$.*

TÕESTUS. *Piisavus* on ilmne, sest teoreemi 1.6 põhjal on mõõtuvate funktsioonide jada piirväärtus mõõtuv funktsioon.

*Tarvilikkus.* Olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuv funktsioon. Siis ka funktsioonid $f^+$ ja $f^-$ on mõõtuvad; järelikult teoreemi 1.7 põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi'_n, \phi''_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, selliselt, et $\phi'_n \nearrow f^+$ ja $\psi''_n \nearrow f^-$. Vahed $\phi_n = \phi'_n - \phi''_n$, $n = 1, 2, \ldots$, on lihtsad mõõtuvad funktsioonid; seejuures $\phi_n = \phi'_n - \phi''_n \to f^+ - f^- = f$. □

**Ülesanne 1.21.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum. Tõestada, et $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on tõkestatud mõõtuv funktsioon parajasti siis, kui leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\phi_n \to f$ ühtlaselt.

## 1.5. Mõiste "peaaegu kõikjal"

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $V(x)$ mingi väide ruumi $X$ punktide $x$ kohta.

**Definitsioon 1.8.** Öeldakse, et väide $V(x)$ kehtib *$\mu$-peaaegu kõikjal (ruumis $X$)* ehk, lühidalt, *$\mu$-p.k. (ruumis $X$)*, kui hulk

$$\{x \in X\colon \text{ väide } V(x) \text{ ei kehti}\}$$

s.t. nende elementide $x \in X$ hulk, mille korral väide $V(x)$ ei kehti, on hüljatav. Sel juhul öeldakse ka, et väide $V(x)$ kehtib *$\mu$-peaaegu kõikide $x \in X$ korral* ehk, lühidalt, *$\mu$-p.k. $x \in X$ korral.* Kui seejuures mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge, siis öeldakse "$\mu$-peaaegu kõikjal" (ning "$\mu$-peaaegu kõikide") ja "$\mu$-p.k." asemel lihtsalt vastavalt "peaaegu kõikjal" (ning "peaaegu kõikide") ja "p.k.".

Olgu $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Vastavalt mõiste "peaaegu kõikjal" definitsioonile öeldakse, et

- $f(x) = g(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}$ on hüljatav;
- $f(x) \leqslant g(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X\colon\ f(x) > g(x)\}$ on hüljatav;
- $f_n(x) \to f(x)$ p.k. ehk $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X\colon\ f_n(x) \not\to f(x)\}$ on hüljatav
- $f_n(x) \nearrow f(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X\colon\ f_n(x) \not\nearrow f(x)\}$ on hüljatav.

Me kirjutame

- $f = g$ p.k., kui $f(x) = g(x)$ p.k.;
- $f \leqslant g$ p.k., kui $f(x) \leqslant g(x)$ p.k.;
- $f_n \to f$ p.k., kui $f_n(x) \to f(x)$ p.k.;
- $f_n \nearrow f$ p.k., kui $f_n(x) \nearrow f(x)$ p.k.

**Ülesanne 1.22.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) väide $V(x)$ kehtib p.k. ruumis $X$;

(ii) leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et väide $V(x)$ kehtib iga $x \in A$ korral ja $\mu(A^c) = 0$.

**Teoreem 1.9.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Järgmised väited kehtivad parajasti siis, kui ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on täielik.*

(a) *Kui funktsioon $f$ on mõõtuv ja $f = g$ p.k., siis ka funktsioon $g$ on mõõtuv.*

(b) *Kui funktsioonid $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, on mõõtuvad ja $f_n \to g$ p.k., siis ka funktsioon $g$ on mõõtuv.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 1.23.** Tõestada teoreem 1.9.

□

**Teoreem 1.10.** *Olgu* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *mõõduga ruum ning olgu* $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ *tema täield. Kui funktsioon* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *on* $\overline{\mathfrak{A}}$*-mõõtuv, siis leidub* $\mathfrak{A}$*-mõõtuv funktsioon* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *selliselt, et* $f = g$ *p.k. Kui seejuures funktsioon* $f$ *on p.k. lõplik (s.t.* $|f| < \infty$ *p.k.), siis saame funktsiooni* $g$ *valida nii, et* $g\colon X \to \mathbb{R}$ *(s.t.* $g$ *on lõplik, s.t.* $|g| < \infty$*).*

TÕESTUS.

**Ülesanne 1.24.** Tõestada teoreem 1.10.

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi 1.8. Teine võimalus (vist ökonoomsem?) on kasutada ülesannet 1.7.

□

## 1.6. Harjutusülesandeid

**Ülesanne 1.25.** Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, mõõtuv funktsioon. Siis funktsioon $f$ esitub kujul $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, \chi_{E_j}$, kus $\alpha_j \geqslant 0$ ja $E_j \in \mathcal{B}_X$. Seejuures, kui hulk $\{x \in X\colon f(x) > 0\}$ on $\sigma$-lõplik, saab esituse $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, \chi_{E_j}$ leida nii, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E_j) < \infty$.

NÄPUNÄIDE. Kõige lihtsam on vist lähtuda sellest, et (teoreemi 1.7 põhjal) leiduvad mittenegatiivsed lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, selliselt, et $\phi_n \nearrow f$.

**Ülesanne 1.26.** Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk ning olgu $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tõestada, et

(a) $(-f)^+ = f^-$ ja $(-f)^- = f^+$;

(b) kui $\alpha \geqslant 0$, siis $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ ja $(\alpha f)^- = \alpha f^-$;

(c) kui $\alpha \leqslant 0$, siis $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ ja $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$;

(d) kui $A \subset X$, siis $(f\chi_A)^+ = f^+\chi_A$ ja $(f\chi_A)^- = f^-\chi_A$;

(e) $f \geqslant g$ parajasti siis, kui $f^+ \geqslant g^+$ ja $f^- \leqslant g^-$.

**Ülesanne 1.27.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, g, h, f_n, g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Tõestada, et

(a) kui $f = g$ p.k. ja $g = h$ p.k., siis $f = h$ p.k.;

(b) kui $f$ on p.k. lõplik (s.t. $|f| < \infty$ p.k.) ja $g = f$ p.k., siis ka $g$ on p.k. lõplik;

(c) kui $f$ on p.k. lõplik ja $g$ on p.k. lõplik, siis ka $f + g$ on p.k. lõplik;

(d) kui $f_n \to f$ p.k., $g_n \to g$ p.k. ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n = g_n$ p.k., siis $f = g$ p.k.;

(e) kui $f_1 = g_1$ p.k. ja $f_2 = g_2$ p.k., siis $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ p.k.;

(f) $f = g$ p.k. parajasti siis, kui $f^+ = g^+$ p.k. ja $f^- = g^-$ p.k.

# § 2. Integraal mittenegatiivsest funktsioonist

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Edaspidi tähistame mittenegatiivsete $\mathfrak{A}$-mõõtuvate funktsioonide $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ klassi sümboliga $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ või, kui ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ roll on kontekstist selge, siis ka lihtsalt sümboliga $L^+(\mu)$ või $L^+$. Niisiis,

$$L^+ = L^+(\mu) = L^+(X, \mathfrak{A}, \mu) = \big\{f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \,\big|\, f \text{ on } \mathfrak{A}\text{-mõõtuv ja } f \geqslant 0\big\}.$$

Kõikjal edaspidi kogu selle paragrahvi ulatuses on $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning $L^+ = L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

## 2.1. Integraal lihtsast mõõtuvast funktsioonist $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$

**Definitsioon 2.1.** Olgu $\phi \in L^+$ lihtne mõõtuv funktsioon.

*(Lebesgue'i) integraal funktsioonist $\phi$ (üle hulga $X$) (mõõdu $\mu$ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_X \phi(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mu(A_j),$$

kus $\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ on funktsiooni $\phi$ kanooniline esitus.

Selle definitsiooni korrektsuses (s.t. sõltumatuses funktsiooni $\phi$ kanoonilisest esitusest) veendume käsiloleva definitsiooni lõpus.

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_X \phi(x)\, d\mu(x) = \int_X \phi(x)\, \mu(dx) = \int_X \phi\, d\mu = \int_X \phi.$$

Kui $A \in \mathfrak{A}$, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist $\phi$ üle hulga $A$ (mõõdu $\mu$ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_A \phi(x)\, d\mu(x) = \int_X \phi \chi_A.$$

**Ülesanne 2.1.** Tõestada, et $\phi\chi_A$ on lihtne mõõtuv funktsioon.

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_A \phi(x)\, d\mu(x) = \int_A \phi(x)\, \mu(dx) = \int_A \phi\, d\mu = \int_A \phi.$$

Kui ruumi $X$ roll on kontekstist selge, kirjutatakse sümboli $\int_X$ asemel ka lihtsalt $\int$.

Veendume integraali $\int_X \phi(x)\, d\mu(x)$ definitsiooni korrektsuses. Selleks tuleb näidata, et kui $\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \chi_{A_j}$ ja $\phi = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, \chi_{B_i}$ on funktsiooni $\phi$ kanoonilised esitused, siis

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mu(A_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, \mu(B_i).$$

Tähistades $A_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$, $\alpha_0 = 0$, $B_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i$, $\beta_0 = 0$, on eelnev võrdus samaväärne võrdusega

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \, \mu(A_j) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \, \mu(B_i). \tag{2.1}$$

Võrduse (2.1) tõestuseks märgime, et iga $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ korral

$$A_j = A_j \cap X = A_j \cap \bigcup_{i=0}^{m} B_i = \bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i;$$

kuna hulgad $A_j \cap B_0, A_j \cap B_1, \ldots, A_j \cap B_m$ on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\mu(A_j) = \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i\Big) = \sum_{i=0}^{m} \mu(A_j \cap B_i);$$

niisiis

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \, \mu(A_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{m} \mu(A_j \cap B_i) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_j \, \mu(A_j \cap B_i).$$

Analoogiliselt saame, et

$$\sum_{i=0}^{m} \beta_i \, \mu(B_i) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_i \, \mu(B_i \cap A_j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \beta_i \, \mu(A_j \cap B_i).$$

Fikseerides vabalt $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ja $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, jääb võrduse (2.1) tõestuseks seega näidata, et

$$\alpha_j \, \mu(A_j \cap B_i) = \beta_i \, \mu(A_j \cap B_i). \tag{2.2}$$

Selleks paneme tähele, et

- kui leidub $x \in A_j \cap B_i$, siis $\alpha_j = \phi(x) = \beta_i$, seega (2.2) kehtib;
- kui $A_j \cap B_i = \emptyset$, siis $\mu(A_j \cap B_i) = 0$, seega (2.2) kehtib.

**Teoreem 2.1.** *Olgu $\phi, \psi \in L^+$ lihtsad mõõtuvad funktsioonid. Siis*

(a) $\int c\phi = c \int \phi$ *iga $c \geqslant 0$ korral;*

(b) $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$;

(c) *kui $\phi \leqslant \psi$, siis ka $\int \phi \leqslant \int \psi$;*

(d) *hulgafunktsioon $\mu_\phi \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, mis on defineeritud võrdusega*

$$\mu_\phi(A) = \int_A \phi, \quad A \in \mathfrak{A},$$

*on mõõt.*

Tõestus. Olgu

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \quad \text{ja} \quad \psi = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i}$$

vastavalt funktsioonide $\phi$ ja $\psi$ standardesitused.

(a). Olgu $c \geqslant 0$. Siis $c\phi = \sum_{j=1}^{n} c\,\alpha_j\,\chi_{A_j}$ on funktsiooni $c\phi$ kanooniline esitus, seega

$$\int c\phi = \sum_{j=1}^{n} c\,\alpha_j\,\mu(A_j) = c\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\mu(A_j) = c\int \phi.$$

(b) ja (c). Tähistame

$$C_{ij} = A_j \cap B_i, \quad j = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m.$$

Paneme tähele, et $C_{ij} \cap C_{kl} = \emptyset$, kui $i \neq k$ või $j \neq l$, ehk, teisisõnu, hulgad $C_{ij}$ on paarikaupa lõikumatud. Seejuures

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \qquad \text{ja} \qquad B_i = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Nüüd

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \chi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \chi_{C_{ij}}$$

ja, analoogiliselt,

$$\psi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \chi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{C_{ij}}$$

on vastavalt funktsioonide $\phi$ ja $\psi$ kanoonilised esitused; seega

$$\int \phi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(C_{ij}) \quad \text{ja} \quad \int \psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(C_{ij}). \tag{2.3}$$

Väite (b) tõestuseks paneme tähele, et

$$\phi + \psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \chi_{C_{ij}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\alpha_j + \beta_i) \chi_{C_{ij}}$$

on funktsiooni $\phi + \psi$ kanooniline esitus; seega

$$\int (\phi+\psi) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\alpha_j+\beta_i)\,\mu(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(C_{ij}) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(C_{ij}) = \int \phi + \int \psi.$$

Eeldame nüüd, et $\phi \leqslant \psi$. Fikseerides vabalt $j \in \{1, \dots, n\}$ ja $i \in \{1, \dots, m\}$, piisab väite (c) tõestuseks (tänu võrdustele (2.3)) näidata, et

$$\alpha_j\,\mu(C_{ij}) \leqslant \beta_i\,\mu(C_{ij}). \tag{2.4}$$

Selleks märgime, et

- kui leidub $x \in C_{ij}$, siis $\alpha_j = \phi(x) \leqslant \psi(x) = \beta_i$, seega (2.4) kehtib;

- kui $C_{ij} = \emptyset$, siis $\mu(C_{ij}) = 0$, seega (2.4) kehtib.

(d). Kõigepealt paneme tähele, et

$$\mu_\phi(\emptyset) = \int_\emptyset \phi = \int \phi\chi_\emptyset = \int 0 = 0\,\mu(X) = 0.$$

Olgu hulgad $E_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, sellised, et $E_i \cap E_j = \emptyset$, kui $i \neq j$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et

$$\mu_\phi\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu_\phi(E_i)$$

ehk, teisisõnu,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} \phi = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} \phi.$$

Veendume selles:

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} \phi &= \int \phi\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} = \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\right)\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} = \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} \\
&= \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j\cap\bigcup_{i=1}^\infty E_i} = \sum_{j=1}^n \alpha_j\mu\left(A_j \cap \bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_j \cap E_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^\infty \mu(A_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^n \alpha_j\mu(A_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^\infty \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j\cap E_i} \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\chi_{E_i} = \sum_{i=1}^\infty \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\right)\chi_{E_i} = \sum_{i=1}^\infty \int \phi\chi_{E_i} \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} \phi.
\end{aligned}$$

□

**Märkus 2.1.** Teoreemi 2.1 väitest (b) järeldub muuhulgas, et *kui $\phi \in L^+$ on lihtne mõõtuv funktsioon, siis funktsiooni $\phi$ mis tahes esituse*

$$\phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j} \quad (n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0,\ A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A})$$

*korral*

$$\int \phi = \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^n \int \alpha_j\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^n \alpha_j\,\mu(A_j).$$

## 2.2. Integraal funktsioonist $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Toetudes mittenegatiivse lihtsa mõõtuva funktsiooni integraali mõistele, üldistame nüüd integraali mõiste kogu klassile $L^+$.

**Definitsioon 2.2.** Olgu $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

*(Lebesgue'i) integraal funktsioonist $f$ (üle hulga $X$) (mõõdu $\mu$ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \sup\left\{ \int \phi \,\middle|\, \phi \in L^+ \text{ on lihtne mõõtuv funktsioon, } \phi \leqslant f \right\}.$$

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_X f\,d\mu = \int_X f.$$

Märgime, et lihtsa mõõtuva funktsiooni $f \in L^+$ jaoks annab definitsioon 2.2 sama integraali, mis definitsioon 2.1.

Kui $A \in \mathfrak{A}$, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist $f$ üle hulga $A$ (mõõdu $\mu$ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \int_X f\chi_A.$$

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,\mu(dx) = \int_A f\,d\mu = \int_A f.$$

Kui ruumi $X$ roll on kontekstist selge, kirjutatakse sümboli $\int_X$ asemel ka lihtsalt $\int$.

Vahetult definitsioonist järeldub, et

(a) kui $f \in L^+$, siis iga $c \in \mathbb{R}$, $c \geqslant 0$, korral $\int cf = c \int f$;

(b) kui $f, g \in L^+$ on sellised, et $f \leqslant g$, siis ka $\int f \leqslant \int g$.

Integraali omadust (b) nimetatakse *integraali monotoonsuseks.*

**Ülesanne 2.2.** Tõestada väited (a) ja (b).

Olgu $f_n \in L^+$, $n = 1, 2, \ldots$. Märgime, et (isegi siis, kui piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ eksisteerivad) *võrdus $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ ei tarvitse üldjuhul kehtida.*

**Näide 2.1.** Olgu $f_n = \chi_{[n-1,n)} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \in L^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, kusjuures $f_n \to 0$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\int_{\mathbb{R}} f_n = m\big([n-1, n)\big) = 1$, siis

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

**Näide 2.2.** Olgu $f_n := n\chi_{(0,\frac{1}{n})}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \in L^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, kusjuures $f_n \to 0$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\int_{\mathbb{R}} f_n = n\, m\big((0, \frac{1}{n})\big) = n\frac{1}{n} = 1$, siis

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Järgnev teoreem on üks nn. Lebesgue'i koonduvusteoreemidest, mis annavad piisavad tingimused võrduse $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ kehtivuseks.

**Teoreem 2.2** ((Lebesgue'i) monotoonse koonduvuse teoreem e. Beppo Levi teoreem)**.** *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L^+$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \nearrow f$. Siis*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Niisiis, teoreemi 2.2 eeldustel kehtib võrdus $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$.

Teoreemi 2.2 tõestus. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \leqslant f_{n+1}$ ning seega integraali monotoonsuse tõttu ka $\int f_n \leqslant \int f_{n+1}$, siis eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$. Kuna $f_n \nearrow f$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \leqslant f$ ning seega integraali monotoonsuse tõttu $\int f_n \leqslant \int f$; järelikult $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f$.

Teoreemi tõestuseks jääb veenduda, et $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int f$. Selleks piisab näidata, et iga lihtsa mõõtuva funktsiooni $\phi \in L^+$, $\phi \leqslant f$, korral kehtib võrratus $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int \phi$.

Tõepoolest, sel juhul

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \sup\left\{ \int \phi \,\middle|\, \phi \in L^+ \text{ on lihtne mõõtuv funktsioon, } \phi \leqslant f \right\} = \int f.$$

Olgu lihtne mõõtuv funksioon $\phi \in L^+$ selline, et $\phi \leqslant f$. Võrratuse $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int \phi$ kehtivuseks piisab näidata, et iga reaalarvu $\alpha \in (0, 1)$ korral $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int \alpha\phi$.

Tõepoolest, sel juhul

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \lim_{\alpha\to 1-} \int \alpha\phi = \lim_{\alpha\to 1-} \alpha \int \phi = \int \phi.$$

Fikseerime vabalt $\alpha \in (0, 1)$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$X_n := \big\{x \in X\colon\ f_n(x) \geqslant \alpha\phi(x)\big\}.$$

Siis

$$X_n \in \mathfrak{A},\ X_n \subset X_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots, \quad \text{ja} \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n. \tag{2.5}$$

**Ülesanne 2.3.** Tõestada väited (2.5).

Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\int f_n \geqslant \int f_n \chi_{X_n} \geqslant \int \alpha\phi\chi_{X_n} = \int_{X_n} \alpha\phi = \mu_{\alpha\phi}(X_n).$$

Kuna teoreemi 2.1 põhjal on hulgafunktsioon

$$\mu_{\alpha\phi}\colon \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \int_A \alpha\phi \in [0,\infty]$$

mõõt, siis järeldub viimasest võrratusteahelast ja tingimustest (2.5), et

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha\phi}(X_n) = \mu_{\alpha\phi}(X) = \int \alpha\phi.$$

□

**Teoreem 2.3.** *Olgu $f, g \in L^+$. Siis*

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

TÕESTUS. Kuna $f$ ja $g$ on mittenegatiivsed mõõtuvad funktsioonid, siis teoreemi 1.7 põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n, \psi_n \in L^+$, $n = 1, 2, \ldots$, selliselt, et

$$\phi_n \nearrow f \quad \text{ja} \quad \psi_n \nearrow g.$$

Kuna $(\phi_n + \psi_n) \nearrow (f+g)$, siis Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \left( \int \phi_n + \int \psi_n \right) = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \\ &= \int f + \int g,\end{aligned}$$

sest teoreemi 2.1 põhjal $\int (\phi_n + \psi_n) = \int \phi_n + \int \psi_n$. □

**Teoreem 2.4.** *Olgu $f_1, \ldots, f_n \in L^+$ $(n \in \mathbb{N})$. Siis*

$$\int \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} \int f_j.$$

TÕESTUS. Väide järeldub vahetult teoreemist 2.3 induktsiooni teel. □

**Ülesanne 2.4.** Tõestada, et kui $\phi, \psi \in L^+$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ ja $A \in \mathfrak{A}$, siis $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$.

**Teoreem 2.5.** *Olgu $f_j \in L^+$, $j = 1, 2, \ldots$. Siis*

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

**Märkus 2.2.** Ka teoreemile 2.5 (nagu ka teoreemile 2.2) viidatakse kirjanduses tavaliselt kui Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemile ehk Beppo Levi teoreemile.

Teoreemi 2.5 tõestus. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral funktsiooni

$$g_n := \sum_{j=1}^{n} f_j;$$

siis $g_n \in L^+$, kusjuures $g_n \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j$; seega Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi ja teoreemi 2.4 põhjal

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} f_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

□

**Teoreem 2.6.** *Olgu $f \in L^+$ ning olgu $A, B \in \mathfrak{A}$.*

(a) *Kui $\mu(A) = 0$, siis*

$$\int_A f = 0.$$

(b) *Kui $\mu(A \cap B) = 0$, siis*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Tõestus. (a). Olgu $\mu(A) = 0$. Defineerime funktsiooni $g(x) = \infty$, $x \in X$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $\int_A g = 0$, sest kuna $f \leqslant g$, siis integraali monotoonsuse põhjal sel juhul ka $0 \leqslant \int_A f \leqslant \int_A g = 0$, s.t. $\int_A f = 0$.

Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral funktsiooni

$$g_n(x) = n, \quad x \in X.$$

Kuna $g_n \nearrow g$, siis ka $g_n\chi_A \nearrow g\chi_A$; seega Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_A g = \int g\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int g_n\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n.$$

Et aga iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\int_A g_n = \int g_n\chi_A = \int n\chi_A = n\mu(A) = 0,$$

siis ka $\int_A g = 0$.

(b). Olgu $\mu(A \cap B) = 0$. Kõigepealt paneme tähele, et kui $A \cap B = \emptyset$, siis väide kehtib, sest sel juhul

$$\int_{A\cup B} f = \int f\chi_{A\cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Väite (b) tõestuseks üldjuhul märgime, et väite (a) põhjal $\int_{A\cap B} f = 0$; seega

$$\int_{A\cup B} f \overset{(1)}{=} \int_A f + \int_{B\setminus A} f = \int_A f + \int_{B\setminus A} f + \int_{A\cap B} f \overset{(2)}{=} \int_A f + \int_B f.$$

Siin

- võrdus (1) kehtib, sest $A\cap(B\setminus A)=\emptyset$ ja $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$;
- võrdus (2) kehtib, sest $(B\setminus A)\cap(A\cap B)=\emptyset$ ja $(B\setminus A)\cup(A\cap B)=B$.

□

**Teoreem 2.7.** *Olgu $f, g \in L^+$ sellised, et $f = g$ p.k. Siis*

$$\int f = \int g.$$

TÕESTUS. Kuna $f = g$ p.k., siis leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et

$$f(x) = g(x) \quad \text{iga } x \in A \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \mu(A^c) = 0.$$

Arvestades, et $f\chi_A = g\chi_A$ ning teoreemi 2.6 põhjal $\int_{A^c} f = \int_{A^c} g = 0$, saame, et

$$\begin{aligned}\int f &= \int_A f + \int_{A^c} f = \int_A f = \int f\chi_A \\ &= \int g\chi_A = \int_A g = \int_A g + \int_{A^c} g = \int g.\end{aligned}$$

□

**Teoreem 2.8.** *Olgu $f \in L^+$. Siis*

$$\int f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \quad p.k.$$

TÕESTUS. "$\Leftarrow$". Kui $f = 0$ p.k., siis teoreemi 2.7 põhjal $\int f = \int 0 = 0$.

"$\Rightarrow$". Olgu $\int f = 0$. Tähistame

$$A = \{x \in X\colon\ f(x) > 0\}.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $\mu(A) = 0$. Selleks paneme tähele, et $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kus

$$A_j := \left\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \tfrac{1}{j}\right\}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Kuna $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, siis $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_j)$, seega jääb implikatsiooni tõestuseks näidata, et

$$\mu(A_j) = 0 \quad \text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{2.6}$$

Mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral integraali monotoonsuse tõttu

$$\frac{1}{j}\,\mu(A_j) = \int \frac{1}{j}\chi_{A_j} \leqslant \int f\chi_{A_j} \leqslant \int f = 0,$$

seega (2.6) kehtib. □

**Teoreem 2.9.** *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L^+$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \nearrow f$ p.k. Siis*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

**Märkus 2.3.** Teoreemi 2.9 nimetatakse (samuti nagu ka tema erijuhtu teoreemi 2.2) Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemiks ehk Beppo Levi teoreemiks.

Teoreemi 2.9 tõestus. Kuna $f_n \nearrow f$ p.k., siis leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et

$$f_n(x) \nearrow f(x) \quad \text{iga } x \in A \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \mu(A^c) = 0.$$

Nüüd

$$f\chi_A, f_n\chi_A \in L^+, \quad f = f\chi_A \text{ p.k.}, \quad f_n = f_n\chi_A \text{ p.k.}, \ n = 1, 2, \ldots, \quad \text{ja} \quad f_n\chi_A \nearrow f\chi_A;$$

seega Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi 2.2 põhjal $\int f\chi_A = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\chi_A$. Teoreemist 2.7 järeldub nüüd, et

$$\int f = \int f\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

**Teoreem 2.10** (Fatou[1] lemma)**.** *Olgu $f_n \in L^+$, $n = 1, 2, \ldots$. Siis*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Tõestus. Teoreemi tõestuseks märgime, et

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geqslant n} f_k \overset{(2)}{=} \liminf_{n\to\infty} \int \inf_{k\geqslant n} f_k \overset{(3)}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Siin

- võrdus (1) järeldub Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemist, sest
$$\inf_{k\geqslant n} f_k \nearrow \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_n;$$
- võrdus (2) kehtib, sest piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \int \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$ eksisteerib;
- võrratus (3) järeldub alumise piirväärtuse monotoonsusest, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\inf\limits_{k\geqslant n} f_k \leqslant f_n$ ning seega integraali monotoonsuse tõttu ka $\int \inf\limits_{k\geqslant n} f_k \leqslant \int f_n$.

□

**Teoreem 2.11.** *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L^+$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \to f$ p.k. Siis*

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

[1] Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929) — prantsuse matemaatik ja astronoom.

**Märkus 2.4.** Teoreemile 2.11 (nagu ka teoreemile 2.10) viidatakse kirjanduses tavaliselt kui Fatou lemmale.

TEOREEMI 2.11 TÕESTUS. Kuna $f_n \to f$ p.k., siis ka $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ p.k.; seega järeldub teoreemist 2.7 ja Fatou lemmast, et

$$\int f = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

$\square$

**Teoreem 2.12.** *Olgu funktsioon $f \in L^+$ selline, et $\int f < \infty$. Siis*

(a) $\mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) = \infty\}\big) = 0$ *(s.t. $f < \infty$ p.k., s.t. $f$ on p.k. lõplik);*

(b) *hulk $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ on $\sigma$-lõplik (s.t. leiduvad hulgad $A_n \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$).*

TÕESTUS. (a). Tähistame $A = \{x \in X\colon\ f(x) = \infty\}$. Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$f \geqslant f\chi_A \geqslant n\chi_A;$$

seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$M := \int f \geqslant \int n\chi_A = n\mu(A),$$

s.t. iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n\mu(A) \leqslant M < \infty,$$

mis on võimalik vaid siis, kui $\mu(A) = 0$.

(b). Tähistame

$$A_1 = \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant 1\}$$

ja

$$A_n = \left\{x \in X\colon\ \frac{1}{n} \leqslant f(x) < \frac{1}{n-1}\right\}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $A_n \in \mathfrak{A}$, kusjuures

$$\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Väite tõestuseks jääb näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A_n) < \infty$.

**Ülesanne 2.5.** Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A_n) < \infty$.

$\square$

## 2.3. Harjutusülesandeid ja täiendavaid märkusi

**Ülesanne 2.6.** Olgu $\mu(X) > 0$ ning olgu $f, g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ sellised, et $f(x) < g(x)$ iga $x \in X$ korral ja $\int f\,d\mu < \infty$. Tõestada, et $\int f\,d\mu < \int g\,d\mu$.

**Ülesanne 2.7.** Olgu $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Tõestada, et hulgafunktsioon

$$\mu_f \colon \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \int_A f\,d\mu \in [0, \infty]$$

on mõõt, kusjuures iga $g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ korral

$$\int g\,d\mu_f = \int gf\,d\mu. \tag{2.7}$$

NÄPUNÄIDE. Võrdus (2.7) tõestada kõigepealt lihtsa mõõtuva funktsiooni $g \in L^+$ jaoks; võrduse (2.7) tõestuseks üldjuhul kasutada teoreemi 1.7 ja monotoonse koonduvuse teoreemi.

**Märkus 2.5.** Ülesande 2.7 valguses tekib loomulik küsimus: kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum ning hulgafunktsioonid $\mu, \nu \colon X \to [0, \infty]$ on mõõdud, siis millistel tingimustel leidub funktsioon $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ selliselt, et $\nu = \mu_f$, s.t.

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

$\sigma$-lõplike mõõtude $\mu$ ja $\nu$ juhul annab vastuse sellele küsimusele üks mõõduteooria olulisemaid tulemusi—*Radon-Nikodými teoreem,* mille me tõestame käesoleva konspekti paragrahvis IV.2.

# § 3. Integraal $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioonist

Kõikjal selles paragrahvis on $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum.

Meenutame, et funktsiooni $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ positiivne osa $f^+\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ja negatiivne osa $f^-\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on defineeritud võrdustega

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X,$$

ja

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } f(x) \geqslant 0; \\ -f(x), & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X.$$

Seejuures $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

## 3.1. Ruum $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($\mathfrak{A}$-)mõõtuv funktsioon.

**Definitsioon 3.1.** Öeldakse, et funktsioon $f$ on *(Lebesgue'i mõttes) integreeruv (mõõdu $\mu$ järgi),* kui

$$\int_X f^+\, d\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int_X f^-\, d\mu < \infty.$$

Märgime, et $f^+, f^- \in L^+(\mu)$ ning seega on integraalid nendest funktsioonidest defineeritud.

Kui funktsioon $f$ on integreeruv, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist $f$ (üle hulga $X$) (mõõdu $\mu$ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu.$$

Juhime tähelepanu, et integreeruvate funktsioonide $f \in L^+$ jaoks annab see integraali definitsioon sama tulemuse, mis (mittenegatiivse mõõtuva funktsiooni integraali) definitsioon 2.2, sest $f \in L^+$ korral $f^+ = f$ ja $f^- = 0$.

Kõigi mõõdu $\mu$ järgi integreeruvate funktsioonide $f\colon X \to \mathbb{R}$ klassi tähistatakse sümboliga $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ või, kui ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ roll on kontekstist selge, siis ka lihtsalt $L_1(\mu)$ või $L_1$.

Rõhutame, et see klassi $L_1$ definitsioon on "ajutine": pärast teoreemide 3.1–3.3 tõestamist me laiendame klassi $L_1$ peaaegu kõikjal määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega integreeruvate funktsioonidega (muidugi eelnevalt selgitades, mida niisuguste funktsioonide puhul integreeruvus tähendab).

Paneme tähele, et

$$f \in L_1 \iff \int |f| < \infty \iff |f| \in L_1.$$

**Ülesanne 3.1.** Tõestada need samaväärsused.

Kui $f \in L_1$ ja $A \in \mathfrak{A}$, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist* $f$ *(üle hulga* $A$*) (mõõdu* $\mu$ *järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_A f\,d\mu := \int_X f\chi_A\,d\mu.$$

Juhime tähelepanu, et $f\chi_A \in L_1$, sest kuna $|f\chi_A| \leqslant |f|$, siis $\int |f\chi_A| \leqslant \int |f| < \infty$.

**Ülesanne 3.2.** Olgu $f \in L_1$ ja $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu.$$

Kõik antud kontekstis kasutatavad alternatiivsed tähistused on analoogilised juhuga, kus $f \in L^+$. (Näiteks $\int_X f\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f = \int f$ jne.)

**Ülesanne 3.3.** Olgu $f, g \in L_1$, $A, B \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) hulk $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ on $\sigma$-lõplik (s.t. leiduvad hulgad $A_n \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$);

(b) kui $f \leqslant g$, siis ka $\int f \leqslant \int g$;

(c) kui $\mu(A) = 0$, siis $\int_A f = 0$;

(d) kui $\mu(A \cap B) = 0$, siis $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Järgnev teoreem ütleb, et $L_1$ on vektorruum, kusjuures integraal $\int$ on lineaarne funktsionaal ruumil $L_1$.

**Teoreem 3.1.** *Olgu* $f, g \in L_1$ *ning olgu* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Siis*

(a) $\alpha f \in L_1$, *kusjuures* $\int \alpha f = \alpha \int f$;

(b) $f + g \in L_1$, *kusjuures* $\int (f+g) = \int f + \int g$.

TÕESTUS. (a). Kõigepealt paneme tähele, et

$$\int |\alpha f| = \int |\alpha||f| = |\alpha| \int |f| < \infty$$

(sest $f \in L_1$ tõttu $\int |f| < \infty$); järelikult $\alpha f \in L_1$.

Jääb näidata, et $\int \alpha f = \alpha \int f$.

Vaatleme esmalt juhtu, kus $\alpha \geqslant 0$. Siis $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ ja $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, seega

$$\begin{aligned}\int \alpha f &= \int (\alpha f)^+ - \int (\alpha f)^- = \int \alpha f^+ - \int \alpha f^- \\ &= \alpha \int f^+ - \alpha \int f^- = \alpha \left( \int f^+ - \int f^- \right) = \alpha \int f.\end{aligned}$$

**Ülesanne 3.4.** Tõestada võrduse $\int \alpha f = \alpha \int f$ kehtivus juhul, kui $\alpha < 0$.

(b). Kõigepealt märgime, et

$$\int |f+g| \leqslant \int (|f|+|g|) = \int |f| + \int |g| < \infty$$

(sest $f, g \in L_1$ tõttu $\int |f| < \infty$ ja $\int |g| < \infty$); järelikult $f+g \in L_1$.

Tähistame $h = f+g$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\int h = \int f + \int g$. Selleks paneme tähele, et

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ehk, teisisõnu,

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

ning järelikult ka

$$\int (h^+ + f^- + g^-) = \int (h^- + f^+ + g^+).$$

Kuna $f^+, f^-, g^+, g^-, h^+, h^- \in L^+$, siis järeldub viimasest võrdusest, et

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$$

ehk, teisisõnu,

$$\int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-,$$

s.t. $\int h = \int f + \int g$. □

**Ülesanne 3.5.** Olgu $f, g \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$;

(b) $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$.

**Teoreem 3.2.** *Olgu $f \in L_1$. Siis $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.*

TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks paneme tähele, et

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leqslant \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right| = \int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f|,$$

sest kuna $f^+, f^- \in L^+$, siis $\int f^+ \geqslant 0$ ja $\int f^- \geqslant 0$ ning järelikult $\left|\int f^+\right| = \int f^+$ ja $\left|\int f^-\right| = \int f^-$. □

**Teoreem 3.3.** *Olgu $f, g \in L_1$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f = g$ *p.k.;*

(ii) $\int |f-g| = 0$*;*

(iii) $\int_E f = \int_E g$ *iga $E \in \mathfrak{A}$ korral.*

TÕESTUS. (i)$\Leftrightarrow$(ii) on ilmne, sest kuna $|f-g| \in L^+$, siis teoreemi 2.8 põhjal

$$\int |f-g| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f-g| = 0 \ \text{ p.k.} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \ \text{ p.k.}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu tingimus (ii) ning olgu $E \in \mathfrak{A}$. Siis

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| = \left|\int_E (f-g)\right| \leqslant \int_E |f-g| = \int |f-g|\chi_E \leqslant \int |f-g| = 0;$$

järelikult $\int_E f - \int_E g = 0$ ehk, teisisõnu, $\int_E f = \int_E g$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu tingimus (iii). Tähistame

$$A = \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant g(x)\} \quad \text{ja} \quad B = \{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\}.$$

Paneme tähele, et $A, B \in \mathfrak{A}$, kusjuures $A \cap B = \emptyset$ ja $A \cup B = X$. Seega

$$\begin{aligned}\int |f-g| &= \int_A |f-g| + \int_B |f-g| = \int_A (f-g) + \int_B (g-f)\\ &= \int_A f - \int_A g + \int_B g - \int_B f = 0,\end{aligned}$$

sest tingimuse (iii) põhjal $\int_A f = \int_A g$ ja $\int_B f = \int_B g$. □

Järgnevalt laiendame klassi $L_1$, andes ühtlasi tema elementidele uue tõlgenduse.

**(I)** Me ütleme, et ($\mu$-)peaaegu kõikjal hulgas $X$ määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioon $f$ on ($\mu$-)integreeruv, kui leidub ($\mathfrak{A}$-mõõtuv) ($\mu$-)integreeruv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ nii, et $f = g$ p.k. Integraal (mõõdu $\mu$ järgi) niisugusest funktsioonist $f$ defineeritakse võrdusega $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

Märgime, et see integraali definitsioon on korrektne: kui $h\colon X \to \mathbb{R}$ on niisugune $\mu$-mõõtuv integreeruv funktsioon, et $f = h$ p.k., siis ka $h = g$ p.k. ning seega teoreemi 3.3 põhjal $\int h\,d\mu = \int g\,d\mu$.

**(II)** Me loeme klassi $L_1$ kuuluvateks (lisaks $\mathfrak{A}$-mõõtuvatele ($\mu$-)integreeruvatele funktsioonidele $X \to \mathbb{R}$) kõik peaaegu kõikjal hulgas $X$ määratud ($\mu$-)integreeruvad funktsioonid.

On ilmne, et iga $f \in L_1$ on p.k. lõplik (s.t. $|f| < \infty$ p.k.). Samuti on lihtne veenduda, et teoreemid 3.1–3.3 ja ülesanded 3.1–3.5 jäävad kehtima ka klassi $L_1$ niisuguse interpretatsiooni korral.

**Ülesanne 3.6.** Olgu $f \in L_1$ ning olgu $h$ peaaegu kõikjal hulgas $X$ määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioon. Tõestada, et kui $h = f$ p.k., siis ka $h \in L_1$.

Lõpuks,

**(III)** Kaks funktsiooni klassist $L_1$ loeme selle klassi elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal ruumis $X$.

Selliselt tõlgendatuna on $L_1$ vektorruum, kusjuures $\int$ on lineaarne funktsionaal sellel ruumil (rõhutame, et niisuguse tõlgenduse järgi on integraal klassi $L_1$ elementide jaoks teoreemi 3.3 põhjal korrektselt defineeritud).

**Ülesanne 3.7.** Veenduda, et $L_1$ vektorruum, kusjuures $\int$ on lineaarne funktsionaal sellel ruumil $L_1$.

Veelgi enam, vektorruum $L_1$ on normeeritud ruum järgneva võrdusega defineeritud normi suhtes:

$$\|f\| = \int |f|, \quad f \in L_1.$$

**Ülesanne 3.8.** Veenduda selles.

**Märkus 3.1.** Sisuliselt tõlgendame me ruumina $L_1$ faktorruumi $L_1/\sim$, kus ekvivalentsiseos $\sim$ klassis $L_1$ on defineeritud seosega

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \text{ p.k.}, \qquad f, g \in L_1.$$

Seejuures tehted selle faktorruumi ekvivalentsiklassidega, integraal ekvivalentsiklassist, ning ekvivalentsiklassi norm on defineeritud esindajate kaudu: kui $f, g \in L_1$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, siis defineeritakse

$$[f] + [g] = [f + g], \qquad \alpha[f] = [\alpha f], \qquad \int [f] = \int f, \qquad \|[f]\| = \int |f|, \tag{3.1}$$

kus $[f], [g], [f+g], [\alpha f] \in L_1/\sim$ on vastavalt funktsioonide $f, g, f+g, \alpha f \in L_1$ ekvivalentsiklassid.

**Ülesanne 3.9.** Veenduda, et definitsioonid (3.1) ei sõltu esindajate $f$ ja $g$ valikust.

Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täield. Paneme tähele, et

$$L_1(X, \mathfrak{A}, \mu) = L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu}),$$

s.t. *klassid $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ koosnevad ühtedest ja samadest funktsioonidest, kusjuures ka integraalid mõõtude $\mu$ ja $\overline{\mu}$ järgi neil klassidel langevad kokku,* s.t.

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\overline{\mu} \quad \text{iga } f \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu) = L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu}) \text{ korral.}$$

**Ülesanne 3.10.** Veenduda selles.

NÄPUNÄIDE. Ülesande lahenduseks

(a) tõestada, et kui $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, siis ka $f \in L^+(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$, kusjuures

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\overline{\mu}; \tag{3.2}$$

(võrdus (3.2) tõestada esmalt lihtsate mõõtuvate funktsioonide $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ jaoks ning seejärel, kasutades monotoonse koonduvuse teoreemi, suvaliste $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ jaoks);

(b) tõestada, et kui $f \colon X \to \mathbb{R}$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv $\mu$-integreeruv funktsioon, siis on ta ka $\overline{\mu}$-integreeruv, kusjuures kehtib võrdus (3.2);

(c) tõestada, et kui $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on $\mu$-p.k. määratud $\mu$-integreeruv funktsioon, siis ta on ka $\overline{\mu}$-integreeruv, kusjuures kehtib võrdus (3.2);

(d) tõestada, et $L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu}) \subset L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Niisiis, $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu) = L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$, kusjuures ka integraalid mõõtude $\mu$ ja $\overline{\mu}$ järgi neil klassidel langevad kokku. Järelikult, KÕNELDES KLASSIST $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, VÕIME ALATI EELDADA (JA SELLES PARAGRAHVIS EDASPIDI EELDAMEGI), ET MÕÕDUGA RUUM $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ON TÄIELIK.

## 3.2. Lebesgue'i koonduvusteoreemid

**Teoreem 3.4** ((Lebesgue'i) domineeritud koonduvuse teoreem)**.** *Olgu funktsioonid $f_n \in L_1$, $n = 1, 2, \dots$, ja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et*

1° $f_n \to f$ *p.k.;*

2° *leidub funktsioon $g \in L_1$ selliselt, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|f_n| \leqslant g$ p.k.*

*Siis ka $f \in L_1$, kusjuures*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.3}$$

Tõestus. Tõestame teoreemi väited kõigepealt eeldustel, et

$$\text{iga } x \in X \text{ korral } f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad \text{ja} \quad |f_n(x)| \leqslant g(x) < \infty,\ n = 1, 2, \dots. \tag{3.4}$$

Sel juhul, kuna funktsioonid $f_n$, $n = 1, 2, \dots$, on mõõtuvad, siis teoreemi 1.6 põhjal ka $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv. Kuna iga $x \in X$ korral $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(x)|$, siis ka $|f| \leqslant g$, järelikult $\int |f| \leqslant \int g < \infty$, seega $f \in L_1$.

Võrduse (3.3) tõestuseks piisab näidata, et $\int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Tõepoolest, sel juhul ka $\left|\int f_n - \int f\right| \leqslant \int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Selleks paneme tähele, et

- iga $n \in \mathbb{N}$ korral $2g - |f_n - f| \in L^+$
  (sest $2g - |f_n - f| \geqslant 2g - (|f_n| + |f|) = g - |f_n| + g - |f| \geqslant 0$);
- $2g - |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$;

seega Fatou lemma põhjal

$$\begin{aligned}\int 2g &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(2g - |f_n - f|\big) = \liminf_{n\to\infty} \left(\int 2g - \int |f_n - f|\right) \\ &= \int 2g + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int |f_n - f|\right) = \int 2g - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|,\end{aligned}$$

millest

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \leqslant 0;$$

järelikult $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0$, nagu soovitud.

**Ülesanne 3.11.** Järeldada teoreemi väidete kehtivusest lisatingimustel (3.4) nende kehtivus üldjuhul.

□

**Järeldus 3.5** ((Lebesgue'i) tõkestatud koonduvuse teoreem.)**.** *Olgu* $\mu(X) < \infty$ *ning olgu funktsioonid* $f_n \in L_1$, $n = 1, 2, \dots$, *ja* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sellised, et*

1° $f_n \to f$ *p.k.;*

2° *leidub reaalarv* $M \geqslant 0$ *selliselt, et iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral* $|f_n| \leqslant M$ *p.k.*

*Siis ka* $f \in L_1$, *kusjuures*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

TÕESTUS. Kõigepealt paneme tähele, et funktsioon $g(x) = M$, $x \in X$, on integreeruv.

Tõepoolest, $g = M\chi_X$ ning seega $\int g = M\mu(X) < \infty$ (sest $\mu(X) < \infty$), s.t. $g \in L_1$.

Järelduse 3.5 väide järeldub nüüd vahetult Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemist 3.4. □

**Teoreem 3.6.** *Olgu funktsioonid* $f_j \in L_1$, $j = 1, 2, \dots$, *sellised, et*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty. \tag{3.5}$$

*Siis rida* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *koondub p.k., kusjuures* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L_1$ *ja*

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

**Järeldus 3.7.** *Normeeritud ruum* $L_1$ *on täielik (s.t. ta on Banachi ruum).*

TÕESTUS. Kuna

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L_1},$$

siis eeldus (3.5) tähendab, et rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ ruumis $L_1$ on absoluutselt koonduv. Kuna normeeritud ruum on täielik parajasti siis, kui temas rea absoluutsest koonduvusest järeldub selle rea koonduvus, siis piisab ruumi $L_1$ täielikkuseks veenduda, et eeldusel (3.5) rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub ruumis $L_1$; seejuures võib üldisust kitsendamata eeldada, et funktsioonid $f_j$, $j = 1, 2, \dots$, on määratud kõikjal hulgas $X$. Teoreemi 3.6 põhjal on funktsioon $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ määratud p.k. kõikjal hulgas $X$, kusjuures $f \in L_1$. Ruumi $L_1$ täielikkuseks piisab näidata, et $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f$ ruumis $L_1$, s.t. $\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right\| = 0$. Veendume selles:

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right\| = \int \left| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right| = \int \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j \right| \overset{(1)}{\leqslant} \int \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j| \overset{(2)}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \int |f_j| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(siin võrratus (1) kehtib integraali monotoonsuse tõttu; võrdus (2) kehtib monotoonse koonduvuse teoreemi 2.5 põhjal). □

TEOREEMI 3.6 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioonid $f_j$, $j = 1, 2, \dots$, on määratud kõikjal hulgas $X$. Siis $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L^+$. Kuna Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi (täpsemalt, teoreemi 2.5) põhjal

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty,$$

siis $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L_1$ ning teoreemi 2.12, (a), põhjal $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$ p.k. $x \in X$ korral. Kuna arvrea absoluutsest koonduvusest järeldub tema koonduvus, siis saame siit, et ka rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ koondub p.k. $x \in X$ korral, s.t. rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub p.k. ning seega on funktsioon $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ määratud p.k.

Arvestades, et

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} f_j \quad \text{p.k.}$$

ja

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L_1 \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

järeldub Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemist, et $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L_1$, kusjuures

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} f_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

□

## 3.3. Kõikjal tihedaid alamruume ruumis $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

**Teoreem 3.8.** *Olgu $f \in L_1$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lihtne mõõtuv funktsioon $\phi \in L_1$ selliselt, et*

$$\int |f - \phi| < \varepsilon.$$

Märgime, et üldjuhul ei tarvitse lihtne mõõtuv funktsioon olla integreeruv. Teoreem 3.8 väidab, et *integreeruvate lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_1$*, sest $\int |f - \phi| = \|f - \phi\|_{L_1}$.

TEOREEMI 3.8 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioon $f$ on määratud kõikjal hulgas $X$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Mittenegatiivse mõõtuva funktsiooni integraali definitsiooni põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi', \phi'' \in L^+$ selliselt, et $\phi' \leqslant f^+$ ja $\phi'' \leqslant f^-$ ja

$$\int \phi' > \int f^+ - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \int \phi'' > \int f^- - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On selge, et $\phi = \phi' - \phi'' \in L_1$ on lihtne mõõtuv funktsioon; seejuures

$$\begin{aligned}\int |f-\phi| &= \int \big|(f^+ - f^-) - (\phi' - \phi'')\big| \leqslant \int \big(|f^+ - \phi'| + |f^- - \phi''|\big)\\ &= \int (f^+ - \phi' + f^- - \phi'') = \Big(\int f^+ - \int \phi'\Big) + \Big(\int f^- - \int \phi''\Big)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

**Definitsioon 3.2.** Olgu $X$ topoloogiline ruum.
Funktsiooni $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *kandjaks* nimetatakse hulka

$$\operatorname{supp} g = \overline{\{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}}$$

(s.t. funktsiooni $g$ kandja on hulga $\{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}$ sulund ruumis $X$).

**Teoreem 3.9.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon ning olgu $\mathcal{M}_F \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ja $\mu_F\colon \mathcal{M}_F \to [0,\infty]$ funktsioonile $F$ vastavad Lebesgue-Stieltjesi $\sigma$-algebra ja Lebesgue-Stieltjesi mõõt. Olgu $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $g \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ selliselt, et*

$$\int_{\mathbb{R}} |f-g|\, d\mu_F < \varepsilon.$$

**Ülesanne 3.12.** Tõestada, et

(a) tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lebesgue'i–Stieljesi mõttes integreeruv, s.t. $g \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$;

(b) tõkestatud kandjaga pidevad funktsioonid moodustavad alamruumi ruumis $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$.

Teoreem 3.9 väidab, et *tõkestatud kandjaga pidevate funktsioonide $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$*, sest $\int_{\mathbb{R}} |f-g|\, d\mu_F = \|f-g\|_{L_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_F,\mu_F)}$.

**Definitsioon 3.3.** Öeldakse, et topoloogiline ruum $X$ on *lokaalselt kompaktne,* kui ruumi $X$ igal punktil leidub kompaktne ümbrus (s.t. iga $x \in X$ korral leiduvad kompaktne hulk $K \subset X$ ja lahtine hulk $U \subset X$ selliselt, et $x \in U \subset K$).

On ilmne, et iga kompaktne topoloogiline ruum on lokaalselt kompaktne. Prototüübiline näide lokaalselt kompaktsest topoloogilisest ruumist, mis pole kompaktne, on ruum $\mathbb{R}^m$.

Kehtib järgmine teoreemist 3.9 üldisem tulemus.

**Teoreem 3.10.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, sisaldagu $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat ning olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ regulaarne mõõt. Siis iga $f \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ korral leidub kompaktse kandjaga pidev funktsioon $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ selliselt, et*

$$\int_X |f-g|\, d\mu < \varepsilon.$$

Niisiis, *teoreemi 3.10 eeldustel on kompaktse kandjaga pidevate funktsioonide* $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *hulk kõikjal tihe ruumis* $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, sest $\int_X |f-g|\, d\mu = \|f-g\|_{L_1(X,\mathfrak{A},\mu)}$.

**Ülesanne 3.13.** Tõestada, et teoreemi 3.10 eeldustel moodustavad kompaktse kandjaga pidevad funktsioonid $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ alamruumi ruumis $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Märgime, et funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ kandja on kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud, sest hulk ruumis $\mathbb{R}^m$ on kompaktne parajasti siis, kui ta on kinnine ja tõkestatud.

Teoreemi 3.10 tõestus toetub järgnevale topoloogia kursusest tuttavale Urõsoni lemma lokaalselt kompaktsele versioonile.

**Teoreem 3.11** (Urõsoni lemma (lokaalselt kompaktne versioon))**.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $K \subset U \subset X$, kus hulk $K \subset X$ on kompaktne ning hulk $U \subset X$ on lahtine. Siis leidub pidev funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ selliselt, et*

(1) $g[X] \subset [0, 1]$;

(2) *funktsiooni $g$ kandja* $\operatorname{supp} g$ *on kompaktne, kusjuures* $\operatorname{supp} g \subset U$;

(3) $g(x) = 1$ *iga $x \in K$ korral.*

**Ülesanne 3.14.** Tõestada teoreem 3.10.

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt näidata, et kui hulk $A \in \mathfrak{A}$ on selline, et $\mu(A) < \infty$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub kompaktse kandjaga pidev funktsioon $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ selliselt, et $\int_X |\chi_A - g|\, d\mu < \varepsilon$. (Selleks kasutada mõõdu $\mu$ regulaarsust ning Urõsoni lemmat 3.11.) Seejärel kasutada teoreemi 3.8.

TEOREEMI 3.9 TÕESTUS (ILMA TEOREEMI 3.10 KASUTAMATA). Olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi 3.8 põhjal leidub lihtne mõõtuv funktsioon $\phi \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ selliselt, et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - \phi|\, d\mu_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \quad (n \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{M}_F,\ j = 1, \ldots, n)$$

funktsiooni mingi niisugune esitus, kus hulgad $A_1, \ldots, A_n$ on paarikaupa lõikumatud ning $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Kuna $\phi \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$, siis $\mu_F(A_j) < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Teoreemi I.5.7 põhjal leiduvad iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral arv $n_j \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud tõkestatud vahemikud $I_i^j \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n_j$, selliselt, et

$$\mu_F\left(A_j \triangle \bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j\right) < \frac{\varepsilon}{3\, n\, |\alpha_j|}.$$

Tähistame

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n_j} \chi_{I_i^j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j \chi_{I_i^j};$$

siis $\psi \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\phi - \psi|\, d\mu_F &= \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j}\Big|\, d\mu_F \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\chi_{A_j} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j}\right)\Big|\, d\mu_F \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{A_j} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j}\right|\, d\mu_F = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_j \triangle \bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j}\, d\mu_F \\ &= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \mu_F \left(A_j \triangle \bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j\right) < \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \frac{\varepsilon}{3\, n\, |\alpha_j|} = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Teoreemi tõestuseks piisab nüüd näidata, et

(•) kui $(a, b) \subset \mathbb{R}$ on tõkestatud vahemik, siis iga $\gamma > 0$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $h \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ nii, et

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{(a,b)} - h|\, d\mu_F < \gamma.$$

Tõepoolest, kui väide (•) kehtib, siis mis tahes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $i \in \{1, \ldots, n_j\}$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $h_i^j \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ nii, et

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{I_i^j} - h_i^j|\, d\mu_F < \frac{\varepsilon}{3\, n\, n_j\, |\alpha_j|}.$$

Tähistame

$$g = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j h_i^j;$$

siis $g$ on tõkestatud kandjaga pidev funktsioon, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\psi - g|\, d\mu_F &= \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j \chi_{I_i^j} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j h_i^j\Big|\, d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j (\chi_{I_i^j} - h_i^j)\Big|\, d\mu_F \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} |\alpha_j| \int_{\mathbb{R}} |\chi_{I_i^j} - h_i^j|\, d\mu_F < \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} |\alpha_j| \frac{\varepsilon}{3\, n\, n_j\, |\alpha_j|} = \frac{\varepsilon}{3};\end{aligned}$$

järelikult

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g|\, d\mu_F \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f - \phi|\, d\mu_F + \int_{\mathbb{R}} |\phi - \psi|\, d\mu_F + \int_{\mathbb{R}} |\psi - g|\, d\mu_F < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tõestame nüüd väite (•). Olgu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mingi tõkestatud vahemik ning olgu $\gamma > 0$. Valime arvud $c, d \in (a, b)$, $c < d$, selliselt, et

$$\mu_F\big((a, b) \setminus (c, d)\big) < \gamma.$$

**Ülesanne 3.15.** Veenduda, et sellised arvud $c, d \in (a, b)$ eksisteerivad.

Defineerime funktsiooni $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seosega

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-\infty, a]; \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{kui } x \in [a, c]; \\ 1, & \text{kui } x \in [c, d]; \\ 1 - \frac{x-d}{b-d}, & \text{kui } x \in [d, b]; \\ 0, & \text{kui } x \in [b, \infty), \end{cases}$$

siis $h$ on tõkestatud kandjaga pidev funktsioon, kusjuures

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{(a,b)} - h| \, d\mu_F \leqslant \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)\setminus(c,d)} \, d\mu_F = \mu_F\big((a,b) \setminus (c,d)\big) < \gamma.$$

□

## 3.4. Harjutusülesandeid

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum ning olgu $g\colon\ X \to \mathbb{R}$ (Boreli mõttes) mõõtuv funktsioon. Siis hulgafunktsioon

$$\mu g^{-1}(E) = \mu\big(g^{-1}[E]\big), \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

on Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}$. Kui $\mu$ on tõenäosusmõõt, siis mõõtu $\mu g^{-1}$ nimetatakse funktsiooni $g$ *jaotuseks.*

**Ülesanne 3.16.** Tõestada, et $\mu g^{-1}$ on mõõt.

Defineerime funktsiooni

$$G(t) = \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ g(x) < t\big\}\Big) = \mu\Big(g^{-1}\big[(-\infty, t)\big]\Big) = \mu g^{-1}\big((-\infty, t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kui $\mu$ on tõenäosusmõõt, siis funktsiooni $G$ nimetatakse funktsiooni $g$ *jaotusfunktsiooniks.*

**Ülesanne 3.17.** Tõestada, et

(a) funktsioon $G$ on mittekahanev ja vasakult pidev;

(b) $\mu g^{-1} = \mu_G$ (s.t. $\mu g^{-1}$ on funktsioonile $G$ vastav Boreli mõõt, vt. § I.5, punkt 1).

**Ülesanne 3.18.** Tõestada, et kui $f \in L_1(\mu g^{-1})$, siis funktsioonide $g$ ja $f$ kompositsioon $f \circ g \in L_1(\mu)$ kusjuures

$$\int f \, d\mu g^{-1} = \int f \circ g \, d\mu.$$

Veelgi täpsemalt, mis tahes $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ korral

$$\int_E f \, d\mu g^{-1} = \int_{g^{-1}[E]} f \circ g \, d\mu.$$

# § 4. Riemanni integraali ja Lebesgue'i integraali vahekord

Meenutame kõigepealt Riemanni integraali mõistet.

Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon ning olgu $T$ lõigu $[a,b]$ jaotusviis punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tähistame $\Delta(T) := \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - x_{j-1})$ (s.t. $\Delta(T)$ on jaotusviisi $T$ pikima osalõigu pikkus) ning

$$M_j := \sup\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\bigr\}, \quad m_j := \inf\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\bigr\}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

$$S(T) := \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}), \quad s(T) := \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}).$$

Summasid $S(T)$ ja $s(T)$ nimetatakse (lõigu $[a,b]$ jaotusviisile $T$ vastavateks) funktsiooni $f$ *Darboux' ülemsummaks* ja *Darboux' alamsummaks.*

Matemaatilise analüüsi kursusest teame, et

(a) kui lõigu $[a,b]$ jaotusviis $T'$ on saadud jaotusviisi $T$ punktidele uute punktide lisamise teel, siis

$$S(T') \leqslant S(T) \quad \text{ja} \quad s(T') \geqslant s(T),$$

s.t. *jaotusviisi peenendamisel Darboux' ülemsumma ei kasva ja Darboux' alamsumma ei kahane*;

(b) lõigu $[a,b]$ mis tahes jaotusviiside ja $T$ ja $T'$ korral

$$S(T) \geqslant s(T'),$$

s.t. *ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem ühestki Darboux' alamsummast.*

Tähistame

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\bigl\{S(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ jaotusviis}\bigr\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\bigl\{s(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ jaotusviis}\bigr\}.$$

(Märgime, et need inf ja sup on lõplikud, sest funktsiooni $f$ tõkestatuse tõttu on selle funktsiooni Darboux' ülemsummade hulk ja Darboux' alamsummade hulk tõkestatud.) Arvusid $\overline{\int_a^b} f$ ja $\underline{\int_a^b} f$ nimetatakse vastavalt funktsiooni $f$ *Darboux' ülemiseks integraaliks* ja *Darboux' alumiseks integraaliks* (üle lõigu $[a,b]$).

Järgnev teoreem on meile tuttav matemaatilise analüüsi kursusest.

**Teoreem 4.1** (Darboux' lemma). (a) $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \overline{\int_a^b} f$, *s.t. iga reaalarvu* $\varepsilon > 0$ *korral leidub reaalarv* $\delta > 0$ *selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant S(T) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

*(teisisõnu, piisavalt peentele jaotusviisidele vastavad Darboux' ülemsummad erinevad Darboux' ülemisest integraalist kuitahes vähe);*

(b) $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} s(T) = \underline{\int_a^b} f$, *s.t. iga reaalarvu* $\varepsilon > 0$ *korral leidub reaalarv* $\delta > 0$ *selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \underline{\int_a^b} f - s(T) < \varepsilon$$

*(teisisõnu, piisavalt peentele jaotusviisidele vastavad Darboux' alamsummad erinevad Darboux' alumisest integraalist kuitahes vähe).*

**Definitsioon 4.1.** Kui $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on *Riemanni mõttes integreeruv* lõigus $[a, b]$. Darboux' integraalide $\overline{\int_a^b} f$ ja $\underline{\int_a^b} f$ ühist väärtust nimetatakse sel juhul funktsiooni $f$ *Riemanni integraaliks (üle lõigu* $[a, b]$*)* ja tähistatakse sümboliga

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad R\text{-}\int_a^b f \quad \text{või lihtsalt} \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad \int_a^b f.$$

Niisiis, kui funktsioon $f$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a, b]$, siis

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Tähistame

$$\mathcal{L}_{[a,b]} = \big\{E \cap [a, b] \colon E \in \mathcal{L}\big\} \quad \text{ja} \quad m_{[a,b]} = m|_{\mathcal{L}_{[a,b]}},$$

kus $\mathcal{L}$ on ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i $\sigma$-algebra ja $m$ on Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}$. Kui see ei põhjusta kaksipidimõistmist, siis kirjutame edaspidi $m_{[a,b]}$ asemel ka lihtsalt $m$. Paneme tähele, et

(a) $\mathcal{L}_{[a,b]}$ on $\sigma$-algebra (see fakt järeldub ülesandest I.2.12);

(b) $\mathcal{L}_{[a,b]}$ on lõigu $[a, b]$ Boreli $\sigma$-algebra täield (see fakt järeldub ülesannetest I.2.13 ja I.3.32).

$\sigma$-algebrat $\mathcal{L}_{[a,b]}$ nimetatakse *lõigu* $[a, b]$ *Lebesgue'i* $\sigma$*-algebraks* ning mõõtu $m_{[a,b]}$ *Lebesgue'i mõõduks lõigus* $[a, b]$.

Öeldakse, et lõigus $[a, b]$ $m$-p.k. määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtuseline funktsioon $g$ on *Lebesgue'i mõttes integreeruv (lõigus* $[a, b]$*)*, kui $g \in L_1\big([a, b], \mathcal{L}_{[a,b]}, m_{[a,b]}\big)$. Ruumi

$L_1\big([a,b],\mathcal{L}_{[a,b]},m_{[a,b]}\big)$ tähistatakse ka lihtsalt sümboliga $L_1[a,b]$. Selle ruumi funktsioonidest integraali märkimiseks (Lebesgue'i mõõdu $m := m_{[a,b]}$ järgi) kasutatakse sümbolite $dm$ ja $dm(x)$ ning $\int_{[c,d]}$ asemel sageli ka vastavalt sümboleid $dx$ ning $\int_c^d$; täpsemalt, kui $g \in L_1[a,b]$, $E \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ ja $a \leqslant c < d \leqslant b$, siis

$$\int_E g\,dx := \int_E g(x)\,dx := \int_E g(x)\,dm(x) =: \int_E g\,dm$$

ja

$$\int_c^d g\,dx := \int_c^d g(x)\,dx := \int_c^d g(x)\,dm(x) := \int_c^d g\,dm := \int_{[c,d]} g\,dm := \int_{[c,d]} g(x)\,dm(x).$$

**Teoreem 4.2.** (a) *Lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on Riemanni mõttes integreeruv selles lõigus parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga Lebesgue'i mõõt on null.*

(b) *Kui funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, siis ta on ka Lebesgue'i mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, kusjuures*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dm(x) = R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx,$$

*s.t. funktsiooni $f$ Lebesgue'i integraal üle lõigu $[a,b]$ on võrdne tema Riemanni integraaliga üle selle lõigu.*

Kõikjal järgnevas tähistame funktsiooni $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ Lebesgue'i integraali, Riemanni integraali, Darboux' ülemist integraali ja Darboux' alumist integraali lõigus $[a,b]$ vastavalt sümbolitega

$$\int f,\quad R\text{-}\int f,\quad \overline{\int} f \quad \text{ja} \quad \underline{\int} f$$

(muidugi juhul, kui need integraalid eksisteerivad).

Olgu funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ tõkestatud lõigus $[a,b]$. Defineerime funktsioonid $\overline{f},\underline{f}\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ võrdustega

$$\overline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup\big\{f(z)\colon\ z\in(x-\delta,x+\delta)\big\},\quad x\in[a,b],$$
$$\underline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0+} \inf\big\{f(z)\colon\ z\in(x-\delta,x+\delta)\big\},\quad x\in[a,b].$$

**Ülesanne 4.1.** Veenduda, et funktsioonid $\overline{f}$ ja $\underline{f}$ on korrektselt defineeritud, s.t. nende definitsiooniavaldises olevad piirväärtused eksisteerivad.

Märgime, et *funktsioon $f$ on pidev punktis $x\in[a,b]$ parajasti siis, kui $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$.*

**Ülesanne 4.2.** Veenduda selles.

Teoreemi 4.2 tõestus toetub järgnevale lemmale.

**Lemma 4.3.** *Funktsioonid* $\overline{f}$ *ja* $\underline{f}$ *on Lebesgue'i mõttes integreeruvad lõigus* $[a,b]$, *kusjuures*

$$\int \overline{f} = \overline{\int} f \quad ja \quad \int \underline{f} = \underline{\int} f.$$

Tõestus. Olgu

$$T_k\colon \quad a = x_0^k < x_1^k < x_2^k < \dots < x_{n_k-1}^k < x_{n_k}^k = b \quad (n_k \in \mathbb{N}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

sellised lõigu $[a,b]$ jaotusviisid, et jaotusviisi $T_k$ pikima osalõigu pikkus läheneb protsessis $k \to \infty$ nullile, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n_k} (x_j^k - x_{j-1}^k) = 0$. Tähistame jaotusviisile $T_k$ vastavad funktsiooni $f$ Darboux' ülemsumma ja alamsumma vastavalt sümbolitega $S(T_k)$ ja $s(T_k)$; siis teoreemi 4.1 põhjal

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = \overline{\int} f \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} s(T_k) = \underline{\int} f.$$

Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$M_j^k := \sup\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}^k, x_j^k]\bigr\}, \quad j = 1, \dots, n_k,$$
$$m_j^k := \inf\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}^k, x_j^k]\bigr\}, \quad j = 1, \dots, n_k,$$

ning defineerime lihtsad $\mathcal{L}$-mõõtuvad funktsioonid $\overline{f}_k, \underline{f}_k\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ võrdustega

$$\overline{f}_k := \sum_{j=1}^{n_k} M_j^k \chi_{[x_{j-1}^k, x_j^k]}, \quad \underline{f}_k := \sum_{j=1}^{n_k} m_j^k \chi_{[x_{j-1}^k, x_j^k]}.$$

Funktsioonid $\overline{f}_k, \underline{f}_k$, $k = 1, 2, \dots$, on integreeruvad, kusjuures

$$\lim_{k\to\infty} \int \overline{f}_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} M_j^k (x_{j-1}^k - x_j^k) = \lim_{k\to\infty} S(T_k) = \overline{\int} f,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int \underline{f}_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} m_j^k (x_{j-1}^k - x_j^k) = \lim_{k\to\infty} s(T_k) = \underline{\int} f.$$

Paneme tähele, et mis tahes $x \in [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^k, \dots, x_{n_k-1}^k\}$ korral

$$\lim_{k\to\infty} \overline{f}_k(x) = \overline{f}(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \underline{f}_k(x) = \underline{f}(x).$$

**Ülesanne 4.3.** Veenduda selles.

Niisiis

$$\overline{f}_k \to \overline{f} \ m\text{-p.k.} \quad \text{ja} \quad \underline{f}_k \to \underline{f} \ m\text{-p.k.},$$

sest hulk $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^k, \dots, x_{n_k-1}^k\}$ on loenduv ning seega on tema Lebesgue'i mõõt null. Funktsiooni $f$ tõkestatuse tõttu leidub arv $M \geqslant 0$ selliselt, et $|f(x)| \leqslant M$ iga $x \in [a,b]$ korral; järelikult iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$|M_j^k| \leqslant M \quad \text{ja} \quad |m_j^k| \leqslant M, \qquad \text{iga } j \in \{1, \dots, n_k\} \text{ korral}$$

ning seega

$$|\overline{f}_k(x)| \leqslant M \quad \text{ja} \quad |\underline{f}_k(x)| \leqslant M \qquad \text{iga } x \in [a,b] \setminus \bigcup_{\varkappa=1}^{\infty}\{x_1^{\varkappa}, \dots, x_{n_\varkappa-1}^{\varkappa}\} \text{ korral.}$$

Lebesgue'i tõkestatud koonduvuse teoreemi põhjal on funktsioonid $\overline{f}$ ja $\underline{f}$ Lebesgue'i mõttes integreeruvad lõigus [a,b], kusjuures

$$\int \overline{f} = \lim_{k\to\infty} \int \overline{f}_k = \overline{\int} f \quad \text{ja} \quad \int \underline{f} = \lim_{k\to\infty} \int \underline{f}_k = \underline{\int} f.$$

□

Teoreemi 4.2 tõestus. (a). Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud lõigus $[a,b]$. Kuna Lemma 4.3 põhjal $\overline{\int} f = \int \overline{f}$ ja $\underline{\int} f = \int \underline{f}$, siis

funktsioon $f$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$

$$\iff \overline{\int} f = \underline{\int} f \iff \int \overline{f} = \int \underline{f} \iff \int (\overline{f} - \underline{f}) = 0.$$

Kuna $\overline{f} - \underline{f} \geqslant 0$, siis $\overline{f} - \underline{f} \in L^+\big([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]}, m_{[a,b]}\big)$; järelikult teoreemi 2.8 põhjal

$$\begin{aligned}
\int (\overline{f} - \underline{f}) = 0 \quad &\iff \quad \overline{f} - \underline{f} = 0 \ m\text{-p.k.} \quad \iff \quad \overline{f} = \underline{f} \ m\text{-p.k.} \\
&\iff \quad f \text{ on pidev } m\text{-p.k.} \\
&\iff \quad \text{funktsiooni } f \text{ katkevuspunktide hulga Lebesgue'i mõõt on null.}
\end{aligned}$$

(b). Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$. Siis on funktsioon $f$ tõkestatud lõigus $[a,b]$, järelikult väite (a) tõestuse ja Lemma 4.3 põhjal

$$\int \overline{f} = \int \underline{f} = \underline{\int} f = \overline{\int} f = R\text{-}\int f \qquad \text{ja} \qquad \underline{f} = \overline{f} \ m\text{-p.k.}$$

Kuna $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$, siis järeldub viimasest võrdusest, et $\underline{f} = f = \overline{f}$ $m$-p.k.; seega on funktsioon $f$ Lebesgue'i mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, kusjuures

$$\int f = \int \overline{f} = R\text{-}\int f.$$

□

# § 5. Mõõtuvate funktsioonide koonduvustüüpe

Selles paragrahvis vaatleme erinevaid mõõtuvate funktsioonide koonduvustüüpe ning uurime nende vahekordi.

Olgu $X$ mittetühi hulk ning olgu $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

**Definitsioon 5.1.** Öeldakse, et jada $(f_n)$ koondub funktsiooniks $f$ *ühtlaselt hulgas* $X$, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definitsioon 5.2.** Öeldakse, et jada $(f_n)$ koondub funktsiooniks $f$ *punktiviisi hulgas* $X$, kui

$$\text{iga } x \in X \text{ korral} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Eeldame nüüd täiendavalt, et $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on mõõduga ruum.

**Definitsioon 5.3.** Öeldakse, et jada $(f_n)$ koondub funktsiooniks $f$ *$\mu$-peaaegu kõikjal ruumis* $X$ (ehk lihtsalt *peaaegu kõikjal,* kui ruumi $X$ ja mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge) ja kirjutatakse $f_n \to f$ $\mu$-p.k. või $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ $\mu$-p.k. (või ka lihtsalt $f_n \to f$ p.k. või $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ p.k.), kui

$$\text{leidub hulk } A \in \mathfrak{A} \text{ selliselt, et } \mu(A^c) = 0 \text{ ja iga } x \in A \text{ korral } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Teisisõnu, $f_n \to f$ $\mu$-p.k. parajasti siis, kui hulk $\{x \in X\colon\ f_n(x) \not\to f(x)\}$ on $\mu$-hüljatav.

Märgime, et peaaegu kõikjal koonduvuse definitsioon laieneb ka juhule, kus funktsioonid $f$ ja $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, pole määratud mingis ruumi $X$ $\mu$-hüljatavas alamhulgas.

Eeldame nüüd täiendavalt, et funktsioonid $f$ ja $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, on mõõtuvad ning $\mu$-peaaegu kõikjal lõplikud.

**Definitsioon 5.4.** Öeldakse, et jada $(f_n)$ koondub funktsiooniks $f$ *mõõdu $\mu$ järgi ruumis* $X$ (ehk lihtsalt *mõõdu järgi,* kui ruumi $X$ ja mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge) ja kirjutatakse $f_n \to f$ mõõdu järgi või $\mu\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, kui

$$\text{iga } \delta > 0 \text{ korral } \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\}\Big) = 0.$$

(Juhime tähelepanu, et funktsioonide $f$ ja $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, mõõtuvus garanteerib, et $\big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\} \in \mathfrak{A}$.)

**Ülesanne 5.1.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu mõõtuvad funktsioonid $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \to f$ mõõdu järgi ja $f_n \to g$ mõõdu järgi. Tõestada (ilma teoreemi 5.3 kasutamata), et $f = g$ p.k.

Märgime, et mõõdu järgi koonduvuse definitsioon laieneb ka juhule, kus funktsioonid $f$ ja $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, pole määratud mingis ruumi $X$ nullmõõduga alamhulgas.

Eeldame nüüd täiendavalt, et $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$.

**Definitsioon 5.5.** Öeldakse, et jada $(f_n)$ koondub funktsiooniks $f$ *ruumis* $L_1$ (ehk 1-*keskmiselt* e. lihtsalt *keskmiselt*), kui

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0.$$

Juhime tähelepanu, et $\int |f_n - f| = \|f_n - f\|_{L_1}$; niisiis mõistetakse koonduvuse all ruumis $L_1$ (nagu nimetuse järgi oodata ongi) koonduvust Banachi ruumi $L_1$ normi järgi.

On ilmne, et (mõõduga ruumis)

$$\text{ühtlane koonduvus} \quad\Longrightarrow\quad \text{punktiviisi koonduvus} \quad\Longrightarrow\quad \text{koonduvus p.k.}$$

Samuti

$$\text{ühtlane koonduvus} \quad\Longrightarrow\quad \text{mõõdu järgi koonduvus.}$$

**Ülesanne 5.2.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, mõõtuvad funktsioonid. Tõestada, et kui $f_n \to f$ ühtlaselt ruumis $X$, siis ka $f_n \to f$ mõõdu järgi.

Vastupidised implikatsioonid üldjuhul ei kehti.

**Näide 5.1.** Olgu $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{L}$ ja $\mu = m$. (Meenutame, et sümbolid $\mathcal{L}$ ja $m$ tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i $\sigma$-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$.)

**1.** Defineerime funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, võrdustega

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}.$$

Siis $f_n \to 0$ ühtlaselt hulgas $X$.

**2.** Defineerime funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, võrdustega

$$f_n = \chi_{(n-1,n)}.$$

Siis $f_n \to 0$ punktiviisi, kuid mitte Lebesgue'i mõõdu järgi ruumis $\mathbb{R}$, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}\colon\ |f_n(x) - 0| \geqslant 1\}\big) = \mu\big((n-1, n)\big) = 1.$$

Niisiis, *punktiviisi koonduvusest (ning seega ka p.k. koonduvusest) ei järeldu üldjuhul koonduvust mõõdu järgi (ning seega ka ühtlast koonduvust).*

**3.** Defineerime funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, võrdustega

$$f_n = n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}.$$

Siis $f_n \to 0$ p.k. (sest iga $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral $f_n(x) \to 0$), kuid mitte punktiviisi (sest $f_n(0) \to \infty$). Niisiis, *koonduvusest peaaegu kõikjal ei järeldu üldjuhul punktiviisi koonduvust.*

Igaühes näidetest 1–3

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0|\, dm = \int_{\mathbb{R}} |f_n|\, dm = 1;$$

seega $f_n \not\to 0$ ruumis $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. Niisiis, *ühtlasest koonduvusest (ning seega ka punktiviisi koonduvusest ja koonduvusest peaaegu kõikjal) ei järeldu üldjuhul koonduvust ruumis $L_1$.*

**Ülesanne 5.3.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum ning olgu $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$. Tõestada, et kui $f_n \to f$ ühtlaselt ruumis $X$, siis ka $f_n \to f$ ruumis $L_1$.

**4.** Defineerime funktsioonid $f_n \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, võrdustega

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1)}, \quad f_2 = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}, \quad f_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)},\\
&f_4 = \chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}, \quad f_5 = \chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}, \quad f_6 = \chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)}, \quad f_7 = \chi_{\left[\frac{3}{4},1\right)},\\
&f_8 = \chi_{\left[0,\frac{1}{8}\right)}, \quad f_9 = \chi_{\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)}, \quad \ldots\ldots.
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} |f_n|\, dm = 0,$$

s.t. $f_n \to 0$ ruumis $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. Samal ajal iga $x \in [0,1)$ korral $f_n(x) \not\to 0$. Niisiis, *koonduvusest ruumis $L_1$ ei järeldu üldjuhul koonduvust peaaegu kõikjal.*

**Teoreem 5.1.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$. Kui*

(1) *$f_n \to f$ p.k.;*

(2) *leidub funktsioon $g \in L_1$ selliselt, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|f_n| \leqslant g$ p.k.,*

*siis $f_n \to f$ ruumis $L_1$.*

Tõestus. Kehtigu tingimused (1) ja (2). Piirprotsessis $n \to \infty$ järeldub tingimusest (2), et ka $|f| \leqslant g$ p.k. ning seega

$$|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g \quad \text{p.k.}$$

Kuna $2g \in L_1$ ning $|f_n - f| \to 0$ p.k., siis Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = \int 0 = 0,$$

s.t. $f_n \to f$ ruumis $L_1$. □

**Teoreem 5.2.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \to f$ ruumis $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Siis ka $f_n \to f$ mõõdu järgi.*

Teoreem 5.2 väidab, et *koonduvusest ruumis $L_1$ järeldub koonduvus mõõdu järgi.* Näitest 5.1, **4**, järeldub nüüd, et *koonduvusest mõõdu järgi ei järeldu koonduvust p.k.* (sest selles näites $f_n \to f$ ruumis $L_1$, seega teoreemi 5.2 põhjal ka $f_n \to f$ mõõdu järgi; samas ei kehtinud $f_n \to f$ p.k.).

TEOREEMI 5.2 TÕESTUS. Fikseerime vabalt $\delta > 0$ ja tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$E_n := \{x \in X\colon\ |f(x) - f_n(x)| \geqslant \delta\}.$$

Tõestamaks, et $f_n \to f$ mõõdu järgi, peame näitama, et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|f - f_n| \geqslant \delta$ hulgas $E_n$, seega

$$\mu(E_n) = \int \chi_{E_n} \leqslant \int \frac{|f - f_n|}{\delta}\,\chi_{E_n} = \frac{1}{\delta}\int |f - f_n|\,\chi_{E_n} \leqslant \frac{1}{\delta}\int |f - f_n|.$$

Kuna $f_n \to f$ ruumis $L_1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f - f_n| = 0$; seega järeldub viimasest võrratusteahelast, et ka $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. □

**Teoreem 5.3.** *Olgu* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *mõõduga ruum ning olgu mõõtuvad funktsioonid* $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, *sellised, et* $f_n \to f$ *mõõdu järgi. Siis*

(a) *leidub osajada* $(f_{k_n})$ *selliselt, et* $f_{k_n} \to f$ *p.k.;*

(b) *kui mingi mõõtuva funktsiooni* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *korral* $f_n \to g$ *mõõdu järgi, siis* $f = g$ *p.k.*

TÕESTUS. (a). Kuna $f_n \to f$ mõõdu järgi, siis saame valida kasvava indeksite jada $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ selliselt, et

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) < \frac{1}{2^n} \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Tähistame

$$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Kuna

$$\begin{aligned}
\mu(A^c) &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0
\end{aligned}$$

(sest rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ koondub ja koonduva rea jääkliige koondub nulliks), s.t. $\mu(A^c) = 0$, siis piisab väite (a) tõestuseks näidata, et iga $x \in A$ korral $f_{k_n}(x) \to f(x)$.

Olgu $x \in A$. Siis leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \geqslant m$ korral $|f_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Kuna $\frac{1}{n} \to 0$, siis ka $|f_{k_n}(x) - f(x)| \to 0$.

(b). Olgu mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ selline, et $f_n \to g$ mõõdu järgi. Teoreemi väite (a) põhjal leidub leidub jada $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ osajada $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ selliselt, et $f_{k_n} \to g$ p.k. Kuna mõõdu järgi koonduva jada osajada järgi koondub mõõdu järgi samaks funktsiooniks, milleks esialgne jadagi, siis leidub teoreemi väite (a) põhjal jada $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ osajada $(f_{k_{l_n}})_{n=1}^{\infty}$ selliselt, et $f_{k_{l_n}} \to f$ p.k. Kuna ilmselt ka $f_{k_{l_n}} \to g$ p.k., siis $f = g$ p.k. □

**Järeldus 5.4.** *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L_1$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \to f$ ruumis $L_1$. Siis leidub osajada $(f_{k_n})$ selliselt, et $f_{k_n} \to f$ p.k.*

TÕESTUS. Väide järeldub vahetult teoreemidest 5.2 ja 5.3, (a). □

**Teoreem 5.5** (Jegorovi[2] teoreem[3]). *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum (s.t. $\mu(X) < \infty$) ning olgu peaaegu kõikjal lõplikud mõõtuvad funktsioonid $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \to f$ p.k. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A^c) < \varepsilon$ ning $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas $A$.*

TÕESTUS. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Olgu hulk $B \in \mathfrak{A}$ selline, et $\mu(B^c) = 0$ ning iga $x \in B$ korral $|f(x)|, |f_n(x)| < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, ja $f_n(x) \to f(x)$. Tähistame kõikide $k, m \in \mathbb{N}$ korral

$$B_m^k := \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in B\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\};$$

siis iga $k \in \mathbb{N}$ korral $B_1^k \subset B_2^k \subset B_3^k \subset \cdots$, kusjuures $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k = B$.

**Ülesanne 5.4.** Tõestada, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k = B$.

Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu(B_m^k) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu(B) = \mu(X)$$

ning mõõdu $\mu$ lõplikkuse tõttu järelikult

$$\mu\left({B_m^k}^c\right) = \mu(X \setminus B_m^k) = \mu(X) - \mu(B_m^k) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral leidub indeks $m(k) \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\mu\left({B_{m(k)}^k}^c\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tähistame

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{m(k)}^k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=m(k)}^{\infty} \left\{ x \in B\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\};$$

[2]Dmitri Jegorov / Дмитрий Фёдорович Егоров (1869–1931) — vene/nõukogude matemaatik.

[3]Itaalia matemaatik Carlo Severini (1872–1951) avaldas selle teoreemi tõestuse aasta varem kui Jegorov ise (vastavalt 1910 ja 1911)!

siis

$$\mu(A^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} {B^k_{m(k)}}^c\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left({B^k_{m(k)}}^c\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

ning seega jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas $A$.

**Ülesanne 5.5.** Tõestada, et $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas $A$.

□

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, peaaegu kõikjal lõplikud funktsioonid.

**Definitsioon 5.6.** Öeldakse, et jada $(f_n)$ koondub funktsiooniks $f$ *$\mu$-peaaegu ühtlaselt ruumis $X$* (või lihtsalt *peaaegu ühtlaselt,* kui ruumi $X$ ja mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge), kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A^c) < \varepsilon$ ja $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas $A$.

Jegorovi teoreem väidab niisiis, et *lõpliku mõõduga ruumis järeldub (peaaegu kõikjal lõplike mõõtuvate funktsioonide) peaaegu kõikjal koonduvusest peaaegu ühtlane koonduvus.*

**Teoreem 5.6.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum (s.t. $\mu(X) < \infty$) ning olgu peaaegu kõikjal lõplikud mõõtuvad funktsioonid $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellised, et $f_n \to f$ p.k. Siis ka $f_n \to f$ mõõdu järgi.*

Teoreem 5.6 väidab niisiis, et *lõpliku mõõduga ruumis järeldub (peaaegu kõikjal lõplike mõõtuvate funktsioonide) peaaegu kõikjal koonduvusest koonduvus mõõdu järgi.*

TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks peame näitama, et iga $\delta > 0$ korral

$$\lim_{n\to\infty} \mu\bigl(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\bigr) = 0. \tag{5.1}$$

Fikseerime vabalt $\delta > 0$. Võrduse (5.1) kehtivuseks peame näitama, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad\Longrightarrow\quad \mu\bigl(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\bigr) < \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Jegorovi teoreemi põhjal leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A^c) < \varepsilon$ ja $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas $A$. Valime indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad\Longrightarrow\quad |f_n(x) - f(x)| < \delta \text{ iga } x \in A \text{ korral.}$$

Seega, kui $n \geqslant N$, siis $\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\} \subset A^c$ ning järelikult

$$\mu\bigl(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\bigr) \leqslant \mu(A^c) < \varepsilon.$$

□

**Teoreem 5.7** (Luzini[4] teoreem)**.** *Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub kompaktne hulk $K \subset [a,b]$ selliselt, et $m\big([a,b] \setminus K\big) < \varepsilon$ ja $f|_K$ on pidev.*

Sümbol $m$ tähistab siin Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$.

LUZINI TEOREEMI 5.7 TÕESTUS.

*__Ülesanne 5.6.__ Tõestada Luzini teoreem 5.7.

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi 3.10 (või teoreemi 3.9) ja Jegorovi teoreemi.

$\square$

## Harjutusülesandeid

**Ülesanne 5.7.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu funktsioonid $f, g, f_n, g_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, p.k. lõplikud, kusjuures $f = g$ p.k. ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n = g_n$ p.k. Tõestada, et kui $f_n \to f$ mõõdu järgi, siis ka $g_n \to g$ mõõdu järgi.

**Ülesanne 5.8.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu funktsioonid $f, g, f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, p.k. lõplikud. Tõestada, et kui $f_n \to f$ p.k. ja $f_n \to g$ mõõdu järgi, siis $f = g$ p.k.

**Ülesanne 5.9.** Tähistagu sümbol $m$ Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$. Teha kindlaks, kas jada $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub

(1) $m$-p.k. ruumis $\mathbb{R}$ (või koguni punktiviisi ruumis $\mathbb{R}$);

(2) mõõdu $m$ järgi ruumis $\mathbb{R}$,

kui funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, on defineeritud võrdustega

(a) $f_n = \chi_{(n,n+1)}$;

(b) $f_n = (-1)^n\, n\, \chi_{[0,\frac{1}{n})}$;

(c) $f_n = \frac{1}{n}\, \chi_{[\frac{1}{n},\infty)}$;

(d) $f_n = \big(2 - \frac{1}{n}\big)\, \chi_{[n-1,n]}$;

(e) $f_n = (-1)^n\, n\, \chi_{[n,2n]}$;

(f) $f_n = \big(3 - \frac{1}{n}\big)\, \chi_{[-n,n]}$;

(g) $f_n = \chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}$.

[4] Nikolai Luzin / Николай Николаевич Лузин (1883–1950) — vene/nõukogude matemaatik.

# III peatükk.
# Korrutismõõdud

## § 1. Korrutis-$\sigma$-algebrad

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $X_1, \ldots, X_n$ mittetühjad hulgad. Meenutame, et hulkade $X_1, \ldots, X_n$ otsekorrutiseks nimetatakse hulka

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \prod_{j=1}^{n} X_n := \big\{(x_j)_{j=1}^n \colon\ x_j \in X_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}$$
$$= \big\{(x_1, \ldots, x_n) \colon\ x_j \in X_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}.$$

Otsekorrutis $X_1 \times \cdots \times X_n$ on niisiis kõikvõimalike selliste $n$-komponendiliste järjendite hulk, mille $j$-s komponent kuulub hulka $X_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral saame me defineerida kujutuse

$$\pi_j \colon\ X_1 \times \cdots \times X_n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_j \in X_j.$$

Seda kujutust nimetatakse otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ *$j$-ndaks koordinaatfunktsiooniks*. Otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ $j$-s koordinaatfunktsioon seab niisiis selle otsekorrutise igale järjendile vastavusse tema $j$-nda komponendi.

Olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n)$ mõõtuvad ruumid (s.t. kogumid $\mathfrak{A}_j \subset \mathcal{P}(X_j)$ on $\sigma$-algebrad).

**Definitsioon 1.1.** Vähimat otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ alamhulkade $\sigma$-algebrat, mille suhtes kõik selle otsekorrutise koordinaatfunktsioonid on mõõtuvad, nimetatakse $\sigma$-algebrate $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *korrutis-$\sigma$-algebraks* ja tähistatakse sümboliga

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n \quad \text{või} \quad \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j.$$

Mõõtuvuse definitsioonist järeldub, et

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma\left(\left\{\pi_j^{-1}(A) \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}\right). \tag{1.1}$$

Tõepoolest, kui $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$ on $\sigma$-algebra ja $j \in \{1, \ldots, n\}$, siis vastavalt definitsioonile tähendab koordinaatfunktsiooni $\pi_j$ mõõtuvus $\mathfrak{A}$ suhtes (täpsemalt, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_j)$-mõõtuvus), et

$$\pi_j^{-1}(A) \in \mathfrak{A} \text{ iga } A \in \mathfrak{A}_j \text{ korral.}$$

Niisiis, kõik otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ koordinaatfunktsioonid on $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$ suhtes mõõtuvad parajasti siis, kui

$$\mathfrak{A} \supset \left\{\pi_j^{-1}(A) \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}.$$

Siit järeldub, et vähim otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ alamhulkade $\sigma$-algebra, mille suhtes kõik tema koordinaatfunktsioonid on mõõtuvad, on vähim kogumit $\left\{\pi_j^{-1}(A) \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}$ sisaldav $\sigma$-algebra ehk, teisisõnu, kehtib (1.1).

Kuna mis tahes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $A \in \mathfrak{A}_j$ korral

$$\begin{aligned}\pi_j^{-1}(A) &= \left\{x = (x_k)_{k=1}^n \in \prod_{k=1}^n X_k \colon\ \pi_j(x) \in A\right\} = \left\{(x_k)_{k=1}^n \in \prod_{k=1}^n X_k \colon\ x_j \in A\right\} \\ &= X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n,\end{aligned}$$

siis võib valemi (1.1) esitada ka kujul

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = \sigma\left(\left\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}\right).$$

**Teoreem 1.1.** *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n)$ mõõtuvad ruumid. Siis*

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = \sigma\Big(\big\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon\ A_j \in \mathfrak{A}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}\Big).$$

TÕESTUS. Tähistame

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \big\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\big\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \big\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon\ A_j \in \mathfrak{A}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}.\end{aligned}$$

Kuna $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = \sigma(\mathcal{F}_1)$, siis piisab teoreemi tõestuseks näidata, et $\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

Sisalduvus $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$ on ilmne, sest $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Veendume, et ka $\sigma(\mathcal{F}_2) \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$. Kuna $\sigma(\mathcal{F}_1)$ on $\sigma$-algebra, siis piisab selleks veenduda, et $\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$ (vt. lemmat I.2.1). Mis tahes $A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{F}_2$ ($A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$) korral

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \bigcap_{j=1}^n X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \in \sigma(\mathcal{F}_1);$$

järelikult $\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$. $\square$

**Teoreem 1.2.** *Olgu $n \in \mathbb{N}$, olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n)$ mõõtuvad ruumid ning olgu kogumid $\mathcal{E}_j \subset \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, sellised, et iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\sigma(\mathcal{E}_j) = \mathfrak{A}_j$ (s.t. kogum $\mathcal{E}_j$ genereerib $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}_j$). Siis*

(a)

$$\begin{aligned}\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j &= \sigma\left(\left\{\pi_j^{-1}(A)\colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{E}_j\right\}\right)\\ &= \sigma\left(\left\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n\colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{E}_j\right\}\right);\end{aligned}$$

(b) *kui $\mathcal{E}_j \ni X_j$, $j = 1, \ldots, n$, siis*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma\Big(\big\{A_1 \times \cdots \times A_n\colon\ A_j \in \mathcal{E}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}\Big).$$

TÕESTUS. (a).

**Ülesanne 1.1.** Tõestada väide (a).

NÄPUNÄIDE. Arutleda, nagu valemi (1.1) põhjenduses, rakendades seal funktsiooni mõõtuvuse definitsiooni asemel teoreemi II.1.1.

(b). Olgu $\mathcal{E}_j \ni X_j$, $j = 1, \ldots, n$. Tähistame

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 &= \big\{A_1 \times \cdots \times A_n\colon\ A_j \in \mathfrak{A}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\},\\ \mathcal{F}_3 &= \big\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n\colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{E}_j\big\},\\ \mathcal{F}_4 &= \big\{A_1 \times \cdots \times A_n\colon\ A_j \in \mathcal{E}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}.\end{aligned}$$

Väite tõestuseks peame näitama, et $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma(\mathcal{F}_4)$. Kuna teoreemi 1.1 ja väite (a) põhjal $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma(\mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_3)$, siis piisab näidata, et $\sigma(\mathcal{F}_3) \subset \sigma(\mathcal{F}_4) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$, mis on ilmne, sest $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_4 \subset \mathcal{F}_2$. $\square$

Meenutame, et kui $n \in \mathbb{N}$ ning $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ on meetrilised ruumid, siis otsekorrutis $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ on meetriline ruum järgmise võrdusega defineeritud kauguse $\rho$ — nn. *korrutismeetrika* suhtes:

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \rho_j(x_j, y_j), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in X.$$

**Ülesanne 1.2.** Olgu $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ meetrilised ruumid ning olgu $(X, \rho)$ nende korrutisruum. Tõestada, et

(a) kui $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ ja $r > 0$, siis

$$B(x, r) = \prod_{j=1}^{n} B(x_j, r)$$

($B(x, r)$ tähistab lahtist kera keskpunktiga $x$ ja raadiusega $r$);

(b) kui ruumid $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ on separaablid, siis ka korrutisruum $X$ on separaabel.

**Teoreem 1.3.** *Olgu $n \in \mathbb{N}$, olgu $X_1, \ldots, X_n$ meetrilised ruumid ning olgu otsekorrutis $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ varustatud korrutismeetrikaga. Siis*

(a)
$$\mathcal{B}_X \supset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$$
*(sümbol $\mathcal{B}_X$ tähistab ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat);*

(b) *kui ruumid $X_1, \ldots, X_n$ on separaablid, siis*
$$\mathcal{B}_X = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}.$$

Tõestus. (a). Kuna Boreli $\sigma$-algebra definitsiooni põhjal $\mathcal{B}_{X_j} = \sigma(\tau_{X_j})$, $j = 1, \ldots, n$ (meenutame, et sümbol $\tau_{X_j}$ tähistab ruumi $X_j$ lahtiste alamhulkade kogumit), siis teoreemi 1.2, (a), põhjal $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} = \sigma(\mathcal{E})$, kus
$$\mathcal{E} = \Big\{ X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ U \in \tau_{X_j} \Big\}.$$
Seega piisab väite tõestuseks näidata, et $\mathcal{E} \subset \tau_X$, s.t. kogumi $\mathcal{E}$ iga hulk on lahtine hulk ruumis $X$, sest sel juhul $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\tau_X) = \mathcal{B}_X$.

**Ülesanne 1.3.** Veenduda, et $\mathcal{E} \subset \tau_X$.

(b). Olgu ruumid $X_1, \ldots, X_n$ separaablid. Kuna väite (a) põhjal $\mathcal{B}_X \supset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$, siis jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $\mathcal{B}_X \subset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$. Selleks aga piisab näidata, et tähistades
$$\mathcal{G} := \big\{ U_1 \times \cdots \times U_n \colon\ U_j \in \tau_{X_j},\ j = 1, \ldots, n \big\},$$
kehtib sisalduvus $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$.

Tõepoolest, kuna Boreli $\sigma$-algebra definitsiooni põhjal $\sigma(\tau_{X_j}) = \mathcal{B}_{X_j}$, $j = 1, \ldots, n$, siis teoreemi 1.2, (b), põhjal $\sigma(\mathcal{G}) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$ ning järelikult sisalduvuse $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$ kehtides
$$\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}.$$

Veendume, et $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$. Olgu $U \in \tau_X$ (s.t. $U$ on ruumi $X$ lahtine alamhulk). Kuna ruumid $X_1, \ldots, X_n$ on separaablid, siis ka korrutisruum $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ on separaabel (vt. ülesannet 1.2, (b)). *Ülesande 2.8 põhjal esitub hulk $U$ lahtiste kerade loenduva ühendina, s.t.
$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x^k, r_k), \text{ kus } x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in X_1 \times \cdots \times X_n = X,\ r_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots.$$
Aga nüüd ülesande 1.2, (a), põhjal
$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x^k, r_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_1^k, r_k) \times \cdots \times B(x_n^k, r_k) \in \sigma(\mathcal{G});$$
järelikult $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$. $\square$

Meenutame, et sümboliga $\mathbb{R}^n$ tähistame me meetrilist ruumi $(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}}, d)$, kus kaugus $d$ on defineeritud võrdusega

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^2},\quad x=(x_1,\dots,x_n),y=(y_1,\dots,y_n)\in\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}}.$$

**Teoreem 1.4.** *Olgu $n\in\mathbb{N}$. Siis*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}=\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ tegurit}}.$$

TÕESTUS. Olgu $\rho$ ruumi $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}}$ korrutismeetrika, s.t.

$$\rho(x,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j-y_j|,\quad x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}}.$$

Teoreemi 1.3, (b), põhjal $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ tegurit}}=\mathcal{B}_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}},\rho)}$. Kuna

$$\tau_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}},\rho)}=\tau_{\mathbb{R}^n}$$

(s.t. ruumides $(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}},\rho)$ ja $\mathbb{R}^n$ on ühed ja samad lahtised hulgad), siis

$$\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ tegurit}}=\mathcal{B}_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}},\rho)}=\sigma(\tau_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}},\rho)})=\sigma(\tau_{\mathbb{R}^n})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

**Ülesanne 1.4.** Veenduda, et $\tau_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ tegurit}},\rho)}=\tau_{\mathbb{R}^n}$.

□

**Ülesanne 1.5.** Tõestada, et kui $E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $z\in\mathbb{R}^n$ ja $r\in\mathbb{R}$, siis ka $E+z\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ja $rE\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

NÄPUNÄIDE. Veenduda, et kogum $\mathcal{E}=\{E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\colon E+r\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ja $rE\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ iga $r\in\mathbb{R}$ korral$\}$ on $\sigma$-algebra, kusjuures $\mathcal{E}$ sisaldab mingi $\sigma$-algebrat $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ genereeriva kogumi $\mathcal{E}_1$.

**Märkus 1.1.** Kui $X_1$, $X_2$ ja $X_3$ on mingid (mittetühjad) hulgad, siis me võime loomulikul viisil samastada otsekorrutised

$$X_1\times X_2\times X_3,\quad (X_1\times X_2)\times X_3\quad \text{ja}\quad X_1\times(X_2\times X_3).$$

Üldisemalt, kui $n\in\mathbb{N}$ ja $X_1,\dots,X_n$ on mingid (mittetühjad) hulgad, siis me võime loomulikul viisil samastada otsekorrutised

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\quad (X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n\quad \text{ja}\quad X_1\times(X_2\times\cdots\times X_n).$$

Seda arvestades saab näidata, et $\sigma$-algebrate "korrutamine" on assotsiatiivne, s.t. kui $(X_1,\mathfrak{A}_1)$, $(X_2,\mathfrak{A}_2)$ ja $(X_3,\mathfrak{A}_3)$ on mõõtuvad ruumid, siis

$$\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3=(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)\otimes\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3),$$

ning, üldisemalt, kui $n\in\mathbb{N}$ ja $(X_1,\mathfrak{A}_1),\dots,(X_n,\mathfrak{A}_n)$ on mõõtuvad ruumid, siis

$$\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_n=(\mathfrak{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_{n-1})\otimes\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_n).$$

# § 2. Korrutismõõdud

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ mõõduga ruumid.

**Definitsioon 2.1.** Olgu $A \in \mathfrak{A}$ ja $B \in \mathfrak{B}$. Hulka

$$A \times B = \big\{(x, y) \in X \times Y \colon\ x \in A,\ y \in B\big\}$$

nimetatakse $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-*mõõtuvaks ristkülikuks* (ehk lihtsalt *mõõtuvaks ristkülikuks*). Hulki $A$ ja $B$ nimetatakse selle ristküliku *külgedeks.*

Selles paragrahvis konstrueerime ühe mõõdu korrutis-$\sigma$-algebral $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, mida me hakkame nimetama *mõõtude $\mu$ ja $\nu$ korrutismõõduks* ning tähistama sümboliga $\mu\times\nu$. Nimetus “mõõtude $\mu$ ja $\nu$ korrutismõõt” on mõõdu $\mu\times\nu$ puhul igati õigustatud, sest me konstrueerime ta selliselt, et iga mõõtuva ristküliku $A \times B \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B),$$

s.t. mõõtuva ristküliku korrutismõõt on võrdne tema külgede mõõtude korrutisega.

Tähistame

$$\mathcal{A}_0 = \{A \times B\colon\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\},$$

s.t. $\mathcal{A}_0$ on kõigi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute kogum, ning

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} E_j\colon\ n \in \mathbb{N},\ E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}_0,\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j\right\},$$

s.t. $\mathcal{A}$ on kõigi paarikaupa lõikumatute $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite kogum. Kuna $\mathcal{A}_0$ on poolalgebra, siis teoreemi I.2.5 põhjal on kogum $\mathcal{A}$ algebra.

**Ülesanne 2.1.** Tõestada, et kõigi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute kogum $\mathcal{A}_0$ on poolalgebra.

Defineerime hulgafunktsiooni $\rho\colon\ \mathcal{A} \to [0, \infty]$ võrdusega

$$\rho(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\,\nu(B_j), \quad E \in \mathcal{A}, \tag{2.1}$$

kus paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvad ristkülikud $A_1 \times B_1, \dots, A_n \times B_n$ $(n \in \mathbb{N})$, on sellised, et

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j. \tag{2.2}$$

Siis

(1) hulgafunktsioon $\rho$ on korrektselt defineeritud, s.t. tema definitsioon ei sõltu hulga $E$ esitusest kujul (2.2) — täpsemalt, kui paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuvad ristkülikud $A_1' \times B_1', \dots, A_m' \times B_m'$ $(m \in \mathbb{N})$, on sellised, et $E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i' \times B_i'$, siis

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i')\,\nu(B_i') = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\,\nu(B_j);$$

(2) hulgafunktsioon $\rho$ on mõõt;

(3) mõõt $\rho$ on ainus mõõt algebral $\mathcal{A}$, mille puhul mõõtuva ristküliku mõõt on tema külgede mõõtude korrutis.

Väited (1)–(3) järelduvad ülesandest I.3.10 ja järgnevast lemmast.

**Lemma 2.1.** *Olgu $A \times B \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ mõõtuv ristkülik, olgu $J$ mingi ülimalt loenduv indeksite hulk ning olgu paarikaupa lõikumatud mõõtuvad ristkülikud $A_j \times B_j \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, $j \in J$, sellised, et*

$$A \times B = \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j.$$

*Siis*

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j \in J} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

**Ülesanne 2.2.** Järeldada ülesandest I.3.10 ja lemmast 2.1 väited (1)–(3).

LEMMA 2.1 TÕESTUSEKS piisab näidata, et

$$\text{iga } y \in Y \text{ korral} \quad \mu(A)\,\chi_B(y) = \sum_{j \in J} \mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y). \tag{2.3}$$

Tõepoolest, kui väide (2.3) kehtib, siis Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal (täpsemalt, teoreemi II.2.5 põhjal)

$$\begin{aligned}
\mu(A)\nu(B) &= \mu(A)\int_Y \chi_B(y)\,d\nu(y) = \int_Y \mu(A)\,\chi_B(y)\,d\nu(y) = \int_Y \sum_{j \in J} \mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y)\,d\nu(y) \\
&= \sum_{j \in J} \int_Y \mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y)\,d\nu(y) = \sum_{j \in J} \mu(A_j) \int_Y \chi_{B_j}(y)\,d\nu(y) = \sum_{j \in J} \mu(A_j)\nu(B_j).
\end{aligned}$$

Tõestame väite (2.3). Olgu $y \in Y$, siis monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}
\mu(A)\,\chi_B(y) &= \chi_B(y) \int_X \chi_A(x)\,d\mu(x) = \int_X \chi_A(x)\,\chi_B(y)\,d\mu(x) \\
&= \int_X \chi_{A \times B}(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \chi_{\bigcup_{j \in J} A_j \times B_j}(x,y)\,d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{j \in J} \chi_{A_j \times B_j}(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \sum_{j \in J} \chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{j \in J} \int_X \chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y)\,d\mu(x) = \sum_{j \in J} \chi_{B_j}(y) \int_X \chi_{A_j}(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{j \in J} \mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y).
\end{aligned}$$

□

Olgu $\rho^*\colon \mathcal{P}(X\times Y)\to[0,\infty]$ mõõduga $\rho\colon \mathcal{A}\to[0,\infty]$ assotsieeruv välismõõt, s.t. $E\in\mathcal{P}(X\times Y)$ korral

$$\begin{aligned}\rho^*(E) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\rho(E_j)\colon\ E_j\in\mathcal{A}, j=1,2,\dots,\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right\}\\ &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\nu(B_j)\colon\ A_j\in\mathfrak{A}, B_j\in\mathfrak{B}, j=1,2,\dots,\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\times B_j\right\}.\end{aligned}$$

Tähistame

$$\mu\times\nu := \rho^*|_{\sigma(\mathcal{A})} = \rho^*|_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}.$$

**Ülesanne 2.3.** Veenduda, et $\sigma(\mathcal{A})=\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$.

Hahni teoreemi põhjal on hulgafunktsioon $\mu\times\nu\colon \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to[0,\infty]$ mõõt; seejuures on $\mu\times\nu$ mõõdu $\rho$ jätk $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathcal{A})=\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$.

Mõõtu $\mu\times\nu$ nimetatakse mõõtude $\mu$ ja $\nu$ *korrutismõõduks.* Mõõduga ruumi

$$(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$$

nimetatakse *ruumide* $(X,\mathfrak{A},\mu)$ *ja* $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ *korrutisruumiks.*

Märgime, et kui $A\times B$ on $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuv ristkülik, siis $A\times B\in\mathcal{A}$ ning järelikult

$$\mu\times\nu(A\times B)=\rho(A\times B)=\mu(A)\nu(B),$$

s.t. mõõtuva ristküliku korrutismõõt on tema külgede mõõtude korrutis.

Paneme tähele, et kui ruumid $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ on $\sigma$-lõplikud, siis eelmõõduga ruum $(X\times Y,\mathcal{A},\rho)$ on $\sigma$-lõplik ning järelikult ka korrutisruum $(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$ on $\sigma$-lõplik.

**Ülesanne 2.4.** Tõestada, et kui ruumid $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ on $\sigma$-lõplikud, siis ka

(a) eelmõõduga ruum $(X\times Y,\mathcal{A},\rho)$ on $\sigma$-lõplik;

(b) korrutisruum $(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$ on $\sigma$-lõplik.

Seega, kui ruumid $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ on $\sigma$-lõplikud, siis Hahni teoreemi põhjal on korrutismõõt $\mu\times\nu$ mõõdu $\rho$ ainus jätk korrutis-$\sigma$-algebrale $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Mõõt $\rho$ on ainus selline mõõt algebral $\mathcal{A}$, mille puhul iga $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuva ristküliku $A\times B$ mõõt on tema külgede mõõtude korrutis. Niisis, *kui ruumid* $(X,\mathfrak{A},\mu)$ *ja* $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ *on* $\sigma$-*lõplikud, siis korrutismõõt* $\mu\times\nu$ *on ainus selline mõõt korrutis-*$\sigma$*-algebral* $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$*, et iga* $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$*-mõõtuva ristküliku* $A\times B$ *korral*

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\nu(B).$$

**Ülesanne 2.5.** Olgu $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ $\sigma$-lõplikud mõõduga ruumid ning olgu kogumid $\mathcal{C}\subset\mathfrak{A}$ ja $\mathcal{D}\subset\mathfrak{B}$ sellised, et

- leiduvad hulgad $C_j\in\mathcal{C}$, $j=1,2,\dots$, nii, et $\bigcup_{j=1}^{\infty}C_j\supset X$;

- $\mu = \lambda_1|_{\mathfrak{A}}$, kus välismõõt $\lambda_1\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda_1(C) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\colon\ A_j \in \mathcal{C},\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset C\right\}, \quad C \in \mathcal{P}(X);$$

- leiduvad hulgad $D_j \in \mathcal{D}$, $j = 1,2,\ldots$, nii, et $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset Y$;
- $\nu = \lambda_2|_{\mathfrak{B}}$, kus välismõõt $\lambda_2\colon \mathcal{P}(Y) \to [0,\infty]$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda_2(C) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\colon\ B_j \in \mathcal{D},\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset D\right\}, \quad D \in \mathcal{P}(Y).$$

Olgu mõõt $\rho$ defineeritud võrdusega (2.1). Tõestada, et iga $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$ korral

$$\rho^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)\colon\ A_j \in \mathcal{C},\ B_j \in \mathcal{D},\ j = 1,2,\ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \supset E\right\} =: \lambda(E).$$

**Märkus 2.1.** Järgmise paragrahvi näites 3.1 veendume, et üldjuhul ei tarvitse mõõduga ruum $(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ olla täielik isegi siis, kui ruumid $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ on täielikud.

**Ülesanne 2.6.** Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ ja $(Y, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\nu})$ vastavalt mõõduga ruumide $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ täieldid. Tõestada, et

(a) korrutisruumide $(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ ja $(X\times Y, \overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu}\times\overline{\nu})$ täieldid $(X\times Y, \overline{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}, \overline{\mu\times\nu})$ ja $(X \times Y, \overline{\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}}, \overline{\overline{\mu}\times\overline{\nu}})$ on võrdsed;

(b) kui $\mu$ ja $\nu$ on $\sigma$-lõplikud, siis ruumi $(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ täield on $(X\times Y, \mathcal{M}(\rho^*), \rho^*|_{\mathcal{M}(\rho^*)})$, kus mõõt $\rho$ on defineeritud võrdusega (2.1).

NÄPUNÄIDE. Väite (b) tõestuseks kasutada järeldust I.4.7. Väite (a) tõestuseks on otstarbekas kõigepealt veenduda, et

(1) iga $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}$-mõõtuva ristküliku $C \times D$ korral leidub $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuv ristkülik $A \times B \supset C \times D$ nii, et $\mu(A)\,\nu(B) = \overline{\mu}(C)\,\overline{\nu}(D)$;

(2) $\pi^* = \rho^*$, kus mõõt $\rho$ on defineeritud võrdusega (2.1) ning mõõt $\pi$ on mõõdu $\rho$ analoog paarikaupa lõikumatute $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite algebral;

(3) $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, kusjuures $\mu\times\nu = \overline{\mu}\times\overline{\nu}|_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}$ (siin kasutada teoreemi 1.1);

(4) $\mathcal{N}(\mu\times\nu) = \mathcal{N}(\overline{\mu}\times\overline{\nu})$, s.t. hulk $N \in \mathcal{P}(X\times Y)$ on $\mu\times\nu$-hüljatav parajasti siis, kui ta on $\overline{\mu}\times\overline{\nu}$-hüljatav (siin kasutada ülesannet I.4.4, (b), ja lauset I.4.5);

(5) $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}$ (siin kasutada teoreemi 1.1 ja lemmat I.2.1).

**Ülesanne 2.7.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ $\sigma$-lõplikud mõõduga ruumid, kus $X$ ja $Y$ on Hausdorffi topoloogilised ruumid. Tõestada, et kui mõõdud $\mu$ ja $\nu$ on regulaarsed, siis ka korrutismõõt $\mu\times\nu$ on (korrutistopoloogia suhtes) regulaarne.

NÄPUNÄIDE. Korrutismõõdu $\mu\times\nu$ regulaarsuseks piisab ülesannete I.3.33 ja 2.6, (b), ning teoreemi I.5.4 põhjal näidata, et võrdusega (2.1) defineeritud mõõt $\rho$ on regulaarne.

**Märkus 2.2.** Kolme või enama mõõduga ruumi korrutisruum defineeritakse analoogiliselt kahe mõõduga ruumi juhuga.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ mõõduga ruumid. Kui $A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$, siis hulka

$$A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

nimetatakse $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$*-mõõtuvaks risttahukaks.* Hulki $A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$, nimetatakse selle risttahuka *servadeks.*

Tähistame sümboliga $\mathcal{A}_0$ kõigi $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$-mõõtuvate risttahukate kogumi ning tähega $\mathcal{A}$ kõigi kogumi $\mathcal{A}_0$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogumi, s.t.

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} E_i \colon \ m \in \mathbb{N},\, E_i \in \mathcal{A}_0,\, i = 1, \ldots, m,\, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \right\}.$$

Kuna kogum $\mathcal{A}_0$ on poolalgebra, siis teoreemi II.2.5 põhjal on kogum $\mathcal{A}$ algebra.

Defineerime hulgafunktsiooni $\rho \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ võrdusega

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^{m} \mu_1(A_1^i) \cdots \mu_n(A_n^i), \quad E \in \mathcal{A},$$

kus $m \in \mathbb{N}$ ning paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$-mõõtuvad ristkülikud $E_i = A_1^i \times \cdots \times A_n^i$, $i = 1, \ldots, m$, on sellised, et

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i. \tag{2.4}$$

Sarnaselt kahe mõõduga ruumi juhuga saab näidata, et

(1) hulgafunktsioon $\rho$ on korrektselt defineeritud, s.t. tema definitsioon ei sõltu hulga $E$ esitusest kujul (2.4);

(2) hulgafunktsioon $\rho$ on mõõt;

(3) mõõt $\rho$ on ainus mõõt algebral $\mathcal{A}$, mille puhul mõõtuva risttahuka mõõt on tema servade mõõtude korrutis.

Olgu $\rho^* \colon \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n) \to [0, \infty]$ mõõduga $\rho \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ assotsieeruv välismõõt, s.t.

$$\rho^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \colon \ E_j \in \mathcal{A},\, j \in \mathbb{N},\, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}, \quad E \in \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n).$$

Tähistame

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n := \rho^*|_{\sigma(\mathcal{A})} = \rho^*|_{\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n}.$$

Hahni teoreemi põhjal on hulgafunktsioon $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n \colon \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n \to [0, \infty]$ mõõt; seejuures on $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ mõõdu $\rho$ jätk $\sigma$-algebrale $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$.

Mõõtu $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ nimetatakse mõõtude $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *korrutismõõduks.* Mõõduga ruumi

$$(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$$

nimetatakse ruumide $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ *korrutisruumiks.*

Märgime, et kui $A_1 \times \cdots \times A_n$ on $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$-mõõtuv ristkülik, siis $A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{A}$ ning järelikult

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \rho(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n),$$

s.t. mõõtuva risttahuka korrutismõõt on tema servade mõõtude korrutis.

Analoogiliselt kahe mõõduga ruumi juhuga saab näidata, et *kui mõõduga ruumid* $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $\ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ *on $\sigma$-lõplikud, siis*

(a) *korrutisruum* $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ *on* $\sigma$*-lõplik;*

(b) *korrutismõõt* $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ *on ainus selline mõõt korrutis-*$\sigma$*-algebral* $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$*, et iga* $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$*-mõõtuva ristküliku* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *korral*

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n).$$

**Märkus 2.3.** Ülesannete 2.4–2.7 väidete analoogid jäävad kehtima, kui neis ülesannetes vaadelda kahe mõõduga ruumi korrutisruumi asemel kolme või enama mõõduga ruumi korrutisruumi.

**Märkus 2.4.** Saab näidata, et mõõtude "korrutamine" on assotsiatiivne, s.t. kui $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ ja $(X_3, \mathfrak{A}_3, \mu_3)$ on mõõduga ruumid, siis

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3),$$

ning, üldisemalt, kui $n \in \mathbb{N}$ ja $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ on mõõduga ruumid, siis

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_{n-1}) \times \mu_n = \mu_1 \times (\mu_2 \times \cdots \times \mu_n).$$

# § 3. Fubini-Tonelli teoreemid

## 3.1. Hulga lõiked. Funktsiooni lõiked

**Definitsioon 3.1.** Olgu $X$, $Y$ ja $Z$ mittetühjad hulgad, olgu $E \subset X \times Y$ ning olgu $f\colon X \times Y \to Z$.

Olgu $x \in X$. Hulka

$$E_x := \{y \in Y\colon (x, y) \in E\} \in \mathcal{P}(Y)$$

nimetatakse hulga $E$ *$x$-lõikeks.* Funktsiooni $f_x\colon Y \to Z$,

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y,$$

nimetatakse funktsiooni $f$ *$x$-lõikeks.*

Olgu $y \in Y$. Hulka

$$E^y := \{x \in X\colon (x, y) \in E\} \in \mathcal{P}(X)$$

nimetatakse hulga $E$ *$y$-lõikeks.* Funktsiooni $f^y\colon X \to Z$,

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X,$$

nimetatakse funktsiooni $f$ *$y$-lõikeks.*

**Ülesanne 3.1.** Olgu $X$ ja $Y$ mittetühjad hulgad ning olgu $x \in X$. Tõestada, et

(a) kui $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$, siis $(E^c)_x = (E_x)^c$;

(b) kui $J$ on mingi indeksite hulk ja $E_j \in \mathcal{P}(X \times Y)$, $j \in J$, siis

$$\Big(\bigcup_{j\in J} E_j\Big)_x = \bigcup_{j\in J} (E_j)_x \quad \text{ja} \quad \Big(\bigcap_{j\in J} E_j\Big)_x = \bigcap_{j\in J} (E_j)_x;$$

(c) kui $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$, siis $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$;

(d) kui $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, siis $(f^+)_x = (f_x)^+$ ja $(f^-)_x = (f_x)^-$;

(e) kui $Z \neq \emptyset$ ja $f\colon X \times Y \to Z$, siis iga $C \in \mathcal{P}(Z)$ korral $\big(f^{-1}[C]\big)_x = f_x^{-1}[C]$.

**Teoreem 3.1.** *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ ja $(Y, \mathfrak{B})$ mõõtuvad ruumid.*

(a) *Kui $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, siis*

(1) *$E_x \in \mathfrak{B}$ iga $x \in X$ korral;*

(2) *$E^y \in \mathfrak{A}$ iga $y \in Y$ korral.*

(b) *Olgu $(Z, \mathfrak{C})$ mõõtuv ruum ning olgu funktsioon $f\colon X \times Y \to Z$ $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuv. Siis*

(1) *funktsioon $f_x\colon Y \to Z$ on $\mathfrak{B}$-mõõtuv iga $x \in X$ korral;*

(2) *funktsioon $f^y\colon X \to Z$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv iga $y \in Y$ korral.*

TÕESTUS. (a). Tõestame ainult väite (1). Väide (2) tõestatakse analoogiliselt.

Fikseerime vabalt $x \in X$ ja tähistame

$$\mathcal{D} := \big\{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \colon\ E_x \in \mathfrak{B}\big\}.$$

Väite (1) tõestuseks piisab näidata, et $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$. Selleks piisab näidata, et

(A) $\mathcal{D} \supset \{A \times B \colon\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}$ (s.t. $\mathcal{D}$ sisaldab kõik $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvad ristkülikud);

(B) $\mathcal{D}$ on (hulga $X \times Y$ alamhulkade) $\sigma$-algebra.

Tõepoolest, kui kehtivad väited (A) ja (B), siis

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = \sigma(\{A \times B \colon\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

(A). Kui $A \in \mathfrak{A}$ ja $B \in \mathfrak{B}$, siis

$$(A \times B)_x = \{y \in Y \colon\ (x, y) \in A \times B\} = \begin{cases} B, & \text{kui } x \in A; \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin A. \end{cases}$$

Seega igal juhul $(A \times B)_x \in \mathfrak{B}$, s.t. $A \times B \in \mathcal{D}$.

(B). Kogum $\mathcal{D}$ on (hulga $X \times Y$ alamhulkade) $\sigma$-algebra ülesande I.2.14, [B], (a), põhjal.

(b). Tõestame ainult väite (1). Väide (2) tõestatakse analoogiliselt.

**Ülesanne 3.2.** Tõestada väide (1).

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesannet 3.1, (e).

□

**Näide 3.1.** Näitame, et mõõduga ruum $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, m \times m)$ ei ole täielik. (Sümbolid $\mathcal{L}$ ja $m$ tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i $\sigma$-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$.)

Olgu hulk $N \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ selline, et $m(N) = 0$ (niisuguseid hulki leidub — me võime hulgaks $N$ võtta näiteks ruumi $\mathbb{R}$ mis tahes ühepunktilise alamhulga), ning olgu $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}$ (meenutame, et järelduse I.5.9 põhjal $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Nüüd

$$N \times B \subset N \times \mathbb{R} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L},$$

kusjuures

$$m \times m\,(N \times \mathbb{R}) = m(N)\, m(\mathbb{R}) = 0\, m(\mathbb{R}) = 0,$$

seega hulk $N \times B$ on $m \times m$-hüljatav. Seejuures $N \times B \notin \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$.

Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $N \times B \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$. Siis, valides vabalt $x \in N$, järeldub teoreemist 3.1, et $B = (N \times B)_x \in \mathcal{L}$, vastuolu.

Seega mõõduga ruum $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, m \times m)$ ei ole täielik. Meenutame, et ruum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ on täielik.

## 3.2. Lemma monotoonsest klassist

Olgu $X$ mingi hulk.

**Definitsioon 3.2.** Kogumit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ nimetakse *(hulga $X$ alamhulkade) monotoonseks klassiks,* kui

1° $E_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$;

2° $E_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$

(s.t. $\mathcal{D}$ on kinnine oma hulkade monotoonsete loenduvate ühendite ja monotoonsete loenduvate ühisosade suhtes).

**Definitsioon 3.3.** Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Vähimat hulga $X$ alamhulkade monotoonset klassi, mis sisaldab kõiki kogumi $\mathcal{E}$ hulki, nimetatakse *kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud monotoonseks klassiks* ja tähistatakse sümboliga $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

**Ülesanne 3.3.** Tõestada, et etteantud kogumi poolt genereeritud monotoonne klass on alati olemas. Täpsemalt, tõestada, et kui $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, siis leidub (vähemalt üks) kogumit $\mathcal{E}$ sisaldav hulga $X$ alamhulkade monotoonne klass ning et niisuguste monotoonsete klasside seas on olemas vähim (s.t. leidub kogumit $\mathcal{E}$ sisaldav hulga $X$ alamhulkade monotoonne klass, mis sisaldub igas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavas hulga $X$ alamhulkade monotoonses klassis).

Kuna iga $\sigma$-algebra on monotoonne klass, siis mis tahes kogumi $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ korral $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. Järgnev teoreem näitab, et kui $\mathcal{E}$ on algebra, siis $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

**Teoreem 3.2** (lemma monotoonsest klassist)**.** *Olgu $X$ mingi mittetühi hulk ning olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra. Siis*

$$\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}),$$

*s.t. algebra poolt genereeritud $\sigma$-algebra on võrdne selle algebra poolt genereeritud monotoonse klassiga.*

TÕESTUS.

***Ülesanne 3.4.** Tõestada teoreem 3.2.

□

## 3.3. Fubini[1]–Tonelli[2] teoreemid

**Teoreem 3.3.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ $\sigma$-lõplikud mõõduga ruumid. Siis iga hulga $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral*

(a) *funktsioon $g_E \colon X \ni x \mapsto \nu(E_x) \in [0, \infty]$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv (s.t. $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$);*

(b) *funktsioon $h_E \colon Y \ni y \mapsto \mu(E^y) \in [0, \infty]$ on $\mathfrak{B}$-mõõtuv (s.t. $h_E \in L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu)$).*

*Seejuures*

$$\mu \times \nu(E) \overset{\text{(A)}}{=} \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

[1]Guido Fubini (1879–1943) — itaalia matemaatik.
[2]Leonida Tonelli (1885–1946) — itaalia matemaatik.

TÕESTUS. Tõestame vaid, et iga $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral kehtivad väide (a) ja võrdus (A). Väide (b) ja võrdus $\mu \times \nu(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$ tõestatakse analoogiliselt.

(I) Vaatleme kõigepealt juhtu, kus mõõduga ruumid $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ on lõplikud. Tähistame

$$\mathcal{D} := \big\{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \colon \text{ väide (a) ja võrdus (A) kehtivad}\big\}.$$

Veendumaks, et väide (a) ja võrdus (A) kehtivad iga hulga $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral, piisab näidata, et $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$. Selleks omakorda piisab näidata, et

(1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, kus $\mathcal{A}$ on kõigi paarikaupa lõikumatute $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite kogum;

(2) $\mathcal{D}$ on (hulga $X \times Y$ alamhulkade) monotoonne klass.

Tõepoolest, kui väited (1) ja (2) kehtivad, siis, arvestades, et $\mathcal{A}$ on algebra, järeldub lemma põhjal monotoonsest klassist, et

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

(1). Näitame, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{D}$, kus $\mathcal{A}_0$ on kõigi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute kogum.

Tõepoolest, kui $E = A \times B \in \mathcal{A}_0$ $(A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B})$, siis

$$E_x = (A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{kui } x \in A; \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin A, \end{cases}$$

järelikult

$$g_E(x) = \nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B), & \text{kui } x \in A; \\ 0, & \text{kui } x \notin A, \end{cases} = \nu(B)\,\chi_A(x).$$

Seega $g_E = \nu(B)\,\chi_A \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures

$$\int_X g_E\, d\mu = \int_X \nu(B)\,\chi_A\, d\mu = \nu(B)\mu(A) = \mu \times \nu(A \times B) = \mu \times \nu(E),$$

s.t. $E \in \mathcal{D}$.

Kui nüüd $E \in \mathcal{A}$, s.t. $E = \bigcup_{j=1}^n E_j$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_0$ on paarikaupa lõikumatud, siis iga $x \in X$ korral

$$g_E(x) = \nu\left(\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^n (E_j)_x\right) = \sum_{j=1}^n \nu\big((E_j)_x\big) = \sum_{j=1}^n g_{E_j}(x)$$

(sest hulgad $(E_1)_x, \ldots, (E_n)_x \in \mathfrak{B}$ on paarikaupa lõikumatud), s.t. $g_E = \sum_{j=1}^n g_{E_j} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ (sest kuna $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D}$, siis $g_{E_1}, \ldots, g_{E_n} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$); seejuures

$$\int_X g_E\, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^n g_{E_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_X g_{E_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^n \mu \times \nu(E_j) = \mu \times \nu(E).$$

Niisiis $E \in \mathcal{D}$ ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

(2). Näitame, et $\mathcal{D}$ on monotoonne klass, s.t. kehtivad implikatsioonid

1° $E_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$;

2° $E_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$.

1°. Olgu hulgad $E_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$. Peame näitama, et siis ka $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$, s.t.

$$g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu) \quad \text{ja} \quad \mu \times \nu(E) = \int_X g_E \, d\mu. \tag{3.1}$$

Selleks paneme tähele, et iga $x \in X$ korral

$$g_E(x) = \nu(E_x) = \nu\left(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x\right) = \lim_{j\to\infty} \nu\big((E_j)_x\big) = \lim_{j\to\infty} g_{E_j}(x)$$

(sest $(E_1)_x \subset (E_2)_x \subset (E_3)_x \subset \cdots$), niisiis mõõdu monotoonsuse tõttu $g_{E_j} \nearrow g_E$. Iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E_j \in \mathcal{D}$, seega $g_{E_j} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, järelikult teoreemi II.1.6 põhjal ka $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Arvestades jälle, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E_j \in \mathcal{D}$, saame Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal, et

$$\mu \times \nu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu \times \nu(E_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X g_{E_j} \, d\mu = \int_X g_E \, d\mu.$$

2°. Olgu hulgad $E_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. Peame näitama, et siis ka $E := \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$, s.t. kehtivad tingimused (3.1). Selleks paneme tähele, et iga $x \in X$ korral

$$g_E(x) = \nu(E_x) = \nu\left(\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big)_x\right) = \nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (E_j)_x\right) = \lim_{j\to\infty} \nu\big((E_j)_x\big) = \lim_{j\to\infty} g_{E_j}(x)$$

(sest $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset (E_3)_x \supset \cdots$ ja $\nu\big((E_1)_x\big) < \nu(Y) < \infty$), s.t. $g_{E_j} \to g_E$. Iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E_j \in \mathcal{D}$, seega $g_{E_j} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, järelikult teoreemi II.1.6 põhjal ka $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Mõõdu monotoonsuse tõttu iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$|g_{E_j}(x)| = \nu\big((E_j)_x\big) \leqslant \nu(Y) < \infty \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Arvestades jälle, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E_j \in \mathcal{D}$, saame Lebesgue'i tõkestatud koonduvuse teoreemi põhjal, et

$$\mu \times \nu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu \times \nu(E_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X g_{E_j} \, d\mu = \int_X g_E \, d\mu.$$

(II) Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam $\sigma$-lõplike mõõduga ruumide $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ lõplikkust).

Ruumide $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu leiduvad hulgad $X_j\in\mathfrak{A}$, $Y_j\in\mathfrak{B}$, $j=1,2,\ldots$, selliselt, et

$$\mu(X_j)<\infty,\ \ j{=}\,1,2,\ldots,\qquad \bigcup_{j=1}^{\infty}X_j=X,\qquad X_1\subset X_2\subset X_3\subset\cdots,$$
$$\nu(Y_j)<\infty,\ \ j{=}\,1,2,\ldots,\qquad \bigcup_{j=1}^{\infty}Y_j=Y,\qquad Y_1\subset Y_2\subset Y_3\subset\cdots.$$

Tähistame iga $j\in\mathbb{N}$ korral

$$\mathfrak{A}_j:=\big\{A\cap X_j\colon\ A\in\mathfrak{A}\big\},\quad \mu_j:=\mu|_{\mathfrak{A}_j},\quad \mathfrak{B}_j:=\big\{B\cap Y_j\colon\ B\in\mathfrak{B}\big\},\quad \nu_j:=\nu|_{\mathfrak{B}_j}.$$

Paneme tähele, et iga $j\in\mathbb{N}$ korral

(1) $(X_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)$ ja $(Y_j,\mathfrak{B}_j,\nu_j)$ on mõõduga ruumid;

(2) kui $f\in L^+(X_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)$, siis, defineerides

$$\widehat{f}(x)=\begin{cases}f(x), & \text{kui } x\in X_j;\\ 0, & \text{kui } x\notin X_j,\end{cases}\qquad x\in X,$$

kehtib $\widehat{f}\in L^+(X,\mathfrak{A},\mu)$, kusjuures $\int_X\widehat{f}\,d\mu=\int_{X_j}f\,d\mu_j$;

(3) $\mathfrak{A}_j\otimes\mathfrak{B}_j=\big\{E\cap(X_j\times Y_j)\colon\ E\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\big\}\subset\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$;

(4) $\mu_j\times\nu_j=\mu\times\nu|_{\mathfrak{A}_j\otimes\mathfrak{B}_j}$.

**Ülesanne 3.5.** Tõestada, et iga $j\in\mathbb{N}$ korral kehtivad väited (1)–(4).

Olgu $E\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Tõestame väite (a) ja võrduse (A). Tähistame iga $j\in\mathbb{N}$ korral

$$E_j:=E\cap(X_j\times Y_j)\in\mathfrak{A}_j\otimes\mathfrak{B}_j\subset\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}.$$

Kuna ruumid $(X_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)$ ja $(Y_j,\mathfrak{B}_j,\nu_j)$, $j=1,2,\ldots$, on lõplikud, siis tõestuse osa (I) põhjal iga $j\in\mathbb{N}$ korral

$$\text{funktsioon}\quad X_j\ni x\mapsto\nu_j\big((E_j)_x\big)\in[0,\infty]\quad\text{kuulub klassi } L^+(X_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j),$$

kusjuures

$$\mu_j\times\nu_j(E_j)=\int_{X_j}\nu_j\big((E_j)_x\big)\,d\mu_j(x).$$

Siit järeldub väite (2) põhjal, et iga $j\in\mathbb{N}$ korral

$$\text{funktsioon}\quad X\ni x\mapsto\nu_j\big((E_j)_x\big)=\nu\big((E_j)_x\big)\in[0,\infty]\quad\text{kuulub klassi } L^+(X,\mathfrak{A},\mu),$$

kusjuures

$$\mu\times\nu(E_j)=\mu_j\times\nu_j(E_j)=\int_{X_j}\nu_j\big((E_j)_x\big)\,d\mu_j(x)=\int_X\nu\big((E_j)_x\big)\,d\mu(x).$$

Paneme tähele, et iga $x\in X$ korral $\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j)_x=E_x$, kusjuures $(E_1)_x\subset(E_2)_x\subset(E_3)_x\subset\cdots$; järelikult

$$\nu\big((E_j)_x\big)\nearrow\nu(E_x)=g_E(x).$$

Seega $g_E\in L^+(X,\mathfrak{A},\mu)$, kusjuures Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_X \nu(E_x)\,d\mu(x) = \lim_{j\to\infty}\int_X \nu\big((E_j)_x\big)\,d\mu(x) = \lim_{j\to\infty}\mu\times\nu(E_j) = \mu\times\nu(E).$$

□

**Teoreem 3.4** (Tonelli teoreem). *Olgu $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ $\sigma$-lõplikud mõõduga ruumid ning olgu $f\in L^+(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$. Siis*

(a) *funktsioon $g\colon X\ni x\mapsto \int_Y f_x\,d\nu\in[0,\infty]$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv (s.t. $g\in L^+(X,\mathfrak{A},\mu)$);*

(b) *funktsioon $h\colon Y\ni y\mapsto \int_X f^y\,d\mu\in[0,\infty]$ on $\mathfrak{B}$-mõõtuv (s.t. $h\in L^+(Y,\mathfrak{B},\nu)$).*

*Seejuures*

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu \overset{\text{(A)}}{=} \int_X\left(\int_Y f_x\,d\nu\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f^y\,d\mu\right)d\nu(y). \tag{3.2}$$

**Märkus 3.1.** Sageli jäetakse valemis (3.2) sulud kirjutamata. Samuti eelistavad mõned autorid kirjutada selles valemis sümbolid $d\mu$ ja $d\nu$ vastupidises järjekorras. Niisiis kirjutatakse valem (3.2) tihtipeale ka kujul

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\times\nu(x,y) &= \int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\\ &= \int_X\int_Y f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_Y\int_X f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Tonelli teoreemi 3.4 tõestus. Tõestame ainult väite (a) ja võrduse (A). Väide (b) ja võrdus $\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu = \int_Y\left(\int_X f^y\,d\mu\right)d\nu(y)$ tõestatakse analoogiliselt.

(I) Tõestame väite (a) ja võrduse (A) kõigepealt juhul, kui $f\in L^+(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$ on lihtne mõõtuv funktsioon standardesitusega $f=\sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{E_j}$. Sel juhul iga $x\in X$ korral

$$f_x = \sum_{j=1}^n \alpha_j(\chi_{E_j})_x = \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{(E_j)_x}\in L^+(Y,\mathfrak{B},\nu),$$

järelikult

$$g(x) = \int_Y f_x\,d\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_j\nu\big((E_j)_x\big).$$

Kuna teoreemi 3.3 põhjal kuuluvad funktsioonid $X\ni x\mapsto\nu\big((E_j)_x\big)$, $j=1,\dots,n$, klassi $L^+(X,\mathfrak{A},\mu)$, siis ka $g\in L^+(X,\mathfrak{A},\mu)$; seejuures

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu &= \sum_{j=1}^n\alpha_j\mu\times\nu(E_j) = \sum_{j=1}^n\alpha_j\int_X\nu\big((E_j)_x\big)\,d\mu(x)\\ &= \int_X\sum_{j=1}^n\alpha_j\nu\big((E_j)_x\big)\,d\mu(x) = \int_X\left(\int_Y f_x\,d\nu\right)d\mu(x).\end{aligned}$$

(II) Vaatleme nüüd juhtu, kus $f \in L^+(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ on suvaline. Teoreemi II.1.7 põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n \in L^+(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\phi_n \nearrow f$. Nüüd monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_{X \times Y} f \, d\mu \times \nu = \lim_{n\to\infty} \int_{X \times Y} \phi_n \, d\mu \times \nu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \left( \int_Y (\phi_n)_x \, d\nu \right) d\mu(x)$$
$$\overset{(2)}{=} \int_X \left( \int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu(x).$$

Tõepoolest, tõestuse osa (I) põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral funktsioon $\psi_n \colon X \ni x \mapsto \int_Y (\phi_n)_x \, d\nu$ kuulub klassi $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures $\int_{X \times Y} \phi_n \, d\mu \times \nu = \int_X \left( \int_Y (\phi_n)_x \, d\nu \right) d\mu(x)$; niisiis kehtib (1). Kuna $\phi_n \nearrow f$, siis iga $x \in X$ korral $(\phi_n)_x \nearrow f_x$ ning seega monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal $\psi_n(x) = \int_Y (\phi_n)_x \, d\nu \nearrow \int_Y f_x \, d\nu = g(x)$, järelikult $g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures jällegi monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal kehtib (2).

□

**Järeldus 3.5.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ $\sigma$-lõplikud mõõduga ruumid.*

(a) *Olgu $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ selline, et $\mu \times \nu(E) = 0$. Siis*

(1) *$\nu(E_x) = 0$ $\mu$-p.k. $x \in X$ korral;*

(2) *$\mu(E_y) = 0$ $\nu$-p.k. $y \in Y$ korral.*

(b) *Olgu $\mu \times \nu$-p.k. määratud funktsioonid $f, g \colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et $f = g$ $\mu \times \nu$-p.k. Siis*

(1) *$\mu$-p.k. $x \in X$ korral*

$$f_x(y) = f(x, y) = g(x, y) = g_x(y) \quad \nu\text{-p.k. } y \in Y \text{ korral;}$$

(2) *$\nu$-p.k. $y \in Y$ korral*

$$f^y(x) = f(x, y) = g(x, y) = g^y(x) \quad \mu\text{-p.k. } x \in X \text{ korral.}$$

TÕESTUS. (a). Teoreemi 3.3 põhjal kuuluvad funktsioonid

$$X \ni x \mapsto \nu(E_x) \in [0, \infty] \quad \text{ja} \quad Y \ni y \mapsto \mu(E^y) \in [0, \infty]$$

vastavalt klassidesse $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu)$, kusjuures

$$\int_X \nu(E_x) \, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu(y) = \mu \times \nu(E) = 0.$$

Väited (1) ja (2) järelduvad nüüd vahetult teoreemist II.2.8.

(b). Olgu hulk $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ selline, et $f(x, y) = g(x, y)$ iga $(x, y) \in E$ korral ja $\mu \times \nu(E^c) = 0$.

Mis tahes $x \in X$ korral

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \text{iga } y \in E_x \text{ korral.}$$

Väite (a), (1), põhjal $\mu$-p.k. $x \in X$ korral $\nu\big((E_x)^c\big) = \nu\big((E^c)_x\big) = 0$, järelikult $\mu$-p.k. $x \in X$ korral $f(x, y) = g(x, y)$ $\nu$-p.k. $y \in Y$ korral.

Väide (2) tõestatakse analoogiliselt. □

**Teoreem 3.6** (Fubini teoreem)**.** *Olgu $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ $\sigma$-lõplikud mõõduga ruumid ning olgu $f\in L_1(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$. Siis*

(a) $f_x\in L_1(Y,\mathfrak{B},\nu)$ *$\mu$-p.k. $x\in X$ korral;*

(b) $f^y\in L_1(X,\mathfrak{A},\mu)$ *$\nu$-p.k. $y\in Y$ korral;*

(c) *$\mu$-p.k. määratud funktsioon $g\colon X\ni x\mapsto\int_Y f_x\,d\nu\in\overline{\mathbb{R}}$ on integreeruv (s.t. $g\in L_1(X,\mathfrak{A},\mu)$);*

(d) *$\nu$-p.k. määratud funktsioon $h\colon Y\ni y\mapsto\int_X f^y\,d\mu\in\overline{\mathbb{R}}$ on integreeruv (s.t. $h\in L_1(Y,\mathfrak{B},\nu)$).*

*Seejuures*

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu \overset{(A)}{=} \int_X\left(\int_Y f_x\,d\nu\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f^y\,d\mu\right)d\nu(y).$$

Fubini teoreemi 3.6 tõestus tugineb Tonelli teoreemile 3.4 ning järeldusele 3.5.

Fubini teoreemi 3.6 tõestus. Tõestame ainult väited (a) ja (c) ning võrduse (A). Väited (b) ja (d) ning võrdus $\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu=\int_Y\left(\int_X f^y\,d\mu\right)d\nu(y)$ tõestatakse analoogiliselt.

Kõigepealt vaatleme juhtu, kus $f$ on kõikjal ruumis $X\times Y$ määratud $\mathbb{R}$-väärtustega $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ mõõtuv funktsioon. Sel juhul teoreemi Tonelli teoreemi 3.4 põhjal

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d\mu\times\nu &= \int_{X\times Y} f^+\,d\mu\times\nu-\int_{X\times Y} f^-\,d\mu\times\nu\\ &=\int_X\left(\int_Y (f^+)_x\,d\nu\right)d\mu(x)-\int_X\left(\int_Y (f^-)_x\,d\nu\right)d\mu(x)\\ &=\int_X\left(\int_Y (f^+)_x\,d\nu-\int_Y (f^-)_x\,d\nu\right)d\mu(x)\\ &=\int_X\left(\int_Y (f_x)^+\,d\nu-\int_Y (f_x)^-\,d\nu\right)d\mu(x)\\ &=\int_X\left(\int_Y f_x\,d\nu\right)d\mu(x).\end{aligned}$$

Muuhulgas kehtivad (a) ja (c).

Tõepoolest, $(f_x)^\pm=(f^\pm)_x\in L^+(Y,\mathfrak{B},\nu)$; seejuures Tonelli teoreemi 3.4 põhjal funktsioonid

$$g_1\colon X\ni x\longmapsto\int_Y (f_x)^+\,d\nu \quad\text{ja}\quad g_2\colon X\ni x\longmapsto\int_Y (f_x)^-\,d\nu$$

kuuluvad klassi $L^+(X,\mathfrak{A},\mu)$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_X g_1\,d\mu &= \int_X\left(\int_Y (f_x)^+\,d\nu\right)d\mu(x)=\int_{X\times Y} f^+\,d\mu\times\nu<\infty\\ \int_X g_2\,d\mu &= \int_X\left(\int_Y (f_x)^-\,d\nu\right)d\mu(x)=\int_{X\times Y} f^-\,d\mu\times\nu<\infty,\end{aligned}$$

s.t. $g_1, g_2 \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Siit järeldub ka (teoreemi II.2.8 põhjal), et

$$\int_Y (f_x)^{\pm}\, d\nu < \infty \quad \mu\text{-p.k. } x \in X \text{ korral;}$$

niisiis $\mu$-p.k. $x \in X$ korral $f_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$. Samuti $\mu$-p.k. $x \in X$ korral

$$g(x) = \int_X f_x\, d\mu(x) = \int_X (f_x)^+\, d\mu(x) - \int_X (f_x)^-\, d\mu(x) = g_1(x) - g_2(x),$$

s.t. $g = g_1 - g_2$, järelikult $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Olgu nüüd $f \in L_1(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ suvaline. Siis leidub kõikjal ruumis $X \times Y$ määratud $\mathbb{R}$-väärtustega $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuv funktsioon $\widehat{f} \in L_1(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ nii, et $f = \widehat{f}$ $\mu \times \nu$-p.k. Järelduse 3.5 põhjal $\mu$-p.k. $x \in X$ korral $f_x = \widehat{f}_x$ $\nu$-p.k, järelikult $f_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ $\mu$-p.k. $x \in X$ korral (sest eelnevalt tõestatu põhjal $\widehat{f}_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ $\mu$-p.k. $x \in X$ korral), kusjuures

$$g(x) = \int_X f_x\, d\nu = \int_X \widehat{f}_x\, d\nu \quad \mu\text{-p.k. } x \in X \text{ korral.}$$

Siit järeldub, et $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ (sest eelnevalt tõestatu põhjal funktsioon $X \ni x \longmapsto \int_X \widehat{f}_x\, d\nu$ kuulub klassi $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$), kusjuures

$$\int_{X \times Y} f\, d\mu \times \nu = \int_{X \times Y} \widehat{f}\, d\mu \times \nu = \int_X \left( \int_Y \widehat{f}_x\, d\nu \right) d\mu = \int_X \left( \int_Y f_x\, d\nu \right) d\mu.$$

□

# § 4. Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$

Näites 3.1 veendusime, et mõõduga ruum

$$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, m\times m)$$

ei ole täielik (sümbolid $\mathcal{L}$ ja $m$ tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i $\sigma$-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$). Analoogiliselt saab näidata, et kui $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, siis korrutisruum

$$(\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathcal{L}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}}_{n \text{ tegurit}}, \underbrace{m\times\cdots\times m}_{n \text{ tegurit}})$$

pole täielik. Olgu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ selle ruumi täield. Kogumit $\mathcal{L}^n$ nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue'i $\sigma$-algebraks.* Selle kogumi hulki nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue'i hulkadeks.* Mõõtu $m^n$ nimetatakse *Lebesgue'i mõõduks ruumis $\mathbb{R}^n$.* Edaspidi tähistame Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}^n$ ka lihtsalt sümboliga $m$.

**Märkus 4.1.** Ülesandest 2.6, (a), koos märkusega 2.3 järeldub, et $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ on ka ruumi

$$(\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ tegurit}}, \underbrace{m\times\cdots\times m}_{n \text{ tegurit}})$$

täield ehk, kuna teoreemi 1.4 põhjal $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ tegurit}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, siis $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ on ruumi $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{m\times\cdots\times m}_{n \text{ tegurit}})$ täield. (Sümbol $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tähistab ruumi $\mathbb{R}^n$ Boreli $\sigma$-algebrat.)

**Märkus 4.2.** Ülesannetest 2.6, (b), ja 2.5 koos märkusega 2.3 ning valemist (I.5.3) järeldub, et $\mathcal{L}^n = \mathcal{M}(\lambda)$ ja $m^n = \lambda|_{\mathcal{L}^n} = \lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ (sümbol $\mathcal{M}(\lambda)$ tähistab hulga $\mathbb{R}^n$ $\lambda$-mõõtuvate alamhulkade $\sigma$-algebrat), kus välismõõt $\lambda\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda(E) = \inf\Bigg\{\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{(b_1^j - a_1^j)\cdots(b_n^j - a_n^j)}_{n \text{ tegurit}}\colon a_1^j, b_1^j, \ldots, a_n^j, b_n^j\in\mathbb{R},\ a_1^j < b_1^j, \ldots, a_n^j < b_n^j,\ j = 1,2,\ldots,$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\underbrace{(a_1^j, b_1^j)\times\cdots\times(a_n^j, b_n^j)}_{n \text{ vahemikku}}\supset E\Bigg\},\quad E\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Seejuures lause I.4.5 põhjal $m^* = \lambda$. (Sümbol $m^*$ tähistab siin mõõduga $m := m^n$ assotsieeruvat välismõõtu.)

Integreerides Lebesgue'i mõõdu $m$ järgi ruumis $\mathbb{R}^n$, kirjutatakse sümboli $dm$ või $dm(x)$ asemel tihti ka lihtsalt $dx$.

**Teoreem 4.1.** *Olgu $E\in\mathcal{L}^n$.*

(a) $m(E) = \sup\{m(K)\colon K\subset E, K \text{ on kompaktne}\}$
$\qquad = \inf\{m(U)\colon U\supset E, U \text{ on lahtine}\}$.

(b) *$E = G\setminus N_1$, kus $G\in\mathcal{L}^n$ on $G_\delta$ ning $N_1\in\mathcal{L}^n$ on selline, et $m(N_1) = 0$.*

(c) *$E = H\cup N_2$, kus $H\in\mathcal{L}^n$ on $F_\sigma$ ning $N_2\in\mathcal{L}^n$ on selline, et $m(N_2) = 0$.*

**Märkus 4.3.** Teoreemi 4.1 väidet (c) kasutatakse hiljem teoreemi VI.2.2 tõestamisel.

Teoreemi 4.1 tõestus. Väide (a) — Lebesgue'i mõõdu regulaarsus — järeldub ülesannetest I.3.33 ja 2.7 koos märkusega 2.3.

**Ülesanne 4.1.** Tõestada väited (b)–(c).

Näpunäide. Kõigepealt panna tähele, et Lebesgue'i mõõdu $m$ jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$ kehtib teoreemi I.5.5 väite analoog. Edasi arutleda nagu teoreemi 5.6 implikatsioonide (i)⇒(ii) ja (i)⇒(iii) tõestuses.

□

**Ülesanne 4.2.** Tõestada, et ruumi $\mathbb{R}^n$ $m$-hüljatava alamhulga nihe ja kordne on $m$-hüljatavad hulgad, s.t., kui $E \in \mathcal{N}(m)$, $z \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$, siis ka $E + z, rE \in \mathcal{N}(m)$.

Näpunäide. Kasutada fakti, et $E \in \mathcal{N}(m)$ parajasti siis, kui $\lambda(E) = 0$, kus $\lambda$ on välismõõt märkusest 4.2. (See fakt järeldub ülesandest I.4.4, (b), koos märkuses 4.2 põhjendatud võrdusega $m^* = \lambda$.)

**Teoreem 4.2.** (a) *Olgu $E \in \mathcal{L}^n$ ja $z \in \mathbb{R}^n$. Siis $E+z \in \mathcal{L}^n$, kusjuures $m(E+z) = m(E)$.*

(b) *Olgu $E \in \mathcal{L}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$. Siis $rE \in \mathcal{L}^n$, kusjuures $m(rE) = |r|^n\, m(E)$.*

(c) *Olgu funktsioon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Siis ka funktsioon $f(\,\cdot + z)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Seejuures, kui $f \geqslant 0$ või $f \in L_1(m)$, siis ka vastavalt $f(\,\cdot + z) \geqslant 0$ või $f(\,\cdot + z) \in L_1(m)$, kusjuures*

$$\int f(x+z)\, dm(x) = \int f(x)\, dm(x).$$

Tõestus.

**Ülesanne 4.3.** Tõestada teoreem 4.2.

Näpunäide. (a) ja (b). Sisalduvuste $E + z \in \mathcal{L}^n$ ja $rE \in \mathcal{L}^n$ tõestamisel kasutada asjaolu, et $\mathcal{L}^n$ on Boreli $\sigma$-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ täield Lebesgue'i mõõdu $m$ suhtes, ning fakte, et ruumis $\mathbb{R}^n$ Boreli hulga nihe ja kordne on Boreli hulgad ning $m$-hüljatava hulga nihe ja kordne on $m$-hüljatavad (vt. ülesandeid 1.5 ja 4.2).

Võrduste $m(E + z) = m(E)$ ja $m(rE) = |r|^n\, m(E)$ tõestamisel kasutada märkust 4.2.

□

**Märkus 4.4.** Teoreemi 4.2 väide (a) ütleb, et Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ on nihke suhtes invariantne. Paragrahvis VI.2 näitame, et Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ on ka pöörde suhtes invariantne.

**Definitsioon 4.1.** Olgu $g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Hulka

$$\operatorname{supp} g \;:= \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ g(x) \neq 0\}}$$

(s.t. hulga $\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ g(x) \neq 0\}$ sulundit ruumis $\mathbb{R}^n$) nimetatakse funktsiooni $g$ *kandjaks.*

Järgnev teoreem on erijuht teoreemist II.3.10, kus $X = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A} = \mathcal{L}^n$ ja $\mu = m$.

**Teoreem 4.3.** *Olgu $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ selliselt, et*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\, dm < \varepsilon.$$

Selle punkti ülejäänud osa pühendub Lebesgue'i mõõdu võrdlusele Jordani mõõduga ruumis $\mathbb{R}^n$. Termini "kuup (ruumis $\mathbb{R}^n$)" all mõistame me edaspidi hulkasid tüüpi

$$\prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

kus $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$, $b_1 - a_1 = \cdots = b_n - a_n$.

Iga $k \in \mathbb{Z}$ korral tähistame

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]\colon\ 2^k a_j, 2^k b_j \in \mathbb{Z},\ b_j - a_j = \frac{1}{2^k},\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Kogumi $\mathcal{Q}_k$ hulki nimetatakse *diaadilisteks kuupideks* (servapikkusega $\frac{1}{2^k}$). Märgime, et

(1) kogumi $\mathcal{Q}_k$ mis tahes kahe kuubi sisemused on lõikumatud;

(2) kogumi $\mathcal{Q}_{k+1}$ kuubid saadakse kogumi $\mathcal{Q}_k$ kuupide servade poolitamise teel.

Olgu $E \subset \mathbb{R}^n$. Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\underline{A}_k(E) = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_k \\ Q \subset E}} Q \qquad \text{ja} \qquad \overline{A}_k(E) = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_k \\ Q \cap E \neq \emptyset}} Q.$$

Siis

$$m\left(\underline{A}_k(E)\right) = \frac{1}{2^{kn}} \times \text{"kuupide arv } \underline{A}_k(E)\text{-s";}$$
$$m\left(\overline{A}_k(E)\right) = \frac{1}{2^{kn}} \times \text{"kuupide arv } \overline{A}_k(E)\text{-s".}$$

Kuna $\underline{A}_1(E) \subset \underline{A}_2(E) \subset \underline{A}_3(E) \subset \cdots$ ja $\overline{A}_1(E) \supset \overline{A}_2(E) \supset \overline{A}_3(E) \supset \cdots$, siis eksisteerivad piirväärtused

$$\underline{\kappa}(E) := \lim_{k\to\infty} m\left(\underline{A}_k(E)\right) \qquad \text{ja} \qquad \overline{\kappa}(E) := \lim_{k\to\infty} m\left(\overline{A}_k(E)\right),$$

mida nimetatakse vastavalt hulga $E$ *Jordani sisemõõduks* ja *Jordani välismõõduks.* Kui $\underline{\kappa}(E) = \overline{\kappa}(E) < \infty$, siis öeldakse, et hulk $E$ on *Jordani mõttes mõõtuv;* tema Jordani sise- ja välismõõdu ühist väärtust nimetatakse sel juhul hulga $E$ *Jordani mõõduks* ja tähistatakse sümboliga $\kappa(E)$.

**Märkus 4.5.** Kui hulk $E \subset \mathbb{R}^n$ on tõkestamata, siis $\overline{\kappa}(E) = \infty$.

**Märkus 4.6.** Jordani mõõdu defineerimisel (ruumi $\mathbb{R}^n$ tõkestatud alamhulkade jaoks) kasutatakse diaadiliste kuupide asemel tihti ka suvalisi (lõplikke) koordinaatristtahuksummasid või hulktahuksummasid. Mõiste sisu jääb seejuures samaks.

Tähistame

$$\underline{A}(E) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{A}_k(E) \qquad \text{ja} \qquad \overline{A}(E) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{A}_k(E).$$

Siis

(1) $\underline{A}(E) \subset E \subset \overline{A}(E)$;

(2) $\underline{A}(E)$ ja $\overline{A}(E)$ on Boreli hulgad;

(3) $\underline{\kappa}(E) = m\left(\underline{A}(E)\right)$ ja $\overline{\kappa}(E) = m\left(\overline{A}(E)\right)$.

Niisiis, tõkestatud hulk $E \subset \mathbb{R}^n$ on Jordani mõttes mõõtuv parajasti siis, kui

$$m\left(\overline{A}(E) \setminus \underline{A}(E)\right) = 0.$$

Siit järeldub, et kui $E$ on Jordani mõttes mõõtuv, siis ta on ka Lebesgue'i mõttes mõõtuv, kusjuures $m(E) = \kappa(E)$.

**Lause 4.4.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk. Siis*

(a) $U = \underline{A}(U)$;

(b) *$U$ on paarikaupa lõikumatute sisemustega kuupide loenduv ühend;*

(c) $m(U) = \underline{\kappa}(U)$.

TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $U \neq \mathbb{R}^n$.

(a). Olgu $x = (x_j)_{j=1}^n \in U$. Näitame, et leiduvad $k \in \mathbb{N}$ ja $Q \in \mathcal{Q}_k$ nii, et $x \in Q \subset U$. Kui mingi diaadilise kuubi $Q \in \mathcal{Q}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) korral $x \in Q$, siis suvalise $y = (y_j)_{j=1}^n \in Q$ korral

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} \leqslant \sqrt{n\left(\frac{1}{2^k}\right)^2} = \frac{\sqrt{n}}{2^k}.$$

Hulga $U$ lahtisuse tõttu $\delta := \inf\{d(x,z)\colon\ z \notin U\} > 0$. Niisiis, kui valida $k \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta$, ja $Q \in \mathcal{Q}_k$ nii, et $x \in Q$ (niisugune $Q$ leidub alati), siis $Q \subset U$. Seega $x \in Q \subset \underline{A}_k(U) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} \underline{A}_i(U) = \underline{A}(U)$.

(b). Väite (a) põhjal

$$U = \underline{A}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{A}_k(U) = \underline{A}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k(U) \setminus \underline{A}_{k-1}(U) = \underline{A}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\underline{A}_k(U) \setminus \underline{A}_{k-1}(U)}.$$

Väite tõestuseks piisab nüüd vaid tähele panna, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral esitub sulund $\overline{\underline{A}_k(U) \setminus \underline{A}_{k-1}(U)}$ paarikaupa lõikumatute sisemustega kuupide ülimalt loenduva ühendina.

(c). Kuna väite (a) põhjal $U = \underline{A}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{A}_k(U)$, kusjuures $\underline{A}_1(U) \subset \underline{A}_2(U) \subset \underline{A}_3(U) \subset \cdots$, siis

$$m(U) = \lim_{k\to\infty} m\big(\underline{A}_k(U)\big) = \underline{\kappa}(U).$$

□

**Lause 4.5.** *Olgu $F \subset \mathbb{R}^n$ kompaktne hulk. Siis $m(F) = \overline{\kappa}(F)$.*

Tõestus. Valime arvu $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\operatorname{int} Q_0 \supset F$, kus

$$Q_0 = \Big\{x = (x_1, \dots, x_n)\colon \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| \leqslant N\Big\}.$$

Paneme tähele, et iga $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral

$$m(Q_0) = m\big(\overline{A}_k(F)\big) + m\big(\underline{A}_k(Q_0 \setminus F)\big)$$

(sest kui $Q_0 \supset Q \in \mathcal{Q}_k$, siis kas $Q \cap F = \emptyset$ või $Q \subset Q_0 \setminus F$). Protsessis $k \to \infty$ järeldub siit, et

$$m(Q_0) = \overline{\kappa}(F) + \underline{\kappa}(Q_0 \setminus F). \tag{4.1}$$

Kuna lause 4.4 põhjal

$$\underline{\kappa}(Q_0 \setminus F) = \underline{\kappa}\big((\operatorname{int} Q_0) \setminus F\big) = m\big((\operatorname{int} Q_0) \setminus F\big) = m(Q_0 \setminus F) = m(Q_0) - m(F),$$

siis järeldub võrdusest (4.1), et $m(F) = \overline{\kappa}(F)$. □

Laused 4.4 ja 4.5 võimaldavad meil piltlikult võrrelda mõõtuvust Jordani mõttes ja mõõtuvust Lebesgue'i mõttes. Tõkestatud hulga $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordani mõõdu arvutamisel lähendame me teda seest- ja väljastpoolt diaadiliste kuupide ühenditega; hulk $E$ on Jordani mõttes mõõtuv parajasti siis, kui need kaks lähendust ("seest" ja "väljast") annavad ühesuguse mõõdu. Tõkestatud hulga $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue'i mõõdu arvutamisel lähendame me teda seestpoolt kompaktsete hulkadega ja väljastpoolt lahtiste hulkadega; neid kompaktseid ja lahtisi hulki lähendame me omakorda vastavalt väljast- ja seestpoolt diaadiliste kuupidega. Hulk $E$ on Lebesgue'i mõttes mõõtuv parajasti siis, kui need kaks kahesammulist ("seest-väljast" ja "väljast-seest") lähendust annavad ühesuguse mõõdu.

# IV peatükk.
# Märgiga ja kompleksmõõdud. Radon–Nikodými teoreem

## § 1. Märgiga mõõdu mõiste. Hahni ja Jordani lahutused

Kõikjal selles paragrahvis on $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum.

### 1.1. Märgiga mõõdu mõiste

**Definitsioon 1.1.** Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [-\infty, \infty]$ on *märgiga mõõt,* kui

SM1° $\mu(\emptyset) = 0$;

SM2° $\mu$ väärtuste hulgas on ülimalt üks väärtustest $\infty$ ja $-\infty$;

SM3° kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

**Näide 1.1.** Olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ mõõdud $\sigma$-algebral $\mathfrak{A}$, kusjuures vähemalt üks neist mõõtudest on lõplik. Siis hulgafunktsioon $\mu_1 - \mu_2$ on märgiga mõõt. (Hulgafunktsioon $\mu_1 - \mu_2$ on defineeritud võrdusega $(\mu_1 - \mu_2)(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$, $A \in \mathfrak{A}$.)

**Ülesanne 1.1.** Veenduda, et $\mu_1 - \mu_2$ on märgiga mõõt.

**Näide 1.2.** Olgu $\mu$ mõõt $\sigma$-algebral $\mathfrak{A}$ ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuv funktsioon, kusjuures vähemalt üks integraalidest $\int_X f^+ \, d\mu$ ja $\int_X f^- \, d\mu$ on lõplik. (Niisugusel juhul öeldakse, et $f$ on *laiemas mõttes $\mu$-integreeruv* funktsioon.) Defineerime hulgafunktsiooni $\nu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ võrdusega

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu : = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Siis $\nu$ on märgiga mõõt. Sellisel viisil defineeritud märgiga mõõtu $\nu$ nimetatakse *määramata integraaliks* funktsioonist $f$ (mõõdu $\mu$ järgi) ja kirjutatakse $d\nu = f \, d\mu$.

**Ülesanne 1.2.** Veenduda, et $\nu$ on märgiga mõõt.

Toodud prototüübilised näited märgiga mõõtudest on ammendavad: iga märgiga mõõt on esitatav nii näites 1.1 kui ka näites 1.2 kirjeldatud viisil. Selles paragrahvis keskendume märgiga mõõtude esitamisele näite 1.1 eeskujul, järgmises — näite 1.2 eeskujul.

Kõikjal järgnevas kogu selle paragrahvi ulatuses on kõikide mõõtude (ja märgiga mõõtude) määramispiirkond $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$.

## 1.2. Märgiga mõõdu Hahni lahutus

Kõigepealt üks abitulemus.

**Lemma 1.1.** *Olgu $\mu$ märgiga mõõt ning olgu $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$.*

(a) *Kui $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, siis $\mu\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

(b) *Kui $|\mu(A_1)| < \infty$ ja $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, siis $\mu\Big(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Tõestus.

**Ülesanne 1.3.** Tõestada lemma 1.1.

□

**Definitsioon 1.2.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt.

Öeldakse, et hulk $A \in \mathfrak{A}$ on *$\mu$-positiivne* (või *$\mu$ suhtes positiivne*), kui $\mu$ väärtused kõigil hulga $A$ mõõtuvatel alamhulkadel on mittenegatiivsed, s.t.

$$\mathfrak{A} \ni B \subset A \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) \geqslant 0.$$

Öeldakse, et hulk $A \in \mathfrak{A}$ on *$\mu$-negatiivne* (või *$\mu$ suhtes negatiivne*), kui $\mu$ väärtused kõigil hulga $A$ mõõtuvatel alamhulkadel on mittepositiivsed, s.t.

$$\mathfrak{A} \ni B \subset A \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) \leqslant 0.$$

Öeldakse, et hulk $A \in \mathfrak{A}$ on *$\mu$-nullhulk* (või *$\mu$ suhtes nullhulk*), kui $\mu$ väärtus kõigil hulga $A$ mõõtuvatel alamhulkadel on null, s.t.

$$\mathfrak{A} \ni B \subset A \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) = 0.$$

Kui märgiga mõõdu $\mu$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse $\mu$-positiivseid, $\mu$-negatiivseid ja $\mu$-nullhulki ka lihtsalt vastavalt positiivseteks, negatiivseteks ja nullhulkadeks.

**Teoreem 1.2** (Hahni lahutusteoreem)**.** *Olgu $\mu$ märgiga mõõt. Siis leiduvad hulgad $P, N \in \mathfrak{A}$ nii, et*

1° *$P \cap N = \emptyset$, $P \cup N = X$;*

2° *hulk $P$ on $\mu$-positiivne;*

3° *hulk $N$ on $\mu$-negatiivne.*

*Seejuures, kui mingite $\mu$-positiivse hulga $P' \in \mathfrak{A}$ ja $\mu$-negatiivse hulga $N' \in \mathfrak{A}$ korral $P' \cap N' = \emptyset$ ja $P' \cup N' = X$, siis $P \triangle P' = N \triangle N'$ on $\mu$-nullhulk.*

**Definitsioon 1.3.** Esitust $X = P \cup N$ Hahni lahutusteoreemist 1.2 nimetatakse märgiga mõõdu $\mu$ *Hahni lahutuseks* (või ka ruumi $X$ *Hahni lahutuseks* märgiga mõõdu $\mu$ suhtes).

Märgime, et märgiga mõõdu $\mu$ Hahni lahutus pole üheselt määratud: $\mu$-nullhulki võib hulgast $P$ hulka $N$ (või vastupidi, hulgast $N$ hulka $P$) "üle tõsta".

Hahni lahutusteoreemi tõestuses kasutame järgnevat lihtsat abitulemust.

**Lemma 1.3.** *Olgu $\mu$ märgiga mõõt.*

(a) *Kui hulk $A \in \mathfrak{A}$ on $\mu$-positiivne [$\mu$-negatiivne], siis ka mis tahes alamhulk $B \subset A$, kus $B \in \mathfrak{A}$, on $\mu$-positiivne [$\mu$-negatiivne].*

(b) *Kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, on $\mu$-positiivsed [$\mu$-negatiivsed], siis ka nende hulkade ühend $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on $\mu$-positiivne [$\mu$-negatiivne].*

Tõestus. Väide (a) järeldub vahetult positiivse [negatiivse] hulga definitsioonist.

**Ülesanne 1.4.** Tõestada väide (b).

$\square$

Hahni lahutusteoreemi 1.2 tõestus. Eeldame konkreetsuse mõttes, et $\mu$ ei saavuta väärtust $-\infty$.

**Ülesanne 1.5.** Järeldada väite kehtivusest tehtud eeldusel väite kehtivus juhul, kui $\mu$ ei saavuta väärtust $\infty$.

Valime $\mu$-negatiivse hulga $N \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(N) = \inf\{\mu(E)\colon\ E \in \mathfrak{A} \text{ on } \mu\text{-negatiivne}\}$; siis $\mu(N) > -\infty$.

**Ülesanne 1.6.** Tõestada, et niisugune $\mu$-negatiivne hulk $N \in \mathfrak{A}$ leidub, kusjuures $\mu(N) > -\infty$.

Näitame nüüd, et $P := N^c$ on $\mu$-positiivne hulk. Oletame vastuväiteliselt, et $P$ pole $\mu$-positiivne, s.t. leidub $\mathfrak{A}$-mõõtuv hulk $A \subset P$ nii, et $\mu(A) < 0$. Vastuolu saamiseks piisab näidata, et leidub $\mu$-negatiivne hulk $B \subset A$ nii, et $\mu(B) < 0$.

Tõepoolest, sellisel juhul on $N \cup B$ $\mu$-negatiivne; kuna $N \cap B = \emptyset$, siis

$$\mu(N \cup B) = \mu(N) + \mu(B) < \mu(N) = \inf\{\mu(E)\colon\ E \in \mathfrak{A} \text{ on } \mu\text{-negatiivne}\}.$$

Jõudsime vastuoluni.

Tähistame iga $D \in \mathfrak{A}$ korral

$$\beta(D) := \sup\{\mu(E)\colon\ \mathfrak{A} \ni E \subset D\}.$$

Märgime, et alati $\beta(D) \geqslant 0$, sest $\mathfrak{A} \ni \emptyset \subset D$ ja $\mu(\emptyset) = 0$.

Paneme tähele, et leidub $\mathfrak{A}$-mõõtuv alamhulk $C \subset A$ selliselt, et $\mu(C) < 0$ ja $\beta(C) < \infty$.

Tõepoolest, kui sellist hulka $C$ ei leiduks, siis saaksime leida paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A}$-mõõtuvad hulgad $E_j \subset A$, $j = 1, 2, \dots$, nii, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E_j) > 1$ (PÕHJENDADA!). Nüüd, tähistades $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kehtib $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \infty$, mis viib vastuoluni:

$$0 > \mu(A) = \mu\big((A \setminus E) \cup E\big) = \mu(A \setminus E) + \mu(E) = \infty.$$

Tähistame $A_0 := \emptyset$ ning valime hulga $C$ paarikaupa lõikumatud alamhulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \dots$, nii, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu(A_j) \geqslant \frac{\beta\Big(C \setminus (\bigcup_{i=0}^{j-1} A_i)\Big)}{2}.$$

Siis $\mu(A_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Ülesanne 1.7.** Veenduda selles.

Aga nüüd $B := C \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \subset A$ on $\mu$-negatiivne hulk, kusjuures $\mu(B) < 0$.

**Ülesanne 1.8.** Veenduda selles.

Olgu nüüd $\mu$-positiivne hulk $P' \in \mathfrak{A}$ ja $\mu$-negatiivne hulk $N' \in \mathfrak{A}$ sellised, et $X = P' \cup N'$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $P \triangle P' = N \triangle N'$ on $\mu$-nullhulgad.

**Ülesanne 1.9.** Veenduda selles.

$\square$

## 1.3. Märgiga mõõdu Jordani lahutus

Hahni lahutus võimaldab anda märgiga mõõtudele kanoonilise esituse kahe mõõdu vahena.

**Definitsioon 1.4.** Öeldakse, et (märgiga) mõõdud $\mu$ ja $\nu$ on *vastastikku singulaarsed* (või $\mu$ on *singulaarne $\nu$ suhtes* või $\nu$ on *singulaarne $\mu$ suhtes*) ja kirjutatakse $\mu \perp \nu$, kui leiduvad hulgad $A, B \in \mathfrak{A}$ nii, et

1° $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$;

2° $A$ on $\nu$-nullhulk;

3° $B$ on $\mu$-nullhulk.

**Teoreem 1.4** (Jordani lahutusteoreem)**.** *Olgu $\mu$ märgiga mõõt. Siis leiduvad üheselt määratud mõõdud $\mu^+$ ja $\mu^-$ nii, et $\mu^+ \perp \mu^-$ ja $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*

**Definitsioon 1.5.** Mõõtusid $\mu^+$ ja $\mu^-$ teoreemist 1.4 nimetatakse vastavalt märgiga mõõdu $\mu$ *positiivseks variatsiooniks* ja *negatiivseks variatsiooniks*. Esitust $\mu = \mu^+ - \mu^-$ nimetatakse märgiga mõõdu $\mu$ *Jordani lahutuseks*.

Jordani lahutusteoreemi 1.4 tõestus. Olgu $X = P \cup N$ märgiga mõõdu $\mu$ Hahni lahutus. Defineerime hulgafunktsioonid $\mu^+(E) = \mu(E \cap P)$ ja $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N)$, $E \in \mathfrak{A}$. Siis $\mu^+$ ja $\mu^-$ on mõõdud, kusjuures $\mu^+ \perp \mu^-$ ja $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

**Ülesanne 1.10.** Veenduda selles.

Olgu nüüd mõõdud $\mu', \mu''\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ sellised, et $\mu' \perp \mu''$ ja $\mu = \mu' - \mu''$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\mu' = \mu^+$ ja $\mu'' = \mu^-$.

**Ülesanne 1.11.** Veenduda selles.

□

**Definitsioon 1.6.** Olgu $\mu = \mu^+ - \mu^-$ märgiga mõõdu $\mu$ Jordani lahutus.

Mõõtu $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ nimetatakse märgiga mõõdu $\mu$ *täisvariatsiooniks.*

**Ülesanne 1.12.** Tõestada, et $|\mu|$ on mõõt.

**Ülesanne 1.13.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt ning olgu $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) $\mu^+(A) = \sup\bigl\{\mu(B)\colon\ \mathfrak{A} \ni B \subset A\bigr\}$;

(b) $\mu^-(A) = -\inf\bigl\{\mu(B)\colon\ \mathfrak{A} \ni B \subset A\bigr\}$;

(c) $|\mu|(A) = \sup\Bigl\{\sum\limits_{j=1}^{n} |\mu(A_j)|\colon\ \ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = A\Bigr\}$;

(d) $|\mu|(A) = \sup\Bigl\{\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)|\colon\ \ A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, 2, \ldots,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = A\Bigr\}$.

**Märkus 1.1.** Nagu lahendusest näeme, võib eelnevas ülesandes asendada kõikjal sup ja inf vastavalt max ja min-ga.

**Ülesanne 1.14.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt ning olgu $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

$$A \text{ on } \mu\text{-nullhulk} \iff A \text{ on nii } \mu^+\text{- kui ka } \mu^-\text{-nullhulk} \iff A \text{ on } |\mu|\text{-nullhulk.}$$

**Ülesanne 1.15.** (I) Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ mõõdud. Tõestada, et

$$\nu \perp \mu_1 \text{ ja } \nu \perp \mu_2 \qquad \iff \qquad \nu \perp (\mu_1 + \mu_2).$$

(II) Eeldame nüüd, et üks mõõtudest $\mu_1$ ja $\mu_2$ on lõplik. Siis on määratud ka mõõtude $\mu_1$ ja $\mu_2$ vahe $\mu_1 - \mu_2$. Tõestada, et

$$\nu \perp \mu_1 \text{ ja } \nu \perp \mu_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu \perp (\mu_1 - \mu_2)$$

ning kui $\mu_1 \perp \mu_2$, siis

$$\nu \perp \mu_1 \text{ ja } \nu \perp \mu_2 \qquad \iff \qquad \nu \perp (\mu_1 - \mu_2).$$

**Ülesanne 1.16.** Olgu $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ja $\nu = \nu^+ - \nu^-$ vastavalt märgiga mõõtude $\mu$ ja $\nu$ Jordani lahutused. Tõestada, et

$$\mu \perp \nu \iff \mu \perp \nu^+,\, \mu \perp \nu^- \iff \mu^+ \perp \nu^+,\, \mu^+ \perp \nu^-,\, \mu^- \perp \nu^+,\, \mu^- \perp \nu^- \iff \mu \perp |\nu| \iff |\mu| \perp |\nu|.$$

**Definitsioon 1.7.** Öeldakse, et märgiga mõõt $\mu$ on *lõplik,* kui tema täisvariatsioon $|\mu|$ on lõplik. Öeldakse, et märgiga mõõt $\mu$ on *$\sigma$-lõplik,* kui tema täisvariatsioon $|\mu|$ on $\sigma$-lõplik.

**Ülesanne 1.17.** Tõestada, et märgiga mõõt $\mu$ on

(a) lõplik parajasti siis, kui tema positiivne ja negatiivne variatsioonid $\mu^+$ ja $\mu^-$ on lõplikud;

(b) $\sigma$-lõplik parajasti siis, kui tema tema positiivne ja negatiivne variatsioonid $\mu^+$ ja $\mu^-$ on $\sigma$-lõplikud.

**Definitsioon 1.8.** Öeldakse, et märgiga mõõt $\mu$ *on täielik,* kui tema täisvariatsioon $|\mu|$ on täielik.

**Ülesanne 1.18.** Olgu $X = P \cup N$ märgiga mõõdu $\mu$ Hahni lahutus. Tähistame

$$\mathfrak{A}_P := \{A \cap P\colon\ A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathcal{P}(P) \quad \text{ja} \quad \mathfrak{A}_N := \{A \cap N\colon\ A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathcal{P}(N).$$

Tõestada, et $\mu$ on täielik parajasti siis, kui ruumid $(P, \mathfrak{A}_P, \mu^+|_{\mathfrak{A}_P})$ ja $(N, \mathfrak{A}_N, \mu^-|_{\mathfrak{A}_N})$ on täielikud.

**Definitsioon 1.9.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt.

Öeldakse, et funktsioon $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ on *integreeruv (märgiga mõõdu $\mu$ järgi)* (või *$\mu$-integreeruv*), kui $f \in L_1(\mu^+) \cap L_1(\mu^-)$. Integraal funktsioonist $f$ üle ruumi $X$ mõõdu $\mu$ järgi defineeritakse võrdusega

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu := \int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-.$$

Sümboli $\int_X$ asemel kirjutatakse seejuures ka lihtsalt $\int$. Kõigi $\mu$-integreeruvate funktsioonide $X \to \overline{\mathbb{R}}$ klassi tähistatakse sümboliga $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ või lihtsalt $L_1(\mu)$.

Paneme tähele, et kui $\mu$ on märgiga mõõt ja $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$, siis

$$f \in L_1(\mu) \ \Leftrightarrow\ f \in L_1(\mu^+) \cap L_1(\mu^-) \ \Leftrightarrow\ |f| \in L_1(\mu^+) \cap L_1(\mu^-) \ \Leftrightarrow\ |f| \in L_1(|\mu|).$$

**Ülesanne 1.19.** Olgu funktsioonid $f, g\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu$-integreeruvad ning olgu $\alpha \in \mathbb{R}$. Tõestada, et siis ka $f+g, \alpha f \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \qquad \text{ja} \qquad \int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

**Ülesanne 1.20.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt ning olgu $f \in L_1(\mu)$. Tõestada, et

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d|\mu|.$$

## 1.4. Täiendavaid ülesandeid

**Ülesanne 1.21.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt. Tõestada, et kui mõõdud $\mu_1$ ja $\mu_2$ on sellised, et $\mu = \mu_1 - \mu_2$, siis $\mu^+ \leqslant \mu_1$ ja $\mu^- \leqslant \mu_2$, s.t.

$$\mu^+(E) \leqslant \mu_1(E) \quad \text{ja} \quad \mu^-(E) \leqslant \mu_2(E) \qquad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

**Ülesanne 1.22.** Olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ lõplikud mõõdud ning olgu $\mu := \mu_1 - \mu_2$ (juhime tähelepanu, et $\mu$ on märgiga mõõt). Siis iga $f \in L_1(\mu_1) \cap L_1(\mu_2)$ korral $f \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2.$$

Näpunäide. Kasutada ülesandeid 1.21 ja 3.18.

# § 2. Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem

Kõikjal selles paragrahvis on $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum. Kõikide mõõtude (ja märgiga mõõtude) määramispiirkond on $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$, välja arvatud muidugi juhul, kui (kon)-tekstis on sedastatud teisiti.

## 2.1. Märgiga mõõdu absoluutne pidevus

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et märgiga mõõt $\nu$ on *absoluutselt pidev* mõõdu $\mu$ suhtes ja kirjutatakse $\nu \ll \mu$, kui

$$A \in \mathfrak{A},\ \mu(A) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(A) = 0.$$

**Ülesanne 2.1.** Tõestada, et

(a) $\nu \ll \mu \iff [\nu^+ \ll \mu$ ja $\nu^- \ll \mu] \iff |\nu| \ll \mu$;

(b) $\nu \ll \mu,\ \nu \perp \mu \implies \nu = 0$.

Järgnev teoreem näitab, et lõpliku märgiga mõõdu absoluutne pidevus ühtib meie tavapärase ettekujutusega pidevusest.

**Teoreem 2.1.** *Olgu $\nu$ lõplik märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\nu \ll \mu$;

(ii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et*

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\nu|(E) < \varepsilon;$$

(iii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et*

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\nu(E)| < \varepsilon.$$

**Märkus 2.1.** Kui teoreemis 2.1 loobuda eeldusest, et $\nu$ on lõplik, lubades tal olla $\sigma$-lõplik, siis implikatsioon (i)$\Rightarrow$(ii) enam ei kehti. Tõepoolest, kui defineerida

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, m\big(E \cap [j-1, j)\big), \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

siis $\nu$ on $\sigma$-lõplik Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}$, kusjuures $\nu \ll m$. Veendumaks, et (ii) ei kehti, piisab iga $n \in \mathbb{N}$ korral leida $E_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $m(E_n) < \frac{1}{n}$, mille korral $\nu(E_n) = 1$. Sellise hulga $E_n$ rolli sobib $E_n = [2n - \frac{1}{2n}, 2n)$, sest niisugusel juhul $m(E_n) = \frac{1}{2n}$, kuid $\nu(E_n) = 2n\, m(E_n) = 1$.

Teoreemi 2.1 tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu $\nu \ll \mu$. Oletame vastuväiteliselt, et (ii) ei kehti. Siis leidub selline reaalarv $\varepsilon > 0$, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub hulk $E_n \in \mathfrak{A}$ nii, et

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{ja} \quad |\nu|(E_n) \geqslant \varepsilon.$$

Tähistame $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$. Kuna $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset \bigcup_{n=2}^{\infty} E_n \supset \bigcup_{n=3}^{\infty} E_n \supset \cdots$, kusjuures iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

siis

$$\mu(E) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 0,$$

s.t. $\mu(E) = 0$. Samal ajal märgiga mõõdu $\nu$ lõplikkuse tõttu

$$|\nu|(E) = \lim_{m\to\infty} |\nu| \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \geqslant \limsup_{m\to\infty} |\nu|(E_m) \geqslant \varepsilon,$$

seega $|\nu| \not\ll \mu$, järelikult ka $\nu \not\ll \mu$, mis on vastuolus eeldusega.

(ii)⇒(i) on ilmne, sest iga $E \in \mathfrak{A}$ korral $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E)$.

(iii)⇒(i).

**Ülesanne 2.2.** Tõestada implikatsioon (iii)⇒(i).

□

## 2.2. Märgiga mõõdu Lebesgue'i lahutus ja Radon–Nikodými tuletis

**Definitsioon 2.2.** Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt. Kui eksisteerivad märgiga mõõdud $\lambda$ ja $\rho$ nii, et

$$\lambda \perp \mu, \quad \rho \ll \mu \quad \text{ja} \quad \nu = \lambda + \rho, \tag{2.1}$$

siis esitust $\nu = \lambda + \rho$ nimetatakse märgiga mõõdu $\nu$ *Lebesgue'i lahutuseks* (mõõdu $\mu$ suhtes).

**Ülesanne 2.3.** Tõestada, et Lebesgue'i lahutuses $\nu = \lambda + \rho$ kehtib $\lambda \perp \rho$.

Märgime, et mõõdud $\lambda$ ja $\rho$ Lebesgue'i lahutuses $\nu = \lambda + \rho$ on üheselt määratud.

Tõepoolest, olgu märgiga mõõdud $\lambda'$ ja $\rho'$ sellised, et $\lambda' \perp \mu$, $\rho' \ll \mu$ ja $\nu = \lambda' + \rho'$. Veendume, et $\lambda' = \lambda$ ja $\rho' = \rho$.

Kuna $\lambda \perp \mu$ ja $\lambda' \perp \mu$, siis leiduvad hulgad $A, B, A', B' \in \mathfrak{A}$ nii, et

$$A \cup B = A' \cup B' = X, \quad A \cap B = A' \cap B' = \emptyset, \quad \mu(A) = \mu(A') = 0,$$

kusjuures $B$ ja $B'$ on vastavalt $\lambda$- ja $\lambda'$-nullhulk. Siis $A \cup A'$ on $\mu$-nullhulk; kuna $\rho, \rho' \ll \mu$, siis $A \cup A'$ on ka $\rho$- ja $\rho'$-nullhulk. Kuna

$$(A \cup A') \cup (B \cap B') = X \quad \text{ja} \quad (A \cup A') \cap (B \cap B') = \emptyset,$$

kusjuures $B \cap B'$ on nii $\lambda$- kui ka $\lambda'$-nullhulk, siis mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \lambda\big(E \cap (A \cup A')\big) + \lambda\big(E \cap (B \cap B')\big) = \lambda\big(E \cap (A \cup A')\big)\\ &= \lambda\big(E \cap (A \cup A')\big) + \rho\big(E \cap (A \cup A')\big) = \nu\big(E \cap (A \cup A')\big)\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}\rho(E) &= \rho\big(E \cap (A \cup A')\big) + \rho\big(E \cap (B \cap B')\big) = \rho\big(E \cap (B \cap B')\big)\\ &= \lambda\big(E \cap (B \cap B')\big) + \rho\big(E \cap (B \cap B')\big) = \nu\big(E \cap (B \cap B')\big).\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et ka $\lambda'(E) = \nu\big(E \cap (A \cup A')\big)$ ja $\rho'(E) = \nu\big(E \cap (B \cap B')\big)$; niisiis $\lambda(E) = \lambda'(E)$ ja $\rho(E) = \rho'(E)$ ning järelikult $\lambda' = \lambda$ ja $\rho' = \rho$.

**Ülesanne 2.4.** Olgu $\nu = \lambda + \rho$ ($\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$) märgiga mõõdu $\nu$ Lebesgue'i lahutus mõõdu $\mu$ suhtes. Tõestada, et positiivse, negatiivse ja täisvariatsiooni $\nu^+$, $\nu^-$ ja $|\nu|$ Lebesgue'i lahutus $\mu$ suhtes on vastavalt

$$\nu^+ = \lambda^+ + \rho^+, \qquad \nu^- = \lambda^- + \rho^- \qquad \text{ja} \qquad |\nu| = |\lambda| + |\rho|.$$

**Definitsioon 2.3.** Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt. Kui laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon $f$ rahuldab tingimust $d\nu = f\,d\mu$ (s.t. $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ iga $E \in \mathfrak{A}$ korral), siis funktsiooni $f$ nimetatakse märgiga mõõdu $\nu$ *Radon–Nikodými tuletiseks* (mõõdu $\mu$ järgi) ja tähistatakse sümboliga $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Kui funktsioon $f$ on märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ on selline, et $g = f$ $\mu$-p.k., siis ka funktsioon $g$ on märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi.

**Ülesanne 2.5.** Veenduda selles.

LAHENDUS. Olgu funktsioon $f$ märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning olgu $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ selline, et $g = f$ $\mu$-p.k. Väite tõestuseks peame näitama, et $g$ on laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon, kusjuures $\int_E g\,d\mu = \nu(E)$ iga $E \in \mathfrak{A}$ korral.

Kuna $f^+ = g^+$ $\mu$-p.k. ja $f^- = g^-$ $\mu$-p.k. (vt. ülesannet II.1.27, (f)), siis $\int_X g^+\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu$ ja $\int_X g^-\,d\mu = \int_X f^-\,d\mu$ (vt. teoreemi II.2.7), millest järeldub, et vähemalt üks integraalidest $\int_X g^+\,d\mu$ ja $\int_X g^-\,d\mu$ on lõplik ning seega $g$ on laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon. Seejuures iga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu = \int_E g^+\,d\mu - \int_E g^-\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Sageli mõistetakse tähise $\frac{d\nu}{d\mu}$ all ka tingimust $d\nu = f\,d\mu$ rahuldavate funktsioonide $f$ klassi. Niisiis, kuidas ikkagi tuleb mõista üleskirjutusi $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu}{d\mu} = f$? Üldjuhul me mõistame nende üleskirjutuste all, et funktsioon $f$ on märgiga mõõdu $\nu$ mingi Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi (ehk, teisisõnu, märgiga mõõdu $\nu$ üks Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi on funktsioon $f$).

Järgnevast lausest 2.2 järeldub, et *kui märgiga mõõt $\nu$ on $\sigma$-lõplik, siis tema Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k.* Niisiis $\sigma$-lõpliku mõõdu $\nu$ korral võib üleskirjutusi $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ (kus $f$ on laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon) mõista ka tähenduses, et märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletised mõõdu $\mu$ järgi on parajasti need $\mathfrak{A}$-mõõtuvad funktsioonid $X \to \overline{\mathbb{R}}$, mis on $\mu$-p.k. võrdsed funktsiooniga $f$.

**Lause 2.2.** *Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Siis $\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$ parajasti siis, kui $\nu$ on lõplik.*

NB! Põhjendus, et tõepoolest, *$\sigma$-lõpliku märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ (mõõdu $\mu$ järgi) on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k.* (järeldusena lausest 2.2), on ära toodud ülesannete lahenduste jaotises lk. 606 helesinises raamis.

Lause 2.2 tõestuses on mugav toetuda järgnevale ülesandele.

**Ülesanne 2.6.** Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Tõestada, et siis eksisteerivad ka $\frac{d\nu^+}{d\mu}$, $\frac{d\nu^-}{d\mu}$ ja $\frac{d|\nu|}{d\mu}$, kusjuures

$$\frac{d\nu^+}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+, \qquad \frac{d\nu^-}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- \qquad \text{ja} \qquad \frac{d|\nu|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|.$$

LAUSE 2.2 TÕESTUS.

**Ülesanne 2.7.** Tõestada lause 2.2.

□

**Lause 2.3.** *Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Siis $\nu \ll \mu$.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.8.** Tõestada lause 2.3.

□

Järgnev tulemus on järeldus lausetest 2.2 ja 2.3 ning teoreemist 2.1.

**Järeldus 2.4.** *Olgu $f \in L_1(\mu)$. Siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et*

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_E f\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.9.** Tõestada järeldus 2.4.

□

Üldjuhul ei tarvitse Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ eksisteerida.

**Näide 2.1.** Olgu $x \in \mathbb{R}$ suvaline ning olgu $\delta_x$ Diraci mõõt punktis $x$. Ilmselt $\delta_x \not\ll m$, seega ei eksisteeri ka Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\delta_x}{dm}$ ($m$ tähistab Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$).

Iga märgiga mõõdu $\nu$ korral eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d|\nu|}$.

**Ülesanne 2.10.** Olgu $\nu$ märgiga mõõt. Veenduda, et eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d|\nu|}$. Kirjeldada seda tuletist!

**Teoreem 2.5.** *Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$.*

(a) *Kui $f \in L_1(\nu)$, siis $f\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$, kusjuures $\int f\,d\nu = \int f\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$.*

(b) *Kui $\lambda$ on mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\mu}{d\lambda}$, siis eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\lambda}$, kusjuures $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$.*

TÕESTUS. (a). (I) Tõestame väite kõigepealt erijuhul, kui $\nu$ on mõõt. Sel juhul võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^+(\mu)$.

Kui $\phi \in L^+(\nu)$ on lihtne mõõtuv funktsioon standardesitusega $\phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$, siis $\phi \frac{d\nu}{d\mu} \in L^+(\mu)$, kusjuures

$$\int \phi \, d\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \, \nu(A_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{A_j} \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \int \sum_{j=1}^n \alpha_j \, \chi_{A_j} \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \int \phi \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

Kui $g \in L^+(\nu)$, siis leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n \in L^+(\nu)$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\phi_n \nearrow g$. Ilmselt $g \frac{d\nu}{d\mu} \in L^+(\mu)$, kusjuures $\phi_n \frac{d\nu}{d\mu} \nearrow g \frac{d\nu}{d\mu}$, seega monotoonse koonduvuse teoreemi ja eelnevas lõigus tõestatu põhjal

$$\int g \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

Olgu nüüd $f \in L_1(\nu)$ kõikjal määratud $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon. Siis $f^+ \in L^+(\nu)$, seega $\left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ = f^+ \frac{d\nu}{d\mu} \in L^+(\mu)$, kusjuures eelnevas lõigus tõestatu põhjal

$$\int \left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ d\mu = \int f^+ \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \int f^+ \, d\nu < \infty.$$

Analoogiliselt saame, et $\left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^- \in L^+(\mu)$, kusjuures $\int \left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^- d\mu = \int f^- \, d\nu < \infty$. Seega $f \frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int f \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \int \left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ d\mu - \int \left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^- d\mu = \int f^+ \, d\nu - \int f^- \, d\nu = \int f \, d\nu.$$

Lõpetuseks, olgu $f \in L_1(\nu)$ suvaline ($\nu$-p.k. määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioon). Siis leidub $\mathfrak{A}$-mõõtuv $\nu$-integreeruv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ nii, et $f = g$ $\nu$-p.k. Eelnevas lõigus tõestatu põhjal $g \frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int f \, d\nu = \int g \, d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

Seega piisab väite tõestuseks näidata, et $g \frac{d\nu}{d\mu} = f \frac{d\nu}{d\mu}$ $\mu$-p.k.

Kuna $f = g$ $\nu$-p.k., siis leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ nii, et $\nu(A^c) = 0$ ja $f|_A = g|_A$. Kuna $\int_{A^c} \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \nu(A^c) = 0$, siis $\frac{d\nu}{d\mu} = 0$ $\mu$-p.k. hulgas $A^c$, seega $g \frac{d\nu}{d\mu} = f \frac{d\nu}{d\mu}$ $\mu$-p.k., nagu soovitud.

(II)

**Ülesanne 2.11.** Järeldada tõestuse osast (I) väite (a) kehtivus juhul, kui $\nu$ on märgiga mõõt.

(b).

**Ülesanne 2.12.** Tõestada väide (b).

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et väite (a) tõestuses on implitsiitselt tõestatud järgmine väide: *kui $\nu$ ja $\mu$ on mõõdud, kusjuures eksisteerib $\frac{d\nu}{d\mu}$, siis iga $f \in L^+(\nu) = L^+(\mu)$ korral $\int f \, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu$.*

□

**Järeldus 2.6.** *Olgu $\mu$ ja $\lambda$ mõõdud, kusjuures eksisteerivad Radon–Nikodými tuletised $\frac{d\mu}{d\lambda}$ ja $\frac{d\lambda}{d\mu}$. Siis $\frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = 1$ $\mu$-p.k. (ning ka $\lambda$-p.k.).*

## 2.3. Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem

**Teoreem 2.7** (Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem)**.** *Olgu $\nu$ $\sigma$-lõplik märgiga mõõt ning olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik mõõt.*

(a) *Leiduvad üheselt määratud märgiga mõõdud $\lambda$ ja $\rho$ selliselt, et*

$$\lambda \perp \mu,\ \rho \ll \mu \quad ja \quad \nu = \lambda + \rho. \tag{2.2}$$

(b) *Leidub laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ selliselt, et*

$$d\rho = f\,d\mu.$$

*Mistahes kaks seda tingimust rahuldavat funktsiooni on võrdsed $\mu$-p.k.*

Teoreemi 2.7 väide (a) ütleb, et $\sigma$-lõplikul märgiga mõõdul eksisteerib $\sigma$-lõpliku mõõdu suhtes alati Lebesgue'i lahutus.

Teoreemi 2.7 väidet (b) nimetatakse *Radon–Nikodými teoreemiks.* Kui mõõt $\mu$ ja märgiga mõõt $\nu$ on $\sigma$-lõplikud, kusjuures $\nu \ll \mu$, siis Radon–Nikodými teoreemi põhjal eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Lause 2.2 põhjal $\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$ *parajasti siis, kui $\nu$ on lõplik.*

Radon–Nikodými teoreemi olulisuse tõttu mõõduteoorias toome ta siinkohal veel kord eraldi välja sageli esinevas sõnastuses.

**Teoreem 2.8** (Radon–Nikodými teoreem)**.** *Olgu $\nu$ $\sigma$-lõplik märgiga mõõt ning olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik mõõt. Kui $\nu \ll \mu$, siis leidub laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon $f$ nii, et*

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu \quad \textit{iga } E \in \mathfrak{A} \textit{ korral.}$$

*Seejuures $f \in L_1(\mu)$ parajasti siis, kui $\nu$ on lõplik.*

Lebesgue–Radon–Nikodými teoreemi tõestuseks vajame me järgnevat lemmat.

**Lemma 2.9.** *Olgu $\lambda$ ja $\mu$ lõplikud mõõdud. Kui $\lambda \not\perp \mu$, siis leiduvad hulk $B \in \mathfrak{A}$, $\mu(B) > 0$, ja reaalarv $\varepsilon > 0$ selliselt, et*

$$\mathfrak{A} \ni A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \lambda(A) \geqslant \varepsilon\mu(A)$$

*(s.t. $B$ on märgiga mõõdu $\lambda - \varepsilon\mu$ jaoks positiivne hulk).*

Tõestus. Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $X = P_n \cup N_n$ märgiga mõõdu $\lambda - \frac{1}{n}\mu$ Hahni lahutus; tähistame $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ja $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$. Siis

$$P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots, \quad N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \cdots, \quad X = P \cup N, \quad P \cap N = \emptyset. \tag{2.3}$$

**Ülesanne 2.13.** Tõestada väited (2.3).

Paneme kõigepealt tähele, et $\lambda(N) = 0$. Tõepoolest, $N$ on iga $n \in \mathbb{N}$ korral märgiga mõõdu $\lambda - \frac{1}{n}\mu$ jaoks negatiivne hulk, seega $\lambda(N) \leqslant \frac{1}{n}\mu(N)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, millest mõõdu $\mu$ lõplikkuse tõttu järeldubki, et $\lambda(N) = 0$.

Niisiis, kui $\lambda \not\perp \mu$, siis $\mu(P) > 0$ (sest kui $\mu(P) = 0$, siis $\lambda \perp \mu$); järelikult võrduse $\mu(P) = \lim_{n\to\infty} \mu(P_n)$ tõttu leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\mu(P_n) > 0$. Tähistame $B = P_n$ ja $\varepsilon = \frac{1}{n}$; siis $\mu(B) > 0$, kusjuures $B$ on $\lambda - \varepsilon\mu$ jaoks positiivne hulk. □

LEBESGUE–RADON–NIKODÝMI TEOREEMI 2.7 TÕESTUS. Kuna Lebesgue'i lahutus ja Radon–Nikodými tuletis on üheselt määratud (Radon–Nikodými tuletis seejuures täpsusega p.k.), siis piisab tõestada vaid nõutud omadustega märgiga mõõtude $\rho$ ja $\lambda$ ning funktsiooni $f$ olemasolu.

(I) Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\nu$ ja $\mu$ on lõplikud mõõdud.

Tähistame

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu) \colon \int_E f\, d\mu \leqslant \nu(E) \quad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \text{ korral} \right\}$$

(märgime, et $\mathcal{F} \neq \emptyset$, sest $0 \in \mathcal{F}$) ning

$$a := \sup_{f \in \mathcal{F}} \int f\, d\mu.$$

Siis $a < \infty$, sest iga $f \in \mathcal{F}$ korral $\int f\, d\mu \leqslant \nu(X) < \infty$.

Näitame, et leidub funktsioon $f \in \mathcal{F}$ nii, et $\int f\, d\mu = a$. Selleks valime funktsioonid $f_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, selliselt, et $\int f_n\, d\mu \to a$, ja tähistame $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $g_n := \max\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{F}$.

**Ülesanne 2.14.** Tõestada, et $g_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$.

NÄPUNÄIDE. Väite tõestuseks piisab näidata, et mis tahes $g, h \in \mathcal{F}$ korral ka $\max\{g, h\} \in \mathcal{F}$.

Kuna $g_n \nearrow f$, siis monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal iga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, d\mu \leqslant \nu(E),$$

s.t. $f \in \mathcal{F}$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\int f_n\, d\mu \leqslant \int g_n\, d\mu$, siis järeldub siit, et

$$a = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int f\, d\mu \leqslant a,$$

s.t. $\int f\, d\mu = a$.

Defineerime mõõdud $\rho$ ja $\lambda$ võrdustega $d\rho = f\, d\mu$ (siis $\rho \ll \mu$) ja $\lambda = \nu - \rho$ (märgime, et $\lambda$ on tõepoolest mõõt, sest kuna $f \in \mathcal{F}$, siis iga $E \in \mathfrak{A}$ korral $\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f\, d\mu \geqslant 0$). Paneme tähele, et $\nu = \lambda + \rho$, kusjuures $\lambda \perp \mu$. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $\lambda \not\perp \mu$. Siis lemma 2.9 põhjal leiduvad hulk $B \in \mathfrak{A}$, $\mu(B) > 0$, ja reaalarv $\varepsilon > 0$ selliselt, et

$$\mathfrak{A} \ni A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \lambda(A) \geqslant \varepsilon\mu(A).$$

Vastuolu saamiseks piisab nüüd näidata, et $f + \varepsilon\chi_B \in \mathcal{F}$.

Tõepoolest, kui $f + \varepsilon\chi_B \in \mathcal{F}$, siis

$$a \geqslant \int (f + \varepsilon\chi_B)\, d\mu = \int f\, d\mu + \varepsilon \int \chi_B\, d\mu = a + \varepsilon\mu(B) > a.$$

Selleks märgime, et iga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}
\int_E (f + \varepsilon\chi_B)\, d\mu &= \int_{E\cap B} (f + \varepsilon\chi_B)\, d\mu + \int_{E\setminus B} (f + \varepsilon\chi_B)\, d\mu \\
&= \rho(E\cap B) + \varepsilon\, \mu(E\cap B) + \int_{E\setminus B} f\, d\mu \\
&\leqslant \rho(E\cap B) + \lambda(E\cap B) + \nu(E\setminus B) \\
&= \nu(E\cap B) + \nu(E\setminus B) \\
&= \nu(E).
\end{aligned}$$

Seega $f + \varepsilon\chi_B \in \mathcal{F}$ ning järelikult $\lambda \perp \mu$.

(II)

**Ülesanne 2.15.** Järeldada tõestuse osast (I) nõutud omadustega märgiga mõõtude $\rho$ ja $\lambda$ ning funktsiooni $f$ olemasolu üldisel juhul, s.t. juhul, kus $\mu$ on $\sigma$-lõplik mõõt ja $\nu$ on $\sigma$-lõplik märgiga mõõt.

□

## 2.4. Täiendavaid ülesandeid

**Ülesanne 2.16.** Olgu $\nu$ $\sigma$-lõplik märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, mille korral $\nu \ll \mu$. Ilma Radon–Nikodými teoreemi kasutamata tõestada, et leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, kusjuures iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$(n-1)\mu(E) \leqslant |\nu|(E) \leqslant n\mu(E) \quad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \cap \mathcal{P}(E_n) \text{ korral.}$$

Näpunäide. Rakendada sobivatele märgiga mõõtudele Hahni lahutust.

# § 3. Kompleksmõõdud

Kõikjal selles paragrahvis on $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum. Kõikide mõõtude (ning märgiga mõõtude ning kompleksmõõtude) määramispiirkond on $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$, välja arvatud muidugi juhul, kui (kon)tekstis on sedastatud teisiti.

## 3.1. Kompleksmõõdu mõiste. Kompleksmõõdu täisvariatsioon

**Definitsioon 3.1.** Öeldakse, et hulgafunktsioon $\nu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ on *kompleksmõõt,* kui

CM1° $\nu(\emptyset) = 0$;

CM2° $\nu$ on *loenduvalt aditiivne,* s.t. paarikaupa lõikumatute hulkade $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots,$ korral

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

**Ülesanne 3.1.** Veenduda, et rida tingimuses CM2° koondub absoluutselt.

Kompleksmõõdu $\nu$ reaal- ja imaginaarosa tähistame vastavalt sümbolitega $\nu_r$ ja $\nu_i$. Hulgafunktsioonid $\nu_r$ ja $\nu_i$ on märgiga mõõdud, mis ei saavuta väärtusi $\pm\infty$, seega nende positiivsed ning negatiivsed variatsioonid $\nu_r^+$ ja $\nu_i^+$ ning $\nu_r^-$ ja $\nu_i^-$ on lõplikud mõõdud ning järelikult on kompleksmõõdu $\nu$ väärtuste hulk ruumi $\mathbb{C}$ tõkestatud alamhulk (PÕHJENDADA!).

**Definitsioon 3.2.** Kompleksmõõdu $\nu$ *täisvariatsiooniks* nimetatakse hulgafunktsiooni

$$|\nu|\colon \mathfrak{A} \ni A \mapsto \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)|\colon\ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{n} A_j = A\Big\}.$$

**Ülesanne 3.2.** Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

$$|\nu|(A) = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(A_j)|\colon\ A_j \in \mathfrak{A}, j = 1, 2, \ldots,\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A\Big\}.$$

Lihtne on veenduda, et *kompleksmõõdu täisvariatsioon on mõõt.*

**Ülesanne 3.3.** Veenduda, et kompleksmõõdu täisvariatsioon on mõõt.

**Ülesanne 3.4.** Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Tõestada, et $|\nu_r|, |\nu_i| \leqslant |\nu| \leqslant |\nu_r| + |\nu_i|$, s.t.

$$|\nu_r|(E), |\nu_i|(E) \leqslant |\nu|(E) \leqslant |\nu_r|(E) + |\nu_i|(E) \quad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Ülesandest 3.4 järeldub kiiresti, et *kompleksmõõdu täisvariatsioon on lõplik mõõt.*

**Teoreem 3.1.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Siis $|\nu|(X) < \infty$.*

TÕESTUS. Kuna variatsioonid $\nu_r^+$ ja $\nu_r^-$ ning $\nu_i^+$ ja $\nu_i^-$ on lõplikud mõõdud, siis ka mõõdud $|\nu_r|$ ja $|\nu_i|$ on lõplikud; seega ülesande 3.4 põhjal $|\nu|(X) \leqslant |\nu_r|(X) + |\nu_i|(X) < \infty$. $\square$

Mõisted, mis me oleme defineerinud märgiga mõõtude jaoks, üldistuvad loomulikul viisil kompleksmõõtudele. Näiteks, kui $\nu$ ja $\lambda$ on kompleksmõõdud, siis

$$\nu\perp\lambda \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \nu_a\perp\lambda_b \quad \forall a,b\in\{r,i\},$$

kui $\mu$ on mõõt, siis

$$\nu\ll\mu \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \nu_r\ll\mu,\ \nu_i\ll\mu.$$

**Ülesanne 3.5.** Olgu $\nu$ ja $\lambda$ kompleksmõõdud ning olgu $\mu$ mõõt. Tõestada, et

(a) $\nu\perp\mu \iff \nu_r\perp\mu$ ja $\nu_i\perp\mu \iff |\nu_r|\perp\mu$ ja $|\nu_i|\perp\mu \iff |\nu|\perp\mu$;

(b) $\nu\perp\lambda \iff |\nu|\perp\lambda_r$ ja $|\nu|\perp\lambda_i \iff |\nu|\perp|\lambda|$;

(c) $\nu\ll\mu \iff \nu_r\ll\mu$ ja $\nu_i\ll\mu \iff |\nu_r|\ll\mu$ ja $|\nu_i|\ll\mu \iff |\nu|\ll\mu$.

## 3.2. Komplekse funktsiooni mõõtuvus ja integreeeruvus

Järgnev lause selgitab, millises vahekorras on funktsiooni $f\colon X\to\mathbb{C}$ (Boreli mõttes) mõõtuvus ning tema reaal- ja imaginaarosa mõõtuvus.

**Lause 3.2.** (a) *Olgu $f\colon X\to\mathbb{C}$ mõõtuv funktsioon. Siis* $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|\colon X\to\mathbb{R}$ *on mõõtuvad funktsioonid.*

(b) *Olgu $f=u+iv$, kus $u,v\colon X\to\mathbb{R}$ on mõõtuvad funktsioonid. Siis $f\colon X\to\mathbb{C}$ on mõõtuv funktsioon.*

Lause 3.2 järeldub kiiresti järgnevast lemmast.

**Lemma 3.3.** (a) *Olgu $Y$ ja $Z$ topoloogilised ruumid, olgu $f\colon X\to Y$ (Boreli mõttes) mõõtuv funktsioon ning olgu $g\colon Y\to Z$ pidev funktsioon. Siis funktsioon $g\circ f\colon X\to Z$ on mõõtuv.*

(b) *Olgu $u,v\colon X\to\mathbb{R}$ mõõtuvad funktsioonid, olgu $Z$ topoloogiline ruum ning olgu $\Phi\colon\mathbb{R}^2\to Z$ pidev funktsioon. Siis funktsioon*

$$h\colon X\ni x\longmapsto\Phi\Big(u(x),v(x)\Big)\in Z$$

*on mõõtuv.*

Lause 3.2 tõestus. (a). Defineerime funktsioonid $g_1,g_2,g_3\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ võrdustega

$$g_1(z)=\operatorname{Re} z,\quad g_2(z)=\operatorname{Im} z,\quad g_3(z)=|z|,\qquad z\in\mathbb{C}.$$

Siis $\operatorname{Re} f=g_1\circ f$, $\operatorname{Im} f=g_2\circ f$ ja $|f|=g_3\circ f$. Kuna funktsioonid $g_1$, $g_2$ ja $g_3$ on pidevad, siis järeldub funktsioonide $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ ja $|f|$ mõõtuvus lemmast 3.3, (a), kui seal võtta $Y=\mathbb{C}$ ja $Z=\mathbb{R}$.

(b). Defineerime funktsiooni

$$\Phi\colon\mathbb{R}^2\ni(x_1,x_2)\longmapsto x_1+ix_2\in\mathbb{C}.$$

Kuna funktsioon $\Phi$ on pidev ning $f(x)=\Phi\Big(u(x),v(x)\Big)$, $x\in X$, siis järeldub funktsiooni $f$ mõõtuvus lemmast 3.3, (b), kui seal võtta $Z=\mathbb{C}$. $\square$

LEMMA 3.3 TÕESTUS. (a).

**Ülesanne 3.6.** Tõestada väide (a).

(b). Defineerime funktsiooni $f\colon X \ni x \mapsto \big(u(x), v(x)\big) \in \mathbb{R}^2$. Kuna $h = \Phi \circ f$, siis väite (a) põhjal jääb näidata, et funktsioon $f$ on mõõtuv.

Olgu $U \subset \mathbb{R}^2$ mittetühi lahtine hulk. Funktsiooni $f$ mõõtuvuse tõestuseks piisab näidata, et $f^{-1}[U] \in \mathfrak{A}$. Kuna ruum $\mathbb{R}^2$ on separaabel, siis lahtine hulk $U$ esitub kujul $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^1 \times I_j^2$, kus $I_j^1, I_j^2 \subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$, on tõkestatud vahemikud. Aga nüüd

$$f^{-1}[U] = f^{-1}\Big[\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^1 \times I_j^2\Big] = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}\left[I_j^1 \times I_j^2\right] = \bigcup_{j=1}^{\infty} u^{-1}[I_j^1] \cap v^{-1}[I_j^2] \in \mathfrak{A},$$

sest $u$ ja $v$ on mõõtuvad funktsioonid. □

**Ülesanne 3.7.** Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ mõõtuv funktsioon. Tõestada, et siis ka $\overline{f}\colon X \to \mathbb{C}$ on mõõtuv funktsioon.

Defineerimaks integraali kompleksväärtustega funktsioonist kompleksmõõdu järgi, defineerime kõigepealt integraali kompleksväärtustega funktsioonist märgiga mõõdu järgi: kui $\mu$ on märgiga mõõt ja $f\colon X \to \mathbb{C}$, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on integreeruv (märgiga mõõdu $\mu$ järgi) (või $\mu$-integreeruv) ja kirjutatakse $f \in L_1(\mu)$, kui $\operatorname{Re} f \in L_1(\mu)$ ja $\operatorname{Im} f \in L_1(\mu)$; integraal funktsioonist $f$ (märgiga mõõdu $\mu$ järgi) defineeritakse võrdusega

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) := \int_X \operatorname{Re} f(x)\,d\mu(x) + i \int_X \operatorname{Im} f(x)\,d\mu(x).$$

Paneme tähele, et kui $\mu$ on märgiga mõõt ja $f\colon X \to \mathbb{C}$ on mõõtuv funktsioon, siis

$$f \in L_1(\mu) \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L_1(\mu) \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L_1(|\mu|) \quad\Leftrightarrow\quad |f| \in L_1(|\mu|).$$

Siin viimane samaväärsus järeldub võrratustest $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leqslant |f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

**Ülesanne 3.8.** Olgu funktsioonid $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ integreeruvad märgiga mõõdu $\mu$ järgi ning olgu $\alpha \in \mathbb{C}$. Tõestada, et siis ka $f + g, \alpha f \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu \qquad \text{ja} \qquad \int \alpha f\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu.$$

**Lause 3.4.** *Olgu $\mu$ märgiga mõõt ning olgu $f \in L_1(\mu)$ kompleksne funktsioon. Siis*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d|\mu|.$$

TÕESTUS. Olgu $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, selline, et $\left|\int f\,d\mu\right| = \alpha \int f\,d\mu$. Siis

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu\right| &= \alpha \int f\,d\mu = \int \alpha f\,d\mu = \operatorname{Re} \int \alpha f\,d\mu = \int \operatorname{Re} \alpha f\,d\mu \\ &\leqslant \int |\operatorname{Re} \alpha f|\,d|\mu| \leqslant \int |\alpha f|\,d|\mu| = \int |\alpha|\,|f|\,d|\mu| = \int |f|\,d|\mu|.\end{aligned}$$

□

Kui $\nu$ on kompleksmõõt ja $f\colon X \to \mathbb{C}$, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on integreeruv (kompleksmõõdu $\nu$ järgi) (või $\nu$-integreeruv) ja kirjutatakse $f \in L_1(\nu)$, kui $f \in L_1(\nu_r) \cap L_1(\nu_i)$; integraal funktsioonist $f$ (kompleksmõõdu $\nu$ järgi) defineeritakse võrdusega

$$\int_X f(x)\, d\nu(x) := \int_X f(x)\, d\nu_r(x) + i \int_X f(x)\, d\nu_i(x).$$

Paneme tähele, et kui $\nu$ on kompleksmõõt ja $f\colon X \to \mathbb{C}$, on mõõtuv funktsioon, siis

$$f \in L_1(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad f \in L_1(\nu_r) \cap L_1(\nu_i) \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in L_1(|\nu_r|) \cap L_1(|\nu_i|) \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in L_1(|\nu|).$$

Siin viimane samaväärsus järeldub võrratustest $|\nu_r|, |\nu_i| \leqslant |\nu| \leqslant |\nu_r| + |\nu_i|$.

**Ülesanne 3.9.** Olgu funktsioonid $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ integreeruvad kompleksmõõdu $\nu$ järgi ning olgu $\alpha \in \mathbb{C}$. Tõestada, et siis ka $f + g, \alpha f \in L_1(\nu)$, kusjuures

$$\int (f+g)\, d\nu = \int f\, d\nu + \int g\, d\nu \qquad \text{ja} \qquad \int \alpha f\, d\nu = \alpha \int f\, d\nu.$$

Lause 3.4 analoogi kompleksmõõdu jaoks tõestame järgmises punktis (vt. teoreemi 3.10).

Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ mõõt. Kui $\mathfrak{A}$-mõõtuv $\mu$-integreeruv funktsioon $f\colon X \to \mathbb{C}$ rahuldab tingimust $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ iga $E \in \mathfrak{A}$ korral, siis seda funktsiooni $f$ nimetatakse *kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletiseks (mõõdu $\mu$ järgi)* ja tähistatakse sümboliga $\frac{d\nu}{d\mu}$.

**Ülesanne 3.10.** (a) Eksisteerigu Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Tõestada, et siis eksisteerivad ka $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$, kusjuures

$$\frac{d\nu_r}{d\mu} = \operatorname{Re}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) \quad \text{ja} \quad \frac{d\nu_i}{d\mu} = \operatorname{Im}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right). \tag{3.1}$$

(b) Eksisteerigu Radon–Nikodými tuletised $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$. Tõestada, et siis eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\mu}$, kusjuures võrdused (3.1) kehtivad $\mu$-p.k.

NB! Ülesandes 3.10, (b), tuleneb võrduse (3.1) kehtivus $\mu$-p.k. (aga mitte tingimata ruumi $X$ igas punktis) sellest, et vastavalt definitsioonile on märgiga mõõtude $\nu_r$ ja $\nu_i$ Radon–Nikodými tuletistel $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$ lubatud olla $\overline{\mathbb{R}}$-väärtuselised funktsioonid, samas kui kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ peab olema $\mathbb{C}$-väärtuseline funktsioon ning seega tema reaal- ja imaginaarosa $\operatorname{Re}(\frac{d\nu}{d\mu})$ ja $\operatorname{Im}(\frac{d\nu}{d\mu})$ peavad olema $\mathbb{R}$-väärtuselised funktsioonid.

Ülesandest 3.10 nähtub, et Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerivad Radon–Nikodými tuletised $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$; seejuures

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu_r}{d\mu} + i\frac{d\nu_i}{d\mu} \quad \mu\text{-p.k.}.$$

Rõhutame, et kuna $\nu_r$ ja $\nu_i$ on lõplikud mõõdud, siis $\frac{d\nu_r}{d\mu}, \frac{d\nu_i}{d\mu} \in L_1(\mu)$ (vt. lauset 2.2); seda muidugi eeldusel, et need Radon–Nikodými tuletised eksisteerivad.

Kui funktsioon $f$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{C}$ on selline, et $g = f$ $\mu$-p.k., siis ka funktsioon $g$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi.

**Ülesanne 3.11.** Veenduda selles.

Teiselt poolt, kui funktsioonid $f$ ja $g$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletised mõõdu $\mu$ järgi, siis $f = g$ $\mu$-p.k.

**Ülesanne 3.12.** Veenduda selles.

Niisiis, kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k.

Järgnev teoreem on teoreemi 2.5 analoog kompleksmõõdu jaoks.

**Teoreem 3.5.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$.*

(a) *Kui $f \in L_1(\nu)$, siis $f\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$, kusjuures $\int f\, d\nu = \int f\frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$.*

(b) *Kui $\lambda$ on mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\mu}{d\lambda}$, siis eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\lambda}$, kusjuures $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ $\lambda$-p.k.*

TEOREEMI 3.5 TÕESTUS.

**Ülesanne 3.13.** Tõestada teoreem 3.5.

$\square$

Vahetult Lebesgue–Radon–Nikodými teoreemist märgiga mõõtude jaoks järeldub

**Teoreem 3.6** (Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem kompleksmõõtude jaoks)**.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik mõõt.*

(a) *Leiduvad üheselt määratud kompleksmõõdud $\lambda$ ja $\rho$ selliselt, et*

$$\lambda \perp \mu,\ \rho \ll \mu \quad \text{ja} \quad \nu = \lambda + \rho.$$

(b) *Leidub (kompleksne) funktsioon $f \in L_1(\mu)$ selliselt, et*

$$d\rho = f\, d\mu.$$

*Mis tahes kaks seda tingimust rahuldavat funktsiooni on võrdsed $\mu$-p.k.*

Kompleksmõõdu $\nu$ esitust $\nu = \lambda + \rho$ teoreemi 3.6 väites (a) nimetatakse tema *Lebesgue'i lahutuseks* mõõdu $\mu$ suhtes. Teoreemi 3.6 väide (a) ütleb, et kompleksmõõdul eksisteerib $\sigma$-lõpliku mõõdu suhtes alati Lebesgue'i lahutus.

Teoreemi 3.6 väidet (b) nimetatakse *Radon–Nikodými teoreemiks.* Kui $\nu$ on kompleksmõõt ja $\mu$ on $\sigma$-lõplik mõõt, kusjuures $\nu \ll \mu$, siis Radon–Nikodými teoreemi põhjal eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Radon–Nikodými teoreemi olulisuse tõttu mõõduteoorias toome ta siinkohal veel kord eraldi välja sagedamini esinevas sõnastuses.

**Teoreem 3.7** (Radon–Nikodými teoreem, kompleksne versioon)**.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik mõõt. Kui $\nu \ll \mu$, siis leidub $f \in L_1(\mu)$ nii, et*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \quad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

*Teisisõnu, eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$.*

LEBESGUE–RADON–NIKODÝMI TEOREEMI 3.6 TÕESTUS.

**Ülesanne 3.14.** Tõestada Lebesgue–Radon–Nikodými teoreem 3.6 kompleksmõõtude jaoks.

□

## 3.3. Kompleksmõõdu täisvariatsiooni omadusi

**Lause 3.8.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Siis eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d|\nu|}$, kusjuures $\left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right| = 1$ $|\nu|$-p.k.*

Lause 3.8 tõestus toetub järgnevale abitulemusele.

**Lemma 3.9.** *Olgu $\mu$ mõõt, olgu $f \in L_1(\mu)$ kompleksne funktsioon ning olgu $S \subset \mathbb{C}$ kinnine hulk, kusjuures*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \in S \quad \text{iga } E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) > 0, \text{ korral.}$$

*Siis $f(x) \in S$ $\mu$-peaaegu kõikide $x \in X$ korral.*

TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $S \neq \mathbb{C}$. Me peame näitama, et $\mu(f^{-1}[\mathbb{C} \setminus S]) = 0$. Kuna $\mathbb{C} \setminus S$ on lahtine hulk, siis saame esitada $\mathbb{C} \setminus S = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, kus $B_j \subset \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots$, on kinnised ringid, mis ei lõika hulka $S$. Nüüd

$$\mu(f^{-1}[\mathbb{C} \setminus S]) = \mu\Big(f^{-1}\Big[\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big]\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}[B_j]\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big(f^{-1}[B_j]\big).$$

Seega, fikseerides vabalt kinnise ringi $B := \{w \in \mathbb{C} \colon |w - z| \leqslant r\}$ (siin $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$), mille korral $B \cap S = \emptyset$, piisab teoreemi tõestuseks veenduda, et $\mu(E) = 0$, kus $E := f^{-1}[B]$.

Oletame vastuväiteliselt, et $\mu(E) > 0$. Siis

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)\, d\mu(x) - z\right| &= \left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{\mu(E)} \int_E z\, d\mu(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E \big(f(x) - z\big)\, d\mu(x)\right| \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x) - z|\, d\mu(x) \\
&\leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E r\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(E)}\, r\, \mu(E) = r,
\end{aligned}$$

aga see tähendab, et $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \in B \subset \mathbb{C} \setminus S$, mis on vastuolus eeldusega. □

LAUSE 3.8 TÕESTUS. Radon–Nikodými tuletise $\frac{d\nu}{d|\nu|} =: h$ olemasolu järeldub Radon–Nikodými teoreemist, sest $\nu \ll |\nu|$, kusjuures $|\nu|$ on lõplik.

Kui $E \in \mathfrak{A}$, $|\nu|(E) > 0$, siis

$$\left|\frac{1}{|\nu|(E)} \int_E h\, d|\nu|\right| = \left|\frac{1}{|\nu|(E)}\, \nu(E)\right| = \frac{|\nu(E)|}{|\nu|(E)} \leqslant 1,$$

seega lemma 3.9 põhjal (võttes seal $S$ rolli komplekstasandi kinnise ühikringi) $|h| \leqslant 1$ $|\nu|$-p.k. Tähistame $E := \{x \in X \colon |h(x)| < 1\}$ ja oletame vastuväiteliselt, et $|\nu|(E) > 0$. Siis leidub $\theta \in (0, 1)$ nii, et $|\nu|(D) > 0$, kus $D := \{x \in X \colon |h(x)| < \theta\}$.

Tõepoolest, tähistame $E_j = \left\{x \in X\colon |h(x)| < 1 - \frac{1}{j}\right\}$, $j = 1, 2, \dots$; siis $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kusjuures $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$; seega $|\nu|(E) = \lim_{j\to\infty} |\nu|(E_j)$. Kuna $|\nu|(E) > 0$, siis alates mingist indeksist ka $|\nu|(E_j) > 0$.

Kui $D_1, \dots, D_n \subset D$ (siin $n \in \mathbb{N}$) on paarikaupa lõikumatud mõõtuvad hulgad, kusjuures $\bigcup_{j=1}^{n} D_j = D$, siis

$$\sum_{j=1}^{n} |\nu(D_j| = \sum_{j=1}^{n} \left|\int_{D_j} h\,d|\nu|\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{D_j} |h|\,d|\nu| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{D_j} \theta\,d|\nu| = \theta \sum_{j=1}^{n} |\nu|(D_j) = \theta\,|\nu|(D),$$

seega $|\nu|(D) \leqslant \theta\,|\nu|(D)$, millest järeldub, et $1 \leqslant \theta$. Jõudsime vastuoluni. $\square$

Tõestame nüüd kaks olulist järeldust lausest 3.8.

**Teoreem 3.10.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Siis iga $f \in L_1(\nu)$ korral*

$$\left|\int f\,d\nu\right| \leqslant \int |f|\,d|\nu|.$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 3.15.** Tõestada teoreem 3.10.

NÄPUNÄIDE. Kasutada lauset 3.8, teoreemi 3.5, (a), ning lauset 3.4.

$\square$

**Teoreem 3.11.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Siis eksisteerib ka $\frac{d|\nu|}{d\mu}$, kusjuures $\frac{d|\nu|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|$ $\mu$-p.k.*

TÕESTUS. Veendume kõigepealt, et eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d|\nu|}{d\mu}$. Selleks defineerime mõõdu $\rho$ tingimusega $d\rho = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu$; siis eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\rho}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|$. Kuna $\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| \in L_1(\mu)$ (sest $\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$), siis $\rho$ on lõplik mõõt (vt. lauset 2.2). Seejuures $\nu \ll \rho$.

Tõepoolest, kui $E \in \mathfrak{A}$ on selline, et $\rho(E) = 0$, siis ka $\nu(E) = 0$, sest lause 3.4 põhjal

$$|\nu(E)| = \left|\int_E \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu\right| \leqslant \int_E \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu = \rho(E) = 0.$$

Seega ka $|\nu| \ll \rho$ (vt. ülesannet 3.5, (c)), järelikult Radon–Nikodými teoreemi põhjal eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d|\nu|}{d\rho}$. Kuna eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\rho}{d\mu}$, siis eksisteerib ka $\frac{d|\nu|}{d\mu}$ (vt. teoreemi 2.5, (b)).

Nüüd iga $E \in \mathfrak{A}$ korral (vt. teoreemi 3.5, (a))

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d|\nu|}\,d|\nu| = \int_E \frac{d\nu}{d|\nu|}\,\frac{d|\nu|}{d\mu}\,d\mu,$$

järelikult (arvestades, et Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k.)

$$\frac{d\nu}{d|\nu|}\,\frac{d|\nu|}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} \qquad \mu\text{-p.k.}$$

Võttes saadud võrduse mõlemast poolest mooduli, saame, et $\frac{d|\nu|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|$ $\mu$-p.k. (sest lause 3.8 põhjal võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right| \equiv 1$, ning $\frac{d|\nu|}{d\mu} \geqslant 0$ $\mu$-p.k.). □

## 3.4. Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

**Ülesanne 3.16.** Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Ilma selle paragrahvi jaotise 3.3 tulemusi kasutamata tõestada, et leidub parajasti üks mõõt $\rho$, millel on järgmine omadus

- kui $\sigma$-lõplik mõõt $\mu$ ja funktsioon $f \in L_1(\mu)$ on sellised, et $d\nu = f\,d\mu$, siis $d\rho = |f|\,d\mu$.

**Märkus 3.1.** Mõnedes allikates toetutakse kompleksmõõdu täisvariatsiooni defineerimisel ülesandele 3.16 — kompleksmõõdu $\nu$ täisvariatsioon $|\nu|$ defineeritakse võrdusega $|\nu| = \rho$, kus $\rho$ on (ainus) ülesande 3.16 tingimust • rahuldav mõõt. Teoreemi 3.11 põhjal ühtib selline täisvariatsiooni definitsioon traditsioonilise definitsiooniga 3.2.

**Definitsioon 3.3.** Öeldakse, et kompleksmõõtude süsteem $\{\mu_\tau\}_{\tau\in T}$ (siin $T$ on mingi mittetühi indeksite hulk) on *ühtlaselt loenduvalt aditiivne,* kui mis tahes paarikaupa lõikumatute hulkade $E_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \dots$, korral

$$\left\|\sum_{j=n}^{\infty} F_\tau(E_j)\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{ühtlaselt } \tau \in T \text{ suhtes.}$$

**Ülesanne 3.17.** Olgu $\{\mu_\tau\}_{\tau\in T}$ ühtlaselt loenduvalt aditiivne kompleksmõõtude süsteem. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $n \in \mathbb{N}$, indeksid $\tau_1, \dots, \tau_n \in T$ ning reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \ |\mu_{\tau_1}|(E), \dots, |\mu_{\tau_n}|(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_\tau(E)| < \varepsilon \quad \text{iga } \tau \in T \text{ korral.}$$

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et kui $H_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \dots$, $H_1 \supset H_2 \supset \cdots$, siis $|\mu_\tau(H_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ühtlaselt $\tau \in T$ suhtes.

Järgneva ülesande (mida on mugav kasutada näiteks ülesannete 1.22 ja V. 3.16 lahendamisel) loomulik koht selles konspektis pole üldse siin, aga näiteks käesoleva peatüki § 1 lõppu ei mahtunud ta lihtsalt ära.

**Ülesanne 3.18.** Olgu $\mu$ ja $\nu$ mõõdud. Tõestada, et

(a) kui $\mu \leqslant \nu$ (s.t. $\mu(E) \leqslant \nu(E)$ iga $E \in \mathfrak{A}$ korral), siis

$$\int f\,d\mu \leqslant \int f\,d\nu \qquad \text{iga } f \in L^+(\mu) = L^+(\nu) \text{ korral}$$

(muuhulgas järeldub siit, et $L_1(\nu) \subset L_1(\mu)$);

(b) iga $f \in L^+(\mu) = L^+(\nu) = L^+(\mu+\nu)$ korral

$$\int f\,d(\mu+\nu) = \int f\,d\mu + \int f\,d\nu. \tag{3.2}$$

Valem (3.2) kehtib ka mis tahes $f \in L_1(\mu) \cap L_1(\nu) \subset L_1(\mu+\nu)$ korral.

# V peatükk.
# Radoni mõõdud

## § 0. Topoloogilised prerekvisiidid

Kui $(X, \tau)$ on topoloogiline ruum, siis me kasutame standardseid tähistusi

$$\begin{aligned}
C(X) &= \{f\colon X \to \mathbb{C},\ f \text{ on pidev}\},\\
C(X,\mathbb{R}) &= \{f\colon X \to \mathbb{R},\ f \text{ on pidev}\},\\
B(X) &= \{f\colon X \to \mathbb{C},\ f \text{ on tõkestatud}\},\\
B(X,\mathbb{R}) &= \{f\colon X \to \mathbb{R},\ f \text{ on tõkestatud}\},\\
BC(X) &= C(X) \cap B(X),\\
BC(X,\mathbb{R}) &= C(X,\mathbb{R}) \cap B(X,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Meenutame, et neli viimasena nimetatud vektorruumi on Banachi ruumid järgmise võrdusega defineeritud normi – nn. *ühtlase normi* – suhtes:

$$\|f\| = \|f\|_u := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**Ülesanne 0.1.** Tõestada, et vektorruumid $B(X)$, $B(X,\mathbb{R})$, $BC(X)$ ja $BC(X,\mathbb{R})$ on ühtlase normi suhtes Banachi ruumid.

Kui $T \subset \mathbb{R}$, siis me tähistame

$$C(X,T) := \{f \in C(X,\mathbb{R})\colon\ f[X] \subset T\}.$$

Meenutame, et hulka topoloogilises ruumis nimetatakse *kompaktseks,* kui tema iga lahtine kate sisaldab lõpliku alamkatte. Topoloogilist ruumi $(X, \tau)$ nimetatakse *kompaktseks,* kui $X$ on iseenda kompaktne alamhulk. (Sel juhul öeldakse ka lihtsalt, et $X$ on kompaktne topoloogiline ruum.)

**Ülesanne 0.2.** Olgu $X$ kompaktne topoloogiline ruum ning olgu $f \in C(X,\mathbb{R})$. Tõestada, et

(a) $f$ on tõkestatud;

(b) $f$ saavutab oma ekstremaalsed väärtused.

Öeldakse, et topoloogiline ruum $(X, \tau)$ (ehk lihtsalt $X$) on *lokaalselt kompaktne,* kui tema igal punktil leidub kompaktne ümbrus.

**Näide 0.1.** (Eukleidiline) ruum $\mathbb{R}^n$ (siin $n \in \mathbb{N}$) on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum.

**Näide 0.2.** Mis tahes hulk $X$ varustatuna diskreetse topoloogiaga on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum − diskreetses topoloogias on kõik hulgad üheaegselt kinnised ja lahtised, seega iga $x \in X$ korral on hulk $\{x\}$ punkti $x$ kompaktne ümbrus. (Märgime, et diskreetse topoloogilise ruumi kompaktsed alamhulgad on parajasti lõplikud hulgad.)

Selles peatükis on meie põhieesmärk kirjeldada ära pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumidel $C(X,\mathbb{R})$ ja $C(X)$, kus $X$ on kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum, ning nende ruumide lähimatel üldistustel — ruumidel $C_0(X,\mathbb{R})$ ja $C_0(X)$, kus $X$ on lokaalselt kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum.

Selles paragrahvis meenutame üldise topoloogia kursusest tuttavaid fakte lokaalselt kompaktsete Hausdorffi ruumide kohta.

Kui $f \in C(X)$, siis hulka $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}}$ nimetatakse funktsiooni $f$ *kandjaks.* (Funktsiooni $f$ kandja on niisiis hulga $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ sulund.) Me kasutame standardseid tähistusi

$$C_c(X) = \bigl\{f \in C(X)\colon\ \operatorname{supp} f \text{ on kompaktne}\bigr\},$$
$$C_c(X,\mathbb{R}) = \bigl\{f \in C(X,\mathbb{R})\colon\ \operatorname{supp} f \text{ on kompaktne}\bigr\},$$
$$C_c\bigl(X,[0,1]\bigr) = \bigl\{f \in C_c(X,\mathbb{R})\colon\ f[X] \subset [0,1]\bigr\},$$

Öeldakse, et funktsioon $f \in C(X)$ *hääbub lõpmatuses,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral on hulk $\{x \in X\colon\ |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ kompaktne. Me kasutame standardseid tähistusi

$$C_0(X) = \bigl\{f \in C(X)\colon\ f \text{ hääbub lõpmatuses}\bigr\},$$
$$C_0(X,\mathbb{R}) = \bigl\{f \in C(X,\mathbb{R})\colon\ f \text{ hääbub lõpmatuses}\bigr\}.$$

Ilmselt $C_c(X,\mathbb{R}) \subset C_0(X,\mathbb{R}) \subset BC(X,\mathbb{R})$; samuti $C_c(X) \subset C_0(X) \subset BC(X)$. On selge ka, et kui $X$ on kompaktne, siis $C_c(X,\mathbb{R}) = BC(X,\mathbb{R})$ ja $C_c(X) = BC(X)$.

**Näide 0.3.** Kui vaadelda mis tahes hulka $\Gamma$ varustatuna diskreetse topoloogiaga, siis nii ruumi $C_0(\Gamma,\mathbb{R})$ kui ka ruumi $C_0(\Gamma)$ tähistatakse sümboliga $c_0(\Gamma)$. Niisiis,

$$\begin{aligned} c_0(\Gamma) &= \Bigl\{f\colon\ \Gamma \to \mathbb{K}, \text{iga } \varepsilon > 0 \text{ korral hulk } \bigl\{x \in \Gamma\colon\ |f(x)| \geqslant \varepsilon\bigr\} \text{ on diskreetses topoloogias kompaktne}\Bigr\} \\ &= \Bigl\{f\colon\ \Gamma \to \mathbb{K}, \text{iga } \varepsilon > 0 \text{ korral hulk } \bigl\{x \in \Gamma\colon\ |f(x)| \geqslant \varepsilon\bigr\} \text{ on lõplik}\Bigr\}, \end{aligned}$$

kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ruumi $c_0(\mathbb{N})$ tähistatakse lihtsalt sümboliga $c_0$ — see on meile hästi tuntud ruum!

Öeldakse, et topoloogiline ruum $(X,\tau)$ on

- $\mathcal{T}_0$-*ruum,* kui mis tahes elementide $x, y \in X$, $x \neq y$, korral leidub $U \in \tau$ nii, et $x \in U$, kuid $y \notin U$, või $y \in U$, kuid $x \notin U$;
- $\mathcal{T}_1$-*ruum,* kui mis tahes elementide $x, y \in X$, $x \neq y$, korral leiduvad $U, V \in \tau$ nii, et $x \in U$, kuid $y \notin U$, ning $y \in V$, kuid $x \notin V$;
- $\mathcal{T}_2$-*ruum* ehk *Hausdorffi ruum,* kui mis tahes elementide $x, y \in X$, $x \neq y$, korral leiduvad $U, V \in \tau$, $U \cap V = \emptyset$, nii, et $x \in U$ ja $y \in V$.

Ilmselt *iga* $\mathcal{T}_2$-*ruum on* $\mathcal{T}_1$-*ruum* ning *iga* $\mathcal{T}_1$-*ruum on* $\mathcal{T}_0$-*ruum.*

**Lause 0.1.** *Topoloogiline ruum $X$ on $\mathcal{T}_1$-ruum parajasti siis, kui temas iga ühepunktiline hulk on kinnine.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu $X$ $\mathcal{T}_1$-ruum ning olgu $x \in X$. Siis iga $y \in X \setminus \{x\}$ korral leidub $U_y \in \tau$ nii, et $y \in U_y$, kuid $x \notin U_y$. Aga nüüd $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y \in \tau$, seega $\{x\}$ on kinnine hulk.

*Piisavus.* Kui iga ühepunktiline hulk ruumis $X$ on kinnine ning $x, y \in X$, $x \neq y$, siis $x \in X \setminus \{y\} =: U \in \tau$ ja $y \in X \setminus \{x\} =: V \in \tau$, kusjuures $y \notin U$ ja $x \notin V$, seega $X$ on $\mathcal{T}_1$-ruum. □

Öeldakse, et topoloogiline ruum $(X, \tau)$ on

- *regulaarne,* kui mis tahes kinnise hulga $A \subset X$ ja elemendi $x \in X \setminus A$ korral leiduvad $U, V \in \tau$, $U \cap V = \emptyset$, nii, et $x \in U$ ja $A \subset V$;
- *täielikult regulaarne,* kui mis tahes kinnise hulga $A \subset X$ ja elemendi $x \in X \setminus A$ korral leidub funktsioon $f \in C\big(X, [0,1]\big)$ nii, et $f(x) = 1$ ja $f|_A = 0$.
- *normaalne,* kui mis tahes kinniste hulkade $A, B \in X$, $A \cap B = \emptyset$, korral leiduvad $U, V \in \tau$, $U \cap V = \emptyset$, nii, et $A \subset U$ ja $B \subset V$.

Edasi,

- *$\mathcal{T}_3$-ruumiks* nimetatakse regulaarset $\mathcal{T}_1$-ruumi;
- *$\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$-ruumiks* ehk *Tihhonovi ruumiks* nimetatakse täielikult regulaarset $\mathcal{T}_1$-ruumi;
- *$\mathcal{T}_4$-ruumiks* nimetatakse normaalset $\mathcal{T}_1$-ruumi.

Ilmselt *iga täielikult regulaarne ruum on regulaarne* (ning seega *iga $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$-ruum on $\mathcal{T}_3$-ruum*), sest kui $f$ on nagu täielikult regulaarse ruumi definitsioonis, siis $U := \{x \in X\colon f(x) > \frac{1}{2}\}$ ja $V := \{x \in X\colon f(x) < \frac{1}{2}\}$ rahuldavad regulaarse ruumi definitsiooni tingimust. Lausest 0.1 järeldub, et järeldub, et *iga $\mathcal{T}_3$-ruum on $\mathcal{T}_2$-ruum* ja *iga $\mathcal{T}_4$-ruum on $\mathcal{T}_3$-ruum.* Samuti, *iga $\mathcal{T}_4$-ruum on $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$-ruum* — see fakt järeldub järgnevast *Urõsoni lemmast.*

**Teoreem 0.2** (Urõsoni lemma)**.** *Olgu $X$ normaalne topoloogiline ruum ning olgu $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, kinnised alamhulgad. Siis leidub $f \in C\big(X, [0,1]\big)$ nii, et $f|_A = 0$ ja $f|_B = 1$.*

TÕESTUS. SEE TULEMUS ON TÕESTATUD ÜLDISE TOPOLOOGIA KURSUSES. □

**Teoreem 0.3** (Tietze jätkamisteoreem)**.** *Olgu $X$ normaalne topoloogiline ruum, olgu $A \subset X$ kinnine alamhulk ning olgu $g \in C\big(A, [a,b]\big)$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Siis leidub $f \in C\big(X, [a,b]\big)$ nii, et $f|_A = g$.*

TÕESTUS. SEE TULEMUS ON TÕESTATUD ÜLDISE TOPOLOOGIA KURSUSES. □

**Järeldus 0.4** (Tietze jätkamisteoreem)**.** *Olgu $X$ normaalne topoloogiline ruum, olgu $A \subset X$ kinnine alamhulk ning olgu $g \in C(A, \mathbb{R})$ (*resp. *$g \in C(A)$). Siis leidub $f \in C\big(X, \mathbb{R})$ (*resp. *$g \in C(X)$) nii, et $f|_A = g$.*

TÕESTUS. SEE TULEMUS ON TÕESTATUD ÜLDISE TOPOLOOGIA KURSUSES. $\square$

Järgnevalt tõestame edasises vajalikud tulemused lokaalselt kompaktsete Hausdorffi (topoloogiliste) ruumide kohta.

**Lemma 0.5.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, olgu $U \subset X$ lahtine hulk ning olgu $x \in U$. Siis leidub punkti $x$ kompaktne ümbrus $N$ nii, et $N \subset U$.*

Lemma 0.5 tõestus toetub järgmisele tulemusele.

**Lause 0.6.** *Olgu $F$ Hausdorffi ruumi $X$ kompaktne alamhulk ning olgu $x \in X \setminus F$. Siis leiduvad lahtised hulgad $U, V \subset X$, $U \cap V \neq \emptyset$, nii, et $x \in U$ ja $F \subset V$.*

TÕESTUS. Iga $z \in F$ korral leiduvad $U_z, V_z \in \tau_X$, $U_z \cap V_z = \emptyset$, nii, et $x \in U_z$ ja $z \in V_z$. Kogum $\{V_z\colon\ z \in F\}$ on kompaktse hulga $F$ lahtine kate, seega ta sisaldab lõpliku alamkatte $\{V_{z_1}, \ldots, V_{z_n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in F$). Aga nüüd me võime võtta $U = \bigcap_{j=1}^n U_{z_j}$ ja $V = \bigcup_{j=1}^n V_{z_j}$. $\square$

**Märkus 0.1.** Muuhulgas järelduvad lausest 0.6 järgnevad kaks olulist tulemust.

**Järeldus 0.7.** *Hausdorffi ruumi kompaktne alamhulk on kinnine.*

**Järeldus 0.8.** *Kompaktne Hausdorffi ruum on normaalne.*

**Ülesanne 0.3.** Tõestada järeldused 0.7 ja 0.8.

LEMMA 0.5 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et sulund $\overline{U}$ on kompaktne (sest kui $F$ on punkti $x$ kompaktne ümbrus, siis $x \in F^\circ \cap U \in \tau_X$, kusjuures sulund $\overline{F^\circ \cap U}$ on kompaktne (PÕHJENDADA!)). Lause 0.6 põhjal leiduvad hulga $\overline{U}$ relatiivses topoloogias lahtised hulgad $V, W \subset \overline{U}$, $V \cap W = \emptyset$, nii, et $x \in V \subset U^\circ$ ja $\partial U \subset W$. Aga nüüd võime võtta $N = \overline{V}$, sest $V \in \tau_X$ (sest $V \subset U^\circ$) (PÕHJENDADA!), $x \in V$, $\overline{V}$ on kompaktne (sest ta on kompaktse hulga $\overline{U}$ kinnine alamhulk) ja $\overline{V} \subset \overline{U} \setminus W = U^\circ \setminus W \subset U$. $\square$

**Lause 0.9.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $K \subset U \subset X$, kus hulk $K$ on kompaktne ja hulk $U$ on lahtine. Siis leidub lahtine hulk $V \subset X$, mille sulund $\overline{V}$ on kompaktne ja $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

**Märkus 0.2.** Hulka, mille sulund on kompaktne, nimetatakse *suhteliselt kompaktseks.*

LAUSE 0.9 TÕESTUS. Igal punktil $x \in K$ leidub lemma 0.5 põhjal kompaktne ümbrus $N_x \subset U$. Kompaktse hulga $K$ lahtine kate $\{(N_x)^\circ\colon\ x \in K\}$ sisaldab lõpliku alamkatte, s.t. leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in K$ nii, et $K \subset \bigcup_{j=1}^n (N_{x_j})^\circ$. Niisiis me võime võtta $V = \bigcup_{j=1}^n (N_{x_j})^\circ$, sest $\overline{V} \subset \bigcup_{j=1}^n N_{x_j} \subset U$ ja $\overline{V}$ on kompaktne (sest ta on kompaktse hulga $\bigcup_{j=1}^n N_{x_j}$ kinnine alamhulk). $\square$

**Järeldus 0.10.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $K, L \subset X$, $K \cap L = \emptyset$, kompaktsed hulgad. Siis leiduvad suhteliselt kompaktsed lahtised hulgad $U, V \subset X$ nii, et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ ning $K \subset U$ ja $L \subset V$.*

TÕESTUS. Lause 0.9 põhjal leiduvad suhteliselt kompaktsed lahtised hulgad $U, V \subset X$ nii, et $K \subset U \subset \overline{U} \subset L^c$ ja $L \subset V \subset \overline{V} \subset (\overline{U})^c$. □

**Järeldus 0.11.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, olgu $U, V \subset X$ lahtised hulgad ning olgu $K \subset U \cup V$ kompaktne hulk. Siis leiduvad kompaktsed hulgad $K_1 \subset U$ ja $K_2 \subset V$ nii, et $K = K_1 \cup K_2$.*

TÕESTUS. Järelduse 0.10 põhjal leiduvad lahtised hulgad $U', V' \subset X$, $U' \cap V' = \emptyset$, nii, et $K \setminus V \subset U'$ ja $K \setminus U \subset V'$. Tähistame $K_1 = K \setminus V'$ ja $K_2 = K \setminus U'$; siis $K_1$ ja $K_2$ on kompaktsed hulgad, kusjuures $K_1 \subset U$ ja $K_2 \subset V$ ning $K = K_1 \cup K_2$. □

Edaspidises kasutame me järgmisi standardseid tähistusi: kui $f \in C_c\big(X, [0,1]\big)$, hulk $K \subset X$ on kompaktne ning hulk $U \subset X$ on lahtine, siis kirjutame

- $K \prec f$, kui $f|_K = 1$
- $f \prec U$, kui $\operatorname{supp} f \subset U$.

Märgime, et
$$f \prec U \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant f \leqslant \chi_U,$$
kuid üldjuhul mitte vastupidi — tingimusest $f \leqslant \chi_U$ järeldub vaid, et $\operatorname{supp} f \subset \overline{U}$.

**Teoreem 0.12** (Urõsoni lemma, lokaalselt kompaktne versioon)**.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $K \subset U \subset X$, kus hulk $K$ on kompaktne ning hulk $U$ on lahtine. Siis leidub funktsioon $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ nii, et $K \prec f \prec U$.*

TÕESTUS. Lause 0.9 põhjal leidub suhteliselt kompaktne lahtine hulk $V$ nii, et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Kuna kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum on normaalne, siis Urõsoni lemma 0.2 põhjal leidub funktsioon $\phi \in C\big(\overline{V}, [0,1]\big)$ nii, et $\phi|_K = 1$ ja $\phi|_{\overline{V} \setminus V} = 0$. Defineerime funktsiooni $f\colon X \to \mathbb{R}$ võrdustega $f|_{\overline{V}} = \phi$ ja $f|_{\overline{V}^c} = 0$. Jääb näidata, et funktsioon $f$ on pidev (sel juhul $f \in C_c(X, [0,1])$, sest $\operatorname{supp} f$ kui kompaktse hulga $\overline{V}$ kinnine alamhulk on kompaktne, kusjuures $f|_K = \phi|_K = 1$ ja $\operatorname{supp} f \subset \overline{V} \subset U$).

Olgu $E \subset \mathbb{R}$ kinnine hulk. Funktsiooni $f$ pidevuse tõestuseks peame näitama, et $f^{-1}[E]$ on ruumi $X$ kinnine alamhulk. Kui $0 \notin E$, siis $f^{-1}[E] = (f|_{\overline{V}})^{-1}[E]$ on kinnine (sest $f|_{\overline{V}}$ on pidev). Kui aga $0 \in E$, siis $f^{-1}[E] = (f|_{\overline{V}})^{-1}[E] \cup \overline{V}^c = (f|_{\overline{V}})^{-1}[E] \cup V^c$ (sest $V^c = \overline{V}^c \cup (\overline{V} \setminus V)$, kusjuures $\overline{V} \setminus V \subset (f|_{\overline{V}})^{-1}[\{0\}] \subset (f|_{\overline{V}})^{-1}[E]$), seega $f^{-1}[E]$ on kinnine, nagu soovitud. □

**Järeldus 0.13.** *Lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum on täielikult regulaarne.*

TÕESTUS. Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, olgu $A \subset X$ kinnine hulk ning olgu $x \in A^c$. Urõsoni lemma 0.12 põhjal leidub $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ nii, et $\{x\} \prec f \prec A^c$. Ilmselt $f(x) = 1$ ja $f|_A = 0$. □

**Teoreem 0.14** (Tietze jätkamisteoreem, lokaalselt kompaktne versioon). *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, olgu $K \subset U \subset X$, kus hulk $K$ on kompaktne ning hulk $U$ on lahtine, ning olgu $g \in C(K,\mathbb{R})$ (*resp. *$g \in C(K)$). Siis leidub funktsioon $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ (*resp. *$f \in C_c(X)$) nii, et $f|_K = g$,* $\operatorname{supp} f \subset U$ *ja $\|f\|_u = \|g\|_u$.*

TÕESTUS. Leiame kõigepealt funktsiooni $h \in C_c(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $h \in C_c(X)$) nii, et $h|_K = g$ ja $\operatorname{supp} h \subset U$.

**Ülesanne 0.4.** Tõestada niisuguse funktsiooni $h$ olemasolu.

NÄPUNÄIDE. Arutledes sarnaselt Urõsoni lemma 0.12 tõestusega, kasutada Tietze jätkamisteoreemi järeldust 0.4 ja Urõsoni lemmat 0.2.

BLA-BLA-BLA... □

**Lause 0.15.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Siis*

(a) *$C_0(X,\mathbb{R})$ on alamruumi $C_c(X,\mathbb{R})$ sulund (ruumis $BC(X,\mathbb{R})$) ühtlase normi suhtes;*

(b) *$C_0(X)$ on alamruumi $C_c(X)$ sulund (ruumis $BC(X)$) ühtlase normi suhtes.*

TÕESTUS. (a). Olgu jada $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ alamruumis $C_c(X,\mathbb{R})$ ja $f \in BC(X,\mathbb{R})$ sellised, et $f_n \to f$ ühtlase normi suhtes. Veendumaks, et $\overline{C_c(X,\mathbb{R})} \subset C_0(X,\mathbb{R})$, peame näitama, et $f \in C_0(X,\mathbb{R})$, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral hulk $S_\varepsilon := \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \varepsilon\}$ on kompaktne. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Olgu $N \in \mathbb{N}$ selline, et $\|f_N - f\| = \sup_{x\in X} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Siis $S_\varepsilon$ on kompaktse hulga $\operatorname{supp} f_N$ kinnine alamhulk, seega ka $S_\varepsilon$ ise on kompaktne.

Teiselt poolt, olgu $f \in C_0(X,\mathbb{R})$. Veendumaks, et $C_0(X,\mathbb{R}) \subset \overline{C_c(X,\mathbb{R})}$, tuleb näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $g \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $\|f-g\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Siis hulk $S_\varepsilon := \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \varepsilon\}$ on kompaktne, seega Urõsoni lemma põhjal leidub funktsioon $f_0 \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $S_\varepsilon \prec f_0$. Tähistame $g = f f_0$, siis $g \in C_c(X,\mathbb{R})$, kusjuures $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

Tõepoolest, kuna

$$\{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\} \cap \{x \in X\colon\ f_0(x) \neq 0\},$$

siis

$$\operatorname{supp} g = \overline{\{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}} \subset \overline{\{x \in X\colon\ f_0(x) \neq 0\}} = \operatorname{supp} f_0,$$

seega $\operatorname{supp} g$ on kompaktne (sest ta on kompaktse hulga $\operatorname{supp} f_0$ kinnine alamhulk), niisiis $g \in C_c(X,\mathbb{R})$.

Edasi, kui $x \in S_\varepsilon$, siis $g(x) = f(x)f_0(x) = f(x)$, kui aga $x \notin S_\varepsilon$, siis

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x)\,f_0(x)| = |f(x)|\,|1 - f_0(x)| \leqslant |f(x)| < \varepsilon,$$

seega $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

(b).

**Ülesanne 0.5.** Tõestada väide (b).

□

Järgnev tulemus on järeldus Urõsoni lemmast ja Tietze jätkamisteoreemist.

**Lause 0.16.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne topoloogiline ruum, olgu $K \subset X$ mittetühi kompaktne hulk ning olgu $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ ($n \in \mathbb{N}$) hulga $K$ lahtine kate. Siis leiduvad funktsioonid $g_1, \dots, g_n \in C_c(X, \mathbb{R})$ selliselt, et $\sum_{j=1}^n g_j|_K = 1$ ja iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $g_j \prec U_j$.*

Seda tulemust me edasises üldse ei kasutagi!!

Lause 0.16 tõestus. Järelduse 0.11 põhjal leiduvad kompaktsed hulgad $K_1, \dots, K_n \subset X$ nii, et $K = \bigcup_{j=1}^n K_j$ ja iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $K_j \subset U_j$. Urõsoni lemma põhjal leidub iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral funktsioon $f_j \in C_c(X, \mathbb{R})$ nii, et $K_j \prec f_j \prec U_j$. Tietsze teoreemi põhjal leidub iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral funktsioon $\hat{g}_j \in C_c\big(X, [0,1]\big)$ nii, et $\hat{g}_j|_K = \frac{f_j|_K}{\sum_{i=1}^n f_i^2|_K}$. Tõestuse lõpetuseks jääb iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral defineerida $g_j = f_j\, \hat{g}_j$, . □

# § 1. Positiivsed lineaarsed funktsionaalid ruumil $C_c(X, \mathbb{R})$

Kõikjal selles paragrahvis on $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Sümbolid $\mathcal{B}_X$, $\tau_X$ ja $\mathcal{K}$ tähistavad vastavalt ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat, ruumi $X$ lahtiste alamhulkade kogumit ja ruumi $X$ kompaktsete alamhulkade kogumit.

**Definitsioon 1.1.** Öeldakse, et lineaarne funktsionaal $\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on *positiivne,* kui

$$f \in C_c(X, \mathbb{R}),\ f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(f) \geqslant 0.$$

**Ülesanne 1.1.** Tõestada, et lineaarne funktsionaal $\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on positiivne parajasti siis, kui

$$f, g \in C_c(X, \mathbb{R}),\ f \geqslant g \quad \Longrightarrow \quad \Phi(f) \geqslant \Phi(g).$$

Osutub, et funktsionaali positiivsuse nõue kätkeb endas implitsiitselt üsna tugevat pidevuse tingimust.

**Lause 1.1.** *Olgu $\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ positiivne lineaarne funktsionaal. Siis iga kompaktse alamhulga $K \subset X$ korral leidub konstant $M_K \geqslant 0$ nii, et*

$$f \in C_c(X, \mathbb{R}),\ \operatorname{supp} f \subset K \quad \Longrightarrow \quad |\Phi(f)| \leqslant M_K \, \|f\|.$$

**Järeldus 1.2.** *Kui ruum $X$ on kompaktne, siis iga positiivne lineaarne funktsionaal $\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on pidev.*

LAUSE 1.1 TÕESTUS. Olgu hulk $K \subset X$ kompaktne. Urõsoni lemma põhjal leidub funktsioon $\varphi \in C_c\big(X, [0,1]\big)$ nii, et $\varphi|_K = 1$. Fikseerime vabalt funktsiooni $f \in C_c(X, \mathbb{R})$, mis rahuldab tingimust $\operatorname{supp} f \subset K$. Siis $|f(x)| \leqslant \|f\| \, \varphi(x)$ igas punktis $x \in X$, s.t.

$$-\|f\| \, \varphi \leqslant f \leqslant \|f\| \, \varphi,$$

järelikult funktsionaali $\Phi$ positiivsuse tõttu

$$-\|f\| \, \Phi(\varphi) \leqslant \Phi(f) \leqslant \|f\| \, \Phi(\varphi),$$

s.t. $|\Phi(f)| \leqslant \Phi(\varphi) \, \|f\|$. Niisiis võime võtta $M_K = \Phi(\varphi)$. □

**Näide 1.1.** Olgu $\mu$ Boreli mõõt ruumis $X$, kusjuures iga kompaktse hulga $K \subset X$ korral $\mu(K) < \infty$. Siis kujutus

$$\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int f \, d\mu \in \mathbb{R}$$

on positiivne lineaarne funktsionaal.

**Ülesanne 1.2.** Veenduda selles. (Kõigepealt näidata, et $C_c(X, \mathbb{R}) \subset L_1(\mu)$.)

Selle paragrahvi põhieesmärk on tõestada Rieszi esitusteoreem, mis väidab, et iga positiivne lineaarne funktsionaal $\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on esitatav näites 1.1 toodud viisil, s.t. integraalina mingi Boreli mõõdu $\mu$ järgi. Veelgi enam, kui nõuda sellelt mõõdult teatavate *regulaarsusnõuete* täidetust, siis on funktsionaali $\Phi$ esitav Boreli mõõt üheselt määratud.

**Definitsioon 1.2.** Olgu $\mu$ Boreli mõõt ruumis $X$.

(A) Öeldakse, et mõõt $\mu$ on

(a) *väljast regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{B}_X$, kui

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset E\};$$

(b) *seest regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{B}_X$, kui

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)\colon\ \mathcal{K} \ni K \subset E\};$$

(c) *regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{B}_X$, kui ta on hulgal $E$ nii väljast kui ka seest regulaarne;

(d) *regulaarne,* kui ta on regulaarne kõikidel ruumi $X$ Boreli hulkadel.

(B) Öeldakse, et mõõt $\mu$ on *Radoni mõõt (ruumis $X$),* kui

R1° $\mu(K) < \infty$ iga kompaktse hulga $K \subset X$ korral;

R2° $\mu$ on väljast regulaarne kõikidel ruumi $X$ Boreli hulkadel;

R3° $\mu$ on seest regulaarne kõikidel ruumi $X$ lahtistel hulkadel.

**Märkus 1.1.** Järgmises paragrahvis näitame, et Radoni mõõt on seest regulaarne kõigil oma $\sigma$-lõplikel hulkadel.

**Teoreem 1.3** (Rieszi esitusteoreem)**.** *Olgu $\Phi\colon\ C_c(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ positiivne lineaarne funktsionaal. Siis leidub üheselt määratud Radoni mõõt $\mu$ ruumis $X$ nii, et*

$$\Phi(f) = \int f\,d\mu \quad \text{iga } f \in C_c(X,\mathbb{R}) \text{ korral.} \tag{1.1}$$

*See mõõt $\mu$ rahuldab järgmisi tingimusi:*

1° *iga lahtise alamhulga $U \subset X$ korral*

$$\mu(U) = \sup\{\Phi(f)\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ f \prec U\};$$

2° *iga kompaktse alamhulga $K \subset X$ korral*

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(f)\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ f \geqslant \chi_K\}.$$

Enne Rieszi esitusteoreemi tõestamist on otstarbekas välja töötada üks üldine skeem Radoni mõõtude genereerimiseks.

**Definitsioon 1.3.** Öeldakse, et hulgafunktsioon $\rho\colon\ \mathcal{K} \to [0,\infty)$ on *content*, kui ta on

- monotoonne, s.t. $K, L \in \mathcal{K}$, $K \subset L$, korral $\rho(K) \leqslant \rho(L)$;

- aditiivne, s.t. $K, L \in \mathcal{K}$, $K \cap L = \emptyset$, korral $\rho(K \cup L) = \rho(K) + \rho(L)$;
- subaditiivne, s.t. $K, L \in \mathcal{K}$ korral $\rho(K \cup L) \leqslant \rho(K) + \rho(L)$.

Hulgafunktsiooni

$$\rho_*\colon\ \tau_X \ni U \longmapsto \sup\bigl\{\rho(K)\colon\ \mathcal{K} \ni K \subset U\bigr\} \in [0, \infty]$$

nimetatakse *contenti $\rho$ poolt indutseeritud inner contentiks*.

Hulgafunktsiooni

$$\lambda\colon\ \mathcal{P}(X) \ni E \longmapsto \inf\bigl\{\rho_*(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset E\bigr\} \in [0, \infty]$$

nimetatakse *contenti $\rho$ poolt indutseeritud välismõõduks.*

**Teoreem 1.4.** *Olgu $\rho\colon\ \mathcal{K} \to [0, \infty)$ content. Siis*

(a) $\rho_*(\emptyset) = 0$; *$\rho_*$ on monotoonne, loenduvalt subaditiivne ja loenduvalt aditiivne;*

(b) *$\lambda$ on välismõõt;*

(c) $\lambda(U) = \rho_*(U)$ *iga* $U \in \tau_X$ *korral;* $\lambda(K^\circ) \leqslant \rho(K) \leqslant \lambda(K)$ *iga* $K \in \mathcal{K}$ *korral;*

(d) *hulk* $E \in \mathcal{P}(X)$ *on $\lambda$-mõõtuv parajasti siis, kui*

$$\lambda(U) \geqslant \lambda(U \cap E) + \lambda(U \cap E^c) \quad \text{iga } U \in \tau_X \text{ korral;} \tag{1.2}$$

(e) $\mu := \lambda|_{\mathcal{B}_X}$ *on väljast regulaarne mõõt.*

Mõõtu $\mu$ teoreemi 1.4 väitest (e) nimetatakse *contenti $\rho$ poolt indutseeritud mõõduks.*

Teoreemi 1.4 tõestus. (a). Kõigepealt märgime, et $\rho(\emptyset) = 0$, sest

$$\rho(\emptyset) = \rho(\emptyset \cup \emptyset) = \rho(\emptyset) + \rho(\emptyset) = 2\rho(\emptyset).$$

Siit järeldub, et ka $\rho_*(\emptyset) = 0$.

Veendume, et $\rho_*$ on monotoonne. Kui $U, V \in \tau_X$, $U \subset V$, ning $K \in \mathcal{K}$ on selline, et $K \subset U$, siis ka $K \subset V$, seega $\rho(K) \leqslant \rho_*(V)$ ja $\rho_*(U) \leqslant \rho_*(V)$.

Olgu $U_j \in \tau_X$, $j = 1, 2, \ldots$. Tähistame $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$. Hulgafunktsiooni $\rho_*$ loenduvaks subaditiivsuseks tuleb näidata, et $\rho_*(U) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \rho_*(U_j)$. Selleks piisab veenduda, et $\rho_*$ on subaditiivne. Tõepoolest, olgu $\rho_*$ subaditiivne ning olgu $K \in \mathcal{K}$ selline, et $K \subset U$. Siis leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $K \subset \bigcup_{j=1}^n U_j$, järelikult $\rho_*$ subaditiivsuse tõttu

$$\rho(K) \leqslant \rho_*\left(\bigcup_{j=1}^n U_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \rho_*(U_j) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \rho_*(U_j)$$

ning seega $\rho_*(U) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \rho_*(U_j)$.

Olgu $U,V\in\tau_X$ ning olgu $\mathcal{K}\ni K\subset U\cup V$. Hulgafunktsiooni $\rho_*$ subaditiivsuseks piisab näidata, et $\rho(K)\leqslant\rho_*(U)+\rho_*(V)$. Järelduse 0.11 põhjal leiduvad kompaktsed hulgad $K_1\subset U$ ja $K_2\subset V$ nii, et $K=K_1\cup K_2$. Aga nüüd

$$\rho(K)=\rho(K_1\cup K_2)\leqslant\rho(K_1)+\rho(K_2)\leqslant\rho_*(U)+\rho_*(V).$$

Olgu $U_j\in\tau_X$, $j=1,2,\dots$, paarikaupa lõikumatud hulgad. Kuna $\rho_*$ on loenduvalt subaditiivne, siis piisab tema loenduvaks aditiivsuseks näidata, et mis tahes $U,V\in\tau_X$, $U\cap V=\emptyset$, korral $\rho_*(U\cup V)\geqslant\rho_*(U)+\rho_*(V)$, sest sel juhul iga $n\in\mathbb{N}$ korral

$$\rho_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j\right)\geqslant\rho_*\left(\bigcup_{j=1}^{n}U_j\right)\geqslant\sum_{j=1}^{n}\rho_*(U_j)$$

ning seega ka $\rho_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j\right)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\rho_*(U_j)$.

Olgu $U,V\in\tau_X$, $U\cap V=\emptyset$. Kui $K,L\in\mathcal{K}$, $K\subset U$, $L\subset V$, siis $\mathcal{K}\ni K\cup L\subset U\cup V$, $K\cap L=\emptyset$, seega

$$\rho_*(U\cup V)\geqslant\rho(K\cup L)=\rho(K)+\rho(L);$$

järelikult $\rho_*(U\cup V)\geqslant\rho_*(U)+\rho_*(V)$.

(b). Ilmselt $\lambda(\emptyset)=\rho_*(\emptyset)=0$ ning $\lambda$ on monotoonne (sest kui $E,F\in\mathcal{P}(X)$, $E\subset F$, ning $U\in\tau_X$ on selline, et $F\subset U$, siis ka $E\subset U$, seega $\lambda(E)\leqslant\rho_*(U)$ ja $\lambda(E)\leqslant\lambda(F)$). Niisiis jääb näidata, et $\lambda$ on loenduvalt subaditiivne.

Olgu $E_j\in\mathcal{P}(X)$, $j=1,2,\dots$. Tähistame $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$. Peame näitama, et $\lambda(E)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)$. Kui $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)=\infty$, siis kehtib see võrratus ilmselt. Olgu $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)<\infty$. Fikseerime vabalt $\varepsilon>0$. Väite tõestuseks piisab näidata, et

$$\lambda(E)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)+\varepsilon.$$

Valime iga $j\in\mathbb{N}$ korral $U_j\in\tau_X$, $U_j\supset E_j$, nii, et $\rho_*(U_j)<\lambda(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}$. Nüüd $\tau_X\ni\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j\supset E$, seega

$$\lambda(E)\leqslant\rho_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\rho_*(U_j)<\sum_{j=1}^{\infty}\left(\lambda(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)+\varepsilon.$$

(c). Olgu $U\in\tau_X$. Siis ühelt poolt

$$\lambda(U)=\inf\bigl\{\rho_*(V)\colon\ \tau_X\ni V\supset U\bigr\}\leqslant\rho_*(U).$$

Teiselt poolt, kui $\tau_X\ni V\supset U$, siis $\rho_*(U)\leqslant\rho_*(V)$, seega

$$\rho_*(U)\leqslant\inf\bigl\{\rho_*(V)\colon\ \tau_X\ni V\supset U\bigr\}=\lambda(U).$$

Olgu nüüd $K \in \mathcal{K}$. Kui $\tau_X \ni U \supset K$, siis $\rho(K) \leqslant \rho_*(U)$, seega

$$\rho(K) \leqslant \inf\bigl\{\rho_*(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset K\bigr\} = \lambda(K).$$

Kui $\mathcal{K} \ni L \subset K^\circ$, siis ka $L \subset K$, seega $\rho(L) \leqslant \rho(K)$ ning järelikult

$$\lambda(K^\circ) = \rho_*(K^\circ) = \sup\bigl\{\rho(L)\colon\ \mathcal{K} \ni L \subset K^\circ\bigr\} \leqslant \rho(K).$$

(d). Olgu $E \subset X$. Ühelt poolt, kui hulk $E$ on $\lambda$-mõõtuv, siis kehtib (1.2). Teiselt poolt, rahuldagu hulk $E$ tingimust (1.2). Fikseerime vabalt hulga $A \subset X$. Hulga $E$ $\lambda$-mõõtuvuse tõestuseks piisab näidata, et

$$\lambda(A) \geqslant \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c). \tag{1.3}$$

Kui $\tau_X \ni U \supset A$, siis siis

$$\rho_*(U) = \lambda(U) \geqslant \lambda(U \cap E) + \lambda(U \cap E^c) \geqslant \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c),$$

järelikult kehtib ka (1.3).

(e). Veendumaks, et $\mu$ on mõõt, piisab näidata, et iga Boreli hulk ruumis $X$ on $\lambda$-mõõtuv, milleks omakorda piisab näidata, et ruumi $X$ iga lahtine alamhulk on $\lambda$-mõõtuv.

Olgu $U, V \in \tau_X$. Väite (d) põhjal piisab hulga $U$ $\lambda$-mõõtuvuse tõestuseks näidata, et

$$\lambda(V \cap U) + \lambda(V \cap U^c) \leqslant \lambda(V)$$

ehk, (väite (c) põhjal) teisisõnu,

$$\rho_*(V \cap U) + \lambda(V \cap U^c) \leqslant \rho_*(V). \tag{1.4}$$

Olgu $\mathcal{K} \ni K \subset V \cap U$ ja $\mathcal{K} \ni L \subset V \setminus K$. Siis $K \cap L = \emptyset$, kusjuures $\mathcal{K} \ni K \cup L \subset V$, seega

$$\rho(K) + \rho(L) = \rho(K \cup L) \leqslant \rho_*(V)$$

ning järelikult

$$\rho(K) + \rho_*(V \setminus K) \leqslant \rho_*(V).$$

Arvestades, et $\rho_*(V \setminus K) = \lambda(V \setminus K) \geqslant \lambda(V \setminus U) = \lambda(V \cap U^c)$, järeldub siit, et

$$\rho(K) + \lambda(V \cap U^c) \leqslant \rho_*(V),$$

millest omakorda järeldub (1.4).

Definitsiooni põhjal on $\mu$ väljast regulaarne igal ruumi $X$ Boreli hulgal, sest iga $E \in \mathcal{B}_X$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) = \lambda(E) &= \inf\bigl\{\rho_*(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset E\bigr\} = \inf\bigl\{\lambda(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset E\bigr\}\\ &= \inf\bigl\{\mu(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset E\bigr\}.\end{aligned}$$

□

Selleks, et contenti $\rho$ poolt indutseeritud mõõt $\mu$ eelnevas teoreemis oleks Radoni mõõt, jääb puudu, et kehtiksid tingimused

(1) $\mu(K) = \lambda(K) < \infty$ iga $K \in \mathcal{K}$ korral;

(2) $\mu$ on seest regulaarne ruumi $X$ lahtistel hulkadel.

Märgime, et need mõlemad tingimused oleksid täidetud, kui $\mu(K) = \rho(K)$ iga $K \in \mathcal{K}$ korral. Järgnev definitsioon toob välja ühe olulise seda tingimust rahuldavate contentite klassi.

**Definitsioon 1.4.** Öeldakse, et content $\rho\colon \mathcal{K} \to [0,\infty)$ on *regulaarne,* kui iga $K \in \mathcal{K}$ korral

$$\rho(K) = \inf\bigl\{\rho(L)\colon\ K \subset L^\circ \subset L \in \mathcal{K}\bigr\}.$$

**Märkus 1.2.** Lause 0.9 põhjal leidub iga $K \in \mathcal{K}$ korral niisugune $L \in \mathcal{K}$, et $K \subset L^\circ$.

**Lause 1.5.** *Olgu $\mu$ regulaarse contenti $\rho\colon \mathcal{K} \to [0,\infty)$ poolt indutseeritud Boreli mõõt. Siis iga $K \in \mathcal{K}$ korral $\mu(K) = \rho(K)$.*

**Järeldus 1.6.** *Regulaarse contenti poolt indutseeritud Boreli mõõt on Radoni mõõt.*

LAUSE 1.5 TÕESTUS. Olgu $K \in \mathcal{K}$. Kuna $\rho(K) \leqslant \lambda(K) = \mu(K)$, siis jääb veendu-da, et $\lambda(K) \leqslant \rho(K)$. Olgu $L \in \mathcal{K}$ selline, et $K \subset L^\circ$. Contenti $\rho$ regulaarsuse tõttu piisab näidata, et $\lambda(K) \leqslant \rho(L)$: teoreemi 1.4, (c), põhjal $\lambda(K) \leqslant \lambda(L^\circ) = \rho(L)$. $\square$

Nüüd oleme heas positsioonis tõestamaks Rieszi esitusteoreemi.

RIESZI ESITUSTEOREEMI 1.3 TÕESTUS. Defineerime hulgafunktsioonid $\rho\colon \mathcal{K}\to[0,\infty)$ ja $\beta\colon \tau_X \to [0,\infty]$ võrdustega

$$\rho(K) = \inf\bigl\{\Phi(f)\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ f \geqslant \chi_K\bigr\}, \qquad K \in \mathcal{K},$$

ja

$$\beta(U) = \sup\bigl\{\Phi(f)\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ f \prec U\bigr\}, \qquad U \in \tau_X.$$

Kõigepealt paneme tähele, et kui $\mu$ on Radoni mõõt ruumis $X$, mis rahuldab tingimust (1.1), siis kehtib tingimus 2°, s.t. iga $K \in \mathcal{K}$ korral $\mu(K) = \rho(K)$.

Tõepoolest, rahuldagu Radoni mõõt $\mu$ ruumis $X$ tingimust (1.1) ning olgu $K \in \mathcal{K}$. Kui funktsioon $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ on selline, et $f \geqslant \chi_K$, siis

$$\Phi(f) = \int f\,d\mu \geqslant \int \chi_K\,d\mu = \mu(K),$$

seega $\rho(K) \geqslant \mu(K)$. Teiselt poolt, kui $\tau_X \ni U \supset K$, siis Urõsoni lemma põhjal leidub $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $f \prec U$ ja $f|_K = 1$, seega

$$\mu(U) = \int \chi_U\,d\mu \geqslant \int f\,d\mu = \Phi(f) \geqslant \rho(K)$$

ning järelikult mõõdu $\mu$ väljast regulaarsuse tõttu $\mu(K) \geqslant \rho(K)$.

Tingimusest 2° järeldub funktsionaali $\Phi$ esitava Radoni mõõdu ühesus (sest Radoni mõõt on määratud oma väärtustega kompaktsetel hulkadel).

Tõepoolest, olgu $\mu$ ja $\nu$ sellised Radoni mõõdud ruumis $X$, et iga $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ korral $\Phi(f) = \int f\,d\mu = \int f\,d\nu$. Siis tingimuse 2° põhjal iga $K \in \mathcal{K}$ korral $\mu(K) = \nu(K)$; seega mõõtude $\mu$ ja $\nu$ seest regulaarsuse tõttu ruumi $X$ lahtistel hulkadel iga $U \in \tau_X$ korral

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K)\colon \mathcal{K} \ni K \subset U\} = \sup\{\nu(K)\colon \mathcal{K} \ni K \subset U\} = \nu(E)$$

ning järelikult mõõtude $\mu$ ja $\nu$ väljast regulaarsuse tõttu ruumi $X$ Boreli alamhulkadel iga $E \in \mathcal{B}_X$ korral

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U)\colon \tau_X \ni U \supset E\} = \inf\{\nu(U)\colon \tau_X \ni U \supset E\} = \nu(E).$$

Jääb veel tõestada funktsionaali $\Phi$ esitava Radoni mõõdu $\mu$ olemasolu ja tingimuse 1° täidetus. Ülevaatlikkuse huvides esitame kõigepealt vaid selle tõestuse skeemi, jättes skeemis olevate väidete **(I)**–**(III)** tõestamise pärastiseks.

Osutub, et

**(I)** *$\rho$ on regulaarne content;*

**(II)** *iga $U \in \tau_X$ korral $\beta(U) = \rho_*(U)$.*

Olgu $\mu$ contenti $\rho$ poolt indutseeritud mõõt. Siis kehtib 1°, sest iga $U \in \tau_X$ korral (teoreemi 1.4, (c), põhjal)

$$\mu(U) = \lambda(U) = \rho_*(U) = \beta(U).$$

Seega jääb teoreemi tõestuseks veel veenduda, et

**(III)** *kehtib väide* (1.1), *s.t. iga $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ korral $\Phi(f) = \int f\,d\mu$.*

Veendume nüüd tõestuse skeemis sisalduvate väidete **(I)**–**(III)** kehtivuses.

**(I).** Kõigepealt, $\rho$ on lõplik, sest kui $K \in \mathcal{K}$, siis Urõsoni lemma põhjal leidub $f \in C_c\big(X,[0,1]\big)$ nii, et $f|_K = 1$, seega $f \geqslant \chi_K$ ning järelikult $\rho(K) \leqslant \Phi(f) < \infty$.

Edasi, $\rho$ on monotoonne. Tõepoolest, olgu $K, L \in \mathcal{K}$, $K \subset L$. Kui $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ on selline, et $f \geqslant \chi_L$, siis ka $f \geqslant \chi_K$, seega $\rho(K) \leqslant \Phi(f)$ ning järelikult $\rho(K) \leqslant \rho(L)$.

Olgu nüüd $K, L \in \mathcal{K}$. Kui funktsioonid $f, g \in C_c(X,\mathbb{R})$ on sellised, et $f \geqslant \chi_K$ ja $g \geqslant \chi_L$, siis $f + g \in C_c(X,\mathbb{R})$, kusjuures $f + g \geqslant \chi_{K\cup L}$, seega

$$\rho(K \cup L) \leqslant \Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$$

ning järelikult $\rho(K \cup L) \leqslant \rho(K) + \rho(L)$; niisiis, $\rho$ on subaditiivne.

Olgu nüüd $K, L \in \mathcal{K}$, $K \cap L = \emptyset$. Hulgafunktsiooni $\rho$ aditiivsuse tõestuseks piisab näidata, et $\rho(K) + \rho(L) \leqslant \rho(K \cup L)$. Olgu $h \in C_c(X,\mathbb{R})$, $h \geqslant \chi_{K\cup L}$. Järelduse 0.10 põhjal leiduvad $U, V \in \tau_X$, $U \cap V = \emptyset$, nii, et $U \supset K$ ja $V \supset L$. Urõsoni lemma põhjal leiduvad $f, g \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $K \prec f \prec U$ ja $L \prec g \prec V$. Defineerime $\tilde f = fh$ ja $\tilde g = gh$, siis $\tilde f, \tilde g \in C_c(X,\mathbb{R})$, $\tilde f \geqslant \chi_K$, $\tilde g \geqslant \chi_L$, $\tilde f + \tilde g \leqslant h$, seega

$$\rho(K) + \rho(L) \leqslant \Phi(\tilde f) + \Phi(\tilde g) = \Phi(\tilde f + \tilde g) \leqslant \Phi(h)$$

ning järelikult $\rho(K) + \rho(L) \leqslant \rho(K \cup L)$, nagu soovitud.

Olgu nüüd $K \in \mathcal{K}$ ning $\varepsilon > 0$. Contenti $\rho$ regulaarsuse tõestuseks piisab leida $L \in \mathcal{K}$ nii, et $L^\circ \supset K$ ja $\rho(L) < \rho(K) + \varepsilon$. Selleks valime $f \in C_c(X,\mathbb{R})$, $f \geqslant \chi_K$, nii, et

$$\Phi(f) < \rho(K) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < 1$, siis, defineerides $D_\delta := \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \delta\} \in \mathcal{K}$,

$$K \subset \big\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant 1\big\} \subset \big\{x \in X\colon\ f(x) > \delta\big\} \subset (D_\delta)^\circ \subset D_\delta.$$

Kuna $\frac{1}{\delta} f \in C_c(X,\mathbb{R})$, $\frac{1}{\delta} f \geqslant \chi_{D_\delta}$, siis

$$\rho(D_\delta) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{\delta} f\right) = \frac{1}{\delta}\,\Phi(f) < \frac{1}{\delta}\left(\rho(K) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Kui valida reaalarv $\delta \in (0,1)$ nii, et $\frac{1}{\delta}\left(\rho(K) + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \rho(K)+\varepsilon$, siis $\rho(D_\delta) < \rho(K)+\varepsilon$, seega me võime võtta $L = D_\delta$.

**(II).** Olgu $U \in \tau_X$. Kui $\mathcal{K} \ni K \subset U$, siis Urõsoni lemma põhjal leidub $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $f \prec U$ ja $f|_K = 1$. Nüüd $\rho(K) \leqslant \Phi(f) \leqslant \beta(U)$, seega $\rho_*(U) \leqslant \beta(U)$. Teiselt poolt olgu $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ selline, et $f \prec U$. Tähistame $K = \operatorname{supp} f$, siis $\mathcal{K} \ni K \subset U$. Kui nüüd $g \in C_c(X,\mathbb{R})$ on selline, et $g \geqslant \chi_K$, siis $g \geqslant f$, seega $\Phi(g) \geqslant \Phi(f)$, järelikult $\rho(K) \geqslant \Phi(f)$ ning seega $\rho_*(U) \geqslant \Phi(f)$. Aga siit järeldub, et $\rho_*(U) \geqslant \beta(U)$.

**(III).** Tõestuse lõpetuseks näitame, et *iga* $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ *korral* $\Phi(f) = \int f\,d\mu$.

Kuna $C_c(X,\mathbb{R}) = \operatorname{span} C_c\big(X,[0,1]\big)$, piisab selleks näidata, et iga $f \in C_c\big(X,[0,1]\big)$ korral $\Phi(f) = \int f\,d\mu$. Olgu $f \in C_c\big(X,[0,1]\big)$. Veendumaks, et $\Phi(f) = \int f\,d\mu$, piisab näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\left|\Phi(f) - \int f\,d\mu\right| \leqslant \frac{\mu(\operatorname{supp} f)}{n}.$$

Fikseerime vabalt $n \in \mathbb{N}$. Tähistame

$$K_0 = \operatorname{supp} f \in \mathcal{K} \quad \text{ja} \quad K_j = \left\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \frac{j}{n}\right\} \in \mathcal{K}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Defineerime iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral funktsiooni $f_j \in C_c\big(X,[0,1]\big)$ võrdusega

$$f_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kui } f(x) \geqslant \frac{j}{n};\\ f(x) - \frac{j-1}{n}, & \text{kui } \frac{j-1}{n} \leqslant f(x) < \frac{j}{n};\\ 0, & \text{kui } f(x) < \frac{j-1}{n}. \end{cases}$$

Teisisõnu, $f_j = \min\big\{\max\{f - \frac{j-1}{n}, 0\}, \frac{1}{n}\big\}$. Märgime, et $f = \sum_{j=1}^n f_j$.

Iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral $\frac{\chi_{K_j}}{n} \leqslant f_j \leqslant \frac{\chi_{K_{j-1}}}{n}$, järelikult

$$\frac{\mu(K_j)}{n} \leqslant \int f_j\,d\mu \leqslant \frac{\mu(K_{j-1})}{n}. \tag{1.5}$$

Teiselt poolt,

$$\frac{\mu(K_j)}{n} \leqslant \Phi(f_j) \leqslant \frac{\mu(K_{j-1})}{n}. \tag{1.6}$$

Tõepoolest, kuna $\chi_{K_j} \leqslant nf_j$, siis $\mu(K_j) = \rho(K_j) \leqslant n\Phi(f_j)$, s.t. $\frac{\mu(K_j)}{n} \leqslant \Phi(f_j)$. Teiselt poolt, kui $\tau_X \ni U \supset K_{j-1}$, siis $n\, f_j \prec U$, järelikult $n\Phi(f_j) \leqslant \mu(U)$. Seega mõõdu $\mu$ väljast regulaarsuse tõttu

$$n\,\Phi(f_j) \leqslant \inf\Big\{\mu(U)\colon\ \tau_X \ni U \supset K_{j-1}\Big\} = \mu(K_{j-1}),$$

s.t. $\Phi(f_j) \leqslant \frac{\mu(K_{j-1})}{n}$.

Kuna $f = \sum_{j=1}^{n} f_j$, siis järeldub võrratustest (1.5) ja (1.6), et

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu(K_j) \leqslant \int f\,d\mu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu(K_{j-1}),$$
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu(K_j) \leqslant \Phi(f) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu(K_{j-1}).$$

Niisiis,

$$\left|\Phi(f) - \int f\,d\mu\right| \leqslant \frac{1}{n}\big(\mu(K_0) - \mu(K_n)\big) \leqslant \frac{\mu(\operatorname{supp} f)}{n}.$$

□

# § 2. Radoni mõõtude regulaarsusomadused. Lähendusteoreemid

## 2.1. Radoni mõõtude regulaarsusomadused

Kõikjal selles punktis on $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum.

**Lause 2.1.** *Iga Radoni mõõt on kõigil oma $\sigma$-lõplikel hulkadel seest regulaarne.*

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et hulk $E \subset X$ on *$\sigma$-kompaktne,* kui ta esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina. Öeldakse, et ruum $X$ on *$\sigma$-kompaktne,* kui hulk $X$ on $\sigma$-kompaktne.

**Järeldus 2.2.** *Iga $\sigma$-lõplik Radoni mõõt on regulaarne. Kui $X$ on $\sigma$-kompaktne, siis iga Radoni mõõt ruumis $X$ on regulaarne.*

Lause 2.1 tõestus. Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$. Paneme kõigepealt tähele, et $\mu$ on oma lõplikel hulkadel seest regulaarne, s.t. kui $E \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E) < \infty$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub kompaktne hulk $K \subset E$ nii, et $\mu(K) > \mu(E) - \varepsilon$.

Tõepoolest, olgu $E \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E) < \infty$, ning olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $\mu$ on hulgal $E$ väljast regulaarne, siis leidub lahtine hulk $U \supset E$ nii, et $\mu(U) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna $\mu$ on lahtisel hulgal $U$ seest regulaarne, siis leidub kompaktne hulk $F \subset U$ nii, et $\mu(F) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2}$. Paneme tähele, et

$$\mu(F \setminus E) \leqslant \mu(U \setminus E) = \mu(U) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega, arvestades, et $\mu$ on hulgal $F \setminus E$ väljast regulaarne, saame leida lahtise hulga $V \supset F \setminus E$ nii, et $\mu(V) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tähistame $K = F \setminus V$, siis $K$ on kompaktne (sest ta on kompaktse hulga $F$ kinnine alamhulk) ning $K \subset E$.

**Ülesanne 2.1.** Veenduda, et $K \subset E$.

Seejuures

$$\mu(K) = \mu(F \setminus V) \geqslant \mu(F) - \mu(V) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \mu(E) - \varepsilon.$$

Kui hulk $E \in \mathcal{B}_X$ on $\sigma$-lõplik (mõõdu $\mu$ suhtes), siis leiduvad hulgad $E_j \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ ja $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ning seega $\mu(E_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$. Kuna $\mu$ on oma lõplikel hulkadel seest regulaarne, siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral leidub kompaktne hulk $K_j \subset E_j$ nii, et $\mu(K_j) > \mu(E_j) - \frac{1}{j}$. Kuna

$$\mu(E_j) - \frac{1}{j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E),$$

siis ka $\mu(K_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$ (sest iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E_j) - \frac{1}{j} \leqslant \mu(K_j) \leqslant \mu(E)$). Niisiis, $\mu$ on hulgal $E$ seest regulaarne. $\square$

**Lause 2.3.** *Olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik Radoni mõõt ruumis $X$ ning olgu $E \in \mathcal{B}_X$.*

(a) *Iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad lahtine hulk $U \subset X$ ja kinnine hulk $F \subset X$ nii, et $F \subset E \subset U$ ja $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.*

(b) *Leiduvad $F_\sigma$-tüüpi hulk $A \subset X$ ning $G_\delta$-tüüpi hulk $B \subset X$ nii, et $A \subset E \subset B$ ja $\mu(B \setminus A) = 0$.*

TÕESTUS. (a). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Paneme kõigepealt tähele, et leidub lahtine hulk $U \supset E$ nii, et $\mu(U \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tõepoolest, mõõdu $\mu$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu saame esitada $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kus $E_j \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$. Kuna mõõt $\mu$ on väljast regulaarne, siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral leidub lahtine hulk $U_j \supset E_j$ nii, et $\mu(U_j) < \mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Hulk $U := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ on lahtine, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = U$ ning

$$\mu(U \setminus E) \leqslant \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j \setminus E_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarnasel viisil leiame lahtise hulga $V \supset E^c$ nii, et $\mu(V \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tähistame $F = V^c$, siis $F$ on kinnine, $F \subset E$ ning, arvestades, et $E \setminus F = F^c \setminus E^c = V \setminus E^c$,

$$\mu(U \setminus F) = \mu\big((U \setminus E) \cup (E \setminus F)\big) = \mu(U \setminus E) + \mu(V \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b).

**Ülesanne 2.2.** Tõestada väide (b).

□

**Teoreem 2.4.** *Olgu ruumi $X$ iga lahtine hulk $\sigma$-kompaktne. Siis iga Boreli mõõt ruumis $X$, mis on lõplik kompaktsetel hulkadel, on regulaarne ning seega Radoni mõõt.*

TÕESTUS. Olgu $\mu$ Boreli mõõt ruumis $X$, mis on lõplik kompaktsetel hulkadel. Ruumi $X$ $\sigma$-kompaktsuse tõttu on $\mu$ $\sigma$-lõplik, seega järelduse 2.2 põhjal piisab teoreemi tõestuseks näidata, et $\mu$ on Radoni mõõt.

Mõõdu $\mu$ lõplikkuse tõttu kompaktsetel hulkadel $C_c(X, \mathbb{R}) \subset L_1(\mu)$.

**Ülesanne 2.3.** Veenduda selles.

Seega me saame defineerida funktsionaali $\Phi\colon C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$\Phi(f) = \int f \, d\mu, \quad f \in C_c(X, \mathbb{R}).$$

Funktsionaal $\Phi$ on positiivne ja lineaarne.

**Ülesanne 2.4.** Veenduda selles.

Rieszi esitusteoreemi 1.3 põhjal leidub Radoni mõõt $\nu$ ruumis $X$ selliselt, et iga $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ korral $\Phi(f) = \int f \, d\mu = \int f \, d\nu$.

Veendume, et $\mu$ on igal lahtisel hulgal $U \subset X$ seest regulaarne, kusjuures $\mu(U) = \nu(U)$. Olgu $U \subset X$ lahtine hulk. Siis $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, kus hulgad $C_j$, $j = 1, 2, \ldots$, on kompaktsed. Tähistame $K_n = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$, $n = 1, 2, \ldots$, siis hulgad $K_n \subset U$,

$n = 1, 2, \ldots$, on kompaktsed, $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ ning $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$, seega $\mu(K_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(U)$. Niisiis on $\mu$ hulgal $U$ seest regulaarne. Samuti $\nu(K_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu(U)$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub Urõsoni lemma põhjal funktsioon $\phi_n \in C_c(X, \mathbb{R})$ nii, et $\phi_n \prec U$ ja $\phi_n|_{K_n} = 1$. Nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu(U) = \int \chi_U \, d\mu \geqslant \int \phi_n \, d\mu \geqslant \int \chi_{K_n} \, d\mu = \mu(K_n),$$
$$\nu(U) = \int \chi_U \, d\nu \geqslant \int \phi_n \, d\nu \geqslant \int \chi_{K_n} \, d\nu = \nu(K_n).$$

Siit järeldub, et $\int \phi_n \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(U)$ ja $\int \phi_n \, d\nu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu(U)$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\int \phi_n \, d\mu = \Phi(\phi_n) = \int \phi_n \, d\nu$, siis $\mu(U) = \nu(U)$.

Veendumaks, et $\mu$ on Radoni mõõt, jääb näidata, et $\mu$ on väljast regulaarne igal ruumi $X$ Boreli hulgal. Olgu $E \in \mathcal{B}_X$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $\nu$ on $\sigma$-lõplik Radoni mõõt (sest $X$ on $\sigma$-kompaktne ning $\nu$ on kompaktsetel hulkadel lõplik), siis lause 2.3 põhjal leiduvad lahtine hulk $U \supset E$ ja kinnine hulk $F \subset E$ nii, et $\nu(U \setminus F) < \varepsilon$. Kuna lahtistel hulkadel on $\mu$ ja $\nu$ võrdsed, siis ka $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Aga nüüd $\mu(U \setminus E) \leqslant \mu(U \setminus F) < \varepsilon$, seega $\mu(U) \leqslant \mu(E) + \varepsilon$. Niisiis $\mu$ on väljast regulaarne hulgal $E$. □

## 2.2. Mõõtuvate funktsioonide lähendamine kompaktse kandjaga funktsioonidega

Kõikjal selles punktis on $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum.

**Lause 2.5.** *Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$. Siis $C_c(X, \mathbb{R})$ (või kompleksel juhul $C_c(X)$) on ruumis $L_1(\mu)$ (normi $\|\cdot\|_{L_1}$ suhtes) kõikjal tihe.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.5.** Tõestada lause 2.5.

NÄPUNÄIDE. Väite tõestuseks piisab näidata, et iga lõpliku mõõduga Boreli hulga $E \subset X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub funktsioon $\phi \in C_c(X)$ nii, et $\|\chi_E - \phi\|_{L_1} < \varepsilon$ (põhjendada!). Selleks kasutada Urõsoni lemmat.

□

**Teoreem 2.6** (Luzini teoreem)**.** *Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$ ning olgu $f\colon X \to \mathbb{K}$ mõõtuv funktsioon, mis on null väljaspool mingit lõpliku mõõduga hulka. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad hulk $E \in \mathcal{B}_X$ ja funktsioon $\phi \in C_c(X)$ nii, et $\mu(E^c) < \varepsilon$ ja $f|_E = \phi|_E$. Kui funktsioon $f$ on tõkestatud, siis saab funktsiooni $\phi$ valida nii, et $\|\phi\|_u \leqslant \|f\|_u$.*

TÕESTUS. Olgu hulk $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu(A) < \infty$, selline, et $f|_{X \setminus A} = 0$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$.

(I) Vaatleme kõigepealt juhtu, kus funktsioon $f$ on tõkestatud. Siis $f \in L_1(\mu)$.

**Ülesanne 2.6.** Veenduda selles.

Lause 2.5 põhjal leiduvad $f_j \in C_c(X)$, $j = 1, 2, \dots$, nii et $\|f_j - f\|_{L_1} \to 0$. Siis ka $f_j \to f$ mõõdu järgi, järelikult võime osajadale üle minnes üldisust kitsendamata eeldada, et $f_j \to f$ p.k. (vt. teoreemi II.5.3). Jegorovi teoreemi (vt. teoreemi II.5.5) põhjal leidub mõõtuv hulk $B \subset A$ selliselt, et $\mu(B) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ ja $f_j \to f$ ühtlaselt hulgas $B$. Funktsioonide $f_j$, $j = 1, 2, \dots$, pidevuse tõttu on $f|_B$ pidev funktsioon. Kuna $\mu$ on Radoni mõõt, siis saame valida kompaktse hulga $K \subset B$ nii, et $\mu(K) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ (sest lause 2.1 põhjal on $\mu$ lõpliku mõõduga hulgal $B$ seest regulaarne) ja lahtise hulga $U \supset A$ nii, et $\mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna funktsioon $f|_K$ on pidev, siis Tietze jätkamisteoreemi põhjal leidub funktsioon $\psi \in C_c(X)$ nii, et $\psi|_K = f|_K$ ja $\psi|_{X \setminus U} = 0$ (PÕHJENDADA!). Tähistame $E = (U \setminus K)^c$; siis $f|_E = \psi|_E$; seejuures

$$\mu(E^c) = \mu(U \setminus K) = \mu(U) - \mu(K) = \mu(U) - \mu(A) + \mu(A) - \mu(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Defineerime funktsiooni $\beta\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ võrdusega

$$\beta(z) = \begin{cases} z, & \text{kui } |z| \leqslant \|f\|_u; \\ \|f\|_u \operatorname{sgn} z, & \text{kui } |z| > \|f\|_u. \end{cases}$$

Tähistame $\phi = \beta \circ \psi$, siis $\phi \in C_c(X)$ (sest $\beta$ on pidev funktsioon (PÕHJENDADA!) ja $\beta(0) = 0$), kusjuures $\phi|_E = \psi|_E = f|_E$.

(II) Vaatleme nüüd juhtu, kus $f$ ei tarvitse olla tõkestatud. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $A_n = \{x \in A\colon |f(x)| \leqslant n\}$. Siis $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ ja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, järelikult $\mu(A_n) \to \mu(A)$, seega me saame leida arvu $n \in \mathbb{N}$ selliselt, et $\mu(A_n) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna funktsioon $f\chi_{A_n}$ on tõkestatud, siis osas (I) tõestatu põhjal leiduvad hulk $D \in \mathcal{B}_X$ ja funktsioon $\phi \in C_c(X)$ nii, et $\mu(D^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $f\chi_{A_n}|_D = \phi|_D$. Tähistame $E = D \setminus (A \setminus A_n)$, siis $f|_E = f\,\chi_{A_n}|_E = \phi|_E$ ja

$$\begin{aligned}\mu(E^c) &= \mu\Big(\big(D \setminus (A \setminus A_n)\big)^c\Big) = \mu\Big(\big(D \cap (A \setminus A_n)^c\big)^c\Big) = \mu\big(D^c \cup (A \setminus A_n)\big) \\ &\leqslant \mu(D^c) + \mu(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

## 2.3. Poolpidevad funktsioonid

Olgu $X$ topoloogiline ruum (me ei nõua, et $X$ oleks lokaalselt kompaktne), olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ning olgu $x_0 \in X$.

**Definitsioon 2.2.** Öeldakse, et funktsioon $f$ on *alt poolpidev* ehk, lühidalt, *LSC* (see lühend pärineb ingliskeelsest terminist *"lower semicontinuous"*) punktis $x_0$, kui mis tahes punktiks $x_0$ koonduva ruumi $X$ elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ korral

$$\liminf_\alpha f(x_\alpha) \geqslant f(x_0).$$

Öeldakse, et funktsioon $f$ on *ülalt poolpidev* ehk, lühidalt, *USC* (see lühend pärineb ingliskeelsest terminist *"upper semicontinuous"*) punktis $x_0$, kui mis tahes punktiks $x_0$ koonduva ruumi $X$ elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ korral

$$\limsup_\alpha f(x_\alpha) \leqslant f(x_0).$$

**Märkus 2.1.** Kui ruum $X$ on metriseeruv, siis võib poolpidevate funktsioonide definitsioonis asendada pered jadadega.

**Ülesanne 2.7.** Olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ning olgu $x_0 \in X$. Tõestada, et funktsioon $f$ on LSC punktis $x_0$ parajasti siis, kui funktsioon $-f$ on USC punktis $x_0$.

Järgnev lause kirjeldab etteantud punktis LSC funktsioone.

**Lause 2.7.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum, olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ning olgu $x_0 \in X$.*

(a) *Kui $f(x_0) = -\infty$, siis $f$ on LSC punktis $x_0$.*

(b) *Olgu $-\infty < f(x_0) < \infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f$ on LSC punktis $x_0$;*

(ii) *iga $\varepsilon > 0$ korral leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ selliselt, et*

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \textit{iga } x \in U(x_0) \textit{ korral.}$$

(c) *Olgu $f(x_0) = \infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f$ on LSC punktis $x_0$;*

(ii) *iga $E > 0$ korral leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ selliselt, et*

$$f(x) > E \quad \textit{iga } x \in U(x_0) \textit{ korral.}$$

Tõestus. Väide (a) järeldub vahetult definitsioonist.

(b). (i)$\Rightarrow$(ii). Oletame, et väide (ii) ei kehti, s.t. leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ selliselt, et punkti $x_0$ iga ümbruse $U$ korral leidub punkt $x_U \in U$ nii, et $f(x_U) \leqslant f(x_0) - \varepsilon$. Järjestame punkti $x_0$ kõigi ümbruste hulga $\mathfrak{U}$ loomulikul viisil (s.t. defineerime $U, V \in \mathfrak{U}$ korral $U \succcurlyeq V :\Leftrightarrow U \supset V$). On ilmne, et $\mathfrak{U}$ on selliselt defineeritud järjestuse suhtes suunatud hulk ning pere $(x_U)_{U\in\mathfrak{U}}$ rahuldab tingimust $x_U \to x_0$ ruumis $X$. Samal ajal

$$\liminf_U f(x_U) \leqslant f(x_0) - \varepsilon < f(x_0),$$

seega $f$ ei ole LSC punktis $x_0$, s.t. väide (i) ei kehti.

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu väide (ii) ning olgu ruumi $X$ elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ selline, et $x_\alpha \to x_0$ ruumis $X$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitama, et leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_\alpha) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Väite (ii) põhjal leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ selliselt, et

$$x \in U(x_0) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Kuna $x_\alpha \to x_0$ ruumis $X$, siis leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha \in U(x_0).$$

Niisiis, kui $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$, siis $x_\alpha \in U(x_0)$ ning seega $f(x_\alpha) > f(x_0) - \varepsilon$.

(c).

**Ülesanne 2.8.** Tõestada väide (c).

$\square$

Järgnev etteantud punktis USC funktsioone kirjeldav lause on lause 2.7 sümmeetriline analoog.

**Lause 2.8.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum, olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ning olgu $x_0 \in X$.*

(a) *Kui $f(x_0) = \infty$, siis $f$ on USC punktis $x_0$.*

(b) *Olgu $-\infty < f(x_0) < \infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

  (i) *funktsioon $f$ on USC punktis $x_0$;*

  (ii) *iga $\varepsilon > 0$ korral leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ selliselt, et*

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \textit{iga } x \in U(x_0) \textit{ korral.}$$

(c) *Olgu $f(x_0) = -\infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

  (i) *funktsioon $f$ on USC punktis $x_0$;*

  (ii) *iga $E > 0$ korral leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ selliselt, et*

$$f(x) < -E \quad \textit{iga } x \in U(x_0) \textit{ korral.}$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.9.** Tõestada lause 2.8.

□

**Definitsioon 2.3.** Olgu $X$ topoloogiline ruum ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Öeldakse, et funktsioon $f$ on *alt poolpidev* (ehk, lühidalt, *LSC*), kui ta on alt poolpidev ruumi $X$ igas punktis.

Öeldakse, et funktsioon $f$ on *ülalt poolpidev* (ehk, lühidalt, *USC*), kui ta on ülalt poolpidev ruumi $X$ igas punktis.

Järgnev lause on vahetu järeldus ülesandest 2.7.

**Lause 2.9.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Siis funktsioon $f$ on LSC parajasti siis, kui funktsioon $-f$ on USC.*

Järgnevad kaks vastastikku sümmeetrilist lauset kirjeldavad vastavalt LSC ja USC funktsioone.

**Lause 2.10.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f$ on LSC;*

(ii) *iga $a \in \mathbb{R}$ korral on hulk $\{x \in X\colon\ f(x) > a\}$ lahtine.*

**Lause 2.11.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f$ on USC;*

(ii) *iga $a \in \mathbb{R}$ korral on hulk $\{x \in X\colon\ f(x) < a\}$ lahtine.*

LAUSE 2.10 TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu funktsioon $f$ alt poolpidev ning olgu $a \in \mathbb{R}$. Fikseerime vabalt $x_0 \in \{x \in X\colon\ f(x) > a\} =: A$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitama, et $x_0$ on hulga $A$ sisepunkt, s.t. leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ nii, et $U(x_0) \subset A$, s.t. $f(x) > a$ iga $x \in U(x_0)$ korral.

(I) Kui $f(x_0) = \infty$, siis järeldub niisuguse ümbruse olemasolu vahetult lause 2.7 väitest (c).

(II) Kui $f(x_0) < \infty$, siis valime arvu $\varepsilon > 0$ selliselt, et $f(x_0) - \varepsilon > a$. Lause 2.7 väite (b) põhjal saame valida punkti $x_0$ ümbruse $U(x_0)$ nii, et iga $x \in U(x_0)$ korral $f(x) > f(x_0) - \varepsilon > a$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii) ning olgu $x_0 \in X$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitama, et $f$ on LSC punktis $x_0$.

(I) Kui $-\infty < f(x_0) < \infty$, siis lause 2.7 väite (b) põhjal piisab funktsiooni $f$ alt poolpidevuse tõestuseks punktis $x_0$ näidata, et iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ nii, et

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \text{iga } x \in U(x_0) \text{ korral.}$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Tähistame $A := \{x \in X\colon\ f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$. Kuna $x_0 \in A$, kusjuures eelduse (ii) põhjal on $A$ lahtine hulk, siis $A$ on punkti $x_0$ ümbrus; niisiis me võime võtta $U(x_0) = A$.

(II) Kui $f(x_0) = \infty$, siis lause 2.7 väite (c) põhjal piisab funktsiooni $f$ alt poolpidevuse tõestuseks punktis $x_0$ näidata, et iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub punkti $x_0$ ümbrus $U(x_0)$ nii, et

$$f(x) > E \quad \text{iga } x \in U(x_0) \text{ korral.}$$

Fikseerime vabalt $E > 0$. Tähistame $A := \{x \in X\colon\ f(x) > E\}$. Kuna $x_0 \in A$, kusjuures eelduse (ii) põhjal on $A$ lahtine hulk, siis $A$ on punkti $x_0$ ümbrus; niisiis me võime võtta $U(x_0) = A$. □

LAUSE 2.11 TÕESTUS.

**Ülesanne 2.10.** Tõestada lause 2.11.

□

Järgnev lause on vahetu järeldus lausetest 2.10 ja 2.11.

**Lause 2.12.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum.*

(a) *Iga LSC funktsioon $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ on Boreli mõttes mõõtuv.*

(b) *Iga USC funktsioon $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ on Boreli mõttes mõõtuv.*

Selle jaotise lõpetuseks tõestame mõned LSC ja USC funktsioonide olulisemad omadused.

**Lause 2.13.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum.*

(a) *Kui $U \subset X$ on lahtine hulk, siis $\chi_U$ on LSC.*

(b) *Kui funktsioon* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *on LSC ja* $c \in [0,\infty)$, *siis ka funktsioon* $cf$ *on LSC.*

(c) *Kui* $\mathcal{G}$ *on mingi LSC funktsioonide* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *hulk ning* $f = \sup\{g\colon g \in \mathcal{G}\}$, *siis ka* $f$ *on LSC.*

(d) *Kui funktsioonid* $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *on LSC, siis ka* $f_1 + f_2$ *on LSC (eeldusel, et ta on määratud).*

(e) *Kui* $X$ *on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning funktsioon* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *on mittenegatiivne ja LSC, siis*

$$f(x) = \sup\{g(x)\colon g \in C_c(X,\mathbb{R}),\, 0 \leqslant g \leqslant f\} \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Tõestus.

**Ülesanne 2.11.** Tõestada väited (a), (b), (c) ja (d).

(e). Eeldame nüüd, et $X$ on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Olgu funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mittenegatiivne ja LSC. On ilmne, et iga $x \in X$ korral $f(x) \geqslant \sup\{g(x)\colon g \in C_c(X),\, 0 \leqslant g \leqslant f\}$, seega jääb veenduda, et iga $x \in X$ korral kehtib ka vastupidine võrratus. Selleks piisab näidata, et iga $x \in X$ ja iga reaalarvu $a < f(x)$ korral leidub funktsioon $g \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $0 \leqslant g \leqslant f$ ja $g(x) \geqslant a$.

Fikseerime vabalt $x \in X$ ja arvu $a < f(x)$. Kui $f(x) = 0$, siis võime võtta $g = 0$, seega piisab meil vaadelda vaid juhtu, kus $f(x) > a > 0$. Tähistame $U = \{z \in X\colon f(z) > a\}$, siis funktsiooni $f$ alt poolpidevuse tõttu on $U$ lahtine hulk. Kuna $\{x\} \subset U$ on kompaktne hulk, siis Urõsoni lemma põhjal leidub funktsioon $h \in C_c(X,\mathbb{R})$ nii, et $h(x) = 1$, $0 \leqslant h \leqslant \chi_U$ ja $\operatorname{supp} h \subset U$. Nüüd funktsioon $g = ah$ rahuldab nõutud tingimusi.

**Ülesanne 2.12.** Veenduda selles.

□

**Lause 2.14.** *Olgu* $X$ *topoloogiline ruum.*

(a) *Kui* $F \subset X$ *on kinnine hulk, siis* $\chi_F$ *on USC.*

(b) *Kui funktsioon* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *on USC ja* $c \in [0,\infty)$, *siis ka funktsioon* $cf$ *on USC.*

(c) *Kui* $\mathcal{G}$ *on mingi USC funktsioonide* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *hulk ning* $f = \inf\{g\colon g \in \mathcal{G}\}$, *siis ka* $f$ *on USC.*

(d) *Kui funktsioonid* $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *on USC, siis ka* $f_1 + f_2$ *on USC (eeldusel, et ta on määratud).*

Tõestus.

**Ülesanne 2.13.** Tõestada lause 2.14.

□

## 2.4. Lähendamine poolpidevate funktsioonidega

Selles punktis eeldame jälle, et $X$ on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum.

Järgnev teoreem on monotoonse koonduvuse teoreem LSC funktsioonide perede jaoks.

**Lause 2.15.** *Olgu $\mathcal{G}$ selline mittenegatiivsete LSC funktsioonide $g\colon X \to \mathbb{R}$ hulk ruumis $X$, et mis tahes $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ korral leidub $g \in \mathcal{G}$ nii, et $g \geqslant \max\{g_1, g_2\}$. Tähistame $f = \sup\{g\colon g \in \mathcal{G}\}$. Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$. Siis*

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int g\,d\mu\colon\ g \in \mathcal{G}\right\}.$$

TÕESTUS. Lause 2.13, (c), põhjal on funktsioon $f$ LSC ning seega Boreli mõttes mõõtuv. On ilmne, et $\int f\,d\mu \geqslant \sup\bigl\{\int g\,d\mu\colon\ g \in \mathcal{G}\bigr\} =: \delta$. Niisiis jääb näidata, et $\int f\,d\mu \leqslant \delta$. Fikseerime vabalt reaalarvu $a$, mis rahuldab tingimust $a < \int f\,d\mu$. Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et leidub $g \in \mathcal{G}$ nii, et $\int g\,d\mu > a$.

Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$U_j^n = \left\{x \in X\colon\ f(x) > \frac{j}{2^n}\right\},\quad j = 1, \dots, 2^{2n}, \qquad \text{ja} \qquad \phi_n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^{2n}} \chi_{U_j^n}.$$

Siis $\phi_n \nearrow f$ ning järelikult monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal ka $\int \phi_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$. Seega me saame fikseerida $n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^{2n}} \mu(U_j^n) = \int \phi_n\,d\mu > a.$$

Iga $j \in \{1, \dots, 2^{2n}\}$ korral on hulk $U_j^n$ lahtine, seega mõõdu $\mu$ seest regulaarsuse tõttu lahtistel hulkadel leidub kompaktne hulk $K_j \subset U_j^n$ nii, et

$$\int \psi\,d\mu = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^{2n}} \mu(K_j) > a,$$

kus $\psi = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^{2n}} \chi_{K_j}$. Teoreemi tõestuseks jääb leida $g \in \mathcal{G}$ nii, et $g \geqslant \psi$ (sest siis ka $\int g\,d\mu \geqslant \int \psi\,d\mu > a$).

Iga $x \in \bigcup_{j=1}^{2^{2n}} K_j =: K$ korral $f(x) > \phi_n(x) \geqslant \psi(x)$, järelikult saame me valida $g_x \in \mathcal{G}$ nii, et $g_x(x) > \psi(x)$. Kuna iga $j \in \{1, \dots, 2^n\}$ korral $-\chi_{K_j}$ on LSC, siis ka $g_x - \psi$ on LSC. Niisiis iga $x \in K$ korral hulk

$$V_x = \bigl\{y \in X\colon\ g_x(y) > \psi(y)\bigr\}$$

on lahtine. Kogum $\bigl\{V_x\colon\ x \in K\bigr\}$ on kompaktse hulga $K$ lahtine kate, järelikult leidub tal lõplik alamkate $\bigl\{V_{x_1}, \dots, V_{x_k}\bigr\}$ (siin $k \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \dots, x_k \in K$). Eelduse põhjal leidub funktsioon $g \in \mathcal{G}$ nii, et $g \geqslant \max\bigl\{g_{x_1}, \dots, g_{x_k}\bigr\} \geqslant \psi$.

**Ülesanne 2.14.** Veenduda, et $\max\{g_{x_1}, \dots, g_{x_k}\} \geqslant \psi$.

$\square$

Järgnev tulemus on vahetu järeldus lausetest 2.13, (e), ja 2.15.

**Järeldus 2.16.** *Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$ ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mittenegatiivne LSC funktsioon ruumis $X$. Siis*

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int g\,d\mu\colon\ g \in C_c(X),\ 0 \leqslant g \leqslant f\right\}.$$

**Lause 2.17.** *Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$ ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mittenegatiivne Boreli mõttes mõõtuv funktsioon ruumis $X$. Siis*

(a)
$$\int f\,d\mu = \inf\left\{\int g\,d\mu\colon\ g\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ on LSC ja } g \geqslant f\right\};$$

(b) *kui hulk $\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ on $\sigma$-lõplik, siis*

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int g\,d\mu\colon\ g\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ on USC ja } 0 \leqslant g \leqslant f\right\}.$$

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et funktsioon $f$ esitub kujul $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{E_j}$, kus $\alpha_j > 0$ ja $E_j \in \mathcal{B}_X$ (vt. ülesannet II.1.25) (PÕHJENDADA!).

(a). Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida LSC funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ nii, et $g \geqslant f$ ja $\int g\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu + \varepsilon$. Kuna $\mu$ on Radoni mõõt, siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral leidub lahtine hulk $U_j \supset E_j$ nii, et $\mu(U_j) \leqslant \mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j\,\alpha_j}$. Tähistame $g = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{U_j}$; siis lause 2.13 põhjal on funktsioon $g$ LSC (PÕHJENDADA!). Seejuures $g \geqslant f$ ning $\int g\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu + \varepsilon$.

**Ülesanne 2.15.** Veenduda selles.

(b). Olgu hulk $\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ $\sigma$-lõplik. Fikseerime vabalt reaalarvu $a$, mis rahuldab tingimust $a < \int f\,d\mu$. Väite tõestuseks piisab leida USC funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ nii, et $0 \leqslant g \leqslant f$ ja $\int g\,d\mu \geqslant a$.

**Ülesanne 2.16.** Konstrueerida selline funktsioon $g$.

NÄPUNÄIDE. Hulga $\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu võime esituses $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{E_j}$ (kus $\alpha_j > 0$ ja $E_j \in \mathcal{B}_X$) eeldada, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E_j) < \infty$ (vt. ülesannet II.1.25).

□

# § 3. Ruumi $C_0(X)$ kaasruum

Kõikjal selles paragrahvis on $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Meie eesmärk on “kirjeldada ära” ruumide $C_0(X,\mathbb{R})$ ja $C_0(X)$ kaasruumid.

## 3.1. Positiivsed funktsionaalid $f \in C_0(X,\mathbb{R})^*$. Funktsionaali $f \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ “Jordani lahutus”

Esimese sammuna identifitseerime pidevad positiivsed lineaarsed funktsionaalid ruumil $C_c(X,\mathbb{R})$. (Meenutame, et $C_c(X,\mathbb{R})$ on ruumi $C_0(X,\mathbb{R})$ kõikjal tihe alamruum.)

**Lause 3.1.** *Positiivne lineaarne funktsionaal $\Phi\colon\ C_c(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on pidev parajasti siis, kui teda esitav Radoni mõõt $\mu$ ruumis $X$ on lõplik. Seejuures $\|\Phi\| = \mu(X)$.*

TÕESTUS. Funktsionaal $\Phi$ on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud, s.t.

$$\|\Phi\| := \sup\Big\{|\Phi(f)|\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ \|f\|_u \leqslant 1\Big\} < \infty.$$

Lause tõestuseks jääb märkida, et

$$\begin{aligned}\mu(X) &\overset{(1)}{=} \sup\Big\{\Phi(f)\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ f \prec X\Big\}\\ &= \sup\Big\{\Phi(f)\colon\ f \in C_c\big(X,[0,1]\big)\Big\}\\ &\overset{(2)}{=} \sup\Big\{|\Phi(f)|\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ -1 \leqslant f \leqslant 1\Big\}\\ &= \sup\Big\{|\Phi(f)|\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ \|f\|_u \leqslant 1\Big\} = \|\Phi\|.\end{aligned}$$

Siin vajavad põhjendamist võrdused (1) ja (2). Võrdus (1) on erijuht Rieszi esitusteoreemi 1.3 tingimusest 1°, kus $U = X$.

**Ülesanne 3.1.** Tõestada võrdus (2).

□

Nüüd me saame identifitseerida positiivsed pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumil $C_0(X,\mathbb{R})$.

**Lause 3.2.** (a) *Kui funktsionaal $\Phi \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ on positiivne, siis leidub üheselt määratud Radoni mõõt $\mu$ ruumis $X$ nii, et*

$$\Phi(f) = \int f\,d\mu \qquad \textit{iga } f \in C_0(X,\mathbb{R}) \textit{ korral.} \tag{3.1}$$

*See mõõt $\mu$ on lõplik, kusjuures $\|\Phi\| = \mu(X)$.*

(b) *Kui $\mu$ on lõplik Radoni mõõt ruumis $X$, siis võrdusega (3.1) defineeritud funktsionaal $\Phi\colon\ C_0(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on positiivne, lineaarne ja pidev.*

TÕESTUS. (b). Olgu $\mu$ lõplik Radoni mõõt ruumis $X$. Kõigepealt paneme tähele, et iga $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ korral $f \in L_1(\mu)$.

**Ülesanne 3.2.** Veenduda selles.

Võrdusega (3.1) defineeritud funktsionaali $\Phi$ lineaarsus ja positiivsus on ilmne. Funktsionaali $\Phi$ pidevus järeldub tema tõkestatusest: iga $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ korral

$$|\Phi(f)| = \left|\int f \, d\mu\right| \leqslant \int |f| \, d\mu \leqslant \mu(X) \, \|f\|_u.$$

(a). Olgu $\Phi \in C_0(X, \mathbb{R})^*$ positiivne funktsionaal. Siis ka $\Phi|_{C_c(X,\mathbb{R})}$ on pidev positiivne lineaarne funktsionaal, seega lause 3.1 põhjal leidub lõplik Radoni mõõt $\mu$ nii, et iga $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ korral $\Phi(g) = \int g \, d\mu$. Defineerime funktsionaali $\Psi(f) = \int f \, d\mu$, $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, siis väite (b) põhjal $\Psi \in C_0(X, \mathbb{R})^*$; kuna $\Phi|_{C_c(X,\mathbb{R})} = \Psi|_{C_c(X,\mathbb{R})}$, kusjuures alamruum $C_c(X, \mathbb{R})$ on ruumis $C_0(X, \mathbb{R})$ kõikjal tihe, siis $\Phi = \Psi$; niisiis kehtib (3.1).

Lause 3.1 põhjal $\|\Phi\| = \|\Phi|_{C_c(X,\mathbb{R})}\| = \mu(X)$. Tingimust (3.1) rahuldava Radoni mõõdu $\mu$ ühesus järeldub Rieszi esitusteoreemist.

**Ülesanne 3.3.** Tõestada, et tingimust (3.1) rahuldav Radoni mõõt $\mu$ ruumis $X$ on üheselt määratud.

□

Järgnev teoreem ütleb, et funktsionaalidel $F \in C_0(X, \mathbb{R})^*$ on "Jordani lahutus".

**Teoreem 3.3.** *Olgu $F \in C_0(X, \mathbb{R})^*$. Siis leiduvad positiivsed funktsionaalid $F^+, F^- \in C_0(X, \mathbb{R})^*$ nii, et $F = F^+ - F^-$.*

TÕESTUS. Kõigepealt defineerime iga $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$, korral

$$\Phi(f) := \sup\bigl\{F(g)\colon\ g \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leqslant g \leqslant f\bigr\};$$

siis $0 \leqslant \Phi(f) \leqslant \|F\| \, \|f\|_u$ (sest $F(0) = 0$ ning kui $g \in C_0(X, \mathbb{R})$, $0 \leqslant g \leqslant f$, siis $F(g) \leqslant \|F\| \, \|g\|_u \leqslant \|F\| \, \|f\|_u$).

Defineerime funktsionaali $F^+\colon\ C_0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$F^+(f) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-), \quad f \in C_0(X, \mathbb{R}).$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et $F^+$ on positiivne pidev lineaarne funktsionaal, sest sel juhul, defineerides $F^- := F^+ - F$, on ka $F^-$ positiivne pidev lineaarne funktsionaal, kusjuures $F = F^+ - F^-$.

**Ülesanne 3.4.** Tõestada, et $F^-(f) \geqslant 0$ alati, kui $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$.

Funktsionaali $F^+$ positiivsus on ilmne.

Funktsionaali $F^+$ lineaarsuse kontroll on sarnane Lebesgue'i integraali lineaarsuse kontrolliga (vt. teoreemi II.3.1). Kõigepealt, kui $\alpha \geqslant 0$ ja $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$, siis ilmselt $\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi(f)$.

**Ülesanne 3.5.** Veenduda selles.

Olgu nüüd $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ suvalised. Kui $\alpha \geqslant 0$, siis

$$\begin{aligned} F^+(\alpha f) &= \Phi\big((\alpha f)^+\big) - \Phi\big((\alpha f)^-\big) = \Phi(\alpha f^+) - \Phi(\alpha f^-) = \alpha\Phi(f^+) - \alpha\Phi(f^-) \\ &= \alpha\big(\Phi(f^+) - \Phi(f^-)\big) = \alpha F^+(f). \end{aligned}$$

**Ülesanne 3.6.** Tõestada võrdus $F^+(\alpha f) = \alpha F^+(f)$ juhul, kui $\alpha < 0$.

Funktsionaali $F^+$ aditiivsuse tõestuseks märgime kõigepealt, et kui $f, g \in C_0(X,\mathbb{R})$, $f, g \geqslant 0$, siis $\Phi(f+g) = \Phi(f)+\Phi(g)$. Tõepoolest, olgu $f, g \in C_0(X,\mathbb{R})$, $f, g \geqslant 0$. Kui $\hat{f}, \hat{g} \in C_0(X,\mathbb{R})$ on sellised, et $0 \leqslant \hat{f} \leqslant f$ ja $0 \leqslant \hat{g} \leqslant g$, siis ka $0 \leqslant \hat{f}+\hat{g} \leqslant f+g$ ning seega $\Phi(f+g) \geqslant F(\hat{f}+\hat{g}) = F(\hat{f})+F(\hat{g})$; järelikult $\Phi(f+g) \geqslant \Phi(f)+\Phi(g)$. Teiselt poolt, olgu $h \in C_0(X,\mathbb{R})$ selline, et $0 \leqslant h \leqslant f+g$. Tähistame $h_1 = \min\{h, f\}$ ja $h_2 = h - h_1$, siis $0 \leqslant h_1 \leqslant f$ ja $0 \leqslant h_2 \leqslant g$, seega $F(h) = F(h_1+h_2) = F(h_1)+F(h_2) \leqslant \Phi(f)+\Phi(g)$ ning järelikult $\Phi(f+g) \leqslant \Phi(f)+\Phi(g)$. Niisiis $\Phi(f+g) = \Phi(f)+\Phi(g)$.

Olgu nüüd $f, g \in C_0(X,\mathbb{R})$ suvalised. Tähistame $h = f+g$, siis $f^+ - f^+ + g^+ - g^- = h^+ - h^-$, millest $f^+ + g^+ + h^- = h^+ + f^- + g^-$ ning seega

$$\Phi(f^+)+\Phi(g^+)+\Phi(h^-) = \Phi(f^++g^++h^-) = \Phi(h^++f^-+g^-) = \Phi(h^+)+\Phi(f^-)+\Phi(g^-),$$

millest

$$F^+(f+g) = \Phi(h^+) - \Phi(h^-) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-) + \Phi(g^+) - \Phi(g^-) = F^+(f) + F^+(g).$$

Teoreemi tõestuseks jääb veel märkida, et $F^+$ on pidev, sest mis tahes $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned} |F^+(f)| &= |\Phi(f^+) - \Phi(f^-)| \leqslant \max\big\{\Phi(f^+), \Phi(f^-)\big\} \leqslant \max\big\{\|F\|\,\|f^+\|_u, \|F\|\,\|f^-\|_u\big\} \\ &= \|F\| \max\big\{\|f^+\|_u, \|f^-\|_u\big\} = \|F\|\,\|f\|_u. \end{aligned}$$

□

## 3.2. Märgiga ja kompleksmõõdu regulaarsus. Rieszi esitusteoreem (kaasruumid $C_0(X,\mathbb{R})^*$ ja $C_0(X)^*$)

**Definitsioon 3.1.** Öeldakse, et märgiga Boreli mõõt ruumis $X$ on *regulaarne,* kui tema positiivne ja negatiivne variatsioonid on regulaarsed.

Öeldakse, et kompleksne Boreli mõõt ruumis $X$ on *regulaarne,* kui tema reaal- ja imaginaarosa on regulaarsed.

**Lause 3.4.** *Olgu $\mu$ lõplik märgiga (või kompleksne) Boreli mõõt ruumis $X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mu$ on regulaarne;*

(ii) *täisvariatsioon $|\mu|$ on regulaarne.*

Lause 3.4 (ning samuti ka lause 3.8) tõestamisel on mugav toetuda järgnevatele kahele abitulemusele.

**Lemma 3.5.** *Olgu $\mu$ lõplik Boreli mõõt ruumis $X$. Kui leidub lõplik regulaarne Boreli mõõt $\nu$ ruumis $X$ selliselt, et $\mu \leqslant \nu$ (s.t. $\mu(E) \leqslant \nu(E)$ iga $E \in \mathcal{B}_X$ korral), siis ka mõõt $\mu$ on regulaarne.*

**Lemma 3.6.** *Olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ lõplikud Boreli mõõdud ruumis $X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mu_1$ ja $\mu_2$ on regulaarsed;*

(ii) *$\mu_1 + \mu_2$ on regulaarne.*

Lemmad 3.5 ja 3.6 järelduvad lihtsasti järgmisest abitulemusest.

**Lemma 3.7.** *Olgu $\mu$ lõplik Boreli mõõt ruumis $X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mu$ on regulaarne;*

(ii) *iga $E \in \mathcal{B}_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad lahtine hulk $U \subset X$ ja kompaktne hulk $K \subset X$ nii, et $K \subset E \subset U$ ja $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 3.7.** Tõestada lemma 3.7.

$\square$

LEMMA 3.5 TÕESTUS.

**Ülesanne 3.8.** Tõestada lemma 3.5.

NÄPUNÄIDE. Kasutada lemmat 3.7.

$\square$

LEMMA 3.6 TÕESTUS.

**Ülesanne 3.9.** Tõestada lemma 3.6.

NÄPUNÄIDE. Implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(ii) tõestamisel kasutada lemmat 3.7 ning implikatsiooni (ii)$\Rightarrow$(i) tõestamisel lemmat 3.5.

$\square$

LAUSE 3.4 TÕESTUS. Samaväärsus (i)$\Leftrightarrow$(ii) lõpliku märgiga Boreli mõõdu $\mu$ jaoks järeldub vahetult lemmast 3.6, sest $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

**Ülesanne 3.10.** Tõestada samaväärsus (i)$\Leftrightarrow$(ii) kompleksmõõdu $\mu$ jaoks.

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et $|\operatorname{Re}\mu|, |\operatorname{Im}\mu| \leqslant |\mu| \leqslant |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu|$, ning kasutada samaväärsust (i)$\Leftrightarrow$(ii) lõpliku märgiga Boreli mõõdu jaoks ning lemmasid 3.5 ja 3.6.

$\square$

**Lause 3.8.** *Tähistame*

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{R}}(X) &:= \{\mu\colon\ \mathcal{B}_X \to \mathbb{R},\ \mu \text{ on regulaarne lõplik märgiga Boreli mõõt}\}, \\ M(X) &:= \{\mu\colon\ \mathcal{B}_X \to \mathbb{C},\ \mu \text{ on regulaarne Boreli kompleksmõõt}\}. \end{aligned}$$

*Siis $M_{\mathbb{R}}(X)$ ja $M(X)$ on vektorruumid (loomulike tehete suhtes). Veelgi enam, $M_{\mathbb{R}}(X)$ ja $M(X)$ on normeeritud ruumid normi*

$$\|\mu\| = |\mu|(X), \qquad \mu \in M_{\mathbb{R}}(X) \text{ või } \mu \in M(X),$$

*suhtes.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 3.11.** Tõestada lause 3.8.

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt panna tähele, et (lõplike) märgiga mõõtude $\mathcal{B}_X \to \mathbb{R}$ hulk ning kõigi kompleksmõõtude $\mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ hulk on vektorruumid loomulike tehete suhtes. Seejärel veenduda, et $\|\mu\| = |\mu|(X)$ on norm neil ruumidel. Siin kolmnurga võrratuse tõestuseks panna tähele, et $|\mu+\nu| \leqslant |\mu|+|\nu|$. Ülesande lahenduseks jääb veel näidata, et $M_{\mathbb{R}}(X)$ ja $M(X)$ on loomulike tehete suhtes kinnised. Selleks on mugav kasutada lauset 3.4 ning lemmasid 3.5, 3.6 ja 3.7.

□

**Teoreem 3.9** (Rieszi esitusteoreem)**.** *Kujutused*

$$M_{\mathbb{R}}(X) \ni \mu \longmapsto F_\mu \in C_0(X,\mathbb{R})^* \qquad \text{ja} \qquad M(X) \ni \mu \longmapsto F_\mu \in C_0(X)^*,$$

*kus*

$$F_\mu(f) = \int_X f\,d\mu, \quad f \in C_0(X,\mathbb{R}) \text{ või } f \in C_0(X),$$

*on isomeetrilised isomorfismid.*

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et kui $\mu \in M(X)$ (või $\mu \in M_{\mathbb{R}}(X)$), siis tõepoolest $F_\mu \in C_0(X)^*$ (või $F_\mu \in C_0(X,\mathbb{R})^*$), sest integraali lineaarsuse tõttu on $F_\mu$ lineaarne ning, kuna mis tahes $f \in C_0(X)$ (või $f \in C_0(X,\mathbb{R})$) korral

$$|F_\mu(f)| = \left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\;d|\mu| \leqslant \|f\|_u\,|\mu|(X) = \|\mu\|\,\|f\|_u,$$

siis funktsionaal $F_\mu$ on pidev, kusjuures $\|F_\mu\| \leqslant \|\mu\|$.

Järgmiseks paneme tähele, et vaadeldavad kujutused on lineaarsed.

**Ülesanne 3.12.** Veenduda selles.

Veendumaks, et vaadeldav kujutus on isomeetriline, jääb näidata, et $\|\mu\| \leqslant \|F_\mu\|$. Lause IV.3.8 põhjal eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\mu}{d|\mu|}$, kusjuures $\left|\frac{d\mu}{d|\mu|}\right| = 1$ $|\mu|$-p.k.. Seega leidub (Boreli mõttes) mõõtuv funktsioon $h\colon X \to \mathbb{C}$ (või reaalsel juhul $h\colon X \to \mathbb{R}$), selliselt, et $|h| = 1$ ja $h = \frac{d\mu}{d|\mu|}$ $|\mu|$-p.k. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Luzini teoreemi põhjal leiduvad hulk $E \in \mathcal{B}_X$ ja funktsioon $f \in C_0(X)$ (või reaalsel juhul $f \in C_0(X,\mathbb{R})$) nii, et $|\mu|(E^c) < \varepsilon$, $f|_E = \bar{h}|_E$ ja $\|f\|_u \leqslant 1$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\|\mu\| &= |\mu|(X) = \int_X d|\mu| = \int_X |h|^2\,d|\mu| = \int_X \bar{h}\,h\,d|\mu| = \int_X \bar{h}\,d\mu \\
&\leqslant \left|\int_X f\,d\mu\right| + \left|\int_X (\bar{h}-f)\,d\mu\right| \leqslant \left|\int_X f\,d\mu\right| + \int_E |\bar{h}-f|\,d|\mu| + \int_{E^c} |\bar{h}-f|\,d|\mu| \\
&= |F_\mu(f)| + 0 + \int_{E^c} |\bar{h}-f|\,d|\mu| \leqslant |F_\mu(f)| + \int_{E^c} \big(|\bar{h}| + |f|\big)\,d|\mu| \\
&\leqslant |F_\mu(f)| + 2\,|\mu|(E^c) < |F_\mu(f)| + 2\varepsilon \leqslant \|F_\mu\| + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon > 0$ oli vabalt valitud, siis $\|\mu\| \leqslant \|F_\mu\|$.

Teoreemi tõestuseks jääb veel näidata, et vaadeldavad kujutused on sürjektsioonid. Vaatleme esmalt kompleksset juhtu. Olgu $F \in C_0(X)^*$. Tähistame $G = F|_{C_0(X,\mathbb{R})}$. Siis $\operatorname{Re} G, \operatorname{Im} G \in C_0(X,\mathbb{R})^*$.

**Ülesanne 3.13.** Veenduda selles.

Teoreemi 3.3 põhjal leiduvad positiivsed lineaarsed funktsionaalid $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ nii, et $\operatorname{Re} G = \Phi_1 - \Phi_2$ ja $\operatorname{Im} G = \Phi_3 - \Phi_4$. Lause 3.2 põhjal leiduvad lõplikud Radoni mõõdud $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ruumis $X$ nii, et iga $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral $\Phi_j(f) = \int f\,d\mu_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Paneme nüüd tähele, et iga $f \in C_0(X)$ korral

$$F(f) = \int f\,d\mu, \qquad \text{kus } \mu := \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \in M(X).$$

**Ülesanne 3.14.** Veenduda selles.

**Ülesanne 3.15.** Tõestada vaadeldava kujutuse sürjektiivsus reaalsel juhul.

□

## 3.3. Täiendavaid ülesandeid

Järgnev ülesanne õigustab funktsionaali $F \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ teoreemi 3.3 tõestusest pärineva esituse $F = F^+ - F^-$ nimetamist "Jordani lahutuseks".

**Ülesanne 3.16.** Olgu $F \in C_0(X,\mathbb{R})^*$, olgu $F^+, F^- \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ tingimust $F = F^+ - F^-$ rahuldavad positiivsed funktsionaalid teoreemi 3.3 tõestusest, olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ vastavalt funktsionaale $F^+$ ja $F^-$ esitavad Radoni mõõdud ning olgu $\mu := \mu_1 - \mu_2$. Tõestada, et

(a) $\mu_1 = \mu^+$ ja $\mu_2 = \mu^-$;

(b) kui positiivsed funktsionaalid $F_1, F_2 \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ rahuldavad tingimust $F = F_1 - F_2$, siis $F^+ \leqslant F_1$ ja $F^- \leqslant F_2$, s.t.

$$F^+(f) \leqslant F_1(f) \quad \text{ja} \quad F^-(f) \leqslant F_2(f) \qquad \text{iga } f \in C_0(X,\mathbb{R}),\ f \geqslant 0, \text{ korral.}$$

NÄPUNÄIDE. (a). Väite tõestuseks piisab näidata vaid, et $\mu_1 \leqslant \mu^+$ (põhjendada! – kasutada ülesannet IV.1.21), milleks omakorda piisab näidata, et $\mu_1(U) \leqslant \mu^+(U)$ iga $U \in \tau_X$ korral (põhjendada! – ühtlasi põhjendada, miks mõõdud $\mu_1$ ja $\mu^+$ on regulaarsed). Selleks kasutada Rieszi esitusteoreemi 1.3 ja ülesannet IV.1.22.

(b). Kõigepealt panna tähele, et kui $\nu_1$ ja $\nu_2$ on vastavalt funktsionaale $F_1$ ja $F_2$ esitavad Radoni mõõdud, siis $\mu = \nu_1 - \nu_2$ (kõige lihtsam on selleks kasutada ülesannet IV.1.22 ja Rieszi esitusteoreemi 3.9). Väite tõestuseks piisab näidata vaid, et $F^+ \leqslant F_1$ (põhjendada!). Selleks kasutada käesoleva ülesande osa (a) ning ülesandeid IV.1.21 ja IV.3.18, (a).

## § 4. Baire'i mõõdud

Kõikjal selles paragrahvis on $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Sümbolid $\mathcal{B}_X$, $\tau_X$ ja $\mathcal{K}$ tähistavad vastavalt ruumi $X$ Boreli $\sigma$-algebrat, ruumi $X$ lahtiste alamhulkade kogumit ja ruumi $X$ kompaktsete alamhulkade kogumit. Sümbolitega $\mathcal{U}_0$ ja $\mathcal{K}_0$ hakkame tähistama vastavalt ruumi $X$ $\sigma$-kompaktsete lahtiste hulkade kogumit ning ruumi $X$ kompaktsete $G_\delta$-de kogumit.

**Definitsioon 4.1.** Ruumi $X$ *Baire'i $\sigma$-algebraks* nimetatakse ruumi $X$ kompaktsete $G_\delta$-de kogumi poolt genereeritud $\sigma$-algebrat. Ruumi $X$ Baire'i $\sigma$-algebra hulki nimetatakse selle ruumi Baire'i hulkadeks.

Ruumi $X$ Baire'i $\sigma$-algebrat tähistame edaspidi sümboliga $\mathcal{B}a_X$. Vastavalt definitsioonile niisiis $\mathcal{B}a_X = \sigma(\mathcal{K}_0)$.

**Märkus 4.1.** Baire'i hulga mõiste võib erinevates allikates olla erinev. Sageli defineeritakse ruumi $X$ Baire'i $\sigma$-algebra kui vähim $\sigma$-algebra, mille suhtes kõik pidevad funktsioonid ruumil $X$ on mõõtuvad; mõnes allikas aga kui vähim $\sigma$-algebra, mis sisaldab kõiki ruumi $X$ kompaktseid hulki.

**Teoreem 4.1.** *$\mathcal{B}a_X$ on vähim ruumi $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra, mille suhtes kõik funktsioonid $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ on mõõtuvad.*

**Järeldus 4.2.** *$\mathcal{B}a_X$ on vähim ruumi $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra, mille suhtes kõik funktsioonid $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ on mõõtuvad.*

TÕESTUS. Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ $\sigma$-algebra. Järelduse tõestuseks piisab tõestada järgmiste väidete samaväärsus:

(i) iga funktsioon $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv;

(ii) iga funktsioon $g \in C_0(X,\mathbb{R})$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv.

(ii)$\Rightarrow$(i) on ilmne, sest $C_c(X,\mathbb{R}) \subset C_0(X,\mathbb{R})$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Olgu iga funktsioon $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ $\mathfrak{A}$-mõõtuv ning olgu $g \in C_0(X,\mathbb{R})$. Kuna $C_c(X,\mathbb{R})$ on ruumi $C_0(X,\mathbb{R})$ tihe alamruum (ühtlase normi suhtes), siis leiduvad funktsioonid $f_n \in C_c(X,\mathbb{R})$, $n = 1,2,\ldots$, nii, et $f_n \to g$ ruumis $C_0(X,\mathbb{R})$ (ühtlase normi suhtes) ning seega ka $f_n \to g$ punktiviisi. Kuna funktsioonid $f_n$, $n = 1,2,\ldots$, on eelduse põhjal $\mathfrak{A}$-mõõtuvad, siis ka $g$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv (vt. teoreemi I.1.6). $\square$

TEOREEMI 4.1 TÕESTUS. Kõigepealt rõhutame, et niisuguste ruumi $X$ alamhulkade $\sigma$-algebrate hulgas, mille suhtes kõik funktsioonid $f \in C_c(X,\mathbb{R})$ on mõõtuvad, on olemas vähim — selleks on nende $\sigma$-algebrate ühisosa. Tähistame selle vähima $\sigma$-algebra sümboliga $\mathfrak{A}_0$.

Fikseerime vabalt funktsiooni $f \in C_c(X,\mathbb{R})$. Veendumaks, et $\mathfrak{A}_0 \subset \mathcal{B}a_X$, piisab näidata, et $f$ on $\mathcal{B}a_X$-mõõtuv. Kuna $f = f^+ - f^-$, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $f \geqslant 0$. Funktsiooni $f$ $\mathcal{B}a_X$-mõõtuvuse tõestuseks piisab näidata, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral

$$A_a := \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant a\} \in \mathcal{B}a_X.$$

Olgu $a \in \mathbb{R}$. Kui $a \leqslant 0$, siis $A_a = X \in \mathcal{B}a_X$. Olgu $a > 0$. Ilmselt on $A_a$ kompaktne (sest $A_a$ on kompaktse hulga $\operatorname{supp} f$ kinnine alamhulk). Hulk $A_a$ on $G_\delta$, sest

$$A_a = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in X\colon\ f(x) > a - \tfrac{1}{j}\},$$

kusjuures kõik selle ühisosa hulgad on lahtised. Niisiis $A_a \in \mathcal{K}_0 \subset \sigma(\mathcal{K}_0) = \mathcal{B}a_X$.

Olgu nüüd $\mathfrak{A}$ mingi selline hulga $X$ alamhulkade $\sigma$-algebra, mille suhtes kõik funksioonid $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ on mõõtuvad. Veendumaks, et $\mathcal{B}a_X \subset \mathfrak{A}_0$, piisab näidata, et $\mathcal{B}a_X \subset \mathfrak{A}$. Fikseerime vabalt hulga $K \in \mathcal{K}_0$. Sisalduvuse $\mathcal{B}a_X \subset \mathfrak{A}$ tõestuseks piisab näidata, et $K \in \mathfrak{A}$ (PÕHJENDADA!). Olgu hulgad $U_j \in \tau_X$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Urõsoni lemma põhjal leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral funktsioon $\phi_j \in C_c(X, \mathbb{R})$ selliselt, et $\phi_j|_K = 1$ ja $\operatorname{supp} \phi_j \subset U_j$. Aga nüüd $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in X\colon\ \phi_j(x) = 1\} \in \mathfrak{A}$, nagu soovitud. Niisiis $\mathcal{B}a_X \subset \mathfrak{A}$ ja seega $\mathfrak{A}_0 = \mathcal{B}a_X$. $\square$

**Definitsioon 4.2.** Öeldakse, et hulk $B \subset X$ on

- *tõkestatud,* kui leidub hulk $K \in \mathcal{K}$ nii, et $B \subset K$;
- *$\sigma$-tõkestatud,* kui leiduvad hulgad $K_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

**Lemma 4.3.** (a) *Olgu $K \subset U \subset X$, kus $K \in \mathcal{K}$ ja $U \in \tau_X$. Siis leiduvad hulgad $K_0 \in \mathcal{K}_0$ ja $U_0 \in \mathcal{U}_0$ nii, et $\overline{U_0}$ on kompaktne ja $K \subset K_0 \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U$.*

(b) *Iga $U \in \mathcal{U}_0$ korral leiduvad hulgad $K_j \in \mathcal{K}_0$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.*

(c) *Iga $K \in \mathcal{K}_0$ korral leiduvad hulgad $U_j \in \mathcal{U}_0$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$.*

(d) *Olgu $K \in \mathcal{K}_0$ ja $U \in \mathcal{U}_0$. Siis $K \setminus U \in \mathcal{K}_0$ ja $U \setminus K \in \mathcal{U}_0$.*

(e) *Olgu $B \subset X$ $\sigma$-tõkestatud hulk. Siis leidub hulk $U \in \mathcal{U}_0$ nii, et $B \subset U$.*

TÕESTUS. (a). Urõsoni lemma põhjal leidub $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ nii, et $K \prec f \prec U$. Me võime võtta

$$K_0 = \{x \in X\colon\ f(x) = 1\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in X\colon\ f(x) > 1 - \tfrac{1}{j}\}$$

ja

$$U_0 = \{x \in X\colon\ f(x) > 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \tfrac{1}{j}\}.$$

(b) ja (c) järelduvad vahetult väitest (a).

(d). Kõigepealt, me saame esitada $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ ja $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, kus $U_j \in \tau_X$ ja $K_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, \ldots$. Nüüd, esiteks $K \setminus U \in \mathcal{K}$, kusjuures

$$K \setminus U = K \cap U^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j^c\right) = \bigcap_{i,j=1}^{\infty} U_j \cap K_i^c$$

on $G_\delta$. Teiseks $U \setminus K \in \tau_X$, kusjuures

$$U \setminus K = U \cap K^c = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j^c\right) = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} K_j \cap U_i^c$$

on $\sigma$-kompaktne.

(e). Olgu $K_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Väite (a) põhjal leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral hulk $U_j \in \mathcal{U}_0$ nii, et $K_j \subset U_j$. Aga nüüd $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \in \mathcal{U}_0$. □

**Lemma 4.4.** (a) *$G_\delta$-de lõplik ühend on $G_\delta$.*

(b) *$\sigma$-kompaktsete hulkade lõplik ühisosa on $\sigma$-kompaktne.*

**Märkus 4.2.** Nagu näeme järgnevast tõestusest, kehtib see lemma ka ilma eeldusteta ruumi $X$ lokaalse kompaktsuse kohta.

Lemma 4.4 tõestuses on mugav viidata järgnevale ülesandele.

**Ülesanne 4.1.** Olgu $Z$ mingi hulk ning olgu $A_j, B_j \subset Z$, $j = 1, 2, \ldots$.

(a) Kui $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ja $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, siis

$$\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \cup B_j.$$

(b) Kui $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ja $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, siis

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B_j.$$

LEMMA 4.4 TÕESTUS. (a). Olgu $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ ja $L = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$, kus $U_j, V_j \in \tau_X$, $j = 1, 2, \ldots$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ ja $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$. Aga nüüd ülesande 4.1 põhjal

$$K \cup L = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \cup V_j$$

on $G_\delta$.

(b). Olgu $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ ja $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$, kus $K_j, L_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, \ldots$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ ja $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$. Aga nüüd ülesande 4.1 põhjal

$$A \cap B = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup L_j$$

on $\sigma$-kompaktne. □

**Definitsioon 4.3.** Mõõtusid ruumi $X$ Baire'i $\sigma$-algebral nimetatakse *Baire'i mõõtudeks* (ruumis $X$).

**Märkus 4.3.** Mõnedes allikates nõutakse Baire'i mõõtu defineerides täiendavalt, et ta oleks lõplik ruumi $X$ kompaktsetel Baire'i hulkadel.

**Märkus 4.4.** Saab näidata, et $\mathcal{B}a_X \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}_0$, s.t. kompaktsed $G_\delta$-d on ainsad kompaktsed Baire'i hulgad.

**Teoreem 4.5.** *Olgu $\mu$ Baire'i mõõt ruumis $X$, mis on lõplik ruumi $X$ kompaktsetel Baire'i hulkadel. Siis iga $\sigma$-tõkestatud hulga $E \in \mathcal{B}a_X$ korral*

(1) $\mu(E) = \inf\bigl\{\mu(U)\colon \mathcal{U}_0 \ni U \supset E\bigr\}$*; veelgi enam, iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $U \in \mathcal{U}_0$ nii, et $U \supset E$ ja $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$;*

(2) $\mu(E) = \sup\bigl\{\mu(K)\colon \mathcal{K}_0 \ni K \subset E\bigr\}$.

**Märkus 4.5.** Nagu nähtub järgnevast lausest, pole $\sigma$-tõkestatud hulgad lokaalselt kompaktses Hausdorffi ruumis üldse "haruldased".

**Lause 4.6.** *Iga $B \in \mathcal{B}a_X$ korral vähemalt üks hulkadest $B$ ja $B^c$ on $\sigma$-tõkestatud.*

Tõestus. Tähistame

$$\mathfrak{B} := \{B \in \mathcal{B}a_X\colon\ B \text{ või } B^c \text{ on } \sigma\text{-tõkestatud}\}.$$

Lause tõestuseks peame näitama, et $\mathfrak{B} \supset \mathcal{B}a_X$. Ilmselt $\mathfrak{B} \supset \mathcal{K}_0$. Lause tõestuseks piisab seega näidata, et $\mathfrak{B}$ on $\sigma$-algebra, sest sel juhul $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{B}) \supset \sigma(\mathcal{K}_0) = \mathcal{B}a_X$.

**Ülesanne 4.2.** Veenduda, et $\mathfrak{B}$ on $\sigma$-algebra.

$\square$

Teoreemi 4.5 tõestus. Olgu $\mathcal{A}$ selliste hulkade $E \in \mathcal{B}a_X$ kogum, mis rahuldavad iga $K \in \mathcal{K}_0$ korral tingimus i

$$\mu(E \cap K) = \inf_{\mathcal{U}_0 \ni U \supset E\cap K} \mu(U) = \sup_{\mathcal{K}_0 \ni C \subset E \cap K} \mu(C).$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et $\mathcal{A} = \mathcal{B}a_X$. Tõepoolest, kehtigu võrdus $\mathcal{A} = \mathcal{B}a_X$ ning olgu $E \in \mathcal{B}a_X$ $\sigma$-tõkestatud hulk ja $\varepsilon > 0$. Siis leiduvad hulgad $K_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty K_j$. Lemma 4.3 põhjal võime üldisust kitsendamata eeldada, et $K_j \in \mathcal{K}_0$, $j = 1, 2, \ldots$, ning lemma 4.4 põhjal, et $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$. Nüüd

$$E = E \cap \bigcup_{j=1}^\infty K_j = \bigcup_{j=1}^\infty E \cap K_j.$$

Eelduse $\mathcal{A} = \mathcal{B}a_X$ tõttu saame iga $j \in \mathbb{N}$ korral valida $C_j \in \mathcal{K}_0$ ja $U_j \in \mathcal{U}_0$ nii, et

$$C_j \subset E \cap K_j \subset U_j \quad \text{ja} \quad \mu(U_j \setminus C_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Nüüd

$$\mu(E) \geqslant \mu(C_j) \geqslant \mu(E \cap K_j) - \frac{\varepsilon}{2^j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E),$$

seega $\mu(C_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$, niisiis tingimus (2) kehtib. Teiselt poolt, tähistame $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$; siis $\mathcal{U}_0 \ni U \supset E$, kusjuures

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus E) &= \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) \setminus E\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \setminus E)\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j \setminus E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j \setminus C_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon > 0$ oli suvaline, siis tingimus (1) kehtib.

Veendumaks, et $\mathcal{A} = \mathcal{B}a_X$ piisab näidata, et

(a) $\mathcal{A} \supset \mathcal{K}_0$;

(b) $\mathcal{A}$ on $\sigma$-algebra.

**Ülesanne 4.3.** Tõestada, et kui kehtivad (a) ja (b), siis $\mathcal{A} = \mathcal{B}a_X$.

(a). Kuna kahe kompaktse $G_\delta$ ühisosa on kompaktne $G_\delta$, siis veendumaks, et $\mathcal{A} \supset \mathcal{K}_0$, piisab näidata, et tingimused (1) ja (2) kehtivad, kui $E \in \mathcal{K}_0$.

Olgu $E \in \mathcal{K}_0$. Siis tingimuse (2) kehtivus on ilmne. Tingimuse (1) kehtivuse tõestuseks märgime, et lemma 4.3 põhjal me saame esitada $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$, kus $U_j \in \mathcal{U}_0$, $j = 1, 2, \ldots$, ning $\overline{U}_1$ on kompaktne ja seega $\mu(U_1) \leqslant \mu(\overline{U_1}) < \infty$ (sest lemma 4.3 põhjal sisaldub kompaktne hulk $\overline{U}_1$ mingis kompaktses $G_\delta$-s). Nüüd lemma 4.4 põhjal $O_n := \bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{U}_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Ilmselt $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, kusjuures $O_1 \supset O_2 \supset \cdots$ ja $\mu(O_1) = \mu(U_1) < \infty$, seega $\mu(O_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(E)$ ning järelikult (1) kehtib.

(b). Veendume, et $\mathcal{A}$ on $\sigma$-algebra. Ilmselt $\emptyset \in \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{A}$. Olgu nüüd $E \in \mathcal{A}$, $K \in \mathcal{K}_0$ ning $\varepsilon > 0$. Veendumaks, et $E^c \in \mathcal{A}$, piisab näidata, et leiduvad hulgad $A \in \mathcal{K}_0$ ja $B \in \mathcal{U}_0$ nii, et

$$A \subset E^c \cap K \subset B \quad \text{ja} \quad \mu(B \setminus A) < 2\varepsilon.$$

Selleks valime hulgad $L \in \mathcal{K}_0$ ja $U, V \in \mathcal{U}_0$ nii, et $L \subset E \cap K \subset U$ ja $\mu(U \setminus L) < \varepsilon$ ning $V \supset K$ ja $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Nüüd lemma 4.3 põhjal $A := K \setminus U \in \mathcal{K}_0$ ja $B := V \setminus L \in \mathcal{U}_0$; seejuures $A \subset E^c \cap K \subset B$ ning

$$\begin{aligned} \mu(B) - \mu(A) &= \mu(V \setminus L) - \mu(K \setminus U) \leqslant \mu(V) - \mu(L) - \big(\mu(K) - \mu(U)\big) \\ &= \mu(V) - \mu(K) + \mu(U) - \mu(L) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Olgu nüüd $E_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, ning olgu $K \in \mathcal{K}_0$ ja $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks jääb leida hulgad $A \in \mathcal{K}_0$ ja $B \in \mathcal{U}_0$ nii, et

$$A \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \cap K \subset B \quad \text{ja} \quad \mu(B \setminus A) < 2\varepsilon.$$

Selleks valime iga $j \in \mathbb{N}$ korral hulgad $K_j \in \mathcal{K}_0$ ja $U_j \in \mathcal{U}_0$ nii, et

$$K_j \subset E_j \cap K \subset U_j \quad \text{ja} \quad \mu(U_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Valime $n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} K \cap E_j\Big) \geqslant \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} K \cap E_j\Big) - \varepsilon.$$

Nüüd $A := \bigcup_{j=1}^{n} K_j \in \mathcal{K}_0$ (lemma 4.4 põhjal) ja $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \in \mathcal{U}_0$; seejuures $A \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \cap K \subset B$, kusjuures

$$\begin{aligned}
\mu(B \setminus A) &< \mu(B) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K \cap E_j\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} K \cap E_j\right) + \varepsilon - \mu(A) \\
&= \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K \cap E_j\right)\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{n} K \cap E_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right)\right) + \varepsilon \\
&\leqslant \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus (K \cap E_j)\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (K \cap E_j) \setminus K_j\right) + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big(U_j \setminus (E_j \cap K)\big) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big((E_j \cap K) \setminus K_j\big) + \varepsilon \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j \setminus K_j) + \varepsilon < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Järgnev teoreem kirjeldab vastavust ruumi $X$ Radoni mõõtude ja kompaktsetel hulkadel lõplike Baire'i mõõtude vahel.

**Teoreem 4.7.** *Olgu $\mu$ Baire'i mõõt ruumis $X$, mis on lõplik ruumi $X$ kompaktsetel Baire'i hulkadel. Siis leidub parajasti üks Radoni mõõt $\widehat{\mu}$ ruumis $X$ nii, et*

$$\widehat{\mu}(E) = \mu(E) \quad \textit{iga } \sigma\textit{-tõkestatud hulga } E \in \mathcal{B}a_X \textit{ korral.} \tag{4.1}$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 4.4.** Tõestada tingimust (4.1) rahuldava Baire'i mõõdu $\widehat{\mu}$ olemasolu ja ühesus.

NÄPUNÄIDE. ESIMENE LAHENDUS. Näidata, et positiivset lineaarset lineaarset funktsionaali

$$\Phi\colon\ C_c(X, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int f\, d\mu \in \mathbb{R}$$

esitav Radoni mõõt $\widehat{\mu}$ rahuldab tingimust (4.1).

TEINE LAHENDUS. Näidata, et hulgafunktsioon

$$\rho\colon\ \mathcal{K} \ni K \longmapsto \inf\big\{\mu(U)\colon\ \mathcal{U}_0 \ni U \supset K\big\} \in [0, \infty)$$

on regulaarne content, mille poolt indutseeritud Radoni mõõt $\widehat{\mu}$ rahuldab tingimust (4.1).

Mõlemas lahenduses võib olla abi ülesandest 4.9.

□

**Teoreem 4.8.** *Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$. Siis iga $E \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E) < \infty$, korral leidub $H \in \mathcal{B}a_X$ nii, et $\mu(E \triangle H) = 0$.*

TÕESTUS. Olgu $E \in \mathcal{B}_X$, $\mu(E) < \infty$. Kuna Radoni mõõt $\mu$ on oma lõplikul hulgal $E$ regulaarne, siis, ühelt poolt, leiduvad kompaktsed hulgad $K_j \subset E$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $\mu(K_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$, teiselt poolt, iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub lahtine hulk $U_n \supset E$ nii, et $\mu(U_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Lemma 4.3, (a), põhjal leiduvad iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulgad $K_j^n \in \mathcal{K}_0$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et

$$K_j \subset K_j^n \subset U_n \quad \text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral $C_n := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^n$ ning $H := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Siis $H \in \mathcal{B}a_X$, seega jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $\mu(E \setminus H) = 0$ ja $\mu(H \setminus E) = 0$. Ühelt poolt, kuna iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu(H \setminus E) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \setminus E\right) \leqslant \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \setminus E\right) \leqslant \mu(U_m \setminus E) < \frac{1}{m},$$

siis $\mu(H \setminus E) = 0$. Teiselt poolt, kuna $\mu(K_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$, siis $\mu\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\Big) = 0$, seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E \setminus C_n) \leqslant \mu\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\Big) = 0$ (sest $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^n = C_n$), järelikult

$$\mu(E \setminus H) = \mu\Big(E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \setminus C_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \setminus C_n) = 0;$$

niisiis $\mu(E \setminus H) = 0$. □

**Teoreem 4.9** (Rieszi esitusteoreem)**.** *Olgu $\Phi\colon C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ positiivne lineaarne funktsionaal. Siis leidub kompaktsetel Baire'i hulkadel lõplik Baire'i mõõt $\mu$ ruumis $X$ nii, et*

$$\Phi(f) = \int f \, d\mu \quad \textit{iga } f \in C_c(X, \mathbb{R}) \textit{ korral.}$$

*Kõik sellise omadusega Baire'i mõõdud ühtivad ruumi $X$ $\sigma$-tõkestatud Baire'i hulkadel.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 4.5.** Tõestada Rieszi esitusteoreem 4.9.

NÄPUNÄIDE. Kasutada Rieszi esitusteoreemi 1.3 ja teoreemi 4.7. Kõigepealt veenduda, et kui mõõdud $\mu$ ja $\widehat{\mu}$ on sellised, nagu teoreemis 4.7, siis $\int f \, d\mu = \int f \, d\widehat{\mu}$ iga $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ korral.

□

## 4.1. Täiendavaid ülesandeid

**Ülesanne 4.6.** Tõestada, et lokaalselt kompaktse Hausdorffi ruumi $X$ alamhulk $F$ on kinnine parajasti siis, kui tema ühisosa ruumi $X$ iga kompaktse alamhulgaga on kinnine.

**Ülesanne 4.7.** Tõestada, et lokaalselt kompaktse Hausdorffi ruumi $X$ alamhulk $K$ on kompaktne $G_\delta$ parajasti siis, kui leidub funktsioon $f \in C_c\bigl(X, [0,1]\bigr)$ nii, et $K = \{x \in X\colon\ f(x) = 1\}$.

**Ülesanne 4.8.** Tõestada, et kui $X$ on lokaalselt kompaktne separaabel meetriline ruum, siis $\mathcal{B}a_X = \mathcal{B}_X$.

**Ülesanne 4.9.** Olgu $\mu$ Boreli mõõt lokaalselt kompaktses Hausdorffi ruumis $X$. Tõestada, et

(a) kui $\mu$ on ruumi $X$ lahtistel hulkadel seest regulaarne, siis iga hulga $U \in \tau_X$ korral

$$\mu(U) = \sup\bigl\{\mu(K)\colon\ \mathcal{K}_0 \ni K \subset U\bigr\};$$

(b) kui $\mu$ on ruumi $X$ kompaktsetel hulkadel väljast regulaarne, siis iga hulga $K \in \mathcal{K}$ korral

$$\mu(K) = \inf\bigl\{\mu(U)\colon\ \mathcal{U}_0 \ni U \supset K\bigr\}.$$

Näpunäide. Kasutada lemmat 4.3, (a).

## VI peatükk.

# Mõõtude diferentseerimine ruumis $\mathbb{R}^n$

## § 1. Lebesgue'i diferentseerimisteoreemid

Kõikjal selles paragrahvis tähistab $m$ Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ on vabalt fikseeritud). Ruumi $\mathbb{R}^n$ vaatleme meetrilise ruumina eukleidilise meetrika $d$ suhtes:

$$d(x,y) = \left( \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Traditsiooniliselt tähistavad sümbolid $B(x,r)$, $\overline{B}(x,r)$ ning $S(x,r)$ vastavalt lahtist ja kinnist kera ning sfääri ruumis $\mathbb{R}^n$ keskpunktiga $x$ ja raadiusega $r$: $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon d(y,x) < r\}$, $\overline{B}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon d(y,x) \leqslant r\}$ ning $S(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon d(y,x) = r\}$. Me kirjutame ka $|x-y| := d(x,y)$ ning $|x| := d(x,0)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Meie peaeesmärk selles paragrahvis on õigustada terminit "Radon–Nikodými tuletis": me näitame, et kui Boreli kompleksmõõt (või teatavate regulaarsusomadustega märgiga Boreli mõõt) $\nu$ ruumis $\mathbb{R}^n$ rahuldab tingimust $\nu \ll m$, siis $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral

$$\frac{d\nu}{dm}(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} \tag{1.1}$$

(meenutame, et sümbol $\frac{d\nu}{dm}$ tähistab $\nu$ Radon–Nikodými tuletist mõõdu $m$ järgi).

Kui $f = \frac{d\nu}{dm}$, siis mis tahes $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ korral $\nu\big(B(x,r)\big) = \int_{B(x,r)} f\, dm$, niisiis võrdus (1.1) on samaväärne võrdusega

$$f(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f\, dm$$

ehk, teisisõnu,

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big(f(y) - f(x)\big)\, dm(y) = 0.$$

## 1.1. Hardy-Littlewoodi maksimaalfunktsioon. Maksimaalteoreem. Katmislemma

**Definitsioon 1.1.** Öeldakse, et (Boreli mõttes) mõõtuv funktsioon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on *lokaalselt integreeruv* (Lebesgue'i mõõdu järgi), kui iga tõkestatud mõõtuva hulga $K \subset \mathbb{R}^n$ korral $\int_K |f|\, dm < \infty$.

Kõigi lokaalselt integreeruvate funktsioonide klassi tähistame me sümboliga $L_1^{loc}$.

Olgu $f \in L_1^{loc}$. Defineerime iga $r > 0$ korral funktsiooni $A_{f,r}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ võrdusega

$$A_{f,r}(x) = \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f\, dm, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Väärtus $A_{f,r}(x)$ on tõlgendatav kui funktsiooni $f$ "keskmine" väärtus keras $B(x,r)$.

**Lemma 1.1.** *Olgu $f \in L_1^{loc}$. Funktsioon $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (r,x) \mapsto A_{f,r}(x) \in \mathbb{C}$ on pidev. (Ruumi $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vaatleme siin varustatuna eukleidilise meetrikaga.)*

Tõestus. Tähistame $c := m\big(B(0,1)\big)$, siis $m\big(B(x,r)\big) = c\,r^n$. Kuna mis tahes $r > 0$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ korral $A_{f,r}(x) = \frac{1}{c\,r^n} \int f\, \chi_{B(x,r)}\, dm$, siis piisab lemma tõestuseks näidata, et funktsioon

$$(0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (r,x) \longmapsto \int f\, \chi_{B(x,r)}\, dm \in \mathbb{C} \tag{1.2}$$

on pidev. Fikseerime vabalt punktid $(r_0,x_0), (r_i,x_i) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots$, nii, et $(r_i,x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (r_0,x_0)$ ruumis $\mathbb{R}^{n+1}$. Funktsiooni (1.2) pidevuseks piisab näidata, et

$$\int f\, \chi_{B(x_i,r_i)}\, dm \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int f\, \chi_{B(x_0,r_0)}\, dm. \tag{1.3}$$

Selleks paneme tähele, et

(1) $\chi_{B(x_i,r_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{B(x_0,r_0)}$ punktiviisi hulgas $\mathbb{R}^n \setminus S(x_0,r_0)$, niisiis, $m$-peaaegu kõikjal (sest $m\big(S(x_0,r_0)\big) = 0$);

(2) $|\chi_{B(x_i,r_i)}| \leqslant \chi_{B(x_0,r_0+1)}$, kui $r_i < r_0 + \frac{1}{2}$ ja $d(x_i,x_0) < \frac{1}{2}$.

**Ülesanne 1.1.** Tõestada väited (1) ja (2).

Koonduvus (1.3) järeldub nüüd Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemist. □

**Definitsioon 1.2.** Funktsiooni $f \in L_1^{loc}$ *Hardy-Littlewoodi maksimaalfunktsioon* $H_f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ defineeritakse võrdusega

$$H_f(x) = \sup_{r>0} A_{|f|,r}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f|\, dm, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lemmast 1.1 järeldub, et funktsioon $H_f$ on mõõtuv. Tõepoolest, mis tahes $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}(H_f)^{-1}\big[(a,\infty]\big] &= \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ H_f(x) > a\big\}\\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \text{leidub } r > 0 \text{ nii, et } A_{|f|,r}(x) > a\big\}\\ &= \bigcup_{r>0}\big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ A_{|f|,r}(x) > a\big\} = \bigcup_{r>0}(A_{|f|,r})^{-1}\big[(a,\infty)\big].\end{aligned}$$

See ühend on lahtine (sest iga $r > 0$ korral on hulk $(A_{|f|,r})^{-1}\big[(a,\infty)\big]$ lahtine funktsiooni $A_{|f|,r}$ pidevuse tõttu), järelikult see ühend on Boreli mõttes mõõtuv.

**Teoreem 1.2** (maksimaalteoreem)**.** *Mis tahes Boreli mõttes mõõtuva funktsiooni $f \in L_1(m)$ ja $\alpha > 0$ korral*

$$m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ H_f(x) > \alpha\big\}\Big) \leqslant \frac{3^n}{\alpha}\int |f|\,dm. \tag{1.4}$$

Maksimaalteoreemi tõestus kasutab järgnevat lemmat.

**Lemma 1.3** ((Wieneri) katmislemma)**.** *Olgu $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mingi lahtiste kerade kogum. Kui $c < m(\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B)$, siis leiduvad paarikaupa lõikumatud kerad $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{C}$ (siin $k \in \mathbb{N}$) selliselt, et*

$$\sum_{j=1}^{k} m(B_j) > \frac{c}{3^n}. \tag{1.5}$$

MAKSIMAALTEOREEMI 1.2 TÕESTUS. Olgu funktsioon $f \in L_1(m)$ Boreli mõttes mõõtuv ning olgu $\alpha > 0$. Tähistame

$$E_\alpha = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ H_f(x) > \alpha\big\}.$$

Siis iga $x \in E_\alpha$ korral leidub $r_x > 0$ nii, et

$$A_{|f|,r_x}(x) = \frac{1}{m\big(B(x,r_x)\big)}\int_{B(x,r_x)} |f|\,dm > \alpha.$$

Nüüd $E_\alpha \subset \bigcup_{x\in E_\alpha} B(x,r_x)$, järelikult, kui $c < m(E_\alpha)$, siis katmislemma põhjal leiduvad $x_1, \ldots, x_k \in E_\alpha$ (siin $k \in \mathbb{N}$) nii, et kerad $B_1 := B(x_1, r_{x_1}), \ldots, B_k := B(x_k, r_{x_k})$ on paarikaupa lõikumatud ja $\sum_{j=1}^{k} m(B_j) > \frac{c}{3^n}$; seega

$$c < 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_j) < \frac{3^n}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\int_{B_j} |f|\,dm \leqslant \frac{3^n}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dm.$$

Protsessis $c \to m(E_\alpha) = m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ H_f(x) > \alpha\big\}\Big)$ järeldub siit võrratus (1.4). $\square$

KATMISLEMMA 1.3 TÕESTUS. Tähistame $U := \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$; siis $U$ on lahtine hulk ning seega $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Olgu $c < m(U)$. Kuna Lebesgue'i mõõt $m$ ruumis $\mathbb{R}^n$ on regulaarne, siis leidub kompaktne hulk $K \subset U$ selliselt, et $m(K) > c$. Kogum $\mathcal{C}$ on kompaktse hulga $K$ lahtine kate, järelikult sisaldab ta hulga $K$ lõpliku alamkatte, s.t. leiduvad mingid $p$ kera (siin $p \in \mathbb{N}$) $A_1 := B(x_1, r_1), A_2 := B(x_2, r_2), \ldots, A_p := B(x_p, r_p) \in \mathcal{C}$ nii, et $K \subset \bigcup_{i=1}^p A_i$. Valime

indeksi $i_1 \in \{1,\ldots,p\}$ nii, et $\quad r_{i_1} = \max\{r_i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$,
indeksi $i_2 \in \{1,\ldots,p\}$ nii, et $\quad r_{i_2} = \max\{r_i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ A_i \cap A_{i_1} = \emptyset\}$,
indeksi $i_3 \in \{1,\ldots,p\}$ nii, et $\quad r_{i_3} = \max\{r_i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ A_i \cap (A_{i_1} \cup A_{i_2}) = \emptyset\}$

jne. Selle protseduuri tulemusena saame me mingid $k$ (siin $k \in \mathbb{N}$) paarikaupa lõikumatut lahtist kera

$$B_1 := A_{i_1} = B(x_{i_1}, r_{i_1}),\ B_2 := A_{i_2} = B(x_{i_2}, r_{i_2}), \ldots,\ B_k := A_{i_k} = B(x_{i_k}, r_{i_k}) \in \mathcal{C}.$$

Meie konstruktsioon oli selline, et kui $A_i \in \{A_1, \ldots, A_p\} \setminus \{B_1, \ldots, B_k\}$, siis leidub kera $B_j = B(x_{i_j}, r_{i_j})$ (siin $j \in \{1, \ldots, k\}$) nii, et $r_i \leqslant r_{i_j}$ ja $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ (PÕHJENDADA!). Seega $A_i \subset B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$.

**Ülesanne 1.2.** Veenduda, et $A_i \subset B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$.

Siit järeldub, et

$$\begin{aligned} c < m(K) &\leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leqslant m\left(\bigcup_{j=1}^k B(x_{i_j}, 3\,r_{i_j})\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^k m\big(B(x_{i_j}, 3\,r_{i_j})\big) = \sum_{j=1}^k 3^n\, m\big(B(x_{i_j}, r_{i_j})\big) = 3^n \sum_{j=1}^k m(B_j). \end{aligned}$$

Kerad $B_1, \ldots, B_k$ rahuldavad tingimust (1.5). □

## 1.2. Diferentseerimisteoreemid

**Teoreem 1.4** (Lebesgue'i diferentseerimisteoreem)**.** *Olgu $f \in L_1^{loc}$. Siis $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dm(y) = 0. \tag{1.6}$$

*Niisiis $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral ka*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big(f(y) - f(x)\big)\, dm(y) = 0$$

*ehk, teisisõnu,*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f\, dm = \lim_{r\to 0+} A_{f,r}(x) = f(x).$$

**Definitsioon 1.3.** Olgu $f \in L_1^{loc}$. Hulka

$$L_f := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \lim_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big| \, dm(y) = 0 \right\}$$

nimetatakse funktsiooni $f$ *Lebesgue'i hulgaks.* Lebesgue'i hulga $L_f$ punkte nimetatakse funktsiooni $f$ *Lebesgue'i punktideks.*

Teoreem 1.4 väidab niisiis, et kui $f \in L_1^{loc}$, siis $m$-peaaegu kõik ruumi $\mathbb{R}^n$ punktid on funktsiooni $f$ Lebesgue'i punktid ehk, teisisõnu, $m({L_f}^c) = 0$.

TEOREEMI 1.4 TÕESTUS. (I) Tõestame teoreemi esmalt lisaeeldusel, et $f \in L_1(m)$. Tähistame iga $\alpha > 0$ korral

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \limsup_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dm(y) > \alpha \right\}$$

ja fikseerime vabalt $\alpha > 0$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $m(E_\alpha) = 0$.

Tõepoolest, sel juhul $m\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_{\frac{1}{j}}\Big) = 0$. Kuna iga $x \in \Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_{\frac{1}{j}}\Big)^c$ korral võrdus (1.6) kehtib, siis see võrdus kehtib $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral.

Selleks paneme kõigepealt tähele, et kui $f$ on pidev funktsioon, siis võrdus (1.6) kehtib.

**Ülesanne 1.3.** Veenduda selles.

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Teoreemi III.4.3 põhjal leidub pidev funktsioon $g \in L_1(m)$ selliselt, et $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \, dm < \varepsilon$.

**Märkus 1.1.** Siin kasutasime lisaeeldust $f \in L_1(m)$.

Nüüd mis tahes $x \in \mathbb{R}^n$ korral

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big| \, dm(y) \\
&\quad = \limsup_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - g(y) + g(y) - g(x) + g(x) - f(x)\big| \, dm(y) \\
&\quad \leqslant \limsup_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y) - g(y)| \, dm(y) \\
&\qquad\quad + \limsup_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| \, dm(y) + |g(x) - f(x)| \\
&\quad \leqslant H_{|f-g|}(x) + 0 + |f(x) - g(x)|
\end{aligned}$$

(sest funktsioon $g$ on pidev). Tähistame

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon H_{|f-g|}(x) > \frac{\alpha}{2} \right\}, \quad E'' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\};$$

siis $E_\alpha \subset E' \cup E''$. Maksimaalteoreemi põhjal

$$m(E') \leqslant \frac{3^n 2}{\alpha} \int |f-g|\, dm < \frac{2\cdot 3^n \varepsilon}{\alpha}.$$

Kuna $\frac{\alpha}{2}\, m(E'') \leqslant \int_{E''} |f-g|\, dm < \varepsilon$, siis $m(E'') < \frac{2\varepsilon}{\alpha}$. Seega

$$m(E' \cup E'') \leqslant m(E') + m(E'') < \frac{2\cdot 3^n\varepsilon}{\alpha} + \frac{2\varepsilon}{\alpha} = \frac{2(3^n+1)\varepsilon}{\alpha}.$$

Kuna $\varepsilon > 0$ oli vabalt fikseeritud, siis $m(E' \cup E'') = 0$ ning seega ka $m(E_\alpha) = 0$.

(II) Tõestame nüüd teoreemi üldjuhul (s.t. me loobume lisaeeldusest $f \in L_1(m)$). Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < k\}$ ja $f_k = f\chi_{E_k}$; kuna $f \in L_1^{loc}$, siis $f_k \in L_1(m)$, järelikult tõestuse osa (I) põhjal $m({L_{f_k}}^c) = 0$. Kuna ${L_f}^c \subset \bigcup_{k=1}^\infty {L_{f_k}}^c$, siis ka $m({L_f}^c) = 0$. $\square$

Järgnevalt näitame, et teoreemis 1.4 võib kerad $B(x,r)$ asendada üldisema struktuuriga hulkadega, mis teataval viisil "tõmbuvad kokku" punktiks $x$.

**Definitsioon 1.4.** Öeldakse, et ruumi $\mathbb{R}^n$ Boreli hulkade pere $(E_r)_{\substack{r\in\mathbb{R}\\ r>0}}$ *shrinks nicely to* $x \in \mathbb{R}^n$, kui leiduvad konstandid $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ nii, et iga $r > 0$ korral

1° $E_r \subset B(x, \alpha r)$;

2° $m(E_r) \geqslant \beta\, m\big(B(x,r)\big)$.

**Märkus 1.2.** Punktiks $x \in \mathbb{R}^n$ nicely shrinking pere $(E_r)_{\substack{r\in\mathbb{R}\\ r>0}}$ hulgad ei tarvitse sisaldada punkti $x$ ennast. Konstrueerimaks sellist näidet, on abiks järgnev ülesanne.

**Ülesanne 1.4.** Tõestada, et kui mõõtuv hulk $V \subset B(0,1)$ rahuldab tingimust $m(V) > 0$, siis iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral pere $\{rV + x\}_{r>0}$ shrinks nicely to $x$.

Niisiis, kui me valime hulga $V \subset B(0,1)$ nii, et $m(V) > 0$ ja $0 \notin V$, siis mis tahes $x \in \mathbb{R}^n$ korral pere $\{rV + x\}_{r>0}$ shrinks nicely to $x$, kuid $x \notin rV + x$ iga $r > 0$ korral.

**Teoreem 1.5** (Lebesgue'i diferentseerimisteoreem)**.** *Olgu $f \in L_1^{loc}$. Siis iga $x \in L_f$ korral (niisiis, $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral)*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} \big|f(y) - f(x)\big|\, dm(y) = 0 \tag{1.7}$$

*iga pere $(E_r)_{\substack{r\in\mathbb{R}\\ r>0}}$ korral, mis shrinks nicely to $x$.*

Tõestus. Olgu $x \in L_f$ ning olgu pere $(E_r)_{\substack{r\in\mathbb{R}\\ r>0}}$ nicely shrinking to $x \in \mathbb{R}^n$. Näitame, et kehtib võrdus (1.7).

Olgu reaalarvud $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ sellised, et iga $r > 0$ korral $E_r \subset B(x, \alpha r)$ ja $m(E_r) \geqslant \beta\, m\big(B(x,r)\big)$. Siis

$$\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} \big|f(y) - f(x)\big|\, dm(y) \leqslant \frac{1}{\beta\, m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,\alpha r)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dm(y)$$
$$= \frac{\alpha^n}{\beta\, m\big(B(x,\alpha r)\big)} \int_{B(x,\alpha r)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dm(y) \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

□

**Teoreem 1.6** (Lebesgue'i diferentseerimisteoreem). *Olgu $\nu$ kompaktsetel hulkadel lõplik märgiga Boreli mõõt või Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ ning olgu $d\nu = d\lambda + f\, dm$ tema Lebesgue–Radon–Nikodými lahutus (Lebesgue'i mõõdu $m$ suhtes). Siis $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x) \quad \textit{iga pere } (E_r)_{r>0} \textit{ korral, mis shrinks nicely to } x.$$

TÕESTUS. Kõigepealt paneme tähele, et $d|\nu| = d|\lambda| + |f|\, dm$.

**Ülesanne 1.5.** Veenduda selles.

Kuna $|\nu|$ on kompaktsetel hulkadel lõplik, siis on seda ka $|\lambda|$ ja $|f|\, dm$; seega $f \in L^1_{loc}$. Kuna iga lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}^n$ on $\sigma$-kompaktne (s.t. ta esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina), siis teoreemi V.2.4 põhjal iga kompaktsetel hulkadel lõplik Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ on regulaarne; seega $|\lambda|$ on regulaarne. Teoreemi 1.5 põhjal piisab niisiis näidata, et

(•) *kui $\lambda$ on kompaktsetel hulkadel lõplik märgiga Boreli mõõt või Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}^n$, kusjures $\lambda \perp m$, siis $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral $\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ alati, kui pere $(E_r)_{r>0}$ shrinks nicely to $x$.*

Üldisust kitsendamata võime väite (•) tõestamisel piirduda vaid juhuga, kus $\lambda$ on (regulaarne) mõõt ning iga $r > 0$ korral $E_r = B(x,r)$, sest mingite $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ korral

$$\left|\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)}\right| \leqslant \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \leqslant \frac{|\lambda|\big(B(x,\alpha r)\big)}{m(E_r)} \leqslant \frac{|\lambda|\big(B(x,\alpha r)\big)}{\beta\, m\,(B(x,r))} = \frac{\alpha^n|\lambda|\big(B(x,\alpha r)\big)}{\beta\, m\big(B(x,\alpha r)\big)}.$$

Niisiis, olgu $\lambda$ kompaktsetel hulkadel lõplik Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$, kusjuures $\lambda \perp m$. Olgu omavahel lõikumatud hulgad $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sellised, et $A \cup B = \mathbb{R}^n$, kusjuures $\lambda(A) = m(B) = 0$. Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$F_k = \left\{ x \in A\colon\ \limsup_{r\to 0+} \frac{\lambda\big(B(x,r)\big)}{m\,(B(x,r))} > \frac{1}{k} \right\}.$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et $m(F_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

**Ülesanne 1.6.** Veenduda, et sellest tõepoolest piisab.

Fikseerime vabalt $k \in \mathbb{N}$ ja $\varepsilon > 0$. Mõõdu $\lambda$ väljast regulaarsuse tõttu leidub lahtine hulk $U_\varepsilon \supset A$ nii, et $\lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$. Iga $x \in F_k$ korral leidub lahtine kera $B_x \subset U_\varepsilon$ (keskpunktiga $x$) nii, et

$$\lambda(B_x) > \frac{1}{k}\, m(B_x).$$

Tähistame $V_\varepsilon = \bigcup_{x \in F_k} B_x$ ning fikseerime vabalt arvu $c < m(V_\varepsilon)$. Katmislemma 1.3 põhjal leiduvad punktid $x_1, \ldots, x_N \in F_k$ (siin $N \in \mathbb{N}$) nii, et kerad $B_{x_1}, \ldots, B_{x_N}$ on paarikaupa lõikumatud ja

$$c < 3^n \sum_{j=1}^{N} m(B_{x_j}) \leqslant 3^n k \sum_{j=1}^{N} \lambda(B_{x_j}) \leqslant 3^n k\, \lambda(V_\varepsilon) \leqslant 3^n k\, \lambda(U_\varepsilon) \leqslant 3^n k\, \varepsilon.$$

Siit järeldub, et $m(V_\varepsilon) \leqslant 3^n k\, \varepsilon$. Kuna $\varepsilon > 0$ oli vabalt valitud ning $F_k \subset V_\varepsilon$, siis järeldub siit, et $F_k$ sisaldub kui tahes väikese Lebesgue'i mõõduga hulkades, järelikult $m(F_k) = 0$. $\square$

**Märkus 1.3.** Olgu $\nu$ Boreli kompleksmõõt või märgiga Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ ning olgu $x \in \mathbb{R}^n$. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse $\nu$ *(sümmeetriliseks) tuletiseks* Lebesgue'i mõõdu $m$ järgi punktis $x$ ning tähistatakse sümboliga $D_\nu(x)$.

# § 2. Muutuja vahetus Lebesgue'i integraalis ruumis $\mathbb{R}^n$

## 2.1. Ruumi $\mathbb{R}^n$ alamhulgast ruumi $\mathbb{R}^m$ tegutseva operaatori diferentseeruvus

Kõigepealt meenutame operaatori (Frechet' mõttes) diferentseeruvuse mõistet normeeritud ruumides.

**Definitsioon 2.1.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ning olgu $V \subset X$ lahtine hulk. Öeldakse, et operaator $T\colon V \to Y$ on *(Frechet' mõttes) diferentseeruv* punktis $x \in V$, kui leidub pidev lineaarne operaator $A\colon X \to Y$ nii, et

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(x+h) - T(x) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

Teisisõnu, operaatori $T$ diferentseeruvus punktis $x \in V$ tähendab niisuguse pideva lineaarse operaatori $A\colon X \to Y$ olemasolu, mille korral

$$T(x+h) - T(x) = Ah + o(\|h\|) \quad \text{protsessis } h \to 0.$$

Operaatorit $A$ nimetatakse seejuures operaatori $T$ *(Frechet') tuletiseks* punktis $x$ ja kirjutatakse $A = T'(x)$.

Vaatleme nüüd juhtu, kus operaatori diferentseeruvuse definitsioonis $X = \mathbb{R}^n$ ja $Y = \mathbb{R}^m$ mingite $n, m \in \mathbb{N}$ korral. Funktsionaalanalüüsi kursusest mäletame, et iga lineaarne operaator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on pidev. Lineaaralgebra kursusest teame, et kõigi lineaarsete operaatorite $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektorruum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ on samastatav kõigi reaalsete $m \times n$-maatriksite vektorruumiga $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}^{m\times n}$: kui $\{e_1, \dots, e_n\}$ ja $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ on vastavalt ruumide $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ standardühikvektorbaasid, siis kujutus

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni A \mapsto (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}^{m\times n}, \quad \text{kus } Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i,\ j = 1, \dots, n,$$

on lineaarne bijektsioon; seejuures iga $x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ korral

$$Ax = A\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, Ae_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e'_i = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\Big) e'_i,$$

s.t. $Ax = \big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\, x_j\big)_{i=1}^m$. Edaspidises samastamegi pidevad lineaarsed operaatorid $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ülaltoodud viisil $m \times n$-maatriksitega $(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

Kui $V \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk, siis operaator $T\colon V \to \mathbb{R}^m$ on esitatav kujul

$$T(x) = \big(f_i(x)\big)_{i=1}^m, \quad x \in V,$$

kus $f_i\colon V \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, on $n$ muutuja funktsioonid. Funktsionaalanalüüsi kursusest teame, et operaatori $T$ diferentseeruvus punktis $x \in V$ on sel juhul samaväärne funktsioonide $f_1, \dots, f_m$ diferentseeruvusega punktis $x$ (ükskõik, kas diferentseeruvusega Frechet' mõttes või n.ö. "matemaatilise analüüsi mõttes" — need kaks mõistet on $n$ muutuja funktsioonide puhul samaväärsed); seejuures operaatori $T$ tuletis on tema Jacobi maatriks, s.t. $T'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^{m,n}$. Juhul, kui $m = n$, nimetatakse operaatorit $T$ *teisenduseks.* Sümboliga $\det T'(x)$ tähistame me teisenduse $T$ jakobiaani, s.t. maatriksi $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$ determinanti. Kui $T$ on diferentseeruv mingi alamhulga $X \subset V$ igas punktis, siis on defineeritud funktsioon $\det T'\colon\ X \ni x \mapsto \det T'(x) \in \mathbb{R}$.

## 2.2. Muutuja vahetuse valem Lebesgue'i integraali jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$

Selles paragrahvis on meie põhieesmärk tõestada järgnev muutuja vahetuse teoreem Lebesgue'i integraali jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$.

**Teoreem 2.1** (muutuja vahetuse valem)**.** *Kui*

1° *$V \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk ning $X \subset V$ on Lebesgue'i mõttes mõõtuv hulk;*

2° *$T\colon V \to \mathbb{R}^n$ on pidev teisendus, mis on diferentseeruv hulga $X$ igas punktis, kusjuures $T|_X$ on üksühene;*

3° *$m\big(T[V \setminus X]\big) = 0$,*

*siis iga (Lebesgue'i mõttes) integreeruva funktsiooni $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ korral*

$$\int_{T[X]} f(z)\, dm(z) = \int_X (f \circ T)(x)\, |\det T'(x)|\, dm(x). \tag{2.1}$$

Teoreemi 2.1 tõestus toetub järgnevatele tulemustele.

**Lause 2.2.** *Kui*

1° *$V \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk ning $X \subset V$ on Lebesgue'i mõttes mõõtuv hulk;*

2° *$T\colon V \to \mathbb{R}^n$ on pidev teisendus, mis on diferentseeruv hulga $X$ igas punktis,*

*siis*

(a) *kui $N \in \mathcal{L}^n$ on selline, et $m(N) = 0$, siis ka $m\big(T[N \cap X]\big) = 0$;*

(b) *iga $E \in \mathcal{L}^n$ korral $T[E \cap X] \in \mathcal{L}^n$.*

**Teoreem 2.3.** *Olgu $V \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk ning olgu $T\colon\ V \to \mathbb{R}^n$ pidev teisendus, mis on diferentseeruv punktis $x \in V$. Siis*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(T[B(x,r)]\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = |\det T'(x)|.$$

**Märkus 2.1.** Kuna $V$ on lahtine hulk, siis teoreemis 2.3 "piisavalt väikese" $r > 0$ korral $B(x,r) \subset V$. Märgime, et $T[B(x,r)]$ on Boreli mõttes mõõtuv. Tõepoolest, $B(x,r)$ on lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}^n$, järelikult on ta $\sigma$-kompaktne (s.t. ta esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina). Kuna $T$ on pidev, siis ta teisendab kompaktsed hulgad kompaktseteks hulkadeks; niisiis ka $T[B(x,r)]$ on $\sigma$-kompaktne ning järelikult Boreli mõttes mõõtuv.

Teoreemi 2.1 tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $X$ on Boreli hulk.

**Ülesanne 2.1.** Veenduda, et tehtav lisaeeldus ei kitsenda üldisust.

Näpunäide. Kasutada lauset 2.2.

Defineerime ruumis $\mathbb{R}^n$ Boreli mõõdu $\mu$ võrdusega

$$\mu(E) = m\big(T[E \cap X]\big), \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et

(1) iga $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ korral $f \circ T \in L_1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, kusjuures

$$\int_{T[X]} f\, dm = \int_X f \circ T\, d\mu;$$

(2) $\mu \ll m$, kusjuures $\frac{d\mu}{dm} = |\det T'|$ $m$-p.k. hulgas $X$.

Tõepoolest, väite (2) kehtides teoreemi IV.2.5 põhjal iga $g \in L_1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ korral $g|\det T'| \in L_1(X, m)$, kusjuures

$$\int_X g\, d\mu = \int_X g|\det T'|\, dm,$$

seega, kui kehtib ka (1), siis iga $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ korral $f \circ T\,|\det T'| \in L_1(X, m)$, kusjuures

$$\int_{T[X]} f\, dm = \int_X f \circ T\, d\mu = \int_X f \circ T\,|\det T'|\, dm.$$

(1).

**Ülesanne 2.2.** Tõestada väide (1).

Näpunäide. Vaadelda eraldi juhtusid, kus

(I) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on lihtne Boreli mõttes mõõtuv mittenegatiivne funktsioon;

(II) $f \in L^+(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$ (siin kasutada monotoonse koonduvuse teoreemi);

(III) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv $m$-integreeruv funktsioon;

(IV) $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ on suvaline ($m$-p.k. määratud $m$-integreeruv funktsioon). (Meenutame et mõõduga ruum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ on ruumi $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$ täield; vt. § III.4.)

(2). Väide $\mu \ll m$ järeldub kiiresti lausest 2.2, (a). Võrduse $\frac{d\mu}{dm} = |\det T'|$ $m$-p.k. tõestuseks tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$V_k = \{x \in V\colon\ |Tx| < k\} = T^{-1}[B(0,k)] \quad \text{ja} \quad X_k = X \cap V_k;$$

kuna teisenduse $T$ pidevuse tõttu on hulk $V_k$ lahtine, siis $X_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ korral Boreli mõõdu $\mu_k$ ruumis $\mathbb{R}^n$ võrdusega

$$\mu_k(E) = m\bigl(T[E \cap X_k]\bigr) = \mu(E \cap X_k), \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n};$$

siis mõõdud $\mu_k$ on lõplikud, kusjuures $\mu_k \ll m$.

**Ülesanne 2.3.** Tõestada, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral on $\mu_k$ lõplik mõõt, kusjuures $\mu_k \ll m$.

Fikseerime vabalt $k \in \mathbb{N}$. Võrduse $\frac{d\mu}{dm} = |\det T'|$ $m$-p.k. hulgas $X$ tõestuseks piisab näidata, et $\frac{d\mu_k}{dm}(x) = |\det T'(x)|$ $m$-peaaegu kõikide $x \in X_k$ korral.

Tõepoolest, sellisel juhul iga $E \in \mathcal{L}^n$ korral

$$\mu_k(E) = \mu_k(E \cap X_k) = \int_{E \cap X_k} \frac{d\mu_k}{dm}\, dm = \int_{E \cap X_k} |\det T'|\, dm$$

ning järelikult monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_{E \cap X} \frac{d\mu}{dm}\, dm = \mu(E \cap X) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap X_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E \cap X_k) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(E)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{E \cap X_k} |\det T'|\, dm = \int_{E \cap X} |\det T'|\, dm.$$

Selleks paneme tähele, et Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi 1.6 põhjal $m$-peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}^n$ korral

$$\frac{d\mu_k}{dm}(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\mu_k\bigl(B(x,r)\bigr)}{m\bigl(B(x,r)\bigr)} = \lim_{r\to 0+} \frac{m\bigl(T[B(x,r) \cap X_k]\bigr)}{m\bigl(B(x,r)\bigr)}. \tag{2.2}$$

**Märkus 2.2.** Mõõtude $\mu_k$ sissetoomine oli vajalik just nimelt selleks, et me saaksime rakendada Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi 1.6, mis on tõestatud kompaktsetel hulkadel lõplike (märgiga) Boreli mõõtude jaoks.

Muuhulgas kehtib võrdus (2.2) ka $m$-peaaegu kõikide $x \in X_k$ korral. Kui $x \in X_k$, siis hulga $V_k$ lahtisuse tõttu "piisavalt väikeste" $r > 0$ korral $B(x,r) \subset V_k$, millest eelduse 3° põhjal järeldub, et $m\bigl(T[B(x,r) \cap X_k]\bigr) = m\bigl(T[B(x,r)]\bigr)$.

**Ülesanne 2.4.** Veenduda selles.

Võrdusest (2.2) järeldub nüüd, et

$$\frac{d\mu_k}{dm}(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{m\bigl(T[B(x,r)]\bigr)}{m\bigl(B(x,r)\bigr)} \qquad m\text{-peaaegu kõikide } x \in X_k \text{ korral;}$$

niisiis teoreemi 2.3 põhjal $\frac{d\mu_k}{dm} = |\det T'|$ $m$-peaaegu kõikjal hulgas $X_k$.

□

**Märkus 2.3.** Juhime tähelepanu, et kui $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on Lebesgue'i mõttes integreeruv funktsioon, siis teoreemi 2.1 eeldustel ei tarvitse funktsioon $f \circ T\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ olla Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Samas, nagu me ka äsja tõestasime, on funktsioon $f \circ T\,|\det T'|$ Lebesgue'i mõttes mõõtuv.

**Märkus 2.4.** Teoreemi 2.1 tõestus aitab selgitada teguri $|\det T'|$ rolli valemis (2.1). Nimelt, kui defineerida $\mu(E) = m\bigl(T[E \cap X]\bigr)$, $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, siis $\mu \ll m$, kusjuures $\frac{d\mu}{dm} = |\det T'|$ $m$-p.k. hulgas $X$.

## 2.3. Diferentseeruva teisenduse mõõduteoreetilised omadused

Kogu selle paragrahvi ulatuses tähistame

$$|x-y|_\infty := \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j - y_j|, \quad x = (x_j)_{j=1}^n,\ y = (y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n,$$

s.t. $|x-y|_\infty$ on vektorite $x$ ja $y$ vaheline kaugus meetrilises ruumis $\ell_\infty^n$, ning

$$\overline{C}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n\colon\ |x-y|_\infty \leqslant r\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ r>0,$$

s.t. kuup $\overline{C}(x,r)$ on kinnine kera keskpunktiga $x$ ja raadiusega $r$ ruumis $\ell_\infty^n$.

Lause 2.2 tõestus. Kehtigu eeldused 1° ja 2°.

(a). Olgu $N \in \mathcal{L}^n$ selline, et $m(N)=0$. Kuna $T$ on diferentseeruv hulga $X$ igas punktis, siis iga $x \in N\cap X$ korral kehtib valem $T(z)-T(x) = T'(x)\,(z-x)+\alpha_x(z)$, kus funktsioon $\alpha_x\colon\ V\to\mathbb{R}^n$ rahuldab tingimust $\frac{\alpha_x(z)}{|z-x|}\xrightarrow[z\to x]{}0$; niisiis iga $x\in N\cap X$ korral leidub $\delta_x>0$ nii, et

$$|z-x|_\infty<\delta_x \quad\Longrightarrow\quad \big|T(z)-T(x)\big|_\infty \leqslant (\|T'(x)\|+1)\,|z-x|_\infty.$$

**Märkus 2.5.** Normi $\|T'(x)\|$ arvutamisel eelmises valemis tõlgendame me operaatorit $T'(x)$ operaatorina normeeritud ruumis $\ell_\infty^n$.

Tähistades kõikide $j,k\in\mathbb{N}$ korral

$$E_{k,j} := \Big\{x\in N\cap X\colon\quad z\in V,\ |z-x|_\infty<\frac{1}{j}\ \Longrightarrow\ |T(z)-T(x)|_\infty < k\,|z-x|_\infty\Big\},$$

saame seega, et $N\cap X=\bigcup_{j,k=1}^\infty E_{k,j}$. Fikseerime vabalt $j,k\in\mathbb{N}$ ja $\varepsilon>0$. Väite (a) tõestuseks piisab näidata, et leidub $F\in\mathcal{L}^n$ nii, et $T[E_{k,j}]\subset F$ ja $m(F)<\varepsilon$.

Tõepoolest, siit järeldub, et kõikide $j,k\in\mathbb{N}$ korral $m(T[E_{k,j}])=0$. Kuna $T[N\cap X] = \bigcup_{j,k=1}^\infty T[E_{k,j}]$, siis ka $m(T[N\cap X])=0$.

Selleks paneme tähele, et leiduvad paarikaupa lõikumatute sisemustega kuubid $C_i\subset V$ servapikkustega $a_i<\frac{1}{j}$, $i=1,2,\ldots$, nii, et $C_i\cap E_{k,j}\neq\emptyset$ iga $i\in\mathbb{N}$ korral ning $E_{k,j}\subset\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ ja $\sum_{i=1}^\infty m\big(C_i\big)=\sum_{i=1}^\infty (a_i)^n<\frac{\varepsilon}{2^nk^n}$.

Tõepoolest, kuna Lebesgue'i mõõt on regulaarne, siis leidub lahtine hulk $U\subset V$ nii, et $U\supset E_{k,j}$ ja $m(U)<\frac{\varepsilon}{2^nk^n}$. Teoreemi III.4.4 põhjal esitub hulk $U$ kujul $U=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$, kus $C_i$, $i=1,2,\ldots$, on paarikaupa lõikumatute sisemustega diaadilised kuubid, mille servapikkused on väiksemad kui $\frac{1}{j}$. Visates saadud kuupide kogumist välja need kuubid, mis ei lõika hulka $E_{k,j}$, võime üldisust kitsendamata eeldada, et kuubid $C_i$, $i=1,2,\ldots$, on sellised, nagu vaja.

Valime iga $i \in \mathbb{N}$ korral mingi $x_i \in C_i \cap E_{k,j}$. Kui $i \in \mathbb{N}$ ja $z \in C_i$, siis $|z - x_i|_\infty \leqslant a_i < \frac{1}{j}$, järelikult $|T(z) - T(x_i)|_\infty < k\,|z - x_i|_\infty < k\,a_i$, seega $T(z) \in \overline{C}\big(T(x_i), ka_i\big)$ ja $T[C_i] \subset \overline{C}\big(T(x_i), ka_i\big)$. Nüüd

$$T[E_{k,j}] \subset T\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big] = \bigcup_{i=1}^{\infty} T[C_i] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{C}\big(T(x_i), ka_i\big) =: F,$$

kusjuures

$$m(F) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m\Big(\overline{C}\big(T(x_i), k\,a_i\big)\Big) = k^n 2^n \sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^n < k^n 2^n \frac{\varepsilon}{2^n k^n} = \varepsilon.$$

(b). Olgu $E \in \mathcal{L}^n$. Siis ka $E \cap X \in \mathcal{L}^n$, seega teoreemi III.4.1 põhjal saame me esitada $E \cap X = F \cup N$, kus $F$ on $F_\sigma$ ja $m(N) = 0$. Hulk $F$ esitub kujul $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, kus hulgad $F_j$, $j = 1, 2, \ldots$, on kinnised. Tähistame $K_i = \overline{C}(0, i) \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, siis $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_j \cap K_i$, seega

$$T[E \cap X] = T[F \cup N] = T[F] \cup T[N] = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} T[F_j \cap K_i]\Big) \cup T[N].$$

Mis tahes $j, i \in \mathbb{N}$ korral on hulk $F_j \cap K_i$ kompaktne, niisiis teisenduse $T$ pidevuse tõttu on ka $T[F_j \cap K_i]$ kompaktne ja seega kinnine. Väite (a) põhjal $m(T[N]) = 0$. Niisiis esitub hulk $T[E \cap X]$ $F_\sigma$-tüüpi hulga ja $m$-hüljatava hulga ühendina, seega teoreemi III.4.1 põhjal $T[E \cap X] \in \mathcal{L}^n$. □

## 2.4. Lineaarteisenduse determinandi absoluutväärtus on selle teisenduse "skaleerimistegur"

Teoreemi 2.3 tõestus kasutab järgnevat lauset, mis aitab ühtlasi selgitada teguri $|\det T'|$ rolli valemis (2.1).

**Lause 2.4.** *Olgu $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarne teisendus. Siis*

(a) *iga $E \in \mathcal{L}^n$ korral $A[E] \in \mathcal{L}^n$;*

(b) *leidub konstant $\Delta(A) \in [0, \infty)$ nii, et iga $E \in \mathcal{L}^n$ korral $m(A[E]) = \Delta(A)\, m(E)$;*

(c) *$\Delta(A) = |\det A|$.*

Väite (b) tõestus toetub järgnevale lemmale.

**Lemma 2.5.** *Olgu $\mu$ nihke suhtes invariantne Radoni mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$. Siis leidub konstant $c \in [0, \infty)$ nii, et $\mu(D) = c\, m(D)$ iga Boreli hulga $D \subset \mathbb{R}^n$ korral.*

Lause 2.4 tõestus. (a). Väide järeldub vahetult lausest 2.2, sest lineaarne operaator $A$ on diferentseeruv ruumi $\mathbb{R}^n$ igas punktis (seejuures $A' = A$).

(b). Defineerime hulgafunktsiooni $\nu\colon \mathcal{L}^n \to [0,\infty]$ võrdusega $\nu(E) = m(A[E])$, $E \in \mathcal{L}^n$, ning paneme tähele, et $\nu$ on nihke suhtes invariantne mõõt.

**Ülesanne 2.5.** Veenduda selles.

Edasi paneme tähele, et $\mu := \nu|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ on Radoni mõõt.

**Ülesanne 2.6.** Veenduda selles.

Näpunäide. Piisab näidata, et iga tõkestatud hulga $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ korral $\mu(E) < \infty$.

Väide (b) järeldub nüüd lemmast 2.5.

**Ülesanne 2.7.** Järeldada lemmast 2.5 väide (b).

Näpunäide. Kõigepealt panna tähele, et iga $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $m(F) = 0$, korral lemma 2.5 põhjal ka $\mu(F) = 0$. Seejärel kasutada fakti, et ruum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ on ruumi $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}})$ täield; niisiis iga $E \in \mathcal{L}^n$ esitub ühendina $E = D \cup N$, kus $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ja $N \in \mathcal{L}^n$ on $m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$-hüljatav.

(c). Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\det A \neq 0$. Väite tõestamisel piisab piirduda juhtudega, kus $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on üks järgmist kolme tüüpi teisendustest:

(I) süsteem $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ on süsteemi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ permutatsioon (siin ja edaspidi on $e_1, \ldots, e_n$ ruumi $\mathbb{R}^n$ standardühikvektorid);

(II) $Ae_1 = \alpha e_1$ mingi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral, $Ae_j = e_j$, $j = 2, \ldots, n$;

(III) $Ae_1 = e_1 + e_2$, $Ae_j = e_j$, $j = 2, \ldots, n$.

Tõepoolest, lineaaralgebra kursusest teame, et eelduse $\det A \neq 0$ tõttu $A$ esitub korrutisena $A = A_1 \circ \cdots \circ A_k$, kus $k \in \mathbb{N}$ ja $A_1, \ldots, A_k$ on lineaarteisendused tüüpi (I)–(III). Tähistame

$$Q = \overbrace{[0,1) \times \cdots \times [0,1)}^{n \text{ tegurit}},$$

siis

$$\Delta(A) = \Delta(A)\, m(Q) = m\big(A[Q]\big);$$

seega väite (c) kehtivuse korral teisenduste jaoks tüüpi (I)–(III)

$$\begin{aligned}\Delta(A) &= m\big(A[Q]\big) = m\big((A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_k)[Q]\big) = \Delta(A_1)\, m\big((A_2 \circ \cdots \circ A_k)[Q]\big) \\ &= \cdots = \Delta(A_1) \cdots \Delta(A_k)\ m(Q) = \Delta(A_1) \cdots \Delta(A_k) = |\det A_1| \cdots |\det A_k| \\ &= |\det A|.\end{aligned}$$

Kui $A$ on maatriks tüüpi (I), siis tema igas reas ja veerus on täpselt üks element 1 ja ülejäänud elemendid on nullid; seega $\det A = 1$ või $\det A = -1$. Kuna $A[Q] = Q$, siis

$$\Delta(A) = m\big(A[Q]\big) = m(Q) = 1 = |\det A|.$$

Kui $A$ on tüüpi (II), siis $\Delta(A) = m\big(A[Q]\big) = |\alpha| = |\det A|$.

Kui $A$ on tüüpi (III), siis $\det A = 1$ (põhjendada!). Suvalise $x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ korral $Ax = (x_1, x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n)$, seega

$$A[Q] = \big\{(z_i)_{i=1}^n\colon\ 0 \leqslant z_1, z_3, \ldots, z_n < 1,\ \ z_1 \leqslant z_2 < z_1 + 1\big\}.$$

Tähistame $S_1 = \big\{(z_i)_{i=1}^n \in A[Q]\colon\ z_2 < 1\big\}$ ja $S_2 = A[Q] \setminus S_1$; siis $Q = S_1 \cup (S_2 - e_2)$, kusjuures $S_1 \cap (S_2 - e_2) = \emptyset$.

**Ülesanne 2.8.** Veenduda selles.

Seega

$$\begin{aligned}\Delta(A) &= m\big(A[Q]\big) = m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2) = m(S_1) + m(S_2 - e_2)\\ &= m(Q) = 1 = |\det A|.\end{aligned}$$

Meil on jäänud veel tõestada väide (c) juhul, kui $\det A = 0$; siis $A$ ei ole sürjektsioon, seega $\dim A[\mathbb{R}^n] =: k < n$. Piisab näidata, et $m\big(A[\mathbb{R}^n]\big) = 0$. Lineaaralgebra kursusest teame, et leidub lineaarteisendus $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\det B \neq 0$, nii, et $B[\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}] = A[\mathbb{R}^n]$. Aga nüüd äsjatõestatu põhjal

$$m\big(A[\mathbb{R}^n]\big) = m\big(B[\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}]\big) = \Delta(B) \cdot 0 = 0.$$

□

Vältimaks lemma 2.5 tõestuse koormamist tehnilise pudi-padiga, tõestame kõigepealt

**Lemma 2.6.** *Olgu $\mu$ nihke suhtes invariantne Radoni mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$. Kui $Q'$ ja $Q''$ on lõikumatute sisemustega diaadilised kuubid ruumis $\mathbb{R}^n$, siis $\mu(Q' \cap Q'') = 0$. Järelikult, kui $N \in \mathbb{N}$ ning $C_1, \dots, C_N \subset \mathbb{R}^n$ on paarikaupa lõikumatute sisemustega diaadilised kuubid, siis $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^N C_i\Big) = \sum_{i=1}^N \mu(C_i)$.*

Lemma 2.6 tõestus. Tähistame $Q := \overbrace{[0,1] \times \dots \times [0,1]}^{n \text{ tegurit}}$. Lemma tõestuseks piisab näidata, et kuubi $Q$ iga tahu $\mu$-mõõt on 0. Tähistades kõikide $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $x \in [0,1]$ korral

$$K_x^i = \underbrace{[0,1] \times \dots \times [0,1]}_{i-1 \text{ tegurit}} \times \{x\} \times [0,1] \times \dots \times [0,1],$$

piisab selleks näidata, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $\mu(K_0^i) = 0$ (märgime, et $\mu$ nihke suhtes invariantsuse tõttu kõikide $x, y \in [0,1]$ korral $\mu(K_x^i) = \mu(K_y^i)$). Oletame vastuväiteliselt, et mingi $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $\mu(K_0^i) > 0$. Siis

$$\mu(Q) \geqslant \mu\left(\bigcup_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} K_q^i\right) = \sum_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(K_q^i) = \mu(K_0^i) + \mu(K_0^i) + \mu(K_0^i) + \dots = \infty.$$

Teiselt poolt, kuna Radoni mõõt $\mu$ on kompaktsetel hulkadel lõplik, siis $\mu(Q) < \infty$. Jõudsime vastuoluni. □

Lemma 2.5 tõestus. Olgu $Q_0$ mingi diaadiline kuup ruumis $\mathbb{R}^n$ servapikkusega 1. Tähistame $c := \mu(Q_0)$. Fikseerime vabalt $k \in \mathbb{N}$. Kuup $Q_0$ esitub kujul $Q_0 = \bigcup_{j=1}^{2^{kn}} Q_j$, kus $Q_j$, $j = 1, \ldots, 2^{kn}$, on paarikaupa lõikumatute sisemustega diaadilised kuubid servapikkusega $\frac{1}{2^k}$. Kuna $\mu$ on nihke suhtes invariantne, siis kõikide nende kuupide $\mu$-mõõtudel on ühesugune väärtus; tähistame selle väärtuse sümboliga $c_k$. Nüüd $2^{kn} c_k = \mu(Q_0) = c$, millest

$$c_k = \frac{c}{2^{kn}} = c\,m\Big(\text{diaadiline kuup servapikkusega } \frac{1}{2^k}\Big);$$

niisiis, mis tahes diaadilise kuubi $Q \subset \mathbb{R}^n$ korral $\mu(Q) = c\,m(Q)$. Siit järeldub, et iga lahtise hulga $U \subset \mathbb{R}^n$ korral $\mu(U) = c\,m(U)$.

Tõepoolest, teoreemi III.4.4 põhjal saame me lahtise hulga $U \subset \mathbb{R}^n$ esitada kujul $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, kus $C_j$, $j = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatute sisemustega diaadilised kuubid; seega lemma 2.6 põhjal

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} C_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) = c \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j) = c\,m(U).$$

Arvestades, et mõõdud $m$ ja $\mu$ on väljast regulaarsed, saame nüüd mis tahes Boreli hulga $E \subset \mathbb{R}^n$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\Big\{\mu(U) \colon\ \mathbb{R}^n \supset U \supset E,\ U \text{ on lahtine}\Big\} \\ &= \inf\Big\{c\,m(U) \colon\ \mathbb{R}^n \supset U \supset E,\ U \text{ on lahtine}\Big\} = c\,m(E).\end{aligned}$$

□

## 2.5. Teoreemi 2.3 tõestus

Teoreemi 2.1 tõestuseks jääb veel tõestada teoreem 2.3. Teoreemi 2.3 tõestus juhul, kui $\det T'(x) \neq 0$, kasutab järgnevat lemmat, mille tõestus tugineb Brouweri püsipunkti teoreemile.

**Lemma 2.7.** *Olgu $\varepsilon > 0$ ning olgu $F \colon \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^n$ pidev teisendus (ruumis $\mathbb{R}^n$), kusjuures iga $x \in S(0,1)$ korral $|F(x) - x| < \varepsilon$. Siis $F[\overline{B}(0,1)] \supset B(0, 1-\varepsilon)$.*

**Teoreem 2.8** (Brouweri püsipunkti teoreem)**.** *Olgu $G \colon \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ pidev teisendus (ruumis $\mathbb{R}^n$). Siis teisendusel $G$ on vähemalt üks püsipunkt (s.t. niisugune punkt $z \in \overline{B}(0,1)$, mille korral $G(z) = z$).*

Brouweri püsipunkti teoreemi me käesolevas konspektis ei tõesta. Asjahuviline lugeja leiab tõestuse õpikust [Hurewicz and Wallman, *Dimension Theory,* Princeton University Press, 1948; pp. 38–40] või [Agarwal, Meehan, and O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications,* Cambridge University Press, 2001; Chapter 4].

LEMMA 2.7 TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $a \in B(0,1-\varepsilon)\setminus F[\overline{B}(0,1)]$. Siis

$$G\colon\ \overline{B}(0,1) \ni x \longmapsto \frac{a-F(x)}{|a-F(x)|} \in \overline{B}(0,1)$$

on pidev teisendus. Brouweri püsipunkti teoreemi põhjal leidub teisendusel $G$ püsipunkt $z \in \overline{B}(0,1)$. On selge, et $z \in S(0,1)$ (sest iga $x \in \overline{B}(0,1)$ korral $|G(x)| = 1$). Seega (arvestades, et $z \cdot z = |z|^2 = 1$)

$$z\cdot\big(a-F(z)\big) = z\cdot a + z\cdot\big(z-F(z)\big) - 1 \leqslant |z|\,|a| + |z|\,|z-Fz| - 1 < 1-\varepsilon+\varepsilon-1 = 0,$$

millest järeldub, et $z \cdot G(z) < 0$; niisiis $|z|^2 = z\cdot z = z\cdot G(z) < 0$, vastuolu. □

TEOREEMI 2.3 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada (ja eeldamegi), et $x = 0$ ja $T(x) = 0$.

**Ülesanne 2.9.** Veenduda, et need eeldused ei kitsenda üldisust.

Tähistame $A = T'(0)$; siis $A\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarne operaator. Lineaaralgebra kursusest teame, et

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ on injektsioon} \iff A \text{ on sürjektsioon} \iff A \text{ on bijektsioon.}$$

Vaatleme eraldi kahte juhtu: (I) $\det A \neq 0$; (II) $\det A = 0$.

(I). Olgu $\det A \neq 0$. Siis $A$ on bijektsioon, kusjuures $A^{-1}$ on lineaarne. Mis tahes kera $B \subset V$ korral lause 2.4 põhjal

$$m(T[B]) = m\big((A\circ A^{-1}\circ T)[B]\big) = m\left(A\big[(A^{-1}\circ T)[B]\big]\right) = |\det A|\, m\big((A^{-1}\circ T)[B]\big)),$$

seega, defineerides kujutuse $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ võrdusega $F = A^{-1}\circ T$, piisab soovitud võrduse tõestuseks näidata, et

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(F[B(0,r)]\big)}{m\big(B(0,r)\big)} = 1. \tag{2.3}$$

Tõepoolest, võrduse (2.3) kehtides

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(T[B(0,r)]\big)}{m\big(B(0,r)\big)} = \lim_{r\to 0+} \frac{|\det A|\, m\big((A^{-1}\circ T)[B]\big)\big)}{m\big(B(0,r)\big)} = \lim_{r\to 0+} \frac{|\det A|\, m\big(F[B(0,r)]\big)}{m\big(B(0,r)\big)} = |\det A|.$$

Olgu $0 < \varepsilon < 1$. Võrduse (2.3) tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et kui $0 < r < \delta$, siis

$$(1-\varepsilon)^n \leqslant \frac{m\big(F[B(0,r)]\big)}{m\big(B(0,r)\big)} \leqslant (1+\varepsilon)^n. \tag{2.4}$$

Selleks omakorda piisab leida $\delta > 0$ nii, et kui $0 < r < \delta$, siis

$$B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \overset{(2.5')}{\subset} F[B(0,r)] \overset{(2.5'')}{\subset} B\big(0,(1+\varepsilon)r\big). \tag{2.5}$$

Tõepoolest, nende sisalduvuste kehtides

$$(1-\varepsilon)^n m\big(B(0,r)\big) = m\Big(B\big(0,(1-\varepsilon)r\big)\Big) \leqslant m\big(F[B(0,r)]\big) \leqslant m\Big(B\big(0,(1+\varepsilon)r\big)\Big) = (1+\varepsilon)^n m\big(B(0,r)\big),$$

millest järelduvad võrratused (2.4).

Selleks märgime, et $F(0)=0$ ja et kujutus $F$ on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$F'(0) = (A^{-1})'\big(T(0)\big) \circ T'(0) = A^{-1} \circ T'(0) = A^{-1} \circ A = I$$

($I$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ ühikoperaator). Seega leidub $\delta > 0$ nii, et

$$0 < |z| < \delta \quad\Longrightarrow\quad z \in V,\ |F(z) - z| < \varepsilon\,|z|. \tag{2.6}$$

**Ülesanne 2.10.** Veenduda, et selline arv $\delta > 0$ leidub.

Paneme tähele, et kui $0 < r < \delta$, siis kehtivad sisalduvused (2.5). Tõepoolest, olgu $0 < r < \delta$.

(2.5"). Kui $z \in B(0,r)$, siis $|z| < \delta$, seega

$$|F(z)| \leqslant |F(z) - z| + |z| \leqslant \varepsilon\,|z| + |z| = (1+\varepsilon)\,|z| < (1+\varepsilon)\,r,$$

s.t. $F(z) \in B\big(0,(1+\varepsilon)r\big)$; järelikult kehtib (2.5").

(2.5'). Kõigepealt paneme tähele, et $B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \cap F[S(0,r)] = \emptyset$.

Tõepoolest, kui $z \in S(0,r)$, siis $|z| = r < \delta$ ning järelikult

$$|F(z)| \geqslant |z| - |F(z) - z| > |z| - \varepsilon\,|z| = (1-\varepsilon)\,|z| = (1-\varepsilon)\,r.$$

Niisiis piisab sisalduvuse (2.5') tõestuseks näidata, et $B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \subset F[\overline{B}(0,r)]$ ehk, teisisõnu, $\frac{F[\overline{B}(0,r)]}{r} \supset B(0,1-\varepsilon)$. Selleks me kasutame lemmat 2.7: defineerides kujutuse $H\colon \overline{B}(0,1) \ni u \mapsto \frac{F(ru)}{r} \in \mathbb{R}^n$, piisab näidata, et $H[\overline{B}(0,1)] \supset B(0,1-\varepsilon)$, mis järeldub lemmast 2.7, sest iga $u \in S(0,1)$ korral

$$|H(u) - u| = \left|\frac{F(ru)}{r} - \frac{ru}{r}\right| = \frac{1}{r}\,|F(ru) - ru| < \frac{1}{r}\,\varepsilon|ru| = \varepsilon.$$

(II). Vaatleme nüüd juhtu, kus $\det A = 0$. Sel juhul me peame näitame, et

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(T[B(0,r)]\big)}{m\big(B(0,r)\big)} = 0.$$

ehk, arvestades, et $m\big(B(0,r)\big) = r^n\, m\big(B(0,1)\big)$,

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(T[B(0,r)]\big)}{r^n} = 0. \tag{2.7}$$

Selleks paneme tähele, et kuna $T$ on diferentseeruv punktis 0, kusjuures $T'(0) = A$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta_\varepsilon > 0$ nii, et

$$0 < |z| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad z \in V,\ |T(z) - Az| < \varepsilon |z|.$$

**Ülesanne 2.11.** Veenduda, et iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral selline arv $\delta_\varepsilon > 0$ leidub.

Kui nüüd $\varepsilon > 0$ ja $0 < r < \delta_\varepsilon$, siis iga $z \in B(0,r)$ korral $|T(z) - Az| < \varepsilon|z| < \varepsilon r$, seega

$$T[B(0,r)] \subset \Big\{y \in \mathbb{R}^n\colon\ d\big(y, A[B(0,r)]\big) < \varepsilon r\Big\} = r\Big\{w \in \mathbb{R}^n\colon\ d\big(w, A[B(0,1)]\big) < \varepsilon\Big\},$$

järelikult, tähistades $B_\varepsilon = \Big\{w \in \mathbb{R}^n\colon\ d\big(w, A[B(0,1)]\big) < \varepsilon\Big\}$,

$$m\big(T[B(0,r)]\big) \leqslant m(rB_\varepsilon) = r^n m(B_\varepsilon);$$

niisiis võrduse (2.7) tõestuseks piisab näidata, et $m(B_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$ (Põhjendada, miks siit järeldub võrdus (2.7)!), milleks omakorda piisab näidata, et $m(B_{\frac{1}{j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $B_1 \supset B_{\frac{1}{2}} \supset \cdots$, kusjuures $m(B_1) < \infty$ (Põhjendada!); niisiis $m(B_{\frac{1}{j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}\Big)$. Kuna

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}} = \overline{A[B(0,1)]} = A[\overline{B}(0,1)], \tag{2.8}$$

siis lause 2.4 põhjal

$$m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}\Big) = m\big(A[\overline{B}(0,1)]\big) = |\det A|\, m\big(\overline{B(0,1)}\big) = 0,$$

seega tõepoolest $m(B_{\frac{1}{j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, nagu soovitud.

**Ülesanne 2.12.** Tõestada võrdused (2.8).

□

Sellega on ka teoreem 2.1 tõestatud.

**Märkus 2.6.** Kui teoreemis 2.3 täiendavalt eeldada, et teisendus $T$ on lahtine (s.t. ta teisendab hulga $V$ lahtised alamhulgad lahtisteks hulkadeks), siis saab teoreemi 2.3 tõestada ilma lemma 2.7 (ning seega ka ilma Brouweri püsipunkti teoreemi) abita. (Märgime, et teisenduse $T$ lahtisuse tagab näiteks eeldus, et $T$ on üksühene ja $T^{-1}$ on pidev.)

Tõepoolest, lemmat 2.7 kasutasime me vaid implikatsiooni

$$0 < r < \delta \quad \Longrightarrow \quad B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \overset{(2.5')}{\subset} F[B(0,r)]$$

tõestuses, kus $\delta$ pärineb implikatsioonist (2.6):

$$0 < |z| < \delta \quad \Longrightarrow \quad z \in V,\ |F(z) - z| < \varepsilon\,|z|.$$

Eeldame nüüd, et $T$ on lahtine ning fikseerime vabalt $r \in (0,\delta)$. Sisalduvuse (2.5') tõestuseks piisab näidata, et $B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \subset F[\overline{B}(0,r)]$ (sest $B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \cap F[S(0,r)] = \emptyset$). Tähistades

$$\begin{aligned} E_1 &= B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \cap F[\overline{B}(0,r)] = B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \cap F[B(0,r)],\\ E_2 &= B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) \setminus F[\overline{B}(0,r)], \end{aligned}$$

jääb meil näidata, et $E_2 = \emptyset$. Selleks märgime esmalt, et $E_1 \neq \emptyset$, sest

$$F(0) = A^{-1}T(0) = A^{-1}\,0 = 0 \in B\big(0,(1-\varepsilon)r\big).$$

Edasi paneme tähele, et $E_1$ ja $E_2$ on lahtised hulgad.

Tõepoolest, kuna $F = A^{-1}T$ ning $T$ ja $A^{-1}$ on lahtised, siis ka $F$ on lahtine; järelikult $F[B(0,r)]$ on lahtine ning seega ka $E_1$ on lahtine. Teisenduse $F$ pidevuse tõttu on $F[\overline{B}(0,r)]$ kompaktne, seega $E_2$ on lahtine.

Kuna $B\big(0,(1-\varepsilon)r\big) = E_1 \cup E_2$ ja $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, siis $E_2 = \emptyset$, sest ükski liinsidus hulk ruumis $\mathbb{R}^n$ ei esitu kahe mittetühja lahtise hulga lõikumatu ühendina.

**Ülesanne 2.13.** Olgu $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ mittetühjad lahtised hulgad, kusjuures $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Tõestada, et ühend $D := D_1 \cup D_2$ ei ole liinsidus.

# § 3. Tõkestatud variatsiooniga funktsioonid. Newton–Leibnizi valemid Lebesgue'i integraali jaoks

Kõikjal selles paragrahvis tähistame funktsiooni $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ korral

$$F(x-) := \lim_{z \to x-} F(z), \quad F(x+) := \lim_{z \to x+} F(z), \quad x \in \mathbb{R},$$

ning

$$F(-\infty) := \lim_{z \to -\infty} F(z), \quad F(\infty) := \lim_{z \to \infty} F(z)$$

(muidugi eeldusel, et need piirväärtused eksisteerivad). "Peaaegu kõikjal" tähendab "$m$-peaaegu kõikjal", kus $m$ on Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}$.

## 3.1. Tõkestatud variatsiooniga funktsioonid

Selles punktis seame endale eesmärgiks "kirjeldada ära" Boreli kompleksmõõdud ruumis $\mathbb{R}$. Meie üheks lähtepunktiks on

**Teoreem I.5.1.** (a) *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Siis leidub parajasti üks mõõt $\mu_F\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ selliselt, et*

$$\mu_F\big([a, b)\big) = F(b) - F(a) \qquad \text{kõikide } a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \text{ korral.}$$

*Kui $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mingi selline mittekahanev vasakult pidev funktsioon, et $\mu_G = \mu_F$, siis leidub konstant $C \in \mathbb{R}$ nii, et*

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) *Olgu mõõt $\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ selline, et iga tõkestatud hulga $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ korral $\mu(A) < \infty$. Siis on funktsioon*

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big([0, x)\big), & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -\mu\big([x, 0)\big), & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

*mittekahanev ja vasakult pidev, kusjuures $\mu = \mu_F$.*

Selle paragrahvi tulemused toetuvad oluliselt järgnevale teoreemile.

**Teoreem 3.1.** *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev funktsioon. Defineerime funktsiooni $G(x) = F(x-)$, $x \in \mathbb{R}$.*

(a) *Funktsiooni $F$ katkevuspunktide hulk on ülimalt loenduv.*

(b) *Tuletised $F'$ ja $G'$ eksisteerivad p.k., kusjuures $F' = G'$ p.k.*

TÕESTUS. (a). Fikseerime vabalt $N \in \mathbb{N}$. Tähistame

$$D = \big\{x \in (-N, N)\colon\ F \text{ on katkev punktis } x\big\}.$$

Funktsiooni $F$ katkevuspunktide hulga ülimalt loenduvuse tõestuseks piisab näidata, et $D$ on ülimalt loenduv hulk. Selleks tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$D_n = \left\{x \in D\colon\ F(x+) - F(x-) > \frac{1}{n}\right\}$$

ja paneme tähele, et $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Niisiis piisab hulga $D$ ülimalt loenduvuse tõestuseks näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral on hulk $D_n$ lõplik.

Fikseerime vabalt $n \in \mathbb{N}$ ning oletame vastuväiteliselt, et hulk $D_n$ ei ole lõplik. Siis, fikseerides $k \in \mathbb{N}$ nii, et $k\frac{1}{n} > F(N) - F(-N)$, saame me valida punktid $x_1, \dots, x_k \in D_n$ nii, et $x_1 < \dots < x_k$. Aga nüüd

$$\begin{aligned} F(N) - F(-N) &\geqslant F(x_k+) - F(x_1-) \geqslant \sum_{j=1}^{k}\big(F(x_j+) - F(x_j-)\big) \geqslant k\,\frac{1}{n} \\ &> F(N) - F(-N), \end{aligned}$$

vastuolu.

(b). Paneme tähele, et $G$ on mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Mõõt $\mu_G$ on Radoni mõõt, seega Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi 1.6 põhjal eksisteerib peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}$ korral piirväärtus

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0+} \frac{G(x+r) - G(x)}{r} &= \lim_{r\to 0+} \frac{\mu_G\big([x, x+r)\big)}{m\big([x, x+r)\big)} = \lim_{r\to 0+} \frac{\mu_G\big([x-r, x)\big)}{m\big([x-r, x)\big)} \\ &= \lim_{r\to 0+} \frac{G(x) - G(x-r)}{r} = \lim_{r\to 0+} \frac{G(x-r) - G(x)}{-r} \end{aligned}$$

(sest pered $\big([x, x+r)\big)_{r>0}$ ja $\big([x-r, x)\big)_{r>0}$ shrink nicely to $x$); seega tuletis $G'$ eksisteerib p.k.

Defineerime funktsiooni $H = F - G$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et p.k. eksisteerib tuletis $H' = 0$. Teoreemi (a)-osa põhjal on hulk $E := \{x \in \mathbb{R}\colon\ H(x) \neq 0\}$ ülimalt loenduv; niisiis võime kirjutada $E = \{x_j\colon\ j \in J\}$, kus $J$ on mingi ülimalt loenduv hulk. Nüüd $H(x_j) > 0$ iga $j \in J$ korral. Paneme tähele, et iga $N \in \mathbb{N}$ korral $\sum_{|x_j|<N} H(x_j) < \infty$.

Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et mingi $N \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{|x_j|<N} H(x_j) > F(N) - F(-N),$$

siis mingite $k \in \mathbb{N}$ ja $z_1, \dots, z_k \in E \cap (-N, N)$, $z_1 < z_2 < \dots < z_k$, korral

$$F(N) - F(-N) < \sum_{i=1}^{k} H(z_i) = \sum_{i=1}^{k}\big(F(z_i) - F(z_i-)\big) \leqslant F(z_k) - F(z_1-) \leqslant F(N) - F(-N).$$

Defineerime mõõdu $\mu = \sum_{j\in J} H(x_j)\,\delta_{x_j}$, kus $\delta_{x_j}$ on Diraci mõõt punktis $x_j$. Eelneva põhjal on $\mu$ lõplik kompaktsetel hulkadel ning seega Radoni mõõt. Märgime, et $\mu \perp m$, sest $m(E) = \mu(E^c) = 0$. Kõikide $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, korral

$$\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right| \leqslant \frac{H(x+h)+H(x)}{|h|} \leqslant \frac{\mu\big([x-2|h|, x+2|h|)\big)}{|h|}$$
$$= 4\,\frac{\mu\big([x-2|h|, x+2|h|)\big)}{m\big([x-2|h|, x+2|h|)\big)}.$$

Kuna pere $\big([x-r, x+r)\big)_{r>0}$ shrinks nicely to $x$, siis Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi 1.6 põhjal koondub viimase võrratusteahela parem pool protsessis $h \to 0$ nulliks p.k. $x \in \mathbb{R}$ korral, millest järeldub, et p.k. eksisteerib tuletis $H' = 0$. □

**Definitsioon 3.1.** Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Defineerime funktsiooni $T_F\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ järgmiselt: $x \in \mathbb{R}$ korral

$$T_F(x) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| : \; n \in \mathbb{N},\, -\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant x\right\}.$$

Funktsiooni $T_F$ nimetatakse funktsiooni $F$ *täisvariatsiooni(funktsiooni)ks.* (Siin tähistus $T_F$ tuleneb ilmselt ingliskeelsest terminist "total variation".)

Üks oluline tähelepanek: mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$T_F(b) - T_F(a) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| : \; n \in \mathbb{N},\; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\right\}. \tag{3.1}$$

**Ülesanne 3.1.** Tõestada valem (3.1).

On ilmne, et $T_F$ on mittekahanev funktsioon. Suurust

$$V_{\mathbb{R}}(F) := T_F(\infty) = \lim_{x\to\infty} T_F(x)$$

nimetatakse funktsiooni $F$ *täisvariatsiooniks.* Kui $V_{\mathbb{R}}(F) < \infty$, siis öeldakse, et $F$ on *tõkestatud variatsiooniga* funktsioon.

Tähistame

$$BV = BV(\mathbb{R}) := \{F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\; F \text{ on tõkestatud variatsiooniga}\}.$$

(Siin tähistus $BV$ tuleneb ingliskeelsest terminist "bounded variation".)

**Märkus 3.1.** Täisvariatsiooni(funktsiooni) mõiste on loomulikul viisil laiendatav ka funktsioonidele $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Seda mõistet ja tõkestatud variatsiooniga funktsioonide $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ omadusi vaatleme käesoleva jaotise lõpus.

Järgnev teoreem esitab tõkestatud variatsiooniga funktsioonide olulisemad omadused.

**Teoreem 3.2.** (a) *Olgu funktsioon* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tõkestatud ja mittekahanev. Siis* $F \in BV$*, kusjuures* $T_F(x) = F(x) - F(-\infty)$*,* $x \in \mathbb{R}$*.*

(b) *Olgu* $F, G \in BV$ *ja* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Siis ka* $\alpha F + \beta G \in BV$*.*

(c) *Olgu* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*. Siis* $F \in BV$ *parajasti siis, kui* $\operatorname{Re} F \in BV$ *ja* $\operatorname{Im} F \in BV$*.*

(d) *Olgu* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

(d1) *Kui* $F \in BV$*, siis funktsioonid* $T_F + F$ *ja* $T_F - F$ *on mittekahanevad.*

(d2) $F \in BV$ *parajasti siis, kui ta esitub kahe tõkestatud mittekahaneva funktsiooni vahena. Seejuures, kui* $F \in BV$*, siis*

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F).$$

(e) *Olgu* $F \in BV$*. Siis*

(e1) *iga* $x \in \mathbb{R}$ *korral eksisteerivad piirväärtused*

$$F(x-) = \lim_{z \to x-} F(z), \quad F(x+) = \lim_{z \to x+} F(z);$$

*samuti eksisteerivad piirväärtused*

$$F(-\infty) = \lim_{z \to -\infty} F(z), \quad F(\infty) = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

(e2) *funktsioni* $F$ *katkevuspunktide hulk on ülimalt loenduv.*

(e3) *Defineerime funktsiooni* $G(x) = F(x-)$*,* $x \in \mathbb{R}$*. Siis tuletised* $F'$ *ja* $G'$ *eksisteerivad p.k., kusjuures* $F' = G'$ *p.k.*

(e4) $T_F(-\infty) = 0$*.*

(e5) *Kui* $F$ *on vasakult pidev, siis ka* $T_F$ *on vasakult pidev.*

Tõestus.

**Ülesanne 3.2.** Tõestada teoreemi 3.2 väited (a)–(c).

(d1). Olgu $x, z \in \mathbb{R}$, $x < z$. Me peame näitama, et $T_F(x) \pm F(x) \leqslant T_F(z) \pm F(z)$ ehk, teisisõnu, $\mp\big(F(z) - F(x)\big) \leqslant T_F(z) - T_F(x)$ ehk $\big|F(z) - F(x)\big| \leqslant T_F(z) - T_F(x)$, mis järeldub vahetult valemist (3.1).

**Ülesanne 3.3.** Tõestada teoreemi 3.2 väited (d2) ja (e1)–(e3).

(e4). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab näidata, et leidub $x_0 \in \mathbb{R}$ nii, et $T_F(x_0) < \varepsilon$.

Fikseerime vabalt $x \in \mathbb{R}$ ja valime punktid $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$ (siin $n \in \mathbb{N}$) nii, et

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| > T_F(x) - \varepsilon.$$

Kuna valemi (3.1) põhjal $T_F(x) - T_F(x_0) \geqslant \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})|$, siis $T_F(x_0) < \varepsilon$.

(e5). Olgu $F$ vasakult pidev ning olgu $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Funktsiooni $T_F$ vasakult pidevuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et

$$x - \delta < z < x \quad \Longrightarrow \quad T_F(z) > T_F(x) - \varepsilon.$$

Selleks valime punktid $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$ nii, et

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| > T_F(x) - \frac{\varepsilon}{2},$$

ning $\delta > 0$ nii, et $x - \delta > x_{n-1}$ ja

$$x - \delta < z < x \quad \Longrightarrow \quad |F(x) - F(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui nüüd $x - \delta < z < x$, siis

$$\begin{aligned} T_F(z) &> \sum_{j=1}^{n-1} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(z) - F(x_{n-1})| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{n-1} |F(x_j) - F(x_{j-1})| - |F(z) - F(x)| + |F(x) - F(x_{n-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| - |F(z) - F(x)| > T_F(x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = T_F(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Definitsioon 3.2.** Olgu funktsioon $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline, et $F \in BV$. Esitust

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$$

nimetatakse funktsiooni $F$ *Jordani lahutuseks.* Funktsioone $\frac{1}{2}(T_F + F)$ ja $\frac{1}{2}(T_F - F)$ nimetatakse vastavalt funktsiooni $F$ *positiivseks variatsiooniks* ja funktsiooni $F$ *negatiivseks variatsiooniks.*

Tähistame

$$NBV = \Big\{F \in BV\colon\ F \text{ on vasakult pidev ja } F(-\infty) = 0\Big\}.$$

Juhime tähelepanu, et kui $F \in BV$, siis, defineerides

$$G(x) = F(x-) - F(-\infty), \quad x \in \mathbb{R},$$

$G \in NBV$ ja $G' = F'$ p.k. (siinkohal me loeme $F(-\infty-) = F(-\infty)$).

**Ülesanne 3.4.** Veenduda selles.

Funktsiooni $F \in NBV$ Jordani lahutuse mõiste sisu aitab selgitada järgnev lause.

**Lause 3.3.** *Olgu $F \in NBV$ ning olgu $F = F^+ - F^-$ tema Jordani lahutus. Siis*

(a) $F^+(-\infty) = F^-(\infty) = 0$;

(b) *kui $F_1, F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$, on mittekahanevad funktsioonid, mille korral $F = F_1 - F_2$, siis*

$$F^+ \leqslant F_1 \quad ja \quad F^- \leqslant F_2.$$

Tõestus. (a) järeldub vahetult teoreemist 3.2.

(b).

**Ülesanne 3.5.** Tõestada väide (b).

Näpunäide. Veenduda esmalt, et kui $F_1, F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$, on mittekahanevad funktsioonid, mille korral $F = F_1 - F_2$, siis iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$F^+(x) + F^-(x) = T_F(x) \leqslant F_1(x) + F_2(x).$$

□

**Teoreem 3.4.** (a) *Olgu $\mu$ Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}$. Defineerime funktsiooni*

$$F(x) = \mu\big((-\infty, x)\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Siis $F \in NBV$.*

(b) *Kui $F \in NBV$, siis leidub üheselt määratud Boreli kompleksmõõt $\mu_F$ ruumis $\mathbb{R}$ nii, et $F(x) = \mu_F\big((-\infty, x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$. Seejuures $|\mu_F| = \mu_{T_F}$. Kui $F \in NBV$ on reaalne funktsioon, siis $\mu_F^+ = \mu_{\frac{1}{2}(T_F+F)}$ ja $\mu_F^- = \mu_{\frac{1}{2}(T_F-F)}$. Niisiis, kui reaalse funktsiooni $F \in NBV$ Jordani lahutus on $F = F^+ - F^-$, siis lõpliku märgiga mõõdu $\mu_F$ Jordani lahutus on $\mu_F = \mu_{F^+} - \mu_{F^-}$.*

Tõestus. (a). Kõigepealt, $\mu = \mu_r^+ - \mu_r^- + i(\mu_i^+ - \mu_i^-)$. Mõõdud $\mu_r^+$, $\mu_r^-$, $\mu_i^+$ ja $\mu_i^-$ on lõplikud, seega teoreemi I.5.1 põhjal leiduvad vasakult pidevad mittekahanevad tõkestatud funktsioonid $G_{r,+}, G_{r,-}, G_{i,+}, G_{i,-}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et $\mu_r^+ = \mu_{G_{r,+}}$, $\mu_r^- = \mu_{G_{r,-}}$, $\mu_i^+ = \mu_{G_{i,+}}$ ja $\mu_i^- = \mu_{G_{i,-}}$. Defineerime

$$F_{s,j}(x) = G_{s,j}(x) - G_{s,j}(-\infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad s \in \{r, i\},\ j \in \{+, -\},$$

siis $\mu = \mu_{F_{r,+}} - \mu_{F_{r,-}} + i(\mu_{F_{i,+}} - \mu_{F_{i,-}})$; seega, defineerides $F = F_{r,+} - F_{r,-} + i(F_{i,+} - F_{i,-})$, kehtib $F \in NBV$, kusjuures $F(x) = \mu\big((-\infty, x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

**Ülesanne 3.6.** Veenduda selles.

(b). Esitame kõigepealt väite (b) tõestuse skeemi, jättes selles sisalduvate väidete (I)–(III) tõestuse pärastiseks.

Olgu $F \in NBV$.

(I) Esmalt veendume, et leidub selline Boreli kompleksmõõt $\mu_F$ ruumis $\mathbb{R}$, et $\mu_F\big((-\infty, x)\big) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(II) Näitame, et kui $\mu$ on selline Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}$, et $\mu\big((-\infty, x)\big) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, siis $|\mu| = \mu_{T_F}$.

(III) Näitame, et kui $H \in NBV$ on reaalne funktsioon ja $\mu$ on selline märgiga Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}$, et $\mu\big((-\infty, x)\big) = H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, siis $\mu^+ = \mu_{\frac{1}{2}(T_H+H)}$ ja $\mu^- = \mu_{\frac{1}{2}(T_H-H)}$.

Kui väited (I)–(III) on tõestatud, jääb teoreemi tõestuseks veel tähele panna, et mõõt $\mu_F$ väitest (I) on üheselt määratud, sest väite (III) põhjal suvalise Boreli kompleksmõõdu $\mu$ korral ruumis $\mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust $\mu\big((-\infty, x)\big) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu_r^+ = \mu_{\frac{1}{2}(T_{\mathrm{Re}F}+\mathrm{Re}F)}, \quad \mu_r^- = \mu_{\frac{1}{2}(T_{\mathrm{Re}F}-\mathrm{Re}F)}, \quad \mu_i^+ = \mu_{\frac{1}{2}(T_{\mathrm{Im}F}+\mathrm{Im}F)}, \quad \mu_i^- = \mu_{\frac{1}{2}(T_{\mathrm{Im}F}-\mathrm{Im}F)}.$$

Tõestame nüüd väited (I)–(III).

(I). Tähistame

$$F_r^+ = \frac{T_{\mathrm{Re}F} + \mathrm{Re}F}{2}, \quad F_r^- = \frac{T_{\mathrm{Re}F} - \mathrm{Re}F}{2}, \quad F_i^+ = \frac{T_{\mathrm{Im}F} + \mathrm{Im}F}{2}, \quad F_i^- = \frac{T_{\mathrm{Im}F} - \mathrm{Im}F}{2}.$$

Teoreemi 3.2 põhjal on funktsioonid $F_r^+$, $F_r^-$, $F_i^+$ ja $F_i^-$ tõkestatud ja mittekahanevad ning vasakult pidevad, seega teoreemi I.5.1 põhjal leiduvad üheselt määratud Boreli mõõdud $\mu_{r,+}$, $\mu_{r,-}$, $\mu_{i,+}$ ja $\mu_{i,-}$ ruumis $\mathbb{R}$ nii, et mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$\mu_{r,+}\big([a,b)\big) = F_r^+(b) - F_r^+(a), \quad \mu_{r,-}\big([a,b)\big) = F_r^-(b) - F_r^-(a),$$
$$\mu_{i,+}\big([a,b)\big) = F_i^+(b) - F_i^+(a), \quad \mu_{i,-}\big([a,b)\big) = F_i^-(b) - F_i^-(a).$$

Need mõõdud on lõplikud (sest $T_{\mathrm{Re}F}, T_{\mathrm{Im}F}, F \in BV$ ning seega ka $F_r^+, F_r^-, F_i^+, F_i^- \in BV$). Siit järeldub, et kui defineerida $\mu_F = \mu_{r,+} - \mu_{r,-} + i(\mu_{i,+} - \mu_{i,-})$, siis $\mu_F$ on Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}$, kusjuures iga $x \in \mathbb{R}$ korral $\mu_F\big((-\infty, x)\big) = F(x)$.

**Ülesanne 3.7.** Veenduda selles.

(II). Olgu $\mu$ mingi selline Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}$, et $\mu\big((-\infty, x)\big) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Defineerime funktsiooni $G(x) = |\mu|\big((-\infty, x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$; siis $|\mu| = \mu_G$. Veendumaks, et $|\mu| = \mu_{T_F}$, piisab näidata, et $G = T_F$.

Kõigepealt, vahetult funktsiooni $T_F$ definitsioonist järeldub, et $T_F \leqslant G$.

**Ülesanne 3.8.** Veenduda selles.

Edasi, mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral $\big|\mu\big([a,b)\big)\big| \leqslant \mu_{T_F}\big([a,b)\big)$.

**Ülesanne 3.9.** Veenduda selles.

Seega mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral ka $\big|\mu\big((a,b)\big)\big| \leqslant \mu_{T_F}\big((a,b)\big)$.

**Ülesanne 3.10.** Veenduda selles.

Siit järeldub, et suvalise lahtise hulga $U \subset \mathbb{R}$ korral $|\mu(U)| \leqslant \mu_{T_F}(U)$.

**Ülesanne 3.11.** Veenduda selles.

NÄPUNÄIDE. Kasutada mittetühja lahtise hulga üldkuju ruumis $\mathbb{R}$ (vt. teoreemi I.2.2). Seejuures panna tähele, et iga tõkestamata vahemik ruumis $\mathbb{R}$ esitub lõikumatute paremalt lahtiste poollõikude loenduva ühendina.

Näitame nüüd, et iga Boreli hulga $E \subset \mathbb{R}$ korral $|\mu(E)| \leqslant \mu_{T_F}(E)$. Olgu $\mathbb{R} = P_r \cup N_r$ ja $\mathbb{R} = P_i \cup N_i$ ruumi $\mathbb{R}$ Hahni lahutused vastavalt mõõtude $\mu_r$ ja $\mu_i$ suhtes. Fikseerime vabalt Boreli hulga $E \subset \mathbb{R}$. Tähistame

$$E_1 = E \cap P_r \cap P_i, \quad E_2 = E \cap P_r \cap N_i, \quad E_3 = E \cap N_r \cap P_i, \quad E_4 = E \cap N_r \cap N_i.$$

Veendumaks, et $|\mu(E)| \leqslant \mu_{T_F}(E)$, piisab näidata, et iga $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ korral $|\mu(E_j)| \leqslant \mu_{T_F}(E_j)$, sest sellisel juhul

$$|\mu(E)| = \left|\sum_{j=1}^{4} \mu(E_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{4} |\mu(E_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{4} \mu_{T_F}(E_j) = \mu_{T_F}(E).$$

Tõestame võrratuse $|\mu(E_j)| \leqslant \mu_{T_F}(E_j)$ ainult juhul, kui $j = 1$. (Ülejäänud võrratused tõestatakse analoogiliselt.)

**Ülesanne 3.12.** Tõestada, et $|\mu(E_1)| \leqslant \mu_{T_F}(E_1)$.

NÄPUNÄIDE. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\delta := \min\{\mu_r^+(E_1), \mu_i^+(E_1)\} > 0$. Olgu $0 < \varepsilon < \delta$. Valime lahtise hulga $U \supset E_1$ nii, et $\mu_{T_F}(U) < \mu_{T_F}(E_1) + \varepsilon$ ja $\max\{\mu_r^-(U), \mu_i^-(U)\} < \varepsilon$. (Põhjendada, miks selline lahtine hulk $U$ leidub!) Aga nüüd $\mu_{T_F}(E_1) + \varepsilon > \sqrt{|\mu_r^+(E_1) - \varepsilon|^2 + |\mu_i^+(E_1) - \varepsilon|^2}$.

Niisiis, iga Boreli hulga $E \subset \mathbb{R}$ korral $|\mu(E)| \leqslant \mu_{T_F}(E)$. Siit järeldub, et iga Boreli hulga $E \subset \mathbb{R}$ korral $|\mu|(E) \leqslant \mu_{T_F}(E)$.

**Ülesanne 3.13.** Veenduda selles.

Aga siit järeldub, et $G \leqslant T_F$.

**Ülesanne 3.14.** Veenduda selles.

(III). Olgu $H \in NBV$ reaalne funktsioon ning olgu $\mu$ on selline märgiga Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}$, et $\mu\big((-\infty, x)\big) = H(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

**Ülesanne 3.15.** Veenduda, et $\mu^+ = \mu_{\frac{T_H + H}{2}}$ ja $\mu^- = \mu_{\frac{T_H - H}{2}}$.

NÄPUNÄIDE. Olgu funktsioonid $G_\pm \in NBV$ sellised, et $\mu^\pm = \mu_{G_\pm}$. Võrduste $\mu^\pm = \mu_{\frac{1}{2}(T_H \pm H)}$ tõestuseks piisab näidata, et $G_\pm = \frac{1}{2}(T_H \pm H)$. Selleks panna tähele, et $\mu^\pm = \frac{|\mu| \pm \mu}{2}$ ning kasutada eelnevalt tõestatud võrdust $|\mu| = \mu_{T_H}$.

□

Selle punkti lõpetuseks laiendame täisvariatsiooni(funktsiooni) mõiste lõigus defineeritud funktsioonidele.

**Definitsioon 3.3.** Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ning olgu $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Defineerime funktsiooni $T_F\colon [a, b] \to [0, \infty]$ järgmiselt: $x \in [a, b]$ korral

$$T_F(x) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| : \ n \in \mathbb{N},\ a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant x\right\}$$

(siin me loeme $T_F(a) = 0$). Funktsiooni $T_F$ nimetatakse funktsiooni $F$ *täisvariatsiooni(funktsiooni)ks.*

On ilmne, et $T_F$ on mittekahanev funktsioon. Suurust $V_a^b(F) := V_{[a,b]}(F) := T_F(b)$, nimetatakse funktsiooni $F$ *täisvariatsiooniks*. Kui $V_a^b(F) < \infty$, siis öeldakse, et $F$ on *tõkestatud variatsiooniga* funktsioon.

Tähistame

$$BV([a,b]) := \{F\colon\ [a,b] \to \mathbb{C},\ F \text{ on tõkestatud variatsiooniga}\}$$

ja

$$NBV([a,b]) := \Big\{F \in BV([a,b])\colon\ F \text{ on vasakult pidev ja } F(a) = 0\Big\}.$$

Kõik selle punkti tulemused laienevad loomulikul viisil ka (tõkestatud variatsiooniga) funktsioonidele $F\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$. Nimelt, kui $F\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ ning me defineerime

$$G(x) = \begin{cases} F(a), & \text{kui } x < a, \\ F(x), & \text{kui } a \leqslant x \leqslant b, \\ F(b), & \text{kui } x > b, \end{cases}$$

siis $T_G(x) = 0$, kui $x \leqslant a$, $T_G(x) = T_F(x)$, kui $a \leqslant x \leqslant b$ ja $T_G(x) = T_F(b)$, kui $x \geqslant b$.

**Näide 3.1.** (a) Kui $F$ on diferentseeruv (reaalsirgel $\mathbb{R}$), kusjuures $F'$ on tõkestatud, siis $F \in BV([a,b])$ mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral. (Selle väite tõestuses on otstarbekas kasutada Lagrange'i keskväärusteoreemi.)

(b) Kui $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, siis $F \notin BV$, kuid $F \in BV([a,b])$ mis tahes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral.

(c) Kui

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

siis $F \notin BV([a,b])$ alati, kui $a \leqslant 0 < b$ või $a < 0 \leqslant b$.

**Ülesanne 3.16.** Tõestada eelneva näite väited.

## 3.2. Newton–Leibnizi valemid Lebesgue'i integraali jaoks ruumis $\mathbb{R}$

Kõigepealt anname vastuse loomulikule küsimusele: millised funktsioonid $F \in NBV$ vastavad sellistele Boreli kompleksmõõtudele $\mu$ ruumis $\mathbb{R}$, et (1) $\mu \perp m$; (2) $\mu \ll m$?

**Lause 3.5.** *Olgu $F \in NBV$. Siis peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}$ korral eksisteerib lõplik tuletis $F'(x)$. Seejuures $F' \in L_1(m)$ ning*

(a) *$\mu_F \perp m$ parajasti siis, kui $F' = 0$ p.k.;*

(b) *$\mu_F \ll m$ parajasti siis, kui $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.*

Tõestus. Olgu $d\mu_F = d\lambda + f\,dm$ kompleksmõõdu $\mu_F$ Lebesgue–Radon–Nikodými lahutus. Siis $f \in L_1(m)$. Iga $x \in \mathbb{R}$ korral pered $\big([x, x+r)\big)_{r>0}$ ja $\big([x-r, x)\big)_{r>0}$ shrink nicely to $x$, seega Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi 1.6 põhjal peaaegu kõikide $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0+} \frac{F(x+r)-F(x)}{r} &= \lim_{r\to 0+} \frac{\mu_F\big([x,x+r)\big)}{m\big([x,x+r)\big)} = f(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\mu_F\big([x-r,x)\big)}{m\big([x-r,x)\big)} \\ &= \lim_{r\to 0+} \frac{F(x)-F(x-r)}{r} = \lim_{r\to 0+} \frac{F(x-r)-F(x)}{-r},\end{aligned}$$

järelikult lõplik tuletis $F'$ eksisteerib p.k., kusjuures $F' = f \in L_1(m)$. Väidete (a) ja (b) tõestuseks jääb nüüd märkida, et

$$\mu_F \perp m \iff \mu_F = \lambda \iff f = 0 \text{ p.k.} \iff F' = 0 \text{ p.k.}$$

ning

$$\begin{aligned}\mu_F \ll m \quad &\iff \quad \lambda = 0 \iff d\mu_F = f\,dm \iff d\mu_F = F'\,dm \\ &\iff \quad \text{iga } E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ korral} \quad \mu_F(E) = \int_E F'\,dm \\ &\overset{(\bullet)}{\iff} \quad \text{iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral} \quad \mu_F\big((-\infty, x)\big) = \int_{(-\infty,x)} F'\,dm \\ &\iff \quad \text{iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'\,dm.\end{aligned}$$

**Ülesanne 3.17.** Tõestada samaväärsus $(\bullet)$.

□

Järgnevalt näitame, et tingimus $\mu_F \ll m$ on väljendatav ka funktsiooni $F$ terminites.

**Definitsioon 3.4.** Öeldakse, et funktsioon $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on absoluutselt pidev, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $-\infty < a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \dots \leqslant a_n < b_n < \infty$ korral

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

**Märkus 3.2.** On ilmne, et iga absoluutselt pidev funktsioon on ühtlaselt pidev ning seega pidev. Teiselt poolt, kui funktsioon $F$ on diferentseeruv kogu reaalsirgel $\mathbb{R}$, kusjuures tema tuletis $F'$ on tõkestatud, siis $F$ on absoluutselt pidev, sest, kui tähistada $M = \max_{x\in\mathbb{R}} |F'(x)|$, siis Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal $|F(b_j) - F(a_j)| \leqslant M\,(b_j - a_j)$.

**Lause 3.6.** *Olgu $F \in NBV$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$F$ on absoluutselt pidev;*

(ii) *$\mu_F \ll m$.*

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu $F$ absoluutselt pidev. Veendume kõigepealt, et $T_F$ on samuti absoluutselt pidev. Funktsiooni $F$ absoluutse pidevuse tõttu leidub iga $\varepsilon > 0$ korral $\delta_\varepsilon > 0$ nii, et mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $-\infty < a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n < \infty$ korral

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n}|F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Kui nüüd $n \in \mathbb{N}$ ja $-\infty < a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n < \infty$ on sellised, et $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta_\varepsilon$, siis mis tahes $N_1, \ldots, N_n \in \mathbb{N}$ ja $a_j = t_0^j < t_1^j < \cdots < t_{N_j}^j = b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, korral

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j}|F(t_i^j) - F(t_{i-1}^j)| < \varepsilon$$

(sest $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j}(t_i^j - t_{i-1}^j) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta_\varepsilon$), järelikult valemi (3.1) põhjal

$$\sum_{j=1}^{n}\bigl|T_F(b_j) - T_F(a_j)\bigr| = \sum_{j=1}^{n}\bigl(T_F(b_j) - T_F(a_j)\bigr) \leqslant \varepsilon.$$

Niisiis on $T_F$ absoluutselt pidev.

Olgu nüüd $E \in \mathcal{L}$ selline, et $m(E) = 0$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Veendumaks, et $\mu_F \ll m$, piisab näidata, et $\mu_{T_F}(E) = |\mu_F|(E) \leqslant \varepsilon$. Kuna Lebesgue'i mõõdu definitsiooni põhjal

$$m(E) = \inf\Bigl\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots,\ \bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j) \supset E\Bigr\},$$

siis leiduvad paarikaupa lõikumatud poollõigud $[a_j, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, selliselt et $\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j) \supset E$ ja $\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \delta_\varepsilon$ (siin $\delta_\varepsilon$ pärineb implikatsioonist (3.2)). Aga nüüd eelnevalt tõestatu põhjal

$$\begin{aligned}\mu_{T_F}(E) &\leqslant \mu_{T_F}\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j)\Bigr) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_{T_F}\bigl([a_j, b_j)\bigr) = \sum_{j=1}^{\infty}\bigl(T_F(b_j) - T_F(a_j)\bigr)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\bigl(T_F(b_j) - T_F(a_j)\bigr) \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

(sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta_\varepsilon$).

(ii)$\Rightarrow$(i). Olgu $\mu_F \ll m$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $-\infty < a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n < \infty$ korral lause 3.5 põhjal

$$\sum_{j=1}^{n}|F(b_j) - F(a_j)| = \sum_{j=1}^{n}\bigl|\mu_F\bigl([a_i, b_i)\bigr)\bigr| = \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{[a_j,b_j)}F'\,dm\right| \leqslant \int_{\bigcup_{j=1}^{n}[a_j,b_j)}|F'|\,dm.$$

Kuna $F' \in L_1(m)$, siis järelduse IV.2.4 põhjal leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \mathcal{L},\ m(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E |F'|\,dm < \varepsilon.$$

Kui nüüd $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j)\right) < \delta$, siis

$$\sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| \leqslant \int_{\bigcup_{j=1}^n [a_j,b_j)} |F'|\, dm < \varepsilon.$$

□

**Teoreem 3.7** (Newton–Leibnizi valem Lebesgue'i integraali jaoks). (a) *Olgu* $f \in L_1(m)$. *Defineerime funktsiooni* $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. *Siis* $F \in NBV$, $F$ *on absoluutselt pidev ning* $f = F'$ *p.k.*

(b) *Olgu funktsioon* $F \in NBV$ *absoluutselt pidev. Siis* $F$ *on diferentseeruv p.k., kusjuures* $F' \in L_1(m)$ *ning* $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Tõestus. (a). Kõigepealt paneme tähele, et $F \in BV$.

**Ülesanne 3.18.** Tõestada, et iga $V_{\mathbb{R}}(F) \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$.

Olgu arvjada $(x_n)_{j=1}^\infty$ selline, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Veendumaks, et $F(-\infty) = 0$, piisab näidata, et $F(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Kuna $f \in L_1(m)$, siis domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\, dt - \int_{x_n}^{x_1} f(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Veendumaks, et $F \in NBV$, jääb näidata, et $F$ on vasakult pidev.

**Ülesanne 3.19.** Tõestada, et $F$ on vasakult pidev.

Veendume nüüd, et $F' = f$ p.k. Selleks defineerime $d\nu = f\, d\mu$ ja paneme tähele, et kõikide $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt = \nu\big([a, b)\big).$$

Lebesgue'i diferentseerimisteoreemi 1.6 põhjal p.k. $x \in \mathbb{R}$ korral, arvestades, et pered $\big([x, x+r)\big)_{r>0}$ ja $\big([x-r, x)\big)_{r>0}$ shrink nicely to $x$,

$$\lim_{r\to 0+} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} = \lim_{r\to 0+} \frac{\nu\big([x, x+r)\big)}{m\big([x, x+r)\big)} = f(x)$$

ja

$$\lim_{r\to 0+} \frac{F(x-r) - F(x)}{-r} = \lim_{r\to 0+} \frac{F(x) - F(x-r)}{r} = \lim_{r\to 0+} \frac{\nu\big([x-r, x)\big)}{m\big([x-r, x)\big)} = f(x);$$

seega p.k. eksisteerib tuletis $F' = f$.

Kuna iga $x \in \mathbb{R}$ korral $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt = \int_{-\infty}^x F'(t)\, dt$, siis lause 3.5 põhjal $\mu_F \ll m$, seega lause 3.6 põhjal $F$ on absoluutselt pidev.

(b). Väide järeldub vahetult lausetest 3.6 ja 3.5. □

Absoluutse pidevuse mõiste on loomulikul viisil laiendatav ka lõigus määratud funktsioonidele.

**Definitsioon 3.5.** Olgu $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Öeldakse, et funktsioon $F\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ on absoluutselt pidev, kui iga reaalarvu $\varepsilon>0$ korral leidub reaalarv $\delta>0$ nii, et mis tahes $n\in\mathbb{N}$ ja $a\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n\leqslant b$ korral

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)<\delta \qquad\Longrightarrow\qquad \sum_{j=1}^{n}|F(b_j)-F(a_j)|<\varepsilon.$$

**Lause 3.8.** *Olgu $F\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ absoluutselt pidev funktsioon. Siis $F\in BV([a,b])$.*

Tõestus. Valime $\delta>0$ nii, et mis tahes $n\in\mathbb{N}$ ja $a\leqslant a_1<b_1\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n\leqslant b$ korral

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)<\delta \qquad\Longrightarrow\qquad \sum_{j=1}^{n}|F(b_j)-F(a_j)|<1. \tag{3.3}$$

Edasi, valime $N\in\mathbb{N}$ selliselt, et $N\,\delta>b-a$. Näitame, et $V_a^b(F)\leqslant N$.

Selleks fikseerime vabalt $n\in\mathbb{N}$ ja $a=x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$. Jaotame lõigu $[a,b]$ osalõikudeks $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2],\dots,[a_N,b_N]$ punktidega

$$a=a_1<b_1=a_2<b_2=\cdots=a_N<b_N=b$$

nii, et $b_k-a_k<\delta$, $k=1,\dots,N$ (s.t. iga osalõigu $[a_k,b_k]$ pikkus on väiksem kui $\delta$), ning iga osalõigu $[a_k,b_k]$ omakorda osalõikudeks $[a_1^k,b_1^k]$, $[a_2^k,b_2^k],\dots,[a_{n_k}^k,b_{n_k}^k]$ (siin $n_k\in\mathbb{N}$) punktidega

$$a_k=a_1^k<b_1^k=a_2^k<b_2^k=\cdots=a_{n_k}^k<b_{n_k}^k=b_k$$

nii, et igaüks punktidest $x_0,x_1,\dots,x_n$ oleks mingi osalõigu $[a_i^k,b_i^k]$ otspunkt (siin $k\in\{1,\dots,N\}$ ja $i\in\{1,\dots,n_k\}$). Aga nüüd

$$\sum_{j=1}^{n}|F(x_j)-F(x_{j-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}|F(b_i^k)-F(a_i^k)|<N$$

(sest iga $k\in\{1,\dots,N\}$ koral $\sum_{i=1}^{n_k}(b_i^k-a_i^k)=b_k-a_k<\delta$ ning järelikult implikatsiooni (3.3) põhjal $\sum_{i=1}^{n_k}\bigl|F(b_i^k)-F(a_i^k)\bigr|<1$), millest järeldubki, et $V_a^b(F)\leqslant N$. □

**Teoreem 3.9** (Newton–Leibnizi valem Lebesgue'i integraali jaoks)**.** *Olgu $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, ning olgu $F\colon [a,b]\to\mathbb{C}$. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *$F$ on absoluutselt pidev lõigus $[a,b]$.*

(ii) *Leidub $f\in L_1\bigl([a,b],m\bigr)$ nii, et $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$.*

(iii) *$F$ on diferentseeruv p.k. lõigus $[a,b]$, $F'\in L_1\bigl([a,b],m\bigr)$ ning*

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\,dt,\qquad x\in[a,b].$$

TÕESTUS. (i)⇒(iii). Olgu funktsioon $F$ absoluutselt pidev lõigus $[a, b]$. Defineerime funktsiooni

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -\infty < x < a; \\ F(x) - F(a), & \text{kui } a \leqslant x \leqslant b; \\ F(b) - F(a), & \text{kui } b < x < \infty; \end{cases}$$

siis $G \in NBV$ on absoluutselt pidev funktsioon, seega teoreemi 3.7, (b), põhjal $G$ on diferentseeruv peaaegu kõikjal sirgel $\mathbb{R}$, järelikult $F$ on diferentseeruv p.k. lõigus $[a, b]$, kusjuures $F' = G'$ p.k. lõigus $[a, b]$. Seejuures (jällegi teoreemi 3.7, (b), põhjal) $G' \in L_1(m)$ ning järelikult $F' \in L_1([a, b], m)$, kusjuures iga $x \in [a, b]$ korral

$$F(x) - F(a) = G(x) = \int_{-\infty}^{x} G'(t)\,dt = \int_{a}^{x} G'(t)\,dt = \int_{a}^{x} F'(t)\,dt.$$

(iii)⇒(ii) on ilmne.

(ii)⇒(i). Eksisteerigu funktsioon $f \in L_1([a, b], m)$ nii, et $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$. Jätkame funktsiooni $f$ kogu reaalsirgele $\mathbb{R}$ funktsiooniks $g$, defineerides $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Siis $g \in L_1(m)$, niisiis, kui defineerida $G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, siis teoreemi 3.7, (a), põhjal on $G$ absoluutselt pidev. Kuna iga $x \in [a, b]$ korral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a) = \int_a^x g(t)\,dt + F(a) = \int_{-\infty}^x g(t)\,dt + F(a) = G(x) + F(a),$$

siis ka $F$ on absoluutselt pidev. □

Selle punkti lõpetuseks anname Boreli kompleksmõõtude jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$ ühe sagedasti kasutatava lahutuse.

**Definitsioon 3.6.** Olgu $\mu$ Boreli kompleksmõõt ruumis $\mathbb{R}^n$.

Öeldakse, et $\mu$ on *diskreetne,* kui leiduvad punktid $x_j \in \mathbb{R}^n$ ja arvud $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\,\delta_{x_j}$ (siin $\delta_{x_j}$ on Diraci mõõt punktis $x_j$).

On ilmne, et kui $\mu$ on diskreetne, siis $\mu \perp m$.

Öeldakse, et $\mu$ on *pidev,* kui iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral $\mu(\{x\}) = 0$.

Iga Boreli kompleksmõõt $\mu$ ruumis $\mathbb{R}^n$ on ühesel viisil esitatav kujul $\mu = \mu_d + \mu_c$, kus Boreli kompleksmõõt $\mu_d$ on diskreetne ja $\mu_c$ on pidev.

Tõepoolest, tähistame $D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mu(\{x\}) \neq 0\}$. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral on hulk $D_k := \{x \in D \colon |\mu(\{x\})| > k^{-1}\}$ lõplik (sest kui mingi $D_k$ oleks lõpmatu, siis eksisteeriks loenduv alamhulk $D_0 = \{x_j \colon j \in \mathbb{N}\} \subset D_k$, aga sel juhul $\infty = \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(\{x_j\})| = |\mu|(D_0) < \infty$, vastuolu), järelikult $D$ on ülimalt loenduv. Kui nüüd defineerida iga Boreli hulga $E \subset \mathbb{R}^n$ korral $\mu_d(E) = \mu(E \cap D)$ ja $\mu_c(E) = \mu(E \cap D^c)$, siis $\mu = \mu_d + \mu_c$, kusjuures $\mu_d$ on diskreetne ja $\mu_c$ on pidev.

Mõõdu $\mu_c$ saab omakorda esitada Lebesgue'i lahutusena (Lebesgue'i mõõdu suhtes): $\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$, kus $\mu_{ac} \ll m$ ja $\mu_{sc} \perp m$. On ilmne, et selles lahutuses mõlemad kompleksmõõdud $\mu_{ac}$ ja $\mu_{sc}$ on pidevad.

Niisiis, iga Boreli kompleksmõõt $\mu$ ruumis $\mathbb{R}^n$ on ühesel viisil esitatav kujul

$$\mu = \mu_d + \mu_{ac} + \mu_{sc},$$

kus $\mu_d$ on diskreetne ning $\mu_{ac}$ ja $\mu_{sc}$ on pidevad, kusjuures $\mu_{ac} \ll m$ ja $\mu_{sc} \perp m$.

**Märkus 3.3.** Pidevate, kuid Lebesgue'i mõõdu suhtes singulaarsete Boreli kompleksmõõtude olemasolu ruumis $\mathbb{R}^n$ ei paista sugugi ilmne (eriti juhul $n = 1$), kuid nad on olemas!

## 3.3. Lebesgue–Stieltjesi integraalid. Ositi integreerimise valemid

Kui $F \in NBV$, siis integraale mõõdu $\mu_F$ järgi ruumis $\mathbb{R}$ nimetatakse *Lebesgue–Stieltjesi integraalideks.* Seejuures $f \in L_1(\mu_F)$ korral tähistatakse

$$\int f\, d\mu_F =: \int f\, dF =: \int f(x)\, dF(x).$$

Selle paragrahvi lõpetuseks esitame ühe versiooni *ositi integreerimise valemist* Lebesgue–Stieltjesi integraali jaoks.

**Teoreem 3.10** (ositi integreerimise valem Lebesgue–Stieltjesi integraali jaoks)**.** *Olgu $F, G \in NBV$, kusjuures vähemalt üks neist funktsioonidest on pidev, ning olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Siis*

$$\int_{[a,b)} F\, dG + \int_{[a,b)} G\, dF = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a).$$

TÕESTUS. Kuna $F, G \in NBV$, siis üldisust kitsendamata võime eeldada, et $F, G \in NBV$ on reaalsed mittekahanevad funktsioonid.

**Ülesanne 3.20.** Veenduda, et see eeldus ei kitsenda üldisust.

Nüüd paneme tähele, et funktsioonid $F$ ja $G$ on Boreli mõttes mõõtuvad, kusjuures $F \in L_1(\mu_G)$ ja $G \in L_1(\mu_F)$.

**Ülesanne 3.21.** Veenduda selles.

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et monotoonne funktsioon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv.

Oletame konkreetsuse mõttes, et $G$ on pidev. Tähistame

$$\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ a \leqslant x < y < b\big\}.$$

Paneme tähele, et $G$ pidevuse tõttu iga $x < b$ korral $\mu_G\big((x, b)\big) = G(b) - G(x)$.

**Ülesanne 3.22.** Veenduda selles.

Nüüd Fubini teoreemi põhjal ühelt poolt,

$$\begin{aligned}\mu_F \times \mu_G(\Omega) &= \int_{[a,b)} \mu_G\big((x,b)\big)\,dF(x) = \int_{[a,b)} \Big(G(b) - G(x)\Big)\,dF(x)\\ &= G(b)\int_{[a,b)} dF - \int_{[a,b)} G\,dF = G(b)\Big(F(b) - F(a)\Big) - \int_{[a,b)} G\,dF,\end{aligned}$$

teiselt poolt, arvestades, et $G$ pidevuse tõttu $\mu_G(\{a\}) = 0$,

$$\begin{aligned}\mu_F \times \mu_G(\Omega) &= \int_{(a,b)} \mu_F\big([a,y)\big)\,dG(y) = \int_{[a,b)} \mu_F\big([a,y)\big)\,dG(y)\\ &= \int_{[a,b)} \Big(F(y) - F(a)\Big)\,dG(y) = -F(a)\int_{[a,b)} dG + \int_{[a,b)} F\,dG\\ &= -F(a)\Big(G(b) - G(a)\Big) + \int_{[a,b)} F\,dG.\end{aligned}$$

Lahutades teineteisest saadud kahe võrdusteahela vasakud ja paremad pooled, järeldub soovitud võrdus. □

## 3.4. Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

**Definitsioon 3.7.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Hulka $A \in \mathfrak{A}$, $\mu(A) > 0$, nimetatakse *aatomiks,* kui

$$\mathfrak{A} \ni B \subset A \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(B) = 0 \quad \text{või} \quad \mu(B) = \mu(A).$$

**Ülesanne 3.23.** Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ilma aatomiteta mõõduga ruum, olgu $A \in \mathfrak{A}$, $\mu(A) > 0$, ning olgu $0 < c < \mu(A)$. Tõestada, et leidub $B \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$, nii, et $\mu(B) = c$.

**Ülesanne 3.24.** Olgu $\mu$ Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}$, mis on lõplik tõkestatud hulkadel. Tõestada, et iga aatomi $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ korral leidub $a \in A$ nii, et $\mu\big(\{a\}\big) = \mu(A)$.

# VII peatükk.
# $L_p$-ruumid

## § 1. $L_p$-ruumi mõiste ja põhiomadused

Kõikjal selles paragrahvis on $\mathbb{K}$ üks korpustest $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$ ning $(X,\mathfrak{A},\mu)$ on mõõduga ruum. Funktsiooni $f\colon\ X\to\mathbb{K}$ mõõtuvuse ja integreeruvuse all mõistetakse tema $\mathfrak{A}$-mõõtuvust ja $\mu$-integreeruvust. “Peaaegu kõikjal” tähendab “$\mu$-peaaegu kõikjal”. Sümbol $\overline{\mu}$ tähistab mõõdu $\mu$ täieldit.

### 1.1. Ruumi $L_p$ $(0<p<\infty)$ mõiste

Olgu $0<p<\infty$. Kui $f\colon\ X\to\mathbb{K}$ on mõõtuv funktsioon, siis tähistame

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(rõhutame, et me ei välista siinkohal võimalust $\|f\|_p=\infty$). Defineerime

$$L_p(X,\mathfrak{A},\mu):=\Big\{f\colon\ X\to\mathbb{K},\ f\text{ on mõõtuv funktsioon, }\|f\|_p<\infty\Big\}.$$

Kui $\mathfrak{A}$ ja $\mu$ või $(X,\mathfrak{A})$ või $(X,\mathfrak{A},\mu)$ roll on kontekstist selge, siis kirjutatakse $L_p(X,\mathfrak{A},\mu)$ asemel ka lihtsalt vastavalt $L_p(X)$, $L_p(\mu)$ või $L_p$.

Kui $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, siis sümboliga $L_p[a,b]$ tähistatakse hulka $L_p\big([a,b],\mathcal{L}_{[a,b]},m\big)$, kus $\mathcal{L}_{[a,b]}$ on lõigu $[a,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebra ja $m$ on Lebesgue'i mõõt.

Kui $\Gamma\neq\emptyset$ on mingi hulk, siis me tähistame $\ell_p(\Gamma)=L_p(\Gamma,\mathcal{P}(\Gamma),c)$, kus $c$ on loendamismõõt hulga $\Gamma$ kõikide alamhulkade kogumil $\mathcal{P}(\Gamma)$. Me kirjutame $\ell_p=\ell_p(\mathbb{N})$.

**Ülesanne 1.1.** Olgu $\Gamma\neq\emptyset$ mingi hulk ning olgu $1\leqslant p<\infty$.

(a) Olgu $f\in\ell_p(\Gamma)$. Tõestada, et hulk $\{x\in\Gamma\colon\ f(x)\neq 0\}$ on ülimalt loenduv.

(b) Olgu $f\colon\ \Gamma\to\mathbb{K}$. Tõestada, et

$$\|f\|_p=\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\colon\ n\in\mathbb{N},\,x_1,\dots,x_n\in\Gamma,\,x_j\neq x_i,\,i\neq j\right\}.$$

(c) Mis tahes funktsioon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ on tõlgendatav jadana $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, kus $\xi_k = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. (Tegelikult jada $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ defineeritaksegi kui funktsioon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, mille korral $\xi_k = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$.) Veenduda, et

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, dc\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Selles paragrahvis anname hulgale $L_p$ vektorruumi ning juhtudel, kus $1 \leqslant p < \infty$, ka Banachi ruumide struktuuri.

Vajadus võrratuste järele, mis garanteeriksid, et $L_p$, kus $1 \leqslant p < \infty$, on vektorruum, ning, veelgi enam, normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_p$ suhtes, annab meile hea võimaluse tutvuda *kumerate* funktsioonidega.

## 1.2. Kumerad funktsioonid

Olgu $X \subset \mathbb{R}$ intervall.

**Definitsioon 1.1.** Öeldakse, et funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ on *kumer* (intervallis $X$), kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\lambda \in (0, 1)$ korral

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Öeldakse, et funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ on *rangelt kumer* (intervallis $X$), kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\lambda \in (0, 1)$ korral

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Mõistel “kumer funktsioon” (vastavalt, “rangelt kumer funktsioon") on lihtne geomeetriline tõlgendus: funktsioon on kumer (vastavalt, rangelt kumer) mingis intervallis parajasti siis, kui selles intervallis tema graafiku mis tahes kahte punkti ühendav sirglõik paikneb nende punktide vahel mitte allpool graafikut (vastavalt, paikneb allpool graafikut).

**Lause 1.1.** *Olgu $X \subset \mathbb{R}$ intervall ning olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$f$ on kumer;*

(ii) *mis tahes $x_1, x_2, x_3 \in X$, $x_1 < x_2 < x_3$, korral*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{(1.1')}{\leqslant} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \overset{(1.1'')}{\leqslant} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}; \tag{1.1}$$

(iii) *mis tahes $x_1, x_2, x_3 \in X$, $x_1 < x_2 < x_3$, korral*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{1.2}$$

**Märkus 1.1.** Intervallis $X \subset \mathbb{R}$ rangelt kumeraid funktsioone kirjeldab lause 1.1 analoog, kus võrratused (1.1) ja (1.2) on ranged ning mille tõestus on analoogiline lause 1.1 tõestusega.

LAUSE 1.1 TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ kumer ning olgu $x_1, x_2, x_3 \in X$, $x_1 < x_2 < x_3$. Tähistame $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Siis $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$, seega

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\big) - f(x_1)}{\lambda(x_3 - x_1)} \leqslant \frac{(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) - f(x_1)}{\lambda(x_3 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},\end{aligned}$$

s.t. võrratus (1.1') kehtib. Samuti kehtib võrratus (1.1"), sest

$$\begin{aligned}\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} &= \frac{f(x_3) - f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\big)}{x_3 - \big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\big)} \geqslant \frac{f(x_3) - \big((1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)\big)}{(1-\lambda)(x_3 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) on ilmne.

(iii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iii) ning olgu $x, y \in X$, $x < y$, ja $\lambda \in (0,1)$. Tähistame $x_1 = x$, $x_2 = (1-\lambda)x + \lambda y$, $x_3 = y$. Funktsiooni $f$ kumeruse tõestuseks intervallis $X$ tuleb näidata, et

$$f(x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3). \tag{1.3}$$

Kuna $x_1 < x_2 < x_3$, siis tingimuse (iii) põhjal

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\big) - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - \big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\big)}$$

ehk

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\lambda(x_3 - x_1)} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(1-\lambda)(x_3 - x_1)},$$

millest järeldub võrratus (1.3). □

**Järeldus 1.2.** *Olgu $X \subset \mathbb{R}$ lahtine intervall ning olgu funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ kumer.*

(a) *Funktsioonil $f$ eksisteerivad intervalli $X$ igas punktis lõplikud ühepoolsed tuletised. Seejuures mis tahes $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, korral*

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2).$$

*Muuhulgas, funktsiooni $f$ ühepoolsed tuletised on mittekahanevad intervallis $X$.*

(b) *Kui funktsioon $f$ on rangelt kumer intervallis $X$, siis mis tahes $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, korral*

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) < f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2).$$

*Muuhulgas, funktsiooni $f$ ühepoolsed tuletised on kasvavad intervallis $X$.*

(c) *Funktsioon $f$ on pidev intervallis $X$.*

TÕESTUS. (a). Olgu $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Lause 1.1 põhjal on funktsioonid

$$y \longmapsto \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1}, \ \ y < x_1, \qquad \text{ja} \qquad z \longmapsto \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1}, \ \ z > x_1,$$

mittekahanevad, kusjuures $y < x_1 < z$ korral alati $\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leqslant \frac{f(z)-f(x_1)}{z-x_1}$; seega eksisteerivad lõplikud ühepoolsed tuletised

$$f'_-(x_1) = \lim_{y \to x_1 -} \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leqslant \lim_{z \to x_1 +} \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'_+(x_1).$$

Analoogiliselt saab näidata, et eksisteerivad lõplikud ühepoolsed tuletised $f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2)$. Seejuures, fikseerides vabalt $x_0 \in (x_1, x_2)$, saame jällegi lause 1.1 põhjal, et

$$\begin{aligned} f'_+(x_1) &= \lim_{z \to x_1 +} \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} \leqslant \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \\ &\leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leqslant \lim_{y \to x_2 -} \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2} = f'_-(x_2). \end{aligned}$$

(b).

**Ülesanne 1.2.** Tõestada väide (b).

(c). Funktsiooni $f$ pidevus intervalli $X$ mis tahes punktis järeldub tema lõplike ühepoolsete tuletiste olemasolust selles punktis. □

**Järeldus 1.3.** *Olgu $X \subset \mathbb{R}$ lahtine intervall ning olgu funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv intervallis $X$.*

(a) *Funktsioon $f$ on kumer parajasti siis, kui $f''(x) \geqslant 0$ igas punktis $x \in X$.*

(b) *Kui $f''(x) > 0$ igas punktis $x \in X$, siis $f$ on rangelt kumer.*

TÕESTUS. (a). *Tarvilikkus.* Kui funktsioon $f$ on kumer, siis järelduse 1.2, (b), põhjal on tema tuletis mittekahanev intervallis $X$ ning järelikult $f''(x) \geqslant 0$, $x \in X$.

*Piisavus.* Olgu $f''(x) \geqslant 0$, $x \in X$. Fikseerime vabalt $x_1, x_2, x_3 \in X$, $x_1 < x_2 < x_3$. Taylori valemi põhjal (jääkliikmega Lagrange'i kujul) leiduvad punktid $\xi \in (x_1, x_2)$ ja $\eta \in (x_2, x_3)$ nii, et

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_2)\,(x_1 - x_2) + f''(\xi)\,(x_1 - x_2)^2 \geqslant f'(x_2)\,(x_1 - x_2)$$

ja

$$f(x_3) - f(x_2) = f'(x_2)\,(x_3 - x_2) + f''(\eta)\,(x_3 - x_2)^2 \geqslant f'(x_2)\,(x_3 - x_2),$$

millest

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2) \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Lause 1.1 põhjal on funktsioon $f$ kumer.

(b). Väite tõestus on analoogiline väite (a) piisavuse tõestusega. □

## 1.3. Hölderi ja Minkowski võrratused

**Lemma 1.4.** *Kui $a, b \geqslant 0$ ja $0 < \lambda < 1$, siis*

$$a^{1-\lambda} b^{\lambda} \leqslant (1-\lambda)a + \lambda b, \tag{1.4}$$

*kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b$.*

TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a, b > 0$. Siis võrratus (1.4) on samaväärne võrratusega

$$(1-\lambda)\ln a + \lambda \ln b \leqslant \ln\big((1-\lambda)a + \lambda b\big)$$

ehk

$$-\ln\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)(-\ln a) + \lambda(-\ln b).$$

Kuna funktsioon $f(x) = -\ln x$, $x \in (0, \infty)$, on rangelt kumer (sest $f''(x) = (-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2} > 0$, $x \in (0, \infty)$), siis see võrratus kehtib, kusjuures võrdus temas kehtib parajasti siis, kui $a = b$. □

**Märkus 1.2.** Lemma 1.4 tõestamisel saab lihtsasti hakkama ka ilma kumera funktsiooni mõistet kasutamata.

Tõepoolest, jällegi võime üldisust kitsendamata eeldada, et $a, b > 0$. Jagades võrratuse (1.4) mõlemad pooled läbi arvuga $a$ ja tähistades $t = \frac{b}{a}$, jääb meil näidata, et $t^{\lambda} - \lambda t \leqslant 1 - \lambda$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $t = 1$. Elementaarkalkulus ütleb meile, et funktsioon $\phi(t) = t^{\lambda} - \lambda t$ on rangelt kasvav vahemikus $(0, 1)$ ning rangelt kahanev vahemikus $(1, \infty)$, niisiis tema suurim väärtus vahemikus $(0, \infty)$ saavutatakse parajasti punktis $t = 1$; seejuures see suurim väärtus on $\phi(1) = 1 - \lambda$.

**Definitsioon 1.2.** Öeldakse, et arvud $p, q \in (1, \infty)$ on *kaaseksponendid,* kui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Teoreem 1.5** (Hölderi võrratus)**.** *Olgu arvud $p, q \in (1, \infty)$ kaaseksponendid ning olgu $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ mõõtuvad funktsioonid . Siis*

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leqslant \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{1.5}$$

*Muuhulgas, kui $f \in L_p$ ja $g \in L_q$, siis $fg \in L_1$. Võrdus $\|fg\|_1 = \|f\|_p \, \|g\|_q$ kehtib parajasti siis, kui leidub konstant $\alpha \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha|f|^p = |g|^q$ p.k. või $\alpha|g|^q = |f|^p$ p.k.*

TÕESTUS. Kui $\int |f|^p = 0$ või $\int |g|^q = 0$, siis $f = 0$ p.k. või $g = 0$ p.k., seega $fg = 0$ p.k. ning $\int |fg| = 0$; niisiis võrratus (1.5) kehtib triviaalselt. Seepärast vaatleme juhtu, kus $\int |f|^p, \int |g|^q \neq 0$.

Defineerime funktsioonid

$$a(x) = \frac{|f(x)|^p}{\int |f|^p}, \quad b(x) = \frac{|g(x)|^q}{\int |g|^q}, \quad x \in X.$$

Lemma 1.4 põhjal peaaegu kõikide $x \in X$ korral

$$\frac{|f(x)\,g(x)|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} = |a(x)|^{\frac{1}{p}}\ |b(x)|^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}\,|a(x)| + \frac{1}{q}\,|b(x)| = \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\int |f|^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\int |g|^q},$$

seega

$$\frac{\int |f(x)\,g(x)|\,d\mu(x)}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\int |f(x)|^p\,d\mu(x)}{p\int |f|^p} + \frac{\int |g(x)|^q\,d\mu(x)}{q\int |g|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

niisiis võrratus (1.5) kehtib.

**Ülesanne 1.3.** Tõestada, et võrratuses (1.5) kehtib võrdus parajasti siis, kui leidub konstant $\alpha \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha|f|^p = |g|^q$ p.k. või $\alpha|g|^q = |f|^p$ p.k.

□

**Teoreem 1.6** (Minkowski võrratus)**.** *Olgu $1 \leqslant p < \infty$ ning olgu $f, g \in L_p$. Siis*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Võrdus $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ kehtib parajasti siis, kui leidub $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, nii, et $\alpha f = g$ p.k. või $\alpha\, g = f$ p.k.*

Tõestus. Minkowski võrratuse $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ võib kirja panna kujul

$$\left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

Juhul $p = 1$ on selle võrratuse kehtivus ilmne. Kui $1 < p < \infty$, siis Hölderi võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p &= \int |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leqslant \int (|f| + |g|)\,|f+g|^{p-1} \\
&= \int |f|\,|f+g|^{p-1} + \int |g|\,|f+g|^{p-1} \\
&\leqslant \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

(sest $(p-1)q = p$), millest järeldub võrratus (1.6).

**Ülesanne 1.4.** Tõestada, et võrdus $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ kehtib parajasti siis, kui leidub $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, nii, et $\alpha f = g$ p.k. või $\alpha\, g = f$ p.k.

□

## 1.4. Ruumid $L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ kui Banachi ruumid

Olgu $0 < p < \infty$.

On ilmne, et $L_p$ on loomulike tehete suhtes vektorruum. Seejuures me loeme kaks hulka $L_p$ kuuluvat funktsiooni ruumi $L_p$ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal.

**Ülesanne 1.5.** Veenduda, et $L_p$ on funktsioonide liitmise suhtes kinnine, s.t. kui $f, g \in L_p$, siis ka $f + g \in L_p$.

Vahetult on kontrollitav, et $\|\cdot\|_p$ rahuldab normi samasuse ja homogeensuse aksioome.

**Ülesanne 1.6.** Veenduda selles.

Samas on lihtne veenduda, et kui $0 < p < 1$, siis üldjuhul pole $\|\cdot\|_p$ norm, sest ta ei rahulda kolmnurga võrratust.

**Ülesanne 1.7.** Olgu $0 < p < 1$. Tõestada, et üldjuhul $\|\cdot\|_p$ ei rahulda kolmnurga võrratust.

NÄPUNÄIDE. Tõestada, et kui leiduvad $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $0 < \mu(A) < \infty$, $0 < \mu(B) < \infty$, siis leiduvad lihtsad mõõõtuvad funktsioonid $f = \alpha\chi_A$ ja $g = \beta\chi_B$ (siin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) nii, et $\|f + g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$.

Kui $1 \leqslant p < \infty$, siis $L_p$ on normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_p$ suhtes. Kolmnurga võrratus normi $\|\cdot\|_p$ jaoks järeldub *Minkowski võrratusest.*

**Ülesanne 1.8.** Veenduda selles.

**Märkus 1.3.** Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on p.k. ruumis $X$ määratud mõõtuv funktsioon, s.t. leidub selline $\mu$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{K}$, mille korral $f = g$ p.k., siis defineeritakse $\|f\|_p = \|g\|_p$ (märgime, et see definitsioon ei sõltu funktsiooniga $f$ p.k. võrdse ($\mu$-mõõtuva) funktsiooni $g$ valikust). Sageli on otstarbekas ruumide $L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, defineerimisel haarata kaasa ka p.k. ruumis $X$ määratud mõõtuvad funktsioonid, defineerides

$$L_p(X, \mathfrak{A}, \mu) := \Big\{f\colon X \to \mathbb{K} \mid f \text{ on p.k. määratud mõõtuv funktsioon, } \|f\|_p < \infty\Big\}.$$

Sellise tõlgenduse korral koosnevad hulgad $L_p(\mu)$ ja $L_p(\overline{\mu})$ ühtedest ja samadest funktsioonidest. Normeeritud ruumide $L_p(\mu)$ defineerimisel loetakse kaks (p.k. määratud) funktsiooni hulgast $L_p(\mu)$ ruumi $L_p(\mu)$ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal. Rõhutame, et selles märkuses kirjeldatud moel (s.t. p.k. määratud funktsioone kaasates) defineeritud ruum $L_p(\mu)$ ja eespool kirjeldatud moel defineeritud ruum $L_p(\mu)$ on loomulikul viisil samastatavad.

**Märkus 1.4.** Ruumi $L_p$ võib tõlgendada ka kui paarikaupa p.k. võrdsete (p.k. määratud) mõõtuvate funktsioonide $f\colon X \to \mathbb{K}$, $\int |f|^p < \infty$, ekvivalentsiklasside vektorruumi, kus tehted ekvivalentsiklassidega ja ekvivalentsiklassi norm defineeritakse esindajate kaudu: kui $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ on p.k. määratud mõõtuvad funktsioonid, $\int |f|^p, \int |g|^p < \infty$, ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \alpha[f] := [\alpha f] \quad \text{ja} \quad \|[f]\| := \|f\|.$$

**Lause 1.7.** *Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Siis $L_p$ on Banachi ruum.*

TÕESTUS. Olgu funktsioonid $f_j \in L_p$, $j = 1, 2, \ldots$, sellised, et rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub absoluutselt ruumis $L_p$, s.t. $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_p < \infty$ ehk, teisisõnu, $\sum_{j=1}^{\infty} \big(\int |f_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Veendumaks, et $L_p$ on Banachi ruum, piisab näidata, et rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub ruumis $L_p$.

Selleks defineerime funktsiooni $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$, $x \in X$, ja paneme tähele, et $g$ on p.k. ruumis $X$ määratud mõõtuv funktsioon, kusjuures $g \in L_p$, sest (monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal)

$$\Big(\int |g|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \bigg(\int \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|\Big)^p\bigg)^{\frac{1}{p}} = \bigg(\int \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} |f_j|\Big)^p\bigg)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \bigg(\int \Big(\sum_{j=1}^{n} |f_j|\Big)^p\bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big\|\sum_{j=1}^{n} |f_j|\Big\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \big\||f_j|\big\|_p = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_p < \infty.$$

Siit järeldub, et $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| < \infty$ p.k. Seega funktsioon $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$, $x \in X$, on p.k. ruumis $X$ määratud mõõtuv funktsioon (sest arvrea absoluutsest koonduvusest järeldub tema koonduvus). Seejuures $f \in L_p$, sest peaaegu kõikjal $|f| \leqslant |g|$. Lause tõestuseks jääb veel näidata, et $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f$ ruumis $L_p$, s.t. $\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j - f\Big\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ehk, teisisõnu, $\int \Big|\sum_{j=1}^{n} f_j - f\Big|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. See järeldub Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemist, sest

(1) $\Big|\sum_{j=1}^{n} f_j - f\Big|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ p.k.;

(2) iga $n \in \mathbb{N}$ korral peaaegu kõikjal

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f_j - f\Big|^p \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} |f_j| + |f|\Big)^p \leqslant \big(|g| + |f|\big)^p,$$

kusjuures $\big(|g| + |f|\big)^p \in L_1$.

□

On ilmne, et kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on lihtne mõõtuv funktsioon esitusega $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$, kus $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq 0$ ja hulgad $E_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \ldots, n$, on paarikaupa lõikumatud, siis

$$f \in L_1 \iff f \in L_p \iff \mu(E_j) < \infty,\ j = 1, \ldots, n.$$

**Lause 1.8.** *Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Siis integreeruvate lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_p$.*

Tõestus.

**Ülesanne 1.9.** Tõestada lause 1.8.

□

**Lause 1.9.** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$. Siis $C_c(X)$ on ruumis $L_p(\mu)$ kõikjal tihe (normi $\|\cdot\|_p$ suhtes).*

Tõestus.

**Ülesanne 1.10.** Tõestada lause 1.9.

□

## 1.5. Ruum $L_\infty$

Kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on ($\mathfrak{A}$-)mõõtuv funktsioon, siis tähistatakse

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| := \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in X} |f(x)| \\ &:= \inf\big\{M \geqslant 0\colon\ |f(x)| \leqslant M \text{ p.k.}\big\} \\ &= \inf\Big\{M \geqslant 0\colon\ \mu\big(\{x\in X\colon\ |f(x)| > M\}\big) = 0\Big\},\end{aligned}$$

kus loetakse $\inf\emptyset = \infty$. Märgime, et $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ p.k., sest

$$\begin{aligned}\mu\big(\{x\in X\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty\}\big) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big\{x\in X\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{j}\Big\}\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\mu\left(\Big\{x\in X\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{j}\Big\}\right) = 0.\end{aligned}$$

**Märkus 1.5.** Tähistus "ess sup" tuleneb ingliskeelsest terminist "essential supremum". Prantsuskeelne omadussõna "vrai" tähendab "tõeline".

Kui $\|f\|_\infty < \infty$, siis öeldakse, et $f$ on *oluliselt tõkestatud* funktsioon.

Tähistame

$$L_\infty(X,\mathfrak{A},\mu) := \Big\{f\colon\ X\to\mathbb{K} \mid f \text{ on } \mu\text{-mõõtuv funktsioon, } \|f\|_\infty < \infty\Big\}.$$

Kui $\mathfrak{A}$ ja $\mu$ või $(X,\mathfrak{A})$ või $(X,\mathfrak{A},\mu)$ roll on kontekstist selge, siis kirjutatakse $L_\infty(X,\mathfrak{A},\mu)$ asemel ka lihtsalt vastavalt $L_\infty(X)$, $L_\infty(\mu)$ või $L_\infty$.

Kui $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, siis sümboliga $L_\infty[a,b]$ tähistatakse hulka $L_\infty\big([a,b],\mathcal{L}_{[a,b]},m\big)$, kus $\mathcal{L}_{[a,b]}$ on lõigu $[a,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate hulkade $\sigma$-algebra ja $m$ on Lebesgue'i mõõt.

Kui $\Gamma\neq\emptyset$ on mingi hulk, siis me tähistame $\ell_\infty(\Gamma) = L_\infty(\Gamma,\mathcal{P}(\Gamma),c)$, kus $c$ on loendamismõõt hulga $\Gamma$ kõikide alamhulkade kogumil $\mathcal{P}(\Gamma)$. Me kirjutame $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$.

On ilmne, et ruum $L_\infty$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Nagu ka ruumide $L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ juhul, loeme me kaks hulka $L_\infty$ kuuluvat funktsiooni ruumi $L_\infty$ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal.

**Märkus 1.6.** Kui $f\colon X\to\mathbb{K}$ on p.k. ruumis $X$ määratud mõõtuv funktsioon, siis defineeritakse $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|f| := \|f\|_\infty := \|g\|_\infty$, kus $g\colon X\to\mathbb{K}$ on selline $\mu$-mõõtuv funktsioon mille korral $f=g$ p.k. (märgime, et see definitsioon ei sõltu funktsiooniga $f$ p.k. võrdse ($\mu$-mõõtuva) funktsiooni $g$ valikust). Kui $\|f\|_\infty<\infty$, siis öeldakse, et $f$ on oluliselt tõkestatud. Nagu ka ruumide $L_p$, $1\leqslant p<\infty$, juhul, on ruumi $L_\infty$ defineerimisel sageli otstarbekas haarata kaasa ka p.k. ruumis $X$ määratud mõõtuvad funktsioonid, defineerides

$$L_\infty(X,\mathfrak{A},\mu) := \Big\{f\colon\ X\to\mathbb{K} \mid f \text{ on p.k. määratud mõõtuv funktsioon, } \|f\|_\infty < \infty\Big\}.$$

Sellise tõlgenduse korral koosnevad hulgad $L_\infty(\mu)$ ja $L_\infty(\overline{\mu})$ ühtedest ja samadest funktsioonidest. Normeeritud ruumide $L_\infty(\mu)$ defineerimisel loetakse kaks (p.k. määratud) oluliselt tõkestatud funktsiooni ruumi $L_\infty(\mu)$ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal. Rõhutame, et selles märkuses kirjeldatud moel (s.t. p.k. määratud funktsioone kaasates) defineeritud ruum $L_\infty(\mu)$ ja eespool kirjeldatud moel defineeritud ruum $L_\infty(\mu)$ on loomulikul viisil samastatavad.

**Märkus 1.7.** Ruumi $L_\infty$ võib tõlgendada ka kui paarikaupa p.k. võrdsete (p.k. määratud) oluliselt tõkestatud mõõtuvate funktsioonide $f\colon X \to \mathbb{K}$ ekvivalentsiklasside vektorruumi, kus tehted ekvivalentsiklassidega ja ekvivalentsiklassi norm defineeritakse esindajate kaudu: kui $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ on (p.k. määratud) oluliselt tõkestatud mõõtuvad funktsioonid ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \alpha[f] := [\alpha f] \quad \text{ja} \quad \|[f]\| := \|f\|.$$

Järgnev teoreem võtab kokku ruumi $L_\infty$ olulisemad omadused.

**Teoreem 1.10.** (a) ("Hölderi võrratus") *Kui $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ on (p.k. määratud) mõõtuvad funktsioonid, siis*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_\infty.$$

*Kui $f \in L_1$ ja $g \in L_\infty$, siis $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$ parajasti siis, kui $|g(x)| = \|g\|_\infty$ p.k. hulgas $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$.*

(b) *$(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on normeeritud ruum.*

(c) *Kui $f, f_j \in L_\infty$, $j = 1, 2, \ldots$, siis $\|f_j - f\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ parajasti siis, kui leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(A^c) = 0$ ja $f_j \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ ühtlaselt hulgas $A$.*

(d) *$(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachi ruum.*

(e) *Lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruum on ruumis $L_\infty$ kõikjal tihe.*

TÕESTUS.

**Ülesanne 1.11.** Tõestada teoreem 1.10.

$\square$

# § 2. $L_p$-ruumide kaasruumid

Kõikjal selles paragrahvis on $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning $L_p = L_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $L_q = L_q(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $(p, q \in [1, \infty])$. Paragrahvi peaeesmärk on kirjeldada Banachi ruumi $L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ kaasruumi. Osutub, et "enamikul juhtudel" võime kaasruumi $(L_p)^*$ samastada ruumiga $L_q$, kus $q$ on $p$ kaaseksponent. Täpsemalt, kui $1 < p < \infty$, siis alati $(L_p)^* \cong L_q$, kus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; kui $\mu$ on $\sigma$-lõplik, siis ka $(L_1)^* \cong L_\infty$.

## 2.1. Ruumi $L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ kaasruum

Olgu $p, q \in [1, \infty]$ kaaseksponendid ning olgu $g \in L_q$. Hölderi võrratuse põhjal iga $f \in L_p$ korral $\int |fg| \leqslant \|g\|_q \|f\|_p$, järelikult $fg \in L_1$. Niisiis me võime defineerida kujutuse $L_q \ni g \mapsto \phi_g \in (L_p)^*$ võrdusega

$$\phi_g(f) = \int fg, \quad f \in L_p,\ g \in L_q.$$

See kujutus on korrektselt defineeritud, s.t. tõepoolest $\phi_g \in (L_p)^*$, sest integraali lineaarsuse tõttu on funktsionaal $\phi_g$ lineaarne; tema tõkestatus järeldub Hölderi võrratusest: iga $f \in L_p$ korral

$$|\phi_g(f)| = \left|\int fg\right| \leqslant \int |fg| \leqslant \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q \|f\|_p . \tag{2.1}$$

Integraali lineaarsusest järeldub ka, et kujutus $L_q \ni g \mapsto \phi_g \in (L_p)^*$ on lineaarne; võrratusest (2.1) näeme, et ta on tõkestatud, kusjuures iga $g \in L_q$ korral $\|\phi_g\| \leqslant \|g\|_q$. Järgnev lause näitab, et "enamikul juhtudel" tegelikult $\|\phi_g\| = \|g\|_q$, s.t. kujutus $L_q \ni g \mapsto \phi_g \in (L_p)^*$ on isomeetriline isomorfism "sisse".

**Lause 2.1.** *Olgu $p \in (1, \infty]$ ja $q \in [1, \infty)$ kaaseksponendid. Siis iga $g \in L_q$ korral*

$$\|\phi_g\| = \sup\Big\{\left|\textstyle\int fg\right| : \ \|f\|_p = 1\Big\} = \|g\|_q.$$

*Kui mõõt $\mu$ on poollõplik, siis kehtib see väide ka juhul, kui $p = 1$ ja $q = \infty$.*

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et mõõt $\mu$ on *poollõplik*, kui iga hulga $E \in \mathfrak{A}$, $\mu(E) = \infty$, korral leidub $\mathfrak{A}$-mõõtuv alamhulk $A \subset E$ nii, et $0 < \mu(A) < \infty$.

LAUSE 2.1 TÕESTUS. Kui $g = 0$, siis on teoreemi väide ilmne. Olgu $g \in L_q \setminus \{0\}$. Hölderi võrratuse põhjal alati $\|\phi_g\| \leqslant \|g\|_q$, niisiis jääb näidata, et $\|\phi_g\| \geqslant \|g\|_q$.

(I) Vaatleme kõigepealt juhtu, kui $1 < p < \infty$; siis ka $1 < q < \infty$. Paneme tähele, et kuna $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siis $\frac{q-1}{q} = \frac{1}{p}$ ning seega $(q-1)p = q$. Tähistame

$$f = \frac{|g|^{q-1}\,\overline{\operatorname{sgn} g}}{\|g\|_q^{q-1}},$$

siis

$$\|f\|_p = \frac{\left(\int |g|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\|g\|_q^{q-1}} = \frac{\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{p}}}{\|g\|_q^{q-1}} = \frac{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}{\|g\|_q^{q-1}} = 1$$

ja

$$\phi_g(f) = \frac{\int |g|^{q-1}\,\overline{\operatorname{sgn} g}\, g}{\|g\|_q^{q-1}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q,$$

niisiis $\|\phi_g\| \geqslant \|g\|_q$.

Olgu nüüd $p = \infty$, $q = 1$. Tähistame $f = \overline{\operatorname{sgn} g}$, siis $\|f\|_\infty = 1$ ja $\phi_g(f) = \int fg = \int \overline{\operatorname{sgn} g}\, g = \int |g| = \|g\|_q$, niisiis $\|\phi_g\| \geqslant \|g\|_q$.

(II) Vaatleme nüüd juhtu, kus $p = 1$, $q = \infty$ ning $\mu$ on poollõplik. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Meil piisab näidata, et $\|\phi_g\| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$.

Tähistame $A = \{x \in X\colon\ |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Siis $\mu(A) > 0$ (sest vastasel korral $g \leqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$ p.k., mis on vastuolus $\|g\|_\infty$ definitsiooniga), seega $\mu$ poollõplikkuse tõttu leidub mõõtuv hulk $B \subset A$ nii, et $0 < \mu(B) < \infty$. Tähistame $f = \frac{1}{\mu(B)}\chi_B\, \overline{\operatorname{sgn} g}$, siis $\|f\|_1 = 1$ ning järelikult

$$\|\phi_g\| \geqslant \left|\int fg\right| = \frac{1}{\mu(B)} \int |g|\, \chi_B \geqslant \frac{1}{\mu(B)}(\|g\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(B) = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

□

Lause 2.1 valguses kerkib loomulik küsimus: kui $g\colon\ X \to \mathbb{K}$ on mõõtuv funktsioon, mille korral funktsionaal $\phi_g\colon\ L_p \ni f \mapsto \int fg \in \mathbb{K}$ on pidev ja lineaarne, s.t. $\phi_g \in (L_p)^*$, kas siis $g \in L_q$, kus $q$ on $p$ kaaseksponent? Järgnev lause ütleb, et "enamikul juhtudel" on see tõepoolest nii.

**Lause 2.2.** *Olgu $p, q \in [1, \infty]$ kaaseksponendid ning olgu $g\colon\ X \to \mathbb{K}$ mõõtuv funktsioon, mis rahuldab tingimusi*

1° *$fg \in L_1$ iga integreeruva lihtsa mõõtuva funktsiooni $f\colon\ X \to \mathbb{K}$ korral;*

2° $M_q(g) := \sup\Big\{\big|\int fg\big| :\ f \in L_p$ on lihtne mõõtuv funktsioon, $\|f\|_p \leqslant 1\Big\} < \infty$*;*

3° *hulk $S_g := \{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}$ on $\sigma$-lõplik või $\mu$ on poollõplik.*

*Siis $g \in L_q$, kusjuures $\|g\|_q = M_q(g)$.*

Tõestus. Kuna Hölderi võrratuse põhjal alati $M_q(g) \leqslant \|g\|_q$ (sest mis tahes $f \in L_p$, $\|f\|_p \leqslant 1$, korral $|\int fg| \leqslant \int |fg| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \leqslant \|g\|_q$), siis piisab lause tõestuseks näidata, et $\|g\|_q \leqslant M_q(g)$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et

(•) *kui funktsioon $f \in L_\infty$, $\|f\|_p = 1$, on null väljaspool mingit lõpliku mõõduga hulka $E \in \mathfrak{A}$, siis $fg \in L_1$, kusjuures $|\int fg| \leqslant M_q(g)$.*

Tõepoolest, valime lihtsad mõõtuvad funktsioonid $f_j\colon X \to \mathbb{K}$, $j = 1, 2, \ldots$, nii, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $|f_j| \leqslant |f|$ p.k. (ja seega $\|f_j\|_p \leqslant \|f\|_p = 1$) ning $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ p.k. Kuna peaaegu kõikjal $|f_j\, g| = |f_j\, g\, \chi_E| \leqslant \|f\|_\infty\, |g|\, \chi_E$, kusjuures $g\, \chi_E \in L_1$, siis domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal $fg \in L_1$, kusjuures

$$\left|\int fg\right| = \lim_{j\to\infty} \left|\int f_j\, g\right| \leqslant M_q(g).$$

(I) Vaatleme esmalt juhtu, kus $q < \infty$. Siis $S_g$ on $\sigma$-lõplik.

Tõepoolest, eeldame, et $\mu$ on poollõplik ning kehtivad 1° ja 2°. Näitame, et sel juhul hulk $S_g$ on $\sigma$-lõplik. Selleks piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, kus $A_\varepsilon := \bigl\{x \in X\colon |g(x)| > \varepsilon\bigr\}$. Oletame vastuväiteliselt, et mingi $\varepsilon > 0$ korral $\mu(A_\varepsilon) = \infty$. Mõõdu $\mu$ poollõplikkuse tõttu leidub $B \subset A_\varepsilon$, $B \in \mathfrak{A}$, nii, et $0 < \mu(B) < \infty$. Defineerime funktsiooni $f := \frac{\overline{\operatorname{sgn} g}\, \chi_B}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}}$. Siis $f \in L_\infty$, $\|f\|_p = 1$ ning $f$ on null väljaspool lõpliku mõõduga hulka $B$, seega väite ($\bullet$) põhjal $fg \in L_1$, kusjuures

$$M_q(g) \geqslant \left|\int fg\right| = \frac{1}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}} \int_B |g| \geqslant \frac{1}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}}\, \varepsilon\, \mu(B) = \varepsilon\, \mu(B)^{\frac{1}{q}}.$$

Vastuolu saamiseks piisab valida hulk $B$ nii, et $\varepsilon\, \mu(B)^{\frac{1}{q}} > M_q(g)$. See aga on võimalik järgneva ülesande põhjal (tänu eeldusele $q < \infty$).

**Ülesanne 2.1.** Olgu $\mu$ poollõplik ning olgu $A \in \mathfrak{A}$, $\mu(A) = \infty$. Tähistame $\mathcal{E} := \{B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A,\ 0 < \mu(B) < \infty\}$. Tõestada, et $\sup_{B\in\mathcal{E}} \mu(B) = \infty$.

Niisiis, leiduvad hulgad $E_j \in \mathfrak{A}$, $\mu(E_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, nii, et $S_g = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, kusjuures $g\chi_{E_j} \in L_\infty$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral.

**Ülesanne 2.2.** Põhjendada, miks sellised hulgad $E_j$, $j = 1, 2, \ldots$, eksisteerivad.

Kui $q = 1$ (siis $p = \infty$), siis monotoonse koonduvuse teoreemi ja väite ($\bullet$) põhjal

$$\|g\|_q = \|g\|_1 = \int |g| = \lim_{j\to\infty} \int |g|\, \chi_{E_j} = \lim_{j\to\infty} \int g\, \overline{\operatorname{sgn} g}\, \chi_{E_j} \leqslant M_q(g)$$

(sest iga $j \in \mathbb{N}$ korral, tähistades $f_j = \overline{\operatorname{sgn} g}\, \chi_{E_j}$, kehtib $\|f_j\|_p = \|f_j\|_\infty = 1$, kusjuures $f_j$ on null väljaspool lõpliku mõõduga hulka $E_j$).

Eeldame nüüd, et $1 < q < \infty$ (seega ka $1 < p < \infty$). Defineerime iga $j \in \mathbb{N}$ korral $g_j := g\chi_{E_j}$, siis $|g_j| \leqslant |g|$, $j = 1, 2, \ldots$, kusjuures $g_j \underset{j\to\infty}{\nearrow} g$. Tähistame iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$f_j = \frac{|g_j|^{q-1}\, \overline{\operatorname{sgn} g_j}}{\|g_j\|_q^{q-1}}$$

(siin võime üldisust kitsendamata eeldada, et $g \neq 0$ ning seega ka, et alati $g_j \neq 0$); siis $f_j \in L_\infty$,

$$\|f_j\|_p = \frac{1}{\|g_j\|_q^{q-1}} \left(\int |g_j|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|g_j\|_q^{q-1}} \left(\int |g_j|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \|g_j\|_q^{\frac{q}{p}-q+1} = 1,$$

kusjuures $f_j$ on väljaspool lõpliku mõõduga hulka $E_j$ null, järelikult Fatou lemma ja väite ($\bullet$) põhjal

$$\begin{aligned}\|g\|_q &= \Big(\int |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \Big(\int |g_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \liminf_{j\to\infty} \|g_j\|_q = \liminf_{j\to\infty} \Big|\int f_j\, g_j\Big| \\ &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \Big|\int f_j\, g\Big| \leqslant M_q(g).\end{aligned}$$

(II) Vaatleme nüüd juhtu, kus $q = \infty$. Oletame vastuväiteliselt, et $\|g\|_\infty > M_\infty(g)$; siis mingi $\varepsilon > 0$ korral $\|g\|_\infty > M_\infty(g) + \varepsilon$. Sel juhul $\mu(A) > 0$, kus $A := \big\{x \in X\colon\, |g(x)| > M_\infty(g) + \varepsilon\big\}$. Seega me saame valida alamhulga $B \subset A$ nii, et $0 < \mu(B) < \infty$.

**Ülesanne 2.3.** Põhjendada, miks niisugune hulga $B$ valik on võimalik.

Tähistame $f = \frac{\overline{\operatorname{sgn} g}\, \chi_B}{\mu(B)}$, siis $f \in L_\infty$, $\|f\|_1 = \frac{1}{\mu(B)} \int \chi_B = 1$ ning $f = 0$ väljaspool lõpliku mõõduga hulka $B$, seega väite ($\bullet$) põhjal $fg \in L_1$, kusjuures $\big|\int fg\big| \leqslant M_\infty(g)$, kuid, teiselt poolt,

$$\Big|\int fg\Big| = \frac{1}{\mu(B)} \int |g|\, \chi_B \geqslant \frac{1}{\mu(B)} \int \big(M_\infty(g) + \varepsilon\big)\, \chi_B = M_\infty(g) + \varepsilon > M_\infty(g),$$

vastuolu. □

Järgnev teoreem paneb asjad lõplikult paika: kujutus $L_q \ni g \mapsto \phi_g \in (L_p)^*$ on "enamikul juhtudel" juhtudel isomeetriline isomorfism.

**Teoreem 2.3.** *Olgu $p, q \in (1, \infty)$ kaaseksponendid. Siis iga $\phi \in (L_p)^*$ korral leidub $g \in L_q$ nii, et $\phi = \phi_g$, s.t. $\phi(f) = \int fg$ iga $f \in L_p$ korral. Niisiis $L_q \cong (L_p)^*$.*

*Kui mõõt $\mu$ on $\sigma$-lõplik, siis samad väited kehtivad ka juhul, kui $p = 1$ ja $q = \infty$.*

TÕESTUS. Olgu $\phi \in (L_p)^*$.

(I) Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $1 \leqslant p < \infty$ ja $\mu$ on lõplik. Siis iga lihtne mõõtuv funktsioon $f\colon X \to \mathbb{K}$ kuulub ruumi $L_p$. Defineerime hulgafunktsiooni $\nu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ võrdusega $\nu(E) = \phi(\chi_E)$, $E \in \mathfrak{A}$. Siis $\nu$ on lõplik märgiga/kompleksne mõõt, kusjuures $\nu \ll \mu$.

**Ülesanne 2.4.** Veenduda, et $\nu$ on lõplik märgiga/kompleksne mõõt, kusjuures $\nu \ll \mu$.

**Märkus 2.1.** Hulgafunktsiooni $\nu$ $\sigma$-aditiivsuse tõestamisel läheb meil vaja eeldust $p < \infty$.

Radon–Nikodými teoreemi põhjal leidub funktsioon $g \in L_1$ nii, et iga $E \in \mathfrak{A}$ korral $\phi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g\, d\mu$. Siit järeldub, et kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on lihtne mõõtuv funktsioon, siis $fg \in L_1$, kusjuures $\int fg\, d\mu = \phi(f)$.

**Ülesanne 2.5.** Veenduda selles.

Siit järeldub, et

$$\begin{aligned}M_q(g) :&= \sup\Big\{\Big|\int fg\Big| : \ f \in L_p \text{ on lihtne mõõtuv funktsioon, } \|f\|_p = 1\Big\} \\ &= \sup\Big\{|\phi(f)| : \ f \in L_p \text{ on lihtne mõõtuv funktsioon, } \|f\|_p = 1\Big\} \leqslant \|\phi\|.\end{aligned}$$

Lause 2.2 põhjal $g \in L_q$. Väite tõestuseks piisab nüüd näidata, et iga $f \in L_p$ korral $\phi(f) = \int fg$, sest siis $\phi = \phi_g$ (ning seejuures lause 2.1 põhjal ka $\|\phi\| = \|\phi_g\| = \|g\|_q$).

Olgu $f \in L_p$. Lause 1.8 põhjal leidub lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ ruumis $L_p$ nii, et $\|f - f_j\|_p \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Aga nüüd

$$\phi(f) = \lim_{j\to\infty} \phi(f_j) = \lim_{j\to\infty} \int f_j\, g = \int fg,$$

sest Hölderi võrratuse põhjal $\left|\int (f_j - f)\, g\right| \leqslant \int |(f_j - f)\, g| \leqslant \|f_j - f\|_p\, \|g\|_q \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

(II) Vaatleme nüüd juhtu, kus $1 \leqslant p < \infty$ ja $\mu$ on $\sigma$-lõplik. Siis me saame esitada $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kus $E_j \in \mathfrak{A}$, $\mu(E_j) < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, ja $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$. Iga $E \in \mathfrak{A}$ korral kasutame vajaduse korral loomulikke samastusi

$$L_p(E) \equiv \Big\{f \in L_p\colon\ f|_{E^c} = 0\Big\} \quad \text{ning} \quad L_q(E) \equiv \Big\{f \in L_q\colon\ f|_{E^c} = 0\Big\}.$$

Tõestuse osa (I) põhjal leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral funktsioon $g_j \in L_q(E_j)$ nii, et

$$\phi(f) = \int f g_j \quad \text{iga } f \in L_p(E_j) \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \|g_j\|_q = \|\phi|_{L_p(E_j)}\| \leqslant \|\phi\|.$$

Seejuures, kui $i > j$, siis $\chi_{E_j}\, g_i = g_j$ p.k. Defineerime funktsiooni $g\colon X \to \mathbb{K}$ võrdusega $g(x) = g_j(x)$, $x \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$. Siis $g$ on täpsusega p.k. üheselt määratud. Kuna $|g_j|^q \underset{j\to\infty}{\nearrow} |g|^q$ p.k., siis monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\|g\|_q = \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{j\to\infty} \left(\int |g_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{j\to\infty} \|g_j\|_q \leqslant \|\phi\|,$$

seega $g \in L_q$. Niisiis jääb veel näidata, et iga $f \in L_p$ korral $\phi(f) = \int fg$. Olgu $f \in L_p$. Siis $\|f\chi_{E_j} - f\|_p \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

> Tõepoolest, veendumaks selles, peame näitama, et $\int |f\,\chi_{E_j} - f|^p \to 0$, aga see järeldub domineeritud koonduvuse teoreemist, sest $|f\chi_{E_j} - f|^p \to 0$ punktiviisi ja $|f\chi_{E_j} - f|^p \leqslant |f|^p$.

Seega

$$\phi(f) = \lim_{j\to\infty} \phi(f\chi_{E_j}) = \lim_{j\to\infty} \int f g_j = \int fg$$

(selle võrdusteahela viimane võrdus kehtib domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal, sest $fg_j \to fg$ p.k. ning $|fg_j| \leqslant |fg|$ p.k.).

(III) On jäänud veel vaadelda juhtu, kus $1 < p < \infty$ ja $\mu$ on suvaline. Tõestuse osa (II) põhjal leidub iga $\sigma$-lõpliku hulga $E \in \mathfrak{A}$ korral funktsioon $g_E \in L_q(E)$ selliselt, et

$$\phi(f) = \big(\phi|_{L_p(E)}\big)(f) = \int f g_E \quad \text{iga } f \in L_p(E) \text{ korral} \quad \text{ning} \quad \|g_E\|_q = \|\phi|_{L_p(E)}\| \leqslant \|\phi\|.$$

Iga selline funktsioon $g_E$ on täpsusega p.k. üheselt määratud, niisiis, kui $F \in \mathfrak{A}$ on $\sigma$-lõplik ja $F \supset E \in \mathfrak{A}$, siis $g_E = g_F\,\chi_E$ p.k. Valime $\sigma$-lõpliku hulga $E_0 \in \mathfrak{A}$ nii, et $\|g_{E_0}\|_q = \|\phi|_{L_p(E_0)}\| = \|\phi\|$.

**Ülesanne 2.6.** Veenduda, et selline $\sigma$-lõplik hulk $E_0 \in \mathfrak{A}$ leidub.

Tähistame $g := g_{E_0} \in L_q(E_0) \subset L_q$. Paneme tähele, et kui $F \in \mathfrak{A}$ on $\sigma$-lõplik ja $F \supset E_0$, siis $g = g_F$ p.k.

Tõepoolest, kui $F \in \mathfrak{A}$ on $\sigma$-lõplik, kusjuures $F \supset E_0$, siis

$$\|\phi\|^q \geqslant \|g_F\|_q^q = \int_F |g_F|^q = \int_{E_0} |g_F|^q + \int_{F\setminus E_0} |g_F|^q = \int_{E_0} |g_{E_0}|^q + \int_{F\setminus E_0} |g_F|^q = \|\phi\|^q + \int_{F\setminus E_0} |g_F|^q,$$

järelikult $\int_{F\setminus E_0} |g_F|^q = 0$, niisiis $g_F\,\chi_{F\setminus E_0} = 0$ p.k. ning seega peaaegu kõikjal $g_F = g_F\,\chi_{F\setminus E_0} + g_F\,\chi_{E_0} = g_F\,\chi_{E_0} = g_{E_0} = g$.

Fikseerime vabalt $f \in L_p$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\int fg = \phi(f)$. Selleks paneme tähele, et $S_f := \{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ on $\sigma$-lõplik.

**Ülesanne 2.7.** Veenduda selles.

**Märkus 2.2.** Siin kasutame eeldust, et $1 \leqslant p < \infty$.

Siit järeldub, et $g_{E_0\cup S_f} = g$ p.k., seega

$$\int fg = \int f g_{E_0\cup S_f} = (\phi|_{L_p(E_0\cup S_f)})(f) = \phi(f).$$

□

**Järeldus 2.4.** *Kui $1 < p < \infty$, siis ruum $L_p$ on refleksiivne.*

## 2.2. Ruumi $L_\infty$ kaasruum

**Definitsioon 2.2.** Öeldakse, et hulgafunktsioon $F\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ on *aditiivne,* kui

$$A, B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \emptyset \quad\Longrightarrow\quad F(A \cup B) = F(A) + F(B).$$

On selge, et aditiivse hulgafunktsiooni $F$ korral $F(\emptyset) = 0$.

**Definitsioon 2.3.** Aditiivse hulgafunktsiooni $F\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ *täisvariatsiooniks* nimetatakse hulgafunktsiooni $|F|\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$, kus iga $A \in \mathfrak{A}$ korral

$$|F|(A) := \sup\left\{\sum_{j=1}^n |F(A_j)|\colon\ n \in \mathbb{N},\ \mathfrak{A} \ni A_j \subset A,\ j \in \{1,\dots,n\},\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j\right\}.$$

Kui $|F|(X) < \infty$, siis öeldakse, et hulgafunktsioon $F$ on *tõkestatud variatsiooniga.*

On ilmne, et aditiivse hulgafunktsiooni $F$ täisvariatsioon $|F|$ on aditiivne ja monotoonne hulgafunktsioon.

**Definitsioon 2.4.** Öeldakse, hulgafunktsioon $F\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ *tõkestatud,* kui

$$\sup\big\{|F(A)|\colon\ A \in \mathfrak{A}\big\} < \infty.$$

**Lause 2.5.** *Aditiivne hulgafunktsioon $F\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ on tõkestatud parajasti siis, kui ta on tõkestatud variatsiooniga.*

Lause 2.5 on vahetu järeldus järgnevast lause väitest (b).

**Lause 2.6.** *Olgu $F\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ aditiivne hulgafunktsioon. Siis iga $A \in \mathfrak{A}$ korral*

$$\text{(a)}\quad |F|(A) = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, F(A_j)\right|\colon\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ |\alpha_j| \leqslant 1,\ \mathfrak{A} \ni A_j \subset A, j = 1, \dots, n,\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j\right\};$$

$$\text{(b)}\quad \sup_{\mathfrak{A} \ni B \subset A} |F(B)| \leqslant |F|(A) \leqslant 4 \sup_{\mathfrak{A} \ni B \subset A} |F(B)|.$$

*Seejuures reaalsel juhul kehtib viimane võrratus ka siis, kui tegur "4" asendada teguriga "2".*

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.8.** Tõestada lause 2.6.

□

Tähistame

$$ba(\mathfrak{A}) := ba(\mathfrak{A}, \mathbb{K}) := \Big\{F\colon\ \mathfrak{A} \to \mathbb{K},\ \ F \text{ on tõkestatud ja aditiivne}\Big\}$$

ning

$$ba_\mu(\mathfrak{A}) := ba_\mu(\mathfrak{A}, \mathbb{K}) := \Big\{F \in ba(\mathfrak{A})\colon\ \ A \in \mathfrak{A}, \mu(A) = 0 \ \Rightarrow\ F(A) = 0\Big\}.$$

On ilmne, et $ba(\mathfrak{A})$ on normeeritud ruum loomulike tehete ja normi $\|F\| = |F|(X)$, $F \in ba(\mathfrak{A})$, suhtes ning $ba_\mu(\mathfrak{A})$ on ruumi $ba(\mathfrak{A})$ alamruum.

Defineerime nüüd *integraali funktsioonist $f \in L_\infty$ hulgafunktsiooni $F \in ba_\mu(\mathfrak{A})$ järgi.*

Olgu $F \in ba_\mu(\mathfrak{A})$.

Kui $\phi \in L_\infty$ on lihtne $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon, siis *integraal funktsioonist $\phi$ (üle ruumi $X$) hulgafunktsiooni $F \in ba_\mu(\mathfrak{A})$ järgi* defineeritakse võrdusega

$$\int_X \phi(t)\, dF(t) := \int_X \phi\, dF := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, F(A_j),$$

kus $\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$) on funktsiooni $\phi$ kanooniline esitus.

Tähistame $S(\mathfrak{A}) := \{\phi \in L_\infty\colon\ \phi$ on lihtne $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon$\}$. Paneme tähele, et funktsionaal

$$\Phi_F\colon\ S(\mathfrak{A}) \ni \phi \longmapsto \int_X \phi\, dF \in \mathbb{K}$$

on lineaarne.

**Ülesanne 2.9.** Veenduda selles.

Funktsionaal $\Phi_F$ on ka tõkestatud, sest

$$\begin{aligned}\|\Phi_F\| :&= \sup\{|\Phi_F(\phi)|\colon\ \phi \in S(\mathfrak{A}),\ \|\phi\| \leqslant 1\}\\ &= \sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, F(A_j)\Big|\colon\ n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{K},\ |\alpha_j| \leqslant 1,\\ &\qquad\qquad \mathfrak{A} \ni A_j \subset A,\ j = 1, \ldots, n,\\ &\qquad\qquad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j\Big\}\\ &= |F|(X) = \|F\|.\end{aligned}$$

Kuna lause 1.10 põhjal on $S(\mathfrak{A})$ ruumi $L_\infty$ kõikjal tihe alamruum, siis leidub funktsionaalil $\Phi_F$ parajasti üks pidev lineaarne jätk ruumile $L_\infty$; seejuures, tähistades selle jätku samuti sümboliga $\Phi_F$, on selle jätku norm $\|\Phi_F\| = |F|(X) = \|F\|$. Kui $f \in L_\infty$, siis *integraali funktsioonist $f$ (üle ruumi $X$) hulgafunktsiooni $F$ järgi* defineerime nüüd võrdusega

$$\int_X f(t)\, dF(t) := \int_X f\, dF := \Phi_F(f).$$

**Teoreem 2.7.** *Kujutus*

$$ba_\mu(\mathfrak{A}) \ni F \longmapsto \Phi_F \in (L_\infty)^*,$$

*kus*

$$\Phi_F(f) = \int_X f\, dF, \quad f \in L_\infty,$$

*on isomeetriline isomorfism.*

TÕESTUS. Kõigepealt paneme tähele, et vaadeldav kujutus on lineaarne.

**Ülesanne 2.10.** Veenduda selles.

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et mis tahes $F, G \in ba_\mu(\mathfrak{A})$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ korral

$$(\Phi_{\alpha F + \beta G})|_{S(\mathfrak{A})} = (\alpha\Phi_F + \beta\Phi_G)|_{S(\mathfrak{A})}.$$

Teoreemile eelnevast arutelust näeme, et vaadeldav kujutus on isomeetria. Seega jääb teoreemi tõestuseks näidata, et vaadeldav kujutus on sürjektsioon.

Fikseerime vabalt $\Phi \in (L_\infty)^*$. Defineerime hulgafunktsiooni $F(A) = \Phi(\chi_A)$, $A \in \mathfrak{A}$; siis $F \in ba_\mu(\mathfrak{A})$, kusjuures iga $\phi \in S(\mathfrak{A})$ korral $\Phi(\phi) = \int_X \phi\, df = \Phi_F(\phi)$.

**Ülesanne 2.11.** Veenduda, et $F \in ba_\mu(\mathfrak{A})$, kusjuures iga $\phi \in S(\mathfrak{A})$ korral $\Phi(\phi) = \int_X \phi\, df$.

Kuna alamruum $S(\mathfrak{A})$ on ruumis $L_\infty$ kõikjal tihe, siis järeldub siit, et $\Phi = \Phi_F$. $\square$

**Märkus 2.3.** Kui $c$ on loendamismõõt hulga $\Gamma \neq \emptyset$ kõigi alamhulkade $\sigma$-algebral $\mathcal{P}(\Gamma)$, siis ainus $c$-nullmõõduga hulk ruumis $\Gamma$ on $\emptyset$. Siit järeldub, et

$$ba_c\big(\mathcal{P}(\Gamma)\big) = ba\big(\mathcal{P}(\Gamma)\big) =: ba(\Gamma).$$

Muuhulgas ka

$$ba_c\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = ba\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = ba(\mathbb{N}) =: ba.$$

# Ülesannete lahendusi (IV–VII peatükk)

Korrektuur loetud 20.03.2026.

## § IV.1

HAHNI LAHUTUSTEOREEMI 1.2 TÕESTUS. Eeldame konkreetsuse mõttes, et $\mu$ ei saavuta väärtust $-\infty$.

**Ülesanne 1.5.** Järeldada väite kehtivusest tehtud eeldusel väite kehtivus juhul, kui $\mu$ ei saavuta väärtust $\infty$.

Valime $\mu$-negatiivse hulga $N \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(N) = \inf\{\mu(E)\colon\ E \in \mathfrak{A}$ on $\mu$-negatiivne$\}$; siis $\mu(N) > -\infty$.

**Ülesanne 1.6.** Tõestada, et niisugune $\mu$-negatiivne hulk $N \in \mathfrak{A}$ leidub, kusjuures $\mu(N) > -\infty$.

LAHENDUS. Veendume kõigepealt, et hulk $\{\mu(E)\colon\ E \in \mathfrak{A}$ on $\mu$-negatiivne$\}$ on alt tõkestatud. Selleks oletame vastuväiteliselt, et see hulk on alt tõkestamata. Siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral leidub $\mu$-negatiivne hulk $D_j \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(D_j) < -j$. Defineerime $D := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$. Vastuolu saamiseks piisab näidata, et $\mu(D) = -\infty$, milleks omakorda piisab näidata, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(D) < -j$. Mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu(D) = \mu(D_j) + \mu(D \setminus D_j) \leqslant \mu(D_j) < -j,$$

nagu soovitud. (Siin me arvestasime, et $\mu(D \setminus D_j) \leqslant 0$, sest lemma 1.3, (b), põhjal on hulk $D$ $\mu$-negatiivne.)

Pidevuse aksioomi põhjal on hulgal $\{\mu(E)\colon\ E \in \mathfrak{A}$ on $\mu$-negatiivne$\}$ olemas alumine raja. Tähistame $c := \inf\{\mu(E)\colon\ E \in \mathfrak{A}$ on $\mu$-negatiivne$\}$; siis ülesande lahenduseks jääb leida $\mu$-negatiivne hulk $N \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(N) = c$. Valime iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu$-negatiivse hulga $E_j \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(E_j) < c + \frac{1}{j}$, ja defineerime $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Siis lemma 1.3, (b), põhjal on hulk $N$ $\mu$-negatiivne. Mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral

$$c \leqslant \mu(N) = \mu(E_j) + \mu(N \setminus E_j) \leqslant \mu(E_j) < c + \frac{1}{j}$$

(siin me arvestasime, et $\mu(N \setminus E_j) \leqslant 0$, sest hulk $N$ on $\mu$-negatiivne), millest järeldub, et $\mu(N) = c$, nagu soovitud.

ÜLESANDE 1.7 LAHENDUS. Vastasel korral, tähistades $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kehtib $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \infty$ ning seega $0 > \mu(C) = \mu(C \setminus E) + \mu(E) = \infty$, vastuolu.

ÜLESANDE 1.8 LAHENDUS. Kui leiduks $\mathfrak{A}$-mõõtuv hulk $E \subset B$, mille korral $\mu(E) > 0$, siis mingi $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E) > 2\mu(A_j) \geqslant \beta\Big(C \setminus \big(\bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\big)\Big)$, vastuolu. Kuna $0 > \mu(C) = \mu(B) + \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big)$, siis, arvestades, et $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \geqslant 0$, peab kehtima $\mu(B) < 0$.

□

**Jordani lahutusteoreem 1.4.** *Olgu $\mu$ märgiga mõõt. Siis leiduvad üheselt määratud mõõdud $\mu^+$ ja $\mu^-$ nii, et $\mu^+ \perp \mu^-$ ja $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*

JORDANI LAHUTUSTEOREEMI 1.4 TÕESTUS. Olgu $X = P \cup N$ märgiga mõõdu $\mu$ Hahni lahutus. Defineerime hulgafunktsioonid $\mu^+(E) = \mu(E \cap P)$ ja $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N)$, $E \in \mathfrak{A}$. Siis $\mu^+$ ja $\mu^-$ on mõõdud, kusjuures $\mu^+ \perp \mu^-$ ja $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

**Ülesanne 1.10.** Veenduda selles.

Olgu nüüd mõõdud $\mu', \mu''\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ sellised, et $\mu' \perp \mu''$ ja $\mu = \mu' - \mu''$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\mu' = \mu^+$ ja $\mu'' = \mu^-$.

**Ülesanne 1.11.** Veenduda selles.

LAHENDUS. Kuna $\mu' \perp \mu''$, siis leiduvad hulgad $A, B \in \mathfrak{A}$ nii, et $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ ja $\mu'(B) = \mu''(A) = 0$. Paneme kõigepealt tähele, et mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) = \mu^+(E \cap P) \qquad \text{ja} \qquad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N) = \mu^-(E \cap N)$$

ning

$$\mu'(E) = \mu'(E \cap A) = \mu(E \cap A) \qquad \text{ja} \qquad \mu''(E) = \mu''(E \cap B) = -\mu(E \cap B). \tag{$*$}$$

Siin viimase kahe võrdusteahela tõestuseks märgime, et

$$\begin{aligned}\mu'(E) &= \mu'(E \cap A) + \mu'(E \cap B) = \mu'(E \cap A) = \mu'(E \cap A) - \mu''(E \cap A) = \mu(E \cap A),\\ \mu''(E) &= \mu''(E \cap A) + \mu''(E \cap B) = \mu''(E \cap B) = -\big(\mu'(E \cap B) - \mu''(E \cap B)\big) = -\mu(E \cap B).\end{aligned}$$

Nüüd

$$\mu^+(P \cap B) = \mu(P \cap B) = -\mu''(P \cap B) \qquad \text{ja} \qquad \mu'(N \cap A) = \mu(N \cap A) = -\mu^-(N \cap A),$$

järelikult $\mu^+(P \cap B) = \mu''(P \cap B) = 0$ ja $\mu'(N \cap A) = \mu^-(N \cap A) = 0$. Seega mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\mu^+(E) &= \mu^+(E \cap P) = \mu^+(E \cap P \cap A) + \mu^+(E \cap P \cap B) = \mu^+(E \cap P \cap A) = \mu(E \cap P \cap A)\\ &= \mu'(E \cap P \cap A) = \mu'(E \cap A \cap P) + \mu'(E \cap A \cap N) = \mu'(E \cap A) = \mu'(E)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mu^-(E) &= \mu^-(E \cap N) = \mu^-(E \cap N \cap A) + \mu^-(E \cap N \cap B) = \mu^-(E \cap N \cap B) = -\mu(E \cap N \cap B)\\ &= \mu''(E \cap N \cap B) = \mu''(E \cap B \cap P) + \mu''(E \cap B \cap N) = \mu''(E \cap B) = \mu''(E).\end{aligned}$$

VEEL ÜKS LAHENDUS. Esitame ülesandele veel ühe lahenduse, mis samuti kasutab võrdusi ($*$).

Olgu $E \in \mathfrak{A}$. Siis

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) = \mu'(E \cap P) - \mu''(E \cap P) \leqslant \mu'(E \cap P) \leqslant \mu'(E)$$

ja

$$\mu'(E) = \mu(E \cap A) = \mu^+(E \cap A) - \mu^-(E \cap A) \leqslant \mu^+(E \cap A) \leqslant \mu^+(E),$$

seega $\mu^+(E) = \mu'(E)$. Analoogiliselt

$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap N) = -\big(\mu'(E \cap N) - \mu''(E \cap N)\big) \leqslant \mu''(E \cap N) \leqslant \mu''(E)$$

ja

$$\mu''(E) = -\mu(E \cap B) = -\big(\mu^+(E \cap B) - \mu^-(E \cap B)\big) \leqslant \mu^-(E \cap B) \leqslant \mu^-(E),$$

seega $\mu^-(E) = \mu''(E)$.

□

**Ülesanne 1.15.** (I) Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ mõõdud. Tõestada, et

$$\nu \perp \mu_1 \text{ ja } \nu \perp \mu_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu \perp (\mu_1 + \mu_2).$$

(II) Eeldame nüüd, et üks mõõtudest $\mu_1$ ja $\mu_2$ on lõplik. Siis on määratud ka mõõtude $\mu_1$ ja $\mu_2$ vahe $\mu_1 - \mu_2$. Tõestada, et

$$\nu \perp \mu_1 \text{ ja } \nu \perp \mu_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu \perp (\mu_1 - \mu_2)$$

ning kui $\mu_1 \perp \mu_2$, siis

$$\nu \perp \mu_1 \text{ ja } \nu \perp \mu_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu \perp (\mu_1 - \mu_2).$$

LAHENDUS. (I). "$\Rightarrow$". Olgu $\nu \perp \mu_1$ ja $\nu \perp \mu_2$. Siis leiduvad hulgad $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 = X$ ja $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$, kusjuures $\mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) = 0$ ning $B_1$ ja $B_2$ on $\nu$-nullhulgad. Paneme tähele, et nüüd $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cup B_2) = X$ ja $(A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$, kusjuures $(\mu_1 + \mu_2)(A_1 \cap A_2) = 0$ ja $B_1 \cup B_2$ on $\nu$-nullhulk; niisiis $\nu \perp (\mu_1 + \mu_2)$.

"$\Leftarrow$". Olgu $\nu \perp (\mu_1 + \mu_2)$. Siis leiduvad hulgad $A, B \in \mathfrak{A}$ nii, et $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, kusjuures $(\mu_1 + \mu_2)(A) = 0$ ja $B$ on $\nu$-nullhulk. Aga nüüd ka $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$, niisiis $\nu \perp \mu_1$ ja $\nu \perp \mu_2$.

(II). Eeldame järgnevas, et üks mõõtudest $\mu_1$ ja $\mu_2$ on lõplik.

"$\Rightarrow$". Olgu $\nu \perp \mu_1$ ja $\nu \perp \mu_2$ ning olgu hulgad $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathfrak{A}$ nagu implikatsiooni (I), "$\Rightarrow$", tõestuses. Siis jällegi $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cup B_2) = X$ ja $(A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$, kusjuures $A_1 \cap A_2$ on $(\mu_1 - \mu_2)$-nullhulk ja $B_1 \cup B_2$ on $\nu$-nullhulk; niisiis $\nu \perp (\mu_1 - \mu_2)$.

Eeldame nüüd lisaks, et $\mu_1 \perp \mu_2$.

"$\Leftarrow$". Olgu $\nu \perp (\mu_1 - \mu_2)$. Siis leiduvad hulgad $A, B \in \mathfrak{A}$ nii, et $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, kusjuures $A$ on $(\mu_1 - \mu_2)$-nullhulk ja $B$ on $\nu$-nullhulk. Veendumaks, et $\nu \perp \mu_1$ ja $\nu \perp \mu_2$, piisab nüüd näidata, et $A$ on nii $\mu_1$- kui ka $\mu_2$-nullhulk. Kuna $\mu_1 \perp \mu_2$, siis leiduvad hulgad $C, D \in \mathfrak{A}$ nii, et $C \cup D = X$, $C \cap D = \emptyset$ ja $\mu_1(D) = \mu_2(C) = 0$. Kui nüüd $\mathfrak{A} \ni E \subset A$, siis

$$\begin{aligned}
\mu_1(E) &= \mu_1(E \cap C) + \mu_1(E \cap D) = \mu_1(E \cap C) \\
&= \mu_1(E \cap C) - \mu_2(E \cap C) = (\mu_1 - \mu_2)(E \cap C) = 0, \\
\mu_2(E) &= \mu_2(E \cap C) + \mu_2(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) \\
&= -\mu_1(E \cap D) + \mu_2(E \cap D) = -(\mu_1 - \mu_2)(E \cap D) = 0,
\end{aligned}$$

seega $A$ on nii $\mu_1$- kui ka $\mu_2$-nullhulk.

**Ülesanne 1.20.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt ning olgu $f \in L_1(\mu)$. Tõestada, et

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \, d|\mu|.$$

LAHENDUS. Hindame:

$$\begin{aligned}
\left| \int f \, d\mu \right| &= \left| \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^- \right| \leqslant \left| \int f \, d\mu^+ \right| + \left| \int f \, d\mu^- \right| \leqslant \int |f| \, d\mu^+ + \int |f| \, d\mu^- \\
&= \int |f| \, d(\mu^+ + \mu^-) = \int |f| \, d|\mu|.
\end{aligned}$$

**Ülesanne 1.21.** Olgu $\mu$ märgiga mõõt. Tõestada, et kui mõõdud $\mu_1$ ja $\mu_2$ on sellised, et $\mu = \mu_1 - \mu_2$, siis $\mu^+ \leqslant \mu_1$ ja $\mu^- \leqslant \mu_2$, s.t.

$$\mu^+(E) \leqslant \mu_1(E) \quad \text{ja} \quad \mu^-(E) \leqslant \mu_2(E) \qquad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

LAHENDUS. Olgu $X = P \cup N$ mõõdu $\mu$ Hahni lahutus. Mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) = \mu_1(E \cap P) - \mu_2(E \cap P) \leqslant \mu_1(E \cap P) \leqslant \mu_1(E)$$

ja

$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap N) = -\big(\mu_1(E \cap N) - \mu_2(E \cap N)\big) \leqslant \mu_2(E \cap N) \leqslant \mu_2(E).$$

**Ülesanne 1.22.** Olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ lõplikud mõõdud ning olgu $\mu := \mu_1 - \mu_2$ (juhime tähelepanu, et $\mu$ on märgiga mõõt). Siis iga $f \in L_1(\mu_1) \cap L_1(\mu_2)$ korral $f \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2.$$

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesandeid 1.21 ja 3.18.

LAHENDUS. BLA-BLA-BLA...

Korrektuur loetud

20.03.2026.

# § IV.2

**Teoreem 2.1.** *Olgu $\nu$ lõplik märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\nu \ll \mu$;

(iii) *iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et*

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\nu(E)| < \varepsilon.$$

Tõestus. (iii)$\Rightarrow$(i).

**Ülesanne 2.2.** Tõestada implikatsioon (iii)$\Rightarrow$(i).

Lahendus. Kehtigu (iii) ning olgu $A \in \mathfrak{A}$, $\mu(A) = 0$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitama, et $\nu(A) = 0$. Tingimuse (iii) põhjal leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral arv $\delta_n > 0$ nii, et

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta_n \quad \Longrightarrow \quad |\nu(E)| < \frac{1}{n}.$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A) = 0 < \delta_n$ ja seega $|\nu(A)| < \frac{1}{n}$, järelikult $\nu(A) = 0$.

□

**Ülesanne 2.3.** Tõestada, et Lebesgue'i lahutuses $\nu = \lambda + \rho$ kehtib $\lambda \perp \rho$.

Lahendus. Kuna $\lambda \perp \mu$, siis leiduvad hulgad $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, nii, et $A$ on $\mu$-nullhulk ja $B$ on $\lambda$-nullhulk. Kuna $\rho \ll \mu$, siis $A$ on ka $\rho$-nullhulk, seega $\lambda \perp \rho$.

**Ülesanne 2.4.** Olgu $\nu = \lambda + \rho$ ($\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$) märgiga mõõdu $\nu$ Lebesgue'i lahutus mõõdu $\mu$ suhtes. Tõestada, et positiivse, negatiivse ja täisvariatsiooni $\nu^+$, $\nu^-$ ja $|\nu|$ Lebesgue'i lahutus $\mu$ suhtes on vastavalt

$$\nu^+ = \lambda^+ + \rho^+, \qquad \nu^- = \lambda^- + \rho^- \qquad \text{ja} \qquad |\nu| = |\lambda| + |\rho|.$$

Lahendus. Ilmselt $\lambda^+ \perp \mu$, $\lambda^- \perp \mu$ ja $|\lambda| \perp \mu$ (vt. ülesannet 1.16) ning $\rho^+ \ll \mu$, $\rho^- \ll \mu$ ja $|\rho| \ll \mu$ (vt. ülesannet 2.1). Seega jääb näidata, et kehtivad võrdused

$$\nu^+ = \lambda^+ + \rho^+, \qquad \nu^- = \lambda^- + \rho^- \qquad \text{ja} \qquad |\nu| = |\lambda| + |\rho|.$$

Olgu $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, sellised, et $A$ on $\rho$-nullhulk ja $B$ on $\lambda$-nullhulk, ning olgu $X = P \cup N$ märgiga mõõdu $\nu$ Hahni lahutus. Paneme tähele, et $X = P \cup N$ on siis ka märgiga mõõtude $\lambda$ ja $\rho$ Hahni lahutus. Tõepoolest, suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B) = \lambda(E \cap A) = \lambda(E \cap A) + \rho(E \cap A) = \nu(E \cap A)$$

ning

$$\rho(E) = \rho(E \cap A) + \rho(E \cap B) = \rho(E \cap B) = \lambda(E \cap B) + \rho(E \cap B) = \nu(E \cap B);$$

järelikult $P$ on nii $\lambda$- kui ka $\rho$-positiivne ning $N$ on nii $\lambda$- kui ka $\rho$-negatiivne hulk. Nüüd suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \lambda(E \cap P) + \rho(E \cap P) = \lambda^+(E) + \rho^+(E)$$

ning

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = -\lambda(E \cap N) - \rho(E \cap N) = \lambda^-(E) + \rho^-(E),$$

järelikult $\nu^+ = \lambda^+ + \rho^+$ ning $\nu^- = \lambda^- + \rho^-$. Niisiis ka

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^- = (\lambda^+ + \rho^+) + (\lambda^- + \rho^-) = (\lambda^+ + \lambda^-) + (\rho^+ + \rho^-) = |\lambda| + |\rho|.$$

Kui funktsioon $f$ on märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ on selline, et $g = f$ $\mu$-p.k., siis ka funktsioon $g$ on märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi.

**Ülesanne 2.5.** Veenduda selles.

LAHENDUS. Olgu funktsioon $f$ märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning olgu $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ selline, et $g = f$ $\mu$-p.k. Väite tõestuseks peame näitama, et $g$ on laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon, kusjuures $\int_E g\,d\mu = \nu(E)$ iga $E \in \mathfrak{A}$ korral.

Kuna $f^+ = g^+$ $\mu$-p.k. ja $f^- = g^-$ $\mu$-p.k. (vt. ülesannet II.1.27, (f)), siis $\int_X g^+\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu$ ja $\int_X g^-\,d\mu = \int_X f^-\,d\mu$ (vt. teoreemi II.2.7), millest järeldub, et vähemalt üks integraalidest $\int_X g^+\,d\mu$ ja $\int_X g^-\,d\mu$ on lõplik ning seega $g$ on laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon. Seejuures iga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu = \int_E g^+\,d\mu - \int_E g^-\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Järgnevast lausest 2.2 järeldub, et *kui märgiga mõõt $\nu$ on $\sigma$-lõplik, siis tema Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k.* Niisiis $\sigma$-lõpliku mõõdu $\nu$ korral võib üleskirjutusi $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ (kus $f$ on laiemas mõttes $\mu$-integreeruv funktsioon) mõista ka tähenduses, et märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletised mõõdu $\mu$ järgi on parajasti need $\mathfrak{A}$-mõõtuvad funktsioonid $X \to \overline{\mathbb{R}}$, mis on $\mu$-p.k. võrdsed funktsiooniga $f$.

**Lause 2.2.** *Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Siis $\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$ parajasti siis, kui $\nu$ on lõplik.*

Veendume, et, tõepoolest, *$\sigma$-lõpliku märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ (mõõdu $\mu$ järgi) on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k.*

Olgu $\nu$ märgiga mõõt ja olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$, ning olgu $f$ märgiga mõõdu $\nu$ mingi Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi. Eelnevas veendusime, et kui $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ on selline, et $g = f$ $\mu$-p.k., siis ka funktsioon $g$ on märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi (vt. ülesannet 2.5). Eeldame nüüd, et $\nu$ on $\sigma$-lõplik. Veendumaks, et Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ on määratud üheselt täpsusega $\mu$-p.k., jääb näidata, et märgiga mõõdu $\nu$ iga Radon–Nikodými tuletis $g$ mõõdu $\mu$ järgi rahuldab tingimust $g = f$ $\mu$-p.k.

Olgu $g$ märgiga mõõdu $\nu$ mingi Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\nu$ on lõplik. Sellisel juhul lause 2.2 põhjal $f \in L_1(\mu)$ ja $g \in L_1(\mu)$, seega, arvestades, et iga $E \in \mathfrak{A}$ korral $\int_E g\,d\mu = \nu(E) = \int_E f\,d\mu$, kehtib $g = f$ $\mu$-p.k. (vt. teoreemi II.3.3 ning ülesandele II.3.6 eelnevat lauset). Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et $\nu$ on lõplik, kuid me eeldame endiselt, et $\nu$ on $\sigma$-lõplik). Märgiga mõõdu $\nu$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $X_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, selliselt, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|\nu|(X_n) < \infty$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime $\mathfrak{A}_n := \{A \cap X_n \colon A \in \mathfrak{A}\}$ ning $\mu_n := \mu|_{\mathfrak{A}_n}$ ja $\nu_n := \nu|_{\mathfrak{A}_n}$; siis iga $E \in \mathfrak{A}_n$ korral

$$\nu_n(E) = \nu(E) = \int_E f\,d\mu = \int_E (f|_{X_n})\,d\mu_n,$$

s.t. ahend $f|_{X_n}$ on märgiga mõõdu $\nu_n$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu_n$ järgi. Analoogiliselt saame, et ahend $g|_{X_n}$ on märgiga mõõdu $\nu_n$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu_n$ järgi; seega arvestades, et $|\nu_n|(X_n) = |\nu|(X_n) < \infty$, s.t. märgiga mõõt $\nu_n$ on lõplik, järeldub eelnevalt tõestatust, et $g|_{X_n} = f|_{X_n}$ $\mu$-p.k. Viimane tingimus kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral, järelikult $g = f$ $\mu$-p.k.

Lause 2.2 tõestuses on mugav toetuda järgnevale ülesandele.

**Ülesanne 2.6.** Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Tõestada, et siis eksisteerivad ka $\frac{d\nu^+}{d\mu}$, $\frac{d\nu^-}{d\mu}$ ja $\frac{d|\nu|}{d\mu}$, kusjuures

$$\frac{d\nu^+}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+, \qquad \frac{d\nu^-}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- \qquad \text{ja} \qquad \frac{d|\nu|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|.$$

Lahendus. Olgu $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ (s.t. $f$ on märgiga mõõdu $\nu$ mingi Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi). Väite tõestuseks piisab näidata, et mis tahes hulga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu^+(E) = \int_E f^+\, d\mu, \qquad \nu^-(E) = \int_E f^-\, d\mu \qquad \text{ja} \qquad |\nu|(E) = \int_E |f|\, d\mu.$$

Selleks defineerime hulgad $P := \{x \in X\colon f(x) \geqslant 0\}$ ja $N := \{x \in X\colon f(x) < 0\}$ ning paneme tähele, et $X = P \cup N$ on märgiga mõõdu $\nu$ Hahni lahutus mõõdu $\mu$ suhtes (sest mis tahes mõõtuvate hulkade $D \subset P$ ja $E \subset N$ korral $\nu(D) = \int_D f\, d\mu \geqslant 0$ ja $\nu(E) = \int_E f\, d\mu \leqslant 0$). Seega mis tahes hulga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E\cap P} f\, d\mu = \int_{E\cap P} f^+\, d\mu = \int_{E\cap P} f^+\, d\mu + \int_{E\cap N} f^+\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu,$$

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = -\int_{E\cap N} f\, d\mu = -\int_{E\cap N} (-f^-)\, d\mu = \int_{E\cap P} f^-\, d\mu + \int_{E\cap N} f^-\, d\mu = \int_E f^-\, d\mu$$

ja

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \int_E f^+\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu = \int_E (f^+ + f^-)\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu,$$

nagu soovitud.

Lause 2.2 tõestus.

**Ülesanne 2.7.** Tõestada lause 2.2.

Lahendus. Ülesande 2.6 põhjal eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d|\nu|}{d\mu}$, kusjuures $\frac{d|\nu|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|$. Seega

$$\nu \text{ on lõplik} \iff |\nu| \text{ on lõplik} \iff |\nu|(X) < \infty \iff \int_X \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu < \infty$$
$$\iff \frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu).$$

□

**Lause 2.3.** *Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Siis $\nu \ll \mu$.*

Tõestus.

**Ülesanne 2.8.** Tõestada lause 2.3.

Lahendus. Olgu $A \in \mathfrak{A}$ selline, et $\mu(A) = 0$. Veendumaks, et $\nu \ll \mu$, piisab näidata, et $\nu(A) = 0$:

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int_A \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ d\mu - \int_A \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- d\mu = 0 - 0 = 0$$

(sest integraal üle nullmõõduga hulga mittenegatiivsest mõõtuvast funktsioonist on null).

□

Järgnev tulemus on järeldus lausetest 2.2 ja 2.3 ning teoreemist 2.1.

**Järeldus 2.4.** *Olgu $f \in L_1(\mu)$. Siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et*

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_E f\, d\mu\right| < \varepsilon.$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.9.** Tõestada järeldus 2.4.

LAHENDUS. Defineerime märgiga mõõdu $\nu$ tingimusega $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ iga $E \in \mathfrak{A}$ korral (s.t. $\nu$ on määramata integraal funktsioonist $f$ mõõdu $\mu$ järgi ehk, teisisõnu, $d\nu = f\, d\mu$). Siis $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ (s.t. funktsioon $f$ on märgiga mõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi). Kuna $f \in L_1(\mu)$, siis lause 2.2 põhjal on märgiga mõõt $\nu$ lõplik. Lause 2.3 põhjal $\nu \ll \mu$. Järelduse väide järeldub nüüd teoreemi 2.1 implikatsioonist (i)$\Rightarrow$(iii).

□

**Teoreem 2.5.** *Olgu $\nu$ märgiga mõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$.*

(a) *Kui $f \in L_1(\nu)$, siis $f\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$, kusjuures $\int f\, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$.*

(b) *Kui $\lambda$ on mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\mu}{d\lambda}$, siis eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\lambda}$, kusjuures $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$.*

TÕESTUS. (a). (I) Tõestame väite kõigepealt erijuhul, kui $\nu$ on mõõt.
BLA-BLA-BLA...

(II)

**Ülesanne 2.11.** Järeldada tõestuse osast (I) väite (a) kehtivus juhul, kui $\nu$ on märgiga mõõt.

LAHENDUS. Olgu $f \in L_1(\nu) = L_1(\nu^+) \cap L_1(\nu^-)$. Kuna eksisteerib Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$, siis eksisteerivad ka $\frac{d\nu^+}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+$ ja $\frac{d\nu^-}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^-$ (vt. ülesannet 2.6). Tõestuse osa (I) põhjal $f\frac{d\nu^+}{d\mu}, f\frac{d\nu^-}{d\mu} \in L_1(\mu)$; kuna $\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ - \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- = \frac{d\nu^+}{d\mu} - \frac{d\nu^-}{d\mu}$, siis ka $f\frac{d\nu}{d\mu} = f\frac{d\nu^+}{d\mu} - f\frac{d\nu^-}{d\mu} \in L_1(\mu)$; seejuures, jällegi tõestuse osa (I) põhjal

$$\int f\, d\nu = \int f\, d\nu^+ - \int f\, d\nu^- = \int f \frac{d\nu^+}{d\mu}\, d\mu - \int f \frac{d\nu^-}{d\mu}\, d\mu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

(b).

**Ülesanne 2.12.** Tõestada väide (b).

NÄPUNÄIDE. Panna tähele, et väite (a) tõestuses on implitsiitselt tõestatud järgmine väide: *kui $\nu$ ja $\mu$ on mõõdud, kusjuures eksisteerib $\frac{d\nu}{d\mu}$, siis suvalise $f \in L^+(\nu) = L^+(\mu)$ korral $\int f\, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$.*

LAHENDUS. Kuna $\frac{d\nu^\pm}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^\pm \in L^+$, siis näpunäite tähelepaneku põhjal iga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu^\pm(E) = \int_E \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^\pm d\mu = \int_E \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^\pm \frac{d\mu}{d\lambda}\, d\lambda.$$

Kuna $\nu$ on märgiga mõõt, siis vähemalt üks mõõtudest $\nu^+$ ja $\nu^-$ on lõplik, seega vähemalt üks funktsioonidest $\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ \frac{d\mu}{d\lambda}$ ja $\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- \frac{d\mu}{d\lambda}$ on $\lambda$-integreeruv, seega funktsioon

$$\frac{d\nu}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^+ - \left(\frac{d\nu}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^- = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ \frac{d\mu}{d\lambda} - \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- \frac{d\mu}{d\lambda}$$

on laiemas mõttes $\lambda$-integreeruv, kusjuures suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda;$$

niisiis $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda}$.

□

## Lebesgue-Radon–Nikodými teoreemi 2.7 tõestus.

Ülesande 2.14 lahendus. Olgu $g, h \in \mathcal{F}$. Tähistame $A = \{x \in X\colon\ g(x) \geqslant h(x)\}$. Siis mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\int_E \max\{g,h\}\,d\mu &= \int_{E\cap A} \max\{g,h\}\,d\mu + \int_{E\setminus A} \max\{g,h\}\,d\mu = \int_{E\cap A} g\,d\mu + \int_{E\setminus A} h\,d\mu \\ &\leqslant \nu(E\cap A) + \nu(E\setminus A) = \nu(E),\end{aligned}$$

aga see tähendab, et $\max\{g,h\} \in \mathcal{F}$.

□

# § IV.3

**Ülesanne 3.4.** Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Tõestada, et $|\nu_r|, |\nu_i| \leqslant |\nu| \leqslant |\nu_r| + |\nu_i|$, s.t.

$$|\nu_r|(E), |\nu_i|(E) \leqslant |\nu|(E) \leqslant |\nu_r|(E) + |\nu_i|(E) \quad \text{iga } E \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Korrektuur loetud
20.03.2026.

Lahendus. Suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$|\nu_r(E)|, |\nu_i(E)| \leqslant |\nu(E)| = \sqrt{\nu_r(E)^2 + \nu_i(E)^2} \leqslant |\nu_r(E)| + |\nu_i(E)|.$$

Seega, kui $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, siis

$$\sum_{j=1}^{n} |\nu_r(E_j)|, \sum_{j=1}^{n} |\nu_i(E_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\nu_r(E_j)| + \sum_{j=1}^{n} |\nu_i(E_j)|,$$

aga siit järeldubki, et suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$|\nu_r|(E), |\nu_i|(E) \leqslant |\nu|(E) \leqslant |\nu_r|(E) + |\nu_i|(E).$$

**Ülesanne 3.8.** Olgu funktsioonid $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ integreeruvad märgiga mõõdu $\mu$ järgi ning olgu $\alpha \in \mathbb{C}$. Tõestada, et siis ka $f + g, \alpha f \in L_1(\mu)$, kusjuures

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \qquad \text{ja} \qquad \int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

Korrektuur loetud
20.03.2026.

Lahendus. Kuna

$$\int |f+g|\, d|\mu| \leqslant \int \big(|f| + |g|\big)\, d|\mu| = \int |f|\, d|\mu| + \int |g|\, d|\mu| < \infty$$

ja

$$\int |\alpha f|\, d|\mu| \leqslant \int |\alpha|\, |f|\, d|\mu| = \alpha \int |f|\, d|\mu| < \infty,$$

siis $f + g, \alpha f \in L_1(\mu)$. Seejuures

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\, d\mu &= \int \operatorname{Re}(f+g)\, d\mu + i \int \operatorname{Im}(f+g)\, d\mu = \int (\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g)\, d\mu + i \int (\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)\, d\mu \\
&= \int \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int \operatorname{Im} f\, d\mu + \int \operatorname{Re} g\, d\mu + i \int \operatorname{Im} g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\int \alpha f\, d\mu &= \int \operatorname{Re}(\alpha f)\, d\mu + i \int \operatorname{Im}(\alpha f)\, d\mu \\
&= \int \big((\operatorname{Re}\alpha) \operatorname{Re} f - (\operatorname{Im}\alpha) \operatorname{Im} f\big)\, d\mu + i \int \big((\operatorname{Re}\alpha) \operatorname{Im} f + (\operatorname{Im}\alpha) \operatorname{Re} f\big)\, d\mu \\
&= \operatorname{Re}\alpha \left( \int \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int \operatorname{Im} f\, d\mu \right) + i \operatorname{Im}\alpha \left( \int \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int \operatorname{Im} f\, d\mu \right) \\
&= \operatorname{Re}\alpha \int f\, d\mu + i \operatorname{Im}\alpha \int f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.
\end{aligned}$$

**Ülesanne 3.9.** Olgu funktsioonid $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ integreeruvad kompleksmõõdu $\nu$ järgi ning olgu $\alpha \in \mathbb{C}$. Tõestada, et siis ka $f+g, \alpha f \in L_1(\nu)$, kusjuures

$$\int (f+g)\,d\nu = \int f\,d\nu + \int g\,d\nu \qquad \text{ja} \qquad \int \alpha f\,d\nu = \alpha \int f\,d\nu.$$

Korrektuur loetud
20.03.2026.

Lahendus. Kuna

$$\int |f+g|\,d|\nu| \leqslant \int \big(|f|+|g|\big)\,d|\nu| = \int |f|\,d|\nu| + \int |g|\,d|\nu| < \infty$$

ja

$$\int |\alpha f|\,d|\nu| \leqslant \int |\alpha|\,|f|\,d|\nu| = \alpha \int |f|\,d|\nu| < \infty,$$

siis $f+g, \alpha f \in L_1(\nu)$. Seejuures

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,d\nu &= \int (f+g)\,d\nu_r + i\int (f+g)\,d\nu_i = \int f\,d\nu_r + \int g\,d\nu_r + i\left(\int f\,d\nu_i + \int g\,d\nu_i\right)\\ &= \int f\,d\nu_r + i\int f\,d\nu_i + \int g\,d\nu_i + i\int g\,d\nu_i = \int f\,d\nu + \int g\,d\nu\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\int \alpha f\,d\nu &= \int \alpha f\,d\nu_r + i\int \alpha f\,d\nu_i = \alpha\int f\,d\nu_r + \alpha i\int f\,d\nu_i = \alpha\left(\int f\,d\nu_r + i\int f\,d\nu_i\right)\\ &= \alpha\int f\,d\nu.\end{aligned}$$

**Ülesanne 3.10.** (a) Eksisteerigu Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$. Tõestada, et siis eksisteerivad ka $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$, kusjuures

$$\frac{d\nu_r}{d\mu} = \operatorname{Re}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) \quad \text{ja} \quad \frac{d\nu_i}{d\mu} = \operatorname{Im}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right). \tag{3.1}$$

(b) Eksisteerigu Radon–Nikodými tuletised $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$. Tõestada, et siis eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\mu}$, kusjuures võrdused (3.1) kehtivad $\mu$-p.k.

NB! Ülesandes 3.10, (b), tuleneb võrduse (3.1) kehtivus $\mu$-p.k. (aga mitte tingimata ruumi $X$ igas punktis) sellest, et vastavalt definitsioonile on märgiga mõõtude $\nu_r$ ja $\nu_i$ Radon–Nikodými tuletistel $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$ lubatud olla $\overline{\mathbb{R}}$-väärtuselised funktsioonid, samas kui kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$ peab olema $\mathbb{C}$-väärtuseline funktsioon ning seega tema reaal- ja imaginaarosa $\operatorname{Re}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big)$ ja $\operatorname{Im}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big)$ peavad olema $\mathbb{R}$-väärtuselised funktsioonid.

Korrektuur loetud
22.03.2026.

Lahendus. (a). Eksisteerigu $\frac{d\nu}{d\mu}$. Siis reaal- ja imaginaarosa $\operatorname{Re}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big)$ ja $\operatorname{Im}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big)$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuvad $\mu$-integreeruvad funktsioonid; seejuures suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu_r(E) + i\nu_i(E) = \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int_E \operatorname{Re}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)d\mu + i\int_E \operatorname{Im}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)d\mu,$$

seega $\nu_r(E) = \int_E \operatorname{Re}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big)\,d\mu$ ja $\nu_i(E) = \int_E \operatorname{Im}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big)\,d\mu$, järelikult eksisteerivad $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$, kusjuures kehtib (3.1).

(b). Eksisteerigu Radon–Nikodými tuletised $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$. Need Radon–Nikodými tuletised on $\overline{\mathbb{R}}$-väärtuselised $\mathfrak{A}$-mõõtuvad $\mu$-integreeruvad funktsioonid, seega need funktsioonid on $\mu$-p.k.-lõplikud, järelikult leiduvad $\mathbb{R}$-väärtuselised $\mathfrak{A}$-mõõtuvad $\mu$-integreeruvad funktsioonid $u$ ja $v$ selliselt, et $u = \frac{d\nu_r}{d\mu}$ $\mu$-p.k. ja $v = \frac{d\nu_i}{d\mu}$ $\mu$-p.k. Nüüd $u+iv$ on $\mathbb{C}$-väärtuseline $\mathfrak{A}$-mõõtuv $\mu$-integreeruv funktsioon; seejuures suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu(E) = \nu_r(E) + i\nu_i(E) = \int_E \frac{d\nu_r}{d\mu}\,d\mu + i\int_E \frac{d\nu_i}{d\mu}\,d\mu = \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu = \int_E (u+iv)\,d\mu;$$

järelikult eksisteerib $\frac{d\nu}{d\mu} = u + iv$, kujuures $\operatorname{Re}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big) = u$ ja $\operatorname{Im}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big) = v$; niisiis $\operatorname{Re}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big) = \frac{d\nu_r}{d\mu}$ $\mu$-p.k ja $\operatorname{Im}\big(\frac{d\nu}{d\mu}\big) = \frac{d\nu_i}{d\mu}$ $\mu$-p.k.

Kui funktsioon $f$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{C}$ on selline, et $g = f$ $\mu$-p.k., siis ka funktsioon $g$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi.

Korrektuur loetud 22.03.2026.

**Ülesanne 3.11.** Veenduda selles.

LAHENDUS. Olgu funktsioon $f$ kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi ning olgu $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{C}$ selline, et $g = f$ $\mu$-p.k. Siis ka $\operatorname{Re} g = \operatorname{Re} f$ $\mu$-p.k. ja $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ $\mu$-p.k., järelikult $\operatorname{Re} g$ ja $\operatorname{Im} g$ on $\mu$-integreeruvad funktsioonid ning seega $g$ on $\mu$-integreeruv funktsioon. Seejuures mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu = \int_E \operatorname{Re} f\,d\mu + i\int_E \operatorname{Im} f\,d\mu = \int_E \operatorname{Re} g\,d\mu + i\int_E \operatorname{Im} g\,d\mu = \int_E g\,d\mu;$$

niisiis $g$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletis mõõdu $\mu$ järgi.

Teiselt poolt, kui funktsioonid $f$ ja $g$ on kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletised mõõdu $\mu$ järgi, siis $f = g$ $\mu$-p.k.

Korrektuur loetud 22.03.2026.

**Ülesanne 3.12.** Veenduda selles.

LAHENDUS. Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ kompleksmõõdu $\nu$ Radon–Nikodými tuletised mõõdu $\mu$ järgi. Siis mis tahes $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\int_E \operatorname{Re} f\,d\mu + i\int_E \operatorname{Im} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu = \nu(E) = \int_E g\,d\mu = \int_E \operatorname{Re} g\,d\mu + i\int_E \operatorname{Im} g\,d\mu,$$

seega $\int_E \operatorname{Re} f\,d\mu = \int_E \operatorname{Re} g\,d\mu$ ja $\int_E \operatorname{Im} f\,d\mu = \int_E \operatorname{Im} g\,d\mu$, järelikult, arvestades, et $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, \operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g \in L_1(\mu)$ (sest funktsioonid $f$ ja $g$ on $\mu$-integreeruvad),

$$\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g \quad \mu\text{-p.k.} \qquad \text{ja} \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g \quad \mu\text{-p.k.};$$

niisiis $f = g$ $\mu$-p.k.

**Teoreem 3.5.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\nu}{d\mu}$.*

(a) *Kui $f \in L_1(\nu)$, siis $f\frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$, kusjuures $\int f\,d\nu = \int f\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$.*

(b) *Kui $\lambda$ on mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodḿi tuletis $\frac{d\mu}{d\lambda}$, siis eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\lambda}$, kusjuures $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ $\lambda$-p.k.*

Korrektuur loetud 22.03.2026.

TÕESTUS (ÜL. 3.13 LAHENDUS). Teoreemi eeldustel eksisteerivad Radon–Nikodými tuletised $\frac{d\nu_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu}$, kusjuures $\frac{d\nu_r}{d\mu} = \operatorname{Re}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)$ ja $\frac{d\nu_i}{d\mu} = \operatorname{Im}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)$.

(a). Olgu $f \in L_1(\nu)$. Siis

$$\int f\,d\nu = \int f\,d\nu_r + i\int f\,d\nu_i = \int \operatorname{Re} f\,d\nu_r + i\int \operatorname{Im} f\,d\nu_r + i\left(\int \operatorname{Re} f\,d\nu_i + i\int \operatorname{Im} f\,d\nu_i\right).$$

Arvestades, et $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L_1(\nu_r) \cap L_1(\nu_i)$, saame teoreemi 2.5, (a), põhjal, et

$$(\operatorname{Re} f)\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\,,\ (\operatorname{Im} f)\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\,,\ (\operatorname{Re} f)\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\,,\ (\operatorname{Im} f)\,\frac{d\nu_i}{d\mu} \in L_1(\mu).$$

Kuna

$$(\operatorname{Re} f)\,\frac{d\nu_r}{d\mu} = \operatorname{Re}\left(f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\right), \qquad (\operatorname{Im} f)\,\frac{d\nu_r}{d\mu} = \operatorname{Im}\left(f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\right),$$
$$(\operatorname{Re} f)\,\frac{d\nu_i}{d\mu} = \operatorname{Re}\left(f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right), \qquad (\operatorname{Im} f)\,\frac{d\nu_i}{d\mu} = \operatorname{Im}\left(f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right),$$

siis

$$\operatorname{Re}\left(f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\right),\ \operatorname{Im}\left(f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\right),\ \operatorname{Re}\left(f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right),\ \operatorname{Im}\left(f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right) \in L_1(\mu),$$

niisiis $f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}, f\,\frac{d\nu_i}{d\mu} \in L_1(\mu)$ ning seega ka $f\,\frac{d\nu}{d\mu} = f\,\frac{d\nu_r}{d\mu} + if\,\frac{d\nu_i}{d\mu} \in L_1(\mu)$ (vt. ülesannet 3.9). Seejuures (jällegi teoreemi 2.5, (a), põhjal)

$$\begin{aligned}\int f\,d\nu &= \int (\operatorname{Re} f)\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\,d\mu + i\int (\operatorname{Im} f)\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\,d\mu + i\left(\int (\operatorname{Re} f)\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\,d\mu + i\int (\operatorname{Im} f)\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\,d\mu\right)\\ &= \int \operatorname{Re}\left(f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\right)d\mu + i\int \operatorname{Im}\left(f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\right)d\mu + i\left(\int \operatorname{Re}\left(f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right)d\mu + i\int \operatorname{Im}\left(f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right)d\mu\right)\\ &= \int f\,\frac{d\nu_r}{d\mu}\,d\mu + i\int f\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\,d\mu = \int f\,\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu.\end{aligned}$$

(b). Olgu $\lambda$ mõõt, kusjuures eksisteerib Radon–Nikodỳmi tuletis $\frac{d\mu}{d\lambda}$. Teoreemi 2.5, (b), põhjal eksisteerivad ka

$$\frac{d\nu_r}{d\lambda} = \frac{d\nu_r}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda} \quad \text{ja} \quad \frac{d\nu_i}{d\lambda} = \frac{d\nu_i}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda},$$

seega eksisteerib ka $\frac{d\nu}{d\lambda}$, kusjuures $\lambda$-peaaegu kõikjal

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu_r}{d\lambda} + i\,\frac{d\nu_i}{d\lambda} = \frac{d\nu_r}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda} + i\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda} = \left(\frac{d\nu_r}{d\mu} + i\,\frac{d\nu_i}{d\mu}\right)\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\,\frac{d\mu}{d\lambda}.$$

**Lebesgue-Radon–Nikodými teoreem 3.6 kompleksmõõtude jaoks.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt ning olgu $\mu$ $\sigma$-lõplik mõõt.*

(a) *Leiduvad üheselt määratud kompleksmõõdud $\lambda$ ja $\rho$ selliselt, et*

$$\lambda \perp \mu,\ \rho \ll \mu \quad \textit{ja} \quad \nu = \lambda + \rho.$$

(b) *Leidub (kompleksne) funktsioon $f \in L_1(\mu)$ selliselt, et*

$$d\rho = f\,d\mu.$$

*Mis tahes kaks seda tingimust rahuldavat funktsiooni on võrdsed $\mu$-p.k.*

Korrektuur loetud 22.03.2026.

Tõestus (Ül. 3.14 lahendus). (a). Rakendades Lebesgue-Radon–Nikodými teoreemi 2.7, (a), kompleksmõõdu $\nu$ reaalosale $\nu_r$ ja imaginaarosale $\nu_i$ (mis on lõplikud märgiga mõõdud), leiduvad üheselt määratud märgiga mõõdud $\lambda_r, \rho_r, \lambda_i, \rho_i$ nii, et

$$\lambda_a \perp \mu,\ \rho_a \ll \mu \quad \text{ja} \quad \nu_a = \lambda_a + \rho_a, \qquad \text{iga } a \in \{r, i\} \text{ korral.} \tag{$\bullet$}$$

Defineerime $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ ja $\rho = \rho_r + i\rho_i$, siis $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_r$, $\operatorname{Im}\lambda = \lambda_i$, $\operatorname{Re}\rho = \rho_r$ ja $\operatorname{Im}\rho = \rho_i$, järelikult $\lambda \perp \mu$ ja $\rho \ll \mu$ (vt. ülesannet 3.5), seejuures

$$\nu = \nu_r + i\nu_i = \lambda_r + \rho_r + i(\lambda_i + \rho_i) = (\lambda_r + i\lambda_i) + (\rho_r + i\rho_i) = \lambda + \rho.$$

Veendumaks esituse $\nu = \lambda + \rho$ (kus $\lambda \perp \mu$ ja $\rho \ll \mu$) ühesuses, oletame, et mingite kompleksmõõtude $\tilde{\lambda}$ ja $\tilde{\rho}$ korral $\nu = \tilde{\lambda} + \tilde{\rho}$, kusjuures $\tilde{\lambda} \perp \mu$ ja $\tilde{\rho} \ll \mu$. Aga siis

$$\tilde{\lambda}_a \perp \mu,\ \tilde{\rho}_a \ll \mu \quad \text{ja} \quad \nu_a = \tilde{\lambda}_a + \tilde{\rho}_a, \qquad \text{iga } a \in \{r, i\} \text{ korral,}$$

millest esituste ($\bullet$) ühesuse tõttu järeldub, et $\tilde{\lambda}_r = \lambda_r$, $\tilde{\rho}_r = \rho_r$, $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$, $\tilde{\rho}_i = \rho_i$; niisiis

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_r + i\tilde{\lambda}_i = \lambda_r + i\lambda_i = \lambda \quad \text{ja} \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_r + i\tilde{\rho}_i = \rho_r + i\rho_i = \rho.$$

(b). Kuna $\rho_r, \rho_i \ll \mu$, siis Radon–Nikodými teoreemi 2.7, (b), põhjal eksisteerivad $\frac{d\rho_r}{d\mu}$ ja $\frac{d\rho_i}{d\mu}$; niisiis eksisteerib ka $\frac{d\rho}{d\mu}$ (vt. ülesannet 3.10, (b)), mis on täpsusega $\mu$-p.k. üheselt määratud (vt. ülesandeid 3.11 ja 3.12). □

**Teoreem 3.10.** *Olgu $\nu$ kompleksmõõt. Siis iga $f \in L_1(\nu)$ korral*

$$\left|\int f\, d\nu\right| \leqslant \int |f|\, d|\nu|.$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 3.15.** Tõestada teoreem 3.10.

NÄPUNÄIDE. Kasutada lauset 3.8, teoreemi 3.5, (a), ning lauset 3.4.

Korrektuur loetud 22.03.2026.

LAHENDUS. Näpunäite tulemuste põhjal

$$\left|\int f\, d\nu\right| = \left|\int f \frac{d\nu}{d|\nu|}\, d|\nu|\right| \leqslant \int |f| \left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right| d|\nu| = \int |f|\, d|\nu|.$$

□

# § V.0

**Ülesanne 0.1.** Tõestada, et vektorruumid $B(X)$, $B(X,\mathbb{R})$, $BC(X)$ ja $BC(X,\mathbb{R})$ on ühtlase normi suhtes Banachi ruumid.

Korrektuur loetud 26.03.2026.

Lahendus. Vahetult on kontrollitav, et ühtlane norm on kõigis nimetatud vektorruumides norm.

Tõestame, et ruumid $B(X,\mathbb{R})$ ja $B(X)$ on (ühtlase normi suhtes) täielikud. Olgu $(f_n)$ Cauchy jada ruumis $B(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $B(X)$). Siis $\big(f_n(x)\big)$ on Cauchy jada iga $x \in X$ korral, seega jada $(f_n)$ koondub punktiviisi mingiks funktsiooniks $f\colon X \to \mathbb{R}$ (*resp.* $X \to \mathbb{C}$). Veendume, et $f \in B(X,\mathbb{R})$ (või $f \in B(X)$), kusjuures $f_n \to f$ ühtlase normi suhtes. Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Valime indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n, m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f_m\| = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Piirprotsessis $m \to \infty$ järeldub eelnevast, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{$*$}$$

Siit järeldub, et $f \in B(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $f \in B(X)$), s.t. funktsioon $f$ on tõkestatud (sest tingimuse $(*)$ põhjal iga $x \in X$ korral $|f(x)| \leqslant |f_N(x)| + |f(x) - f_N(x)| \leqslant \|f_N\| + \varepsilon$), ning samuti, et $f_n \to f$ ühtlase normi suhtes (sest $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|$).

Ruumide $B(X,\mathbb{R})$ ja $B(X)$ täielikkus on tõestatud.

Ruumid $BC(X,\mathbb{R})$ ja $BC(X)$ on vastavalt ruumide $B(X,\mathbb{R})$ ja $B(X)$ vektoralamruumid. Tõestamaks, et ruumid $BC(X,\mathbb{R})$ ja $BC(X)$ on (ühtlase normi suhtes) täielikud, piisab nüüd näidata, et need alamruumid on kinnised (ühtlase normi suhtes). Olgu jada $(f_n)$ alamruumis $BC(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $BC(X)$) ja element $f \in B(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $f \in B(X)$) sellised, et $f_n \to f$ (ühtlase normi suhtes). Veendumaks, et alamruum $BC(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $BC(X)$) on kinnine (ühtlase normi suhtes ruumis $B(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $BC(X)$)), piisab näidata, et $f \in BC(X,\mathbb{R})$ (*resp.* $f \in BC(X)$), s.t. funktsioon $f$ on pidev, s.t. funktsioon $f$ on pidev igas ruumi $X$ punktis. Fikseerime vabalt punkti $x_0 \in X$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$. Valime indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et kehtib $(*)$ (niisugune valik on võimalik, sest $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|$). Funktsiooni $f_N$ pidevuse tõttu leidub punkti $x_0$ ümbrus $U$ nii, et

$$x \in U \quad \Longrightarrow \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon.$$

Aga nüüd iga $x \in U$ korral

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Sellega oleme tõestanud, et funktsioon $f$ on pidev punktis $x_0$, ning ühtlasi, et funktsioon $f$ on pidev, nagu soovitud.

**Ülesanne 0.2.** Olgu $X$ kompaktne topoloogiline ruum ning olgu $f \in C(X,\mathbb{R})$. Tõestada, et

(a) $f$ on tõkestatud;

(b) $f$ saavutab oma ekstremaalsed väärtused.

Korrektuur loetud 22.03.2026.

Lahendus. (a). Kogum $\Big\{f^{-1}\big[(-M,M)\big]\colon M > 0\Big\}$ on hulga $X$ lahtine kate, järelikult hulga $X$ kompaktsuse tõttu sisaldab ta lõpliku alamkatte, s.t. leiduvad positiivsed reaalarvud $M_1 < M_2 < \cdots < M_n$ (siin $n \in \mathbb{N}$) nii, et $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}\big[(-M_i, M_i)\big] = f^{-1}\big[(-M_n, M_n)\big]$. Aga siit järeldub, et iga $x \in X$ korral $-M_n < f(x) < M_n$, seega $f$ on tõkestatud.

(b). Oletame vastuväiteliselt, et ei leidu elementi $z \in X$, mille korral $f(z) = \sup_{x \in X} f(x) =: M$. (Märgime, et ülesande (a)-osa põhjal $M < \infty$.) Siis kogum $\{f^{-1}[(-\infty, M - \varepsilon)] \colon \varepsilon > 0\}$ on hulga $X$ lahtine kate, järelikult hulga $X$ kompaktsuse tõttu sisaldab ta lõpliku alamkatte, s.t. leiduvad reaalarvud $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_n > 0$ (siin $n \in \mathbb{N}$) nii, et $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}[(-\infty, M - \varepsilon_i)] = f^{-1}[(-\infty, M - \varepsilon_n)]$. Aga siit järeldub, et iga $x \in X$ korral $f(x) < M - \varepsilon_n$, mis on vastuolus eeldusega, et $M = \sup_{x \in X} f(x)$.

**Lause 0.6.** *Olgu $F$ Hausdorffi ruumi $X$ kompaktne alamhulk ning olgu $x \in X \setminus F$. Siis leiduvad lahtised hulgad $U, V \subset X$, $U \cap V \neq \emptyset$, nii, et $x \in U$ ja $F \subset V$.*

Muuhulgas järelduvad lausest 0.6 järgnevad kaks olulist tulemust.

**Järeldus 0.7.** *Hausdorffi ruumi kompaktne alamruum on kinnine.*

**Järeldus 0.8.** *Kompaktne Hausdorffi ruum on normaalne.*

**Ülesanne 0.3.** Tõestada järeldused 0.7 ja 0.8.

Korrektuur loetud
22.03.2026.

LAHENDUS. JÄRELDUSE 0.7 TÕESTUS. Olgu $F$ Hausdorffi ruumi $X$ kompaktne alamruum. Iga $x \in X \setminus F$ korral leidub lause 0.6 põhjal lahtine hulk $U_x \subset X$ nii, et $x \in U_x$ ja $U_x \cap F = \emptyset$. Aga nüüd $X \setminus F = \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x$ on lahtine hulk, seega $F$ on kinnine. □

JÄRELDUSE 0.8 TÕESTUS. Olgu $F_1$ ja $F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, kompaktse Hausdorffi ruumi $X$ kinnised alamhulgad. Siis $F_1$ ja $F_2$ on kompaktsed. Lause 0.6 põhjal leiduvad iga $x \in F_1$ korral lahtised hulgad $U_x, V_x \subset X$, $U_x \cap V_x = \emptyset$, nii, et $x \in U_x$ ja $V_x \supset F_2$. Kogum $\{U_x \colon x \in F_1\}$ on kompaktse hulga $F_1$ lahtine kate, seega ta sisaldab lõpliku alamkatte $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ (siin $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in F_1$). Aga nüüd, tähistades $U := \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}$ ja $V := \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}$, kehtib $U \cap V = \emptyset$, kusjuures $F_1 \subset U$ ja $V \supset F_2$. Siit järeldub, et $X$ on normaalne. □

**Teoreem 0.14 (Tietze jätkamisteoreem, lokaalselt kompaktne versioon).** *Olgu $X$ lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, olgu $K \subset U \subset X$, kus hulk $K$ on kompaktne ning hulk $U$ on lahtine, ning olgu $g \in C(K, \mathbb{R})$ (*resp.* $g \in C(K)$). Siis leidub funktsioon $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ (*resp.* $f \in C_c(X)$) nii, et $f|_K = g$,* $\operatorname{supp} f \subset U$ *ja $\|f\|_u = \|g\|_u$.*

TÕESTUS. Leiame kõigepealt funktsiooni $h \in C_c(X, \mathbb{R})$ (*resp.* $h \in C_c(X)$) nii, et $h|_K = g$ ja $\operatorname{supp} h \subset U$.

**Ülesanne 0.4.** Tõestada niisuguse funktsiooni $h$ olemasolu.

NÄPUNÄIDE. Arutledes sarnaselt Urõsoni lemma 0.12 tõestusega, kasutada Tietze jätkamisteoreemi järeldust 0.4 ja Urõsoni lemmat 0.2.

Korrektuur loetud
29.03.2026.

LAHENDUS. Lause 0.9 põhjal leidub suhteliselt kompaktne lahtine hulk $V$ nii, et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Kuna kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum on normaalne, siis Tietze jätkamisteoreemi järelduse 0.4 põhjal leidub funktsioon $\psi \in C(\overline{V}, \mathbb{R})$ (*resp.* $\psi \in C(\overline{V})$) nii, et $\psi|_K = g$. Urõsoni lemma 0.2 põhjal leidub funktsioon $\phi \in C(\overline{V}, [0,1])$ nii, et $\phi|_K = 1$ ja $\phi|_{\overline{V} \setminus V} = 0$. Defineerime funktsiooni $h \colon X \to \mathbb{R}$ (*resp.* $X \to \mathbb{C}$) võrdustega $h|_{\overline{V}} = \phi\psi$ ja $h|_{\overline{V}^c} = 0$. Jääb näidata, et funktsioon $h$ on pidev (sel juhul $h \in C_c(X, \mathbb{R})$ (*resp.* $h \in C_c(X)$), sest $\operatorname{supp} h$ kui kompaktse hulga $\overline{V}$ kinnine alamhulk on kompaktne, kusjuures $\operatorname{supp} h \subset \overline{V} \subset U$ ning $h|_K = (\phi\psi)|_K = \psi|_K = g$). Funktsiooni $h$ pidevuse tõestus on sõna-sõnalt sama, mis funktsiooni $f$ pidevuse tõestus teoreemi 0.12 tõestuses (ainult, et funktsioon $f$ tuleb kõikjal asendada funktsiooniga $h$).

BLA-BLA-BLA... □

# § V.1

**Ülesanne 1.2.** Olgu $\mu$ Boreli mõõt ruumis $X$, kusjuures iga kompaktse hulga $K \subset X$ korral $\mu(X) < \infty$. Veenduda, et kujutus

$$\Phi\colon\ C_c(X,\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int f\,d\mu \in \mathbb{R}$$

on positiivne lineaarne funktsionaal. (Kõigepealt näidata, et $C_c(X,\mathbb{R}) \subset L_1(\mu)$.)

Korrektuur loetud 20.03.2026.

LAHENDUS. Olgu $f \in C_c(X,\mathbb{R})$. Siis on $f$ Boreli mõttes mõõtuv, kusjuures $|f| \leqslant \|f\|\,\chi_{\operatorname{supp} f}$. Seega

$$\int |f|\,d\mu \leqslant \int \|f\|\,\chi_{\operatorname{supp} f}\,d\mu = \|f\| \int \chi_{\operatorname{supp} f}\,d\mu = \|f\|\,\mu(\operatorname{supp} f) < \infty;$$

järelikult $|f| \in L_1(\mu)$ ning seega ka $f \in L_1(\mu)$. Niisiis, funktsionaal $\Phi$ on korrektselt defineeritud. Funktsionaali $\Phi$ positiivsus ja lineaarsus on ilmne.

# § V.2

**Lause 2.13.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum.*

(a) *Kui $U \subset X$ on lahtine hulk, siis $\chi_U$ on LSC.*

(b) *Kui funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on LSC ja $c \in [0,\infty)$, siis ka funktsioon $cf$ on LSC.*

(c) *Kui $\mathcal{G}$ on mingi LSC funktsioonide $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ hulk ning $f = \sup\{g\colon g \in \mathcal{G}\}$, siis ka $f$ on LSC.*

(d) *Kui funktsioonid $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on LSC, siis ka $f_1 + f_2$ on LSC (eeldusel, et ta on määratud).*

(e) *Kui $X$ on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mittenegatiivne ja LSC, siis*

$$f(x) = \sup\{g(x)\colon\ g \in C_c(X,\mathbb{R}),\ 0 \leqslant g \leqslant f\} \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

TÕESTUS.

**Ülesanne 2.11.** Tõestada väited (a), (b), (c) ja (d).

Korrektuur loetud 26.03.2026.

LAHENDUS. (a). Olgu $U \subset X$ lahtine hulk. Defineerime iga $a \in \mathbb{R}$ korral hulga $A_a := \{x \in X\colon \chi_U(x) > a\}$. Tõestamaks, et funktsioon $\chi_U$ on LSC, piisab (lause 2.10 põhjal) näidata, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral on hulk $A_a$ lahtine. Selleks märgime, et

$$A_a = \begin{cases} X, & \text{kui } a < 0; \\ U, & \text{kui } 0 \leqslant a < 1; \\ \emptyset, & \text{kui } a \geqslant 1. \end{cases}$$

Niisiis, igal juhul on $A_a$ lahtine hulk, nagu soovitud.

(b). Olgu funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ LSC ning olgu $c \in [0, \infty)$. Kui $c = 0$, siis $cf$ on nullfunktsioon ja seega ilmselt $cf$ on LSC. Eeldame nüüd, et $0 < c < \infty$. Tõestamaks, et $cf$ on LSC, piisab (lause 2.10 põhjal) näidata, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral on hulk $A_a := \{x \in X \colon cf(x) > a\}$ lahtine. Iga $a \in \mathbb{R}$ korral $A_a := \bigl\{x \in X \colon f(x) > \frac{a}{c}\bigr\}$. Viimane hulk on lahtine (lause 2.10 põhjal, sest $f$ on LSC), seega hulk $A_a$ on lahtine, nagu soovitud.

(c). Olgu $\mathcal{G}$ mingi LSC funktsioonide $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ hulk ning olgu $f = \sup\bigl\{g\colon g \in \mathcal{G}\bigr\}$. Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$ ja defineerime hulga $A := \{x \in X\colon f(x) > a\}$. Tõestamaks, et $f$ on LSC, piisab (lause 2.10 põhjal) näidata, et hulk $A$ on lahtine. Selleks paneme tähele, et $A = \bigcup_{g\in\mathcal{G}}\{x \in X\colon g(x) > a\}$. Kuna funktsioonid $g \in \mathcal{G}$ on LSC, siis (lause 2.10 põhjal) on iga $g \in \mathcal{G}$ korral hulk $\{x \in X\colon g(x) > a\}$ lahtine. Seega ka $A$ on lahtine hulk (sest ta esitub lahtiste hulkade ühendina), nagu soovitud.

(d). Olgu funktsioonid $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ LSC, kusjuures funktsioon $f_1+f_2$ on määratud. Esitame väitele, et summa $f_1 + f_2$ on LSC, kaks tõestust, millest esimene toetub lausele 2.10 ning teine vahetult funktsiooni alt poolpidevuse definitsioonile (mille kohaselt funktsiooni alt poolpidevus tähendab, et see funktsioon on alt poolpidev igas punktis).

*"Esimene" tõestus väitele, et $f_1 + f_2$ on LSC.* Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$ ja defineerime hulga $A := \{x \in X\colon f_1(x) + f_2(x) > a\}$. Tõestamaks, et summa $f_1 + f_2$ on LSC, piisab (lause 2.10 põhjal) näidata, et hulk $A$ on lahtine. Selleks piisab veenduda, et $A = B$, kus

$$B := \bigcup_{b\in\mathbb{R}} \{x \in X\colon f_1(x) > b\} \cap \{x \in X\colon f_2(x) > a - b\},$$

sest funktsioonide $f_1$ ja $f_2$ alt poolpidevuse tõttu on siin hulgad $\{x \in X\colon f_1(x) > b\}$ ja $\{x \in X\colon f_2(x) > a - b\}$ lahtised (seda lause 2.10 põhjal) ning seega ka hulk $B$ on lahtine.

Sisalduvus $A \supset B$ on ilmne, seega jääb näidata, et $A \subset B$. Fikseerime vabalt $z \in A$. Siis kindlasti $f_1(z), f_2(z) > -\infty$. Kui $f_1(z) = \infty$ või $f_2(z) = \infty$, siis ilmselt $z \in B$. Olgu $f_1(z), f_2(z) \in \mathbb{R}$. Kuna $f_1(z) > a - f_2(z)$, siis leidub $b \in \mathbb{R}$ nii, et $f_1(z) > b > a - f_2(z)$. Aga nüüd $z \in \{x \in X\colon f_1(x) > b\} \cap \{x \in X\colon f_2(x) > a - b\} \subset B$.

*"Teine" tõestus väitele, et $f_1 + f_2$ on LSC.* Fikseerime vabalt punkti $x_0 \in X$. Tõestamaks, et summa $f_1 + f_2$ on LSC, piisab näidata, et see summa on LSC punktis $x_0$. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ruumi $X$ elementide pere, mis koondub punktiks $x_0$ (ruumis $X$). Veendumaks, et summa $f_1 + f_2$ on LSC puktis $x_0$, piisab näidata, et

$$\liminf_{\alpha}\bigl(f_1(x_\alpha) + f_2(x_\alpha)\bigr) \geqslant f_1(x_0) + f_2(x_0).$$

Kui $f_1(x_0) = -\infty$ või $f_2(x_0) = -\infty$, siis ka $f_1(x_0) + f_2(x_0) = -\infty$ ning seega on eelneva võrratuse kehtivus ilmne. Seepärast võime järgnevas eeldada, et $f_1(x_0) > -\infty$ ja $f_2(x_0) > -\infty$. Kuna funktsioonide $f_1$ ja $f_2$ alt poolpidevuse tõttu punktis $x_0$

$$\liminf_{\alpha} f_1(x_\alpha) \geqslant f_1(x_0) > -\infty \quad \text{ja} \quad \liminf_{\alpha} f_2(x_\alpha) \geqslant f_2(x_0) > -\infty,$$

siis leiduvad indeksid $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ selliselt, et

$$\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_1} f_1(x_\beta) > -\infty \quad \text{ja} \quad \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_2} f_2(x_\beta) > -\infty.$$

Nüüd, valides indeksi $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ selliselt, et $\alpha_0 \succcurlyeq \alpha_1$ ja $\alpha_0 \succcurlyeq \alpha_2$, kehtivad võrratused

$$\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_1(x_\beta) \geqslant \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_1} f_1(x_\beta) > -\infty \quad \text{ja} \quad \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_2(x_\beta) \geqslant \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_2} f_2(x_\beta) > -\infty.$$

Nüüd iga indeksi $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ korral

$$\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha}\bigl(f_1(x_\beta) + f_2(x_\beta)\bigr) \geqslant \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha} f_1(x_\beta) + \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha} f_2(x_\beta)$$

(märgime, et siin $\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha} f_1(x_\beta) \geqslant \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_1(x_\beta) > -\infty$ ja $\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha} f_2(x_\beta) \geqslant \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_2(x_\beta) > -\infty$), seega

$$\begin{aligned}\liminf_\alpha\big(f_1(x_\alpha)+f_2(x_\alpha)\big) &= \lim_\alpha \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha}\big(f_1(x_\beta)+f_2(x_\beta)\big)\\ &\geqslant \lim_\alpha\big(\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_1(x_\beta)+\inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_2(x_\beta)\big) = \lim_\alpha \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_1(x_\beta)+\lim_\alpha \inf_{\beta\succcurlyeq\alpha_0} f_2(x_\beta)\\ &= \liminf_\alpha f_1(x_\alpha)+\liminf_\alpha f_2(x_\alpha)\\ &\geqslant f_1(x_0)+f_2(x_0),\end{aligned}$$

nagu soovitud.

□

**Lause 2.14.** *Olgu $X$ topoloogiline ruum.*

(a) *Kui $F \subset X$ on kinnine hulk, siis $\chi_F$ on USC.*

(b) *Kui funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on USC ja $c \in [0,\infty)$, siis ka funktsioon $cf$ on USC.*

(c) *Kui $\mathcal{G}$ on mingi USC funktsioonide $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ hulk ning $f = \inf\{g\colon g \in \mathcal{G}\}$, siis ka $f$ on USC.*

(d) *Kui funktsioonid $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on USC, siis ka $f_1 + f_2$ on USC (eeldusel, et ta on määratud).*

Tõestus.

**Ülesanne 2.12.** Tõestada lause 2.14.

Korrektuur loetud 26.03.2026.

Lahendus. Tõestame lause 2.14 järeldusena lausest 2.13 toetudes faktile, et funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on USC parajasti siis, kui funktsioon $-f$ on LSC (vt. lauset 2.9). Märgime, et lausele 2.14 saaks anda ka "enesekülllase" tõestuse, mis toetub lausele 2.11 ja/või ülalt poolpideva funktsiooni definitsioonile (mille kohaselt funktsiooni ülalt poolpidevus tähendab, et see funktsioon on ülalt poolpidev igas punktis).

(d). Olgu funktsioonid $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ USC, kusjuures summa $f_1 + f_2$ on määratud. Siis $-f_1$ ja $-f_2$ on LSC (vt. lauset 2.9), kusjuures summa $(-f_1) + (-f_2) = -(f_1 + f_2)$ on määratud, seega lause 2.13, (d), põhjal $(-f_1) + (-f_2)$ on LSC, s.t. $-(f_1 + f_2)$ on LSC, järelikult $f_1 + f_2$ on USC (vt. lauset 2.9).

(a). Olgu $F \subset X$ kinnine hulk. Paneme tähele, et $\chi_F = 1 - \chi_{X\setminus F} = 1 + (-\chi_{X\setminus F})$. Konstantne funktsioon $X \ni x \mapsto 1 \in \overline{\mathbb{R}}$ on ilmselt USC. Hulga $F$ kinnisuse tõttu on hulk $X \setminus F$ lahtine, seega lause 2.13, (a), põhjal on funktsioon $\chi_{X\setminus F}$ LSC, järelikult funktsioon $-\chi_{X\setminus F}$ USC (vt. lauset 2.9). Juba tõestatud väite (d) põhjal on funktsioon $1 + (-\chi_{X\setminus F})$ USC, s.t. $\chi_F$ on USC.

(b). Olgu funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ USC ning olgu $c \in [0,\infty)$. Siis funktsioon $-f$ on LSC (vt. lauset 2.9), seega lause 2.13, (b), põhjal $c(-f)$ on LSC, s.t. $-cf$ on LSC, järelikult $cf$ on USC (vt. lauset 2.9).

(c). Iga $g \in \mathcal{G}$ korral on funktsioon $-g$ LSC (sest funktsioon $g$ on USC; vt. lauset 2.9), Seega, defineerides funktsiooni $h = \sup\{-g\colon g \in \mathcal{G}\}$, on funktsioon $h$ lause 2.13, (b), põhjal LSC. Arvestades, et

$$f = \inf\{-(-g)\colon g \in \mathcal{G}\} = -\sup\{-g\colon g \in \mathcal{G}\} = -h,$$

on funktsioon $f$ USC (vt. lauset 2.9).

□

**Lause 2.17.** *Olgu $\mu$ Radoni mõõt ruumis $X$ ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mittenegatiivne Boreli mõttes mõõtuv funktsioon ruumis $X$. Siis*

(a)

$$\int f\,d\mu = \inf\left\{\int g\,d\mu\colon\ g\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ on LSC ja } g \geqslant f\right\};$$

(b) *kui hulk $\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ on $\sigma$-lõplik, siis*

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int g\,d\mu\colon\ g\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ on USC ja } 0 \leqslant g \leqslant f\right\}.$$

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et funktsioon $f$ esitub kujul $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{E_j}$, kus $\alpha_j > 0$ ja $E_j \in \mathcal{B}_X$ (vt. ülesannet II.1.25) (PÕHJENDADA!).

(a). Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Väite tõestuseks piisab leida LSC funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ nii, et $g \geqslant f$ ja $\int g\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu + \varepsilon$. Kuna $\mu$ on Radoni mõõt, siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral leidub lahtine hulk $U_j \supset E_j$ nii, et $\mu(U_j) \leqslant \mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j\,\alpha_j}$. Tähistame $g = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{U_j}$; siis lause 2.13 põhjal on funktsioon $g$ LSC (PÕHJENDADA!).

Korrektuur loetud 28.03.2026.

Tõepoolest, iga $j \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $\chi_{U_j}$ lause 2.13, (a), põhjal LSC, seega funktsioon $\alpha_j\chi_{U_j}$ on lause 2.13, (b), põhjal samuti LSC, järelikult iga $n \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\chi_{U_j}$ lause 2.13, (d), põhjal LSC. Kuna $g = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{U_j} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\chi_{U_j}$, siis lause 2.13, (c), põhjal on funktsioon $g$ LSC.

Seejuures $g \geqslant f$ ning $\int g\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu + \varepsilon$.

Korrektuur loetud 28.03.2026.

**Ülesanne 2.15.** Veenduda selles.

LAHENDUS. Ilmselt $g \geqslant f$ (sest iga $j \in \mathbb{N}$ korral $U_j \supset E_j$ ning seega $\chi_{U_j} \geqslant \chi_{E_j}$). Jääb veel märkida, et monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}\int g\,d\mu &= \int \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{U_j}\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int \alpha_j\,\chi_{U_j}\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\mu(U_j)\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left(\mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j\,\alpha_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\mu(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int \alpha_j\,\chi_{U_j}\,d\mu + \varepsilon = \int \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{U_j}\,d\mu + \varepsilon = \int f\,d\mu + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b). Olgu hulk $\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ $\sigma$-lõplik. Fikseerime vabalt reaalarvu $a$, mis rahuldab tingimust $a < \int f\,d\mu$. Väite tõestuseks piisab leida USC funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ nii, et $0 \leqslant g \leqslant f$ ja $\int g\,d\mu \geqslant a$.

**Ülesanne 2.16.** Konstrueerida selline funktsioon $g$.

NÄPUNÄIDE. Hulga $\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}$ $\sigma$-lõplikkuse tõttu võime esituses $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,\chi_{E_j}$ (kus $\alpha_j > 0$ ja $E_j \in \mathcal{B}_X$) eeldada, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E_j) < \infty$ (vt. ülesannet II.1.25).

Korrektuur loetud
28.03.2026.

Lahendus. Kuna monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int f\,d\mu=\int\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\,\chi_{E_j}\,d\mu=\sum_{j=1}^{\infty}\int\alpha_j\,\chi_{E_j}\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\alpha_j\,\chi_{E_j}\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\chi_{E_j}\,d\mu,$$

siis leidub $n\in\mathbb{N}$ nii, et defineerides $\phi:=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\chi_{E_j}$, kehtib võrratus $\int\phi\,d\mu>a$. Tähistame $\varepsilon:=\int\phi\,d\mu-a$; siis $\varepsilon>0$. Valime iga $j\in\mathbb{N}$ korral kompaktse hulga $K_j\subset E_j$ nii, et $\mu(K_j)>\mu(E_j)-\frac{\varepsilon}{2^j\alpha_j}$ (sellised hulgad $K_j$ leiduvad, sest Radoni mõõt $\mu$ on igal oma lõplikul hulgal seest regulaarne; vt. lauset 2.1). Defineerime $g:=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\chi_{K_j}$; siis funktsioon $g$ on USC,

Tõepoolest, iga $j\in\mathbb{N}$ korral on funktsioon $\chi_{K_j}$ lause 2.14, (a), põhjal USC, seega funktsioon $\alpha_j\chi_{K_j}$ on lause 2.14, (b), põhjal samuti USC, järelikult funktsioon $g$ on lause 2.14, (d), põhjal USC.

kusjuures $0\leqslant g\leqslant f$ (sest iga $j\in\{1,\dots,n\}$ korral $K_j\subset E_j$ ning seega $\chi_{K_j}\leqslant\chi_{E_j}$) ning

$$\int g\,d\mu=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(K_j)>\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\mu(E_j)-\frac{\varepsilon}{2^j\alpha_j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^j}>\int\phi\,d\mu-\varepsilon=a.$$

□

# § V.3

**Lause 3.1.** *Positiivne lineaarne funktsionaal $\Phi\colon C_c(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ on pidev parajasti siis, kui teda esitav Radoni mõõt $\mu$ ruumis $X$ on lõplik. Seejuures $\|\Phi\|=\mu(X)$.*

Tõestus. Funktsionaal $\Phi$ on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud, s.t.

$$\|\Phi\|:=\sup\Big\{|\Phi(f)|\colon\ f\in C_c(X,\mathbb{R}),\ \|f\|_u\leqslant 1\Big\}<\infty.$$

Lause tõestuseks jääb märkida, et

$$\begin{aligned}\mu(X)&\overset{(1)}{=}\sup\Big\{\Phi(f)\colon\ f\in C_c(X,\mathbb{R}),\ f\prec X\Big\}\\&=\sup\Big\{\Phi(f)\colon\ f\in C_c\big(X,[0,1]\big)\Big\}\\&\overset{(2)}{=}\sup\Big\{|\Phi(f)|\colon\ f\in C_c(X,\mathbb{R}),\ -1\leqslant f\leqslant 1\Big\}\\&=\sup\Big\{|\Phi(f)|\colon\ f\in C_c(X,\mathbb{R}),\ \|f\|_u\leqslant 1\Big\}=\|\Phi\|.\end{aligned}$$

Siin vajavad põhjendamist võrdused (1) ja (2). Võrdus (1) on erijuht Rieszi esitusteoreemi 1.3 tingimusest 1°, kus $U=X$.

**Ülesanne 3.1.** Tõestada võrdus (2).

Korrektuur loetud
25.03.2026.

Lahendus. Võrduses (2) võrratus "$\leqslant$" on ilmne. Võrratuse "$\geqslant$" tõestuseks märgime, et kui $f\in C_c(X,\mathbb{R})$, $-1\leqslant f\leqslant 1$, siis $f^{\pm}\in C_c\big(X,[0,1]\big)$, kusjuures $f^+\geqslant f^+-f^-=f\geqslant -f^-$ ning seega $-\int f^-\,d\mu\leqslant\int f\,d\mu\leqslant\int f^+\,d\mu$ ja $\max\Big\{\int f^+\,d\mu,\int f^-\,d\mu\Big\}\geqslant\big|\int f\,d\mu\big|$; järelikult

$$\sup\left\{\int f\,d\mu\colon\ f\in C_c\big(X,[0,1]\big)\right\}\geqslant\sup\left\{\left|\int f\,d\mu\right|\colon\ f\in C_c(X,\mathbb{R}),\ -1\leqslant f\leqslant 1\right\}.$$

□

**Rieszi esitusteoreem 3.9.** *Kujutused*

$$M_{\mathbb{R}}(X) \ni \mu \longmapsto F_\mu \in C_0(X,\mathbb{R})^* \qquad \text{ja} \qquad M(X) \ni \mu \longmapsto F_\mu \in C_0(X)^*,$$

*kus*

$$F_\mu(f) = \int_X f\,d\mu, \quad f \in C_0(X,\mathbb{R}) \text{ või } f \in C_0(X),$$

*on isomeetrilised isomorfismid.*

Tõestus. BLA-BLA-BLA...

Teoreemi tõestuseks jääb veel näidata, et vaadeldavad kujutused on sürjektsioonid. Vaatleme esmalt komplseksset juhtu. Olgu $F \in C_0(X)^*$. Tähistame $G = F|_{C_0(X,\mathbb{R})}$. Siis $\operatorname{Re} G, \operatorname{Im} G \in C_0(X,\mathbb{R})^*$.

Korrektuur loetud 31.03.2026.

**Ülesanne 3.13.** Veenduda selles.

Lahendus. Funktsionaalid $\operatorname{Re} G, \operatorname{Im} G\colon C_0(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on lineaarsed, sest mis tahes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Re} G)(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Re}\big(G(\alpha f + \beta g)\big) = \operatorname{Re}\big(F(\alpha f + \beta g)\big) = \operatorname{Re}\big(\alpha F(f) + \beta F(g)\big)\\
&= \operatorname{Re}\big(\alpha G(f) + \beta G(g)\big) = \alpha \operatorname{Re}\big(G(f)\big) + \beta \operatorname{Re}\big(G(g)\big) = \alpha(\operatorname{Re} G)(f) + \beta(\operatorname{Re} G)(g),\\
(\operatorname{Im} G)(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Im}\big(G(\alpha f + \beta g)\big) = \operatorname{Im}\big(F(\alpha f + \beta g)\big) = \operatorname{Im}\big(\alpha F(f) + \beta F(g)\big)\\
&= \operatorname{Im}\big(\alpha G(f) + \beta G(g)\big) = \alpha \operatorname{Im}\big(G(f)\big) + \beta \operatorname{Im}\big(G(g)\big) = \alpha(\operatorname{Im} G)(f) + \beta(\operatorname{Im} G)(g).
\end{aligned}$$

Funktsionaalid $\operatorname{Re} G$ ja $\operatorname{Im} G$ on tõkestatud (ja seega $\operatorname{Re} G, \operatorname{Im} G \in C_0(X,\mathbb{R})^*$), sest mis tahes $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned}
|(\operatorname{Re} G)(f)| &= \big|\operatorname{Re}\big(G(f)\big)\big| = \big|\operatorname{Re}\big(F(f)\big)\big| \leqslant |F(f)| \leqslant \|F\|\,\|f\|_u,\\
|(\operatorname{Im} G)(f)| &= \big|\operatorname{Im}\big(G(f)\big)\big| = \big|\operatorname{Im}\big(F(f)\big)\big| \leqslant |F(f)| \leqslant \|F\|\,\|f\|_u.
\end{aligned}$$

Teoreemi 3.3 põhjal leiduvad positiivsed lineaarsed funktsionaalid $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ nii, et $\operatorname{Re} G = \Phi_1 - \Phi_2$ ja $\operatorname{Im} G = \Phi_3 - \Phi_4$. Lause 3.2 põhjal leiduvad lõplikud Radoni mõõdud $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ruumis $X$ nii, et iga $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral $\Phi_j(f) = \int f\,d\mu_j$, $j = 1,2,3,4$. Paneme nüüd tähele, et iga $f \in C_0(X)$ korral

$$F(f) = \int f\,d\mu, \qquad \text{kus } \mu := \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \in M(X).$$

Korrektuur loetud 31.03.2026.

**Ülesanne 3.14.** Veenduda selles.

Lahendus. Olgu $f \in C_0(X)$. Tähistame $g = \operatorname{Re} f$ ja $h = \operatorname{Im} f$; siis $f = g + ih$, järelikult

$$\begin{aligned}
F(f) &= F(g) + i\,F(h) = G(g) + i\,G(h) = \operatorname{Re} G(g) + i\,\operatorname{Im} G(g) + i\,\operatorname{Re} G(h) + i^2 \operatorname{Im} G(h)\\
&= \Phi_1(g) - \Phi_2(g) + i\,\Phi_3(g) - i\,\Phi_4(g) + i\,\Phi_1(h) - i\,\Phi_2(h) + i^2\Phi_3(h) - i^2\Phi_4(h)\\
&= \int g\,d\mu_1 + i\int h\,d\mu_1 - \int g\,d\mu_2 - i\int h\,d\mu_2 + i\int g\,d\mu_3 + i^2\int h\,d\mu_3 - i\int g\,d\mu_4 - i^2\int h\,d\mu_4\\
&= \int (g + i\,h)\,d\mu_1 - \int (g + i\,h)\,d\mu_2 + \int (g + i\,h)\,d(i\,\mu_3)) - \int (g + i\,h)\,d(i\,\mu_4))\\
&= \int f\,d(\mu_1 - \mu_2) + \int f\,d\big(i\,(\mu_3 - \mu_4)\big) = \int f\,d\big(\mu_1 - \mu_2 + i\,(\mu_3 - \mu_4)\big) = \int f\,d\mu.
\end{aligned}$$

**Ülesanne 3.15.** Tõestada vaadeldava kujutuse sürjektiivsus reaalsel juhul.

Korrektuur loetud
31.03.2026.

Lahendus. Olgu $F \in C_0(X)^*$. Teoreemi 3.3 põhjal leiduvad positiivsed $\Phi_1, \Phi_2 \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ nii, et $F = \Phi_1 - \Phi_2$. Lause 3.2 põhjal leiduvad lõplikud Radoni mõõdud $\mu_1, \mu_2$ ruumis $X$ nii, et iga $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral $\Phi_j(f) = \int f\,d\mu_j$, $j = 1,2$. Nüüd $\mu = \mu_1 - \mu_2 \in M_{\mathbb{R}}(X)$, seejuures iga $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ korral

$$F(f) = \Phi_1(f) - \Phi_2(f) = \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2 = \int f\,d(\mu_1 - \mu_2) = \int f\,d\mu.$$

□

Järgnev ülesanne õigustab funktsionaali $F \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ teoreemi 3.3 tõestusest pärineva esituse $F = F^+ - F^-$ nimetamist “Jordani lahutuseks”.

**Ülesanne 3.16.** Olgu $F \in C_0(X,\mathbb{R})^*$, olgu $F^+, F^- \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ tingimust $F = F^+ - F^-$ rahuldavad positiivsed funktsionaalid teoreemi 3.3 tõestusest, olgu $\mu_1$ ja $\mu_2$ vastavalt funktsionaale $F^+$ ja $F^-$ esitavad Radoni mõõdud ning olgu $\mu := \mu_1 - \mu_2$. Tõestada, et

(a) $\mu_1 = \mu^+$ ja $\mu_2 = \mu^-$;

(b) kui positiivsed funktsionaalid $F_1, F_2 \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ rahuldavad tingimust $F = F_1 - F_2$, siis $F^+ \leqslant F_1$ ja $F^- \leqslant F_2$, s.t.

$$F^+(f) \leqslant F_1(f) \quad \text{ja} \quad F^-(f) \leqslant F_2(f) \qquad \text{iga } f \in C_0(X,\mathbb{R}),\ f \geqslant 0, \text{ korral.}$$

Näpunäide. (a). Väite tõestuseks piisab näidata vaid, et $\mu_1 \leqslant \mu^+$ (põhjendada! – kasutada ülesannet IV.1.21), milleks omakorda piisab näidata, et $\mu_1(U) \leqslant \mu^+(U)$ iga $U \in \tau_X$ korral (põhjendada! – ühtlasi põhjendada, miks mõõdud $\mu_1$ ja $\mu^+$ on regulaarsed). Selleks kasutada Rieszi esitusteoreemi 1.3 ja ülesannet IV.1.22.

(b). Kõigepealt panna tähele, et kui $\nu_1$ ja $\nu_2$ on vastavalt funktsionaale $F_1$ ja $F_2$ esitavad Radoni mõõdud, siis $\mu = \nu_1 - \nu_2$ (kõige lihtsam on selleks kasutada ülesannet IV.1.22 ja Rieszi esitusteoreemi 3.9). Väite tõestuseks piisab näidata vaid, et $F^+ \leqslant F_1$ (põhjendada!). Selleks kasutada käesoleva ülesande osa (a) ning ülesandeid IV.1.21 ja IV.3.18, (a).

Korrektuur loetud
31.03.2026.

Lahendus. (a). Väite tõestuseks piisab näidata vaid, et $\mu_1 = \mu^+$, milleks omakorda piisab (ülesande IV.1.21 põhjal) näidata, et $\mu_1 \leqslant \mu^+$. Selleks piisab näidata, et

$$\mu_1(U) \leqslant \mu^+(U) \quad \text{iga } U \in \tau_X \text{ korral,}$$

sest sellisel juhul, arvestades, et $\mu^+$ on regulaarne (tõepoolest, $\mu_1$ ja $\mu_2$ on lõplikud Radoni mõõdud ning seega regulaarsed; ülesande IV.1.21 põhjal $\mu^+ \leqslant \mu_1$, järelikult lemma 3.5 põhjal on ka $\mu^+$ regulaarne), iga $E \in \mathcal{B}_X$ korral

$$\mu_1(E) = \inf_{\tau_X \ni U \supset E} \mu_1(U) \leqslant \inf_{\tau_X \ni U \supset E} \mu^+(U) = \mu^+(E).$$

Olgu $U \in \tau_X$. Siis Rieszi esitusteoreemi 1.3 põhjal

$$\mu_1(U) = \sup\bigl\{F^+(f)\colon\ f \in C_c(X,\mathbb{R}),\ f \prec U\bigr\}.$$

Mis tahes $f \in C_c(X,\mathbb{R})$, $f \prec U$, ning $g \in C_0(X,\mathbb{R})$, $0 \leqslant g \leqslant f$, korral

$$F(g) = F^+(g) - F^-(g) = \int g\,d\mu_1 - \int g\,d\mu_2 \overset{(*)}{=} \int g\,d\mu = \int g\,d\mu^+ - \int g\,d\mu^- \leqslant \int g\,d\mu^+$$
$$\leqslant \int \chi_U\,d\mu^+ = \mu^+(U)$$

(siin võrdus $(*)$ kehtib ülesande IV.1.22 põhjal), seega

$$F^+(f) = \sup\bigl\{F(g)\colon\ g \in C_0(X,\mathbb{R}),\ 0 \leqslant g \leqslant f\bigr\} \leqslant \mu^+(U)$$

ning järelikult $\mu_1(U) \leqslant \mu^+(U)$, nagu soovitud.

(b). Olgu $\nu_1$ ja $\nu_2$ vastavalt funktsionaale $F_1$ ja $F_2$ esitavad Radoni mõõdud. Kõigepealt paneme tähele, et ülesande IV.1.22 põhjal iga $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned}\int f\,d\mu &= \int f\,d(\mu_1 - \mu_2) = \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2 = F^+(f) - F^-(f)\\ &= F(f) = F_1(f) - F_2(f) = \int f\,d\nu_1 - \int f\,d\nu_2\\ &= \int f\,d(\nu_1 - \nu_2),\end{aligned}$$

seega Rieszi esitusteoreemi 3.9 põhjal $\mu = \nu_1 - \nu_2$.

Väite tõestuseks piisab tõestada vaid, et $F^+ \leqslant F_1$, sest niisugusel juhul ka $F^- = F^+ - F \leqslant F_1 - F = F_2$. Kuna ülesande (a)-osa põhjal $\mu_1 = \mu^+$, siis (arvestades, et $\mu = \nu_1 - \nu_2$) ülesande IV.1.21 põhjal $\mu_1 \leqslant \nu_1$ ning seega ülesande IV.3.18, (a), põhjal iga $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$, korral

$$F^+(f) = \int f\,d\mu_1 \leqslant \int f\,d\nu_1 = F_1(f).$$