LTMS.00.022

# ÜHE MUUTUJA MATEMAATILINE ANALÜÜS

Loengukursus Tartu Ülikooli
loodus- ja täppisteaduste valdkonna üliõpilastele

2019./2020. õppeaasta

Toivo Leiger

Joonised: Ksenia Niglas

Pisitäiendused 2016–20: Märt Põldvere, Natalia Saealle, Indrek Zolk, Urve Kangro

# Sisukord

# 1 Reaalarvud

Kõige lihtsama arvusüsteemi moodustavad loendamisel kasutatavad *naturaalarvud* $1, 2, 3, \ldots$, nende hulka tähistame tähega $\mathbb{N}$, niisiis

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

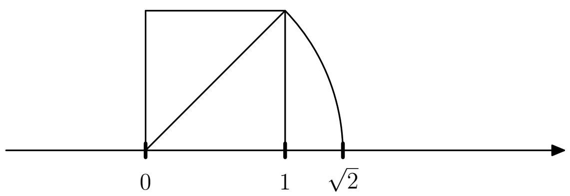
Olgu $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ ja

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}\,,$$

hulga $\mathbb{Z}$ elemente nimetatakse *täisarvudeks*. Täisarvude abil moodustatud harilikud murrud kirjeldavad *ratsionaalarve*, me tähistame

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Paraku ei sobi ratsionaalarvud, millega me edukalt opereerime oma igapäevaelus, matemaatilise analüüsi kui matemaatilise teooria aluseks, põhjuseks on hulga $\mathbb{Q}$ lünklikkus. Kui kujutada ratsionaalarve arvsirge punktidena, siis sellel sirgel on lünki. Nagu me käesoleva peatüki lõpus veendume, on lünki teatavas mõttes rohkemgi kui ratsionaalarve endid. Juba Pythagorase ajast — seega 5. sajandist enne Kristust — on teada, et leidub selliseid sirglõike, mille pikkust ei saa väljendada ratsionaalarvuga. Tuntuim sellekohane näide on ühikruudu diagonaal, mille pikkus $\sqrt{2}$ ei ole ratsionaalarv.




Joonis 1.1: Arvsirge punktile $\sqrt{2}$ ei vasta ükski ratsionaalarv.

Niisuguse korrektselt defineeritud arvusüsteemini, mis sisaldab kõiki ratsionaalarve, kuid milles on täidetud nendevahelised lüngad, jõudsid matemaatikud alles 19. sajandil. Selliseid *reaalarvude erinevaid esitusi* on konstrueeritud mitmeid, tegelikult on nad ühe matemaatilise struktuuri – täieliku järjestatud korpuse – konkreetsed esitused. Sellest tõsiasjast lähtudes **defineerime me käesolevas kursuses kõigi reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ kui täieliku järjestatud korpuse.**

## 1.1 Järjestatud korpused

### 1.1.1 Korpuse aksioomid

**Definitsioon.** *Korpuseks* (*field, поле*) nimetatakse hulka $F$, milles on defineeritud kaks binaarset tehet, liitmine

$$\mathcal{A}\colon F \times F \to F, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

ja korrutamine

$$\mathcal{M}\colon F \times F \to F, \quad (a, b) \mapsto ab \ \ (= a \cdot b)\,,$$

nii et on täidetud järgmised tingimused (*korpuse aksioomid*):
**(A1)** $a+b=b+a$ kõikide $a,b\in F$ korral *(liitmise kommutatiivsus)*,
**(A2)** $(a+b)+c=a+(b+c)$ kõikide $a,b,c\in F$ korral *(liitmise assotsiatiivsus)*,
**(A3)** eksisteerib element $0\in F$, et $b+0=b$ iga $b\in F$ puhul *(nullelemendi olemasolu)*,
**(A4)** iga elemendi $b\in F$ puhul leidub element $-b\in F$ omadusega $b+(-b)=0$ *(vastandelemendi olemasolu)*,
**(M1)** $ab=ba$ kõikide $a,b\in F$ korral *(korrutamise kommutatiivsus)*,
**(M2)** $(ab)\,c=a\,(bc)$ kõikide $a,b,c\in F$ korral *(korrutamise assotsiatiivsus)*,
**(M3)** eksisteerib element $1\in F\diagdown\{0\}$, et $b\cdot 1=b$ iga $b\in F$ puhul *(ühikelemendi olemasolu)*,
**(M4)** iga elemendi $b\in F\diagdown\{0\}$ puhul leidub element $b^{-1}\in F$ omadusega $b\cdot b^{-1}=1$ *(pöördelemendi olemasolu)*,
**(D)** $(a+b)\,c=ac+bc$ kõikide $a,b,c\in F$ korral *(distributiivsus)*.

Aksioomidest **(A1) – (A4)** ja **(M1) – (M4)** tuleneb, et *nullelement* 0 *ja ühikelement* 1 *on korpuses üheselt määratud* (kontrollida!)✠. Analoogiliselt on suvaliste elementide $a\in F$ ja $b\in F\diagdown\{0\}$ korral *üheselt määratud ka vastandelement* $-a$ *ja pöördelement* $b^{-1}$ (veenduda!)✠, seejuures

$$-(-a)=a \text{ ning } \left(b^{-1}\right)^{-1}=b \tag{1.1}$$

(kontrollida!)✠. Vastandelemendi abil defineeritakse liitmise pöördtehe lahutamine:

$$a-b:=a+(-b)\,.$$

Vahetu kontroll näitab, et

$$-(a+b)=-a-b \text{ kõikide } a,b\in F \text{ korral}$$

(veenduda!)✠. Jagamine, korrutamise pöördtehe, defineeritakse analoogiliselt:

$$a:b:=\frac{a}{b}:=ab^{-1} \text{ eeldusel, et } b\neq 0.$$

Seejuures (kontrollida!)✠

$$(ab)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1} \text{ kõikide } a,b\in F\diagdown\{0\} \text{ korral.}$$

Korpuse aksioomidest ja eelnevatest märkustest tulenevad järgmised arvutuseeskirjad.

**Lause 1.1** (a) $0a=0$ *iga* $a\in F$ *korral.*
(b) *Kui* $ab=0$, *siis vähemalt üks elementidest* $a\in F$ *ja* $b\in F$ *on võrdne nullelemendiga (s.t.* $F\diagdown\{0\}$ *ei sisalda nullitegureid).*
(c) $(-a)\,b=-(ab)$ *kõikide* $a,b\in F$ *puhul. Muuhulgas* $(-1)\,b=-b$ *iga* $b\in F$ *korral.*
(d) $(-a)\,(-b)=ab$ *kõikide* $a,b\in F$ *puhul.*

**Tõestus.** (a) Olgu $a\in F$. Tänu aksioomile **(D)** saame, et

$$0a=(0+0)a=0a+0a.$$

Liidame selle võrduse pooltele elemendi $0a$ vastandelemendi ning saame, et $0a=0$.

(b) Eeldame, et $ab = 0$ ja $a \neq 0$, ning näitame, et siis $b = 0$. Tõepoolest, tänu eeldusele $a \neq 0$ eksisteerib $a^{-1}$, millega võrduse $ab = 0$ mõlemat poolt korrutades saame väite (a) ning aksioomi **(M2)** põhjal, et

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = \left(a^{-1}a\right)b = b.$$

(c) Olgu $a, b \in F$ suvalised. Väite (a) ja aksioomi **(D)** kohaselt $0 = 0b = (a + (-a))\,b = ab + (-a)\,b$. Seega rahuldab $(-a)\,b$ elemendi $ab$ vastandelemendi tingimust, järelikult kehtib võrdus $(-a)\,b = -(ab)$. Võttes siin $a := 1$, saame väite teise osa.

(d) Väite (c) ning aksioomide **(M2)** ja **(M1)** põhjal $(-a)(-b) = (-a)((-1)\,b) = ((-1)(-a))\,b = ab$. ■

### 1.1.2 Järjestatud korpus

**Definitsioon.** Korpust $F$ nimetatakse *järjestatud korpuseks* (*ordered field, упорядоченное поле*), kui tema elementide vahel on defineeritud selline seos $<$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:
**(O1)** iga kahe elemendi $a$ ja $b$ korral kehtib parajasti üks tingimustest $a = b$, $a < b$, $b < a$ *(trihhotoomia reegel)*,
**(O2)** kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$ *(transitiivsus)*,
**(O3)** kui $a < b$, siis $a + c < b + c$ *(liitmise monotoonsus)*,
**(O4)** kui $a < b$ ja $c > 0$, siis $ac < bc$ *(korrutamise monotoonsus)*.

Märgime, et tingimuse $b < a$ võib kirjutada ka kujul $a > b$. Me nimetame elemente $a > 0$ *positiivseteks* ja elemente $a < 0$ *negatiivseteks*. Tähistame $a \leqslant b$, kui kehtib üks tingimustest $a < b$ ja $a = b$. Elemente $a \geqslant 0$ nimetame *mittenegatiivseteks* ja elemente $a \leqslant 0$ *mittepositiivseteks*.

Kui hulgas $X \subseteq F$ leidub selline element $a$, et $x \leqslant a$ iga $x \in X$ korral, siis ütleme, et $a$ on hulga $X$ *suurim* element ja tähistame $\max X$ ehk $\max\{x \mid x \in X\}$, samamoodi defineeritakse *vähim* element $\min X$ ehk $\min\{x \mid x \in X\}$. Suurimat elementi nimetatakse ka *maksimaalseks* ja vähimat elementi *minimaalseks*.

**Märkus 1.** Hulgateoorias nõutakse lineaarse järjestuse seoselt sageli, et ta oleks refleksiivne, antisümmeetriline, transitiivne ning kõik elemendid oleks omavahel võrreldavad. Vahetu kontroll näitab, et $\preccurlyeq$ on selline seos parajasti siis, kui $<$ on seos, mis rahuldab aksioome **(O1)–(O2)**, kus $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$.

**Märkus 2.** Kui järjestus $\preccurlyeq$ hulgas $A$ pole lineaarne, st. kui leiduvad elemendid, mis pole omavahel võrreldavad, siis on suurima ja maksimaalse elemendi mõisted erinevad. Nimelt öeldakse, et $a \in A$ on hulga $X \subseteq A$ maksimaalne element, kui $a \in X$ ning iga $x \in X$ korral kehtib implikatsioon $a \preccurlyeq x \Rightarrow a = x$. Seega iga suurim element on ühtlasi maksimaalne, aga mitte tingimata vastupidi. Samasugune märkus kehtib vähima ja minimaalse elemendi kohta.

Näiteks, jaguvusseos naturaalarvudel on järjestusseos, defineerides $a \preccurlyeq b$ kui $a \mid b$. Saab näidata, et 1 on hulga $\mathbb{N}$ vähim element seose $\preccurlyeq$ mõttes. Hulgal $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ vähim element puudub, aga iga algarv on selle hulga minimaalne element seose $\preccurlyeq$ mõttes.

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow -b < -a, \\ a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \geqslant 0 \Leftrightarrow -b \leqslant -a \end{aligned} \tag{1.2}$$

(kontrollida!)✠ ning

$$\text{kui } a < b \text{ ja } c < 0, \text{ siis } ac > bc \tag{1.3}$$

(veenduda!)✠. Märgime veel, et

$$a^2 := aa > 0 \text{ iga } a \neq 0 \text{ puhul.} \tag{1.4}$$

Tõepoolest, kuna $a \neq 0$, siis aksioomi **(O1)** kohaselt kas $a > 0$ või $a < 0$. Esimesel juhul saame võrratuse $a^2 > 0$ aksioomist **(O4)**, teisel juhul väitest (1.3). Erijuhul $a = 1$ saame tähtsa võrratuse $0 < 1$.

Aksioomist **(O3)** tuleneb lihtsalt järgmine oluline fakt:

$$\text{kui } a < c \text{ ja } b < d, \quad \text{siis} \quad a + b < c + d \tag{1.5}$$

(veenduda!)✠. Osutub, et

$$a^{-1} > 0, \text{ kui } a > 0, \text{ ning } a^{-1} < 0, \text{ kui } a < 0 \tag{1.6}$$

(kontrollida!)✠. Seetõttu eeldusel $0 < a < b$ kehtib $0 < \frac{a}{b} < 1$, millest aksioomi **(O4)** rakendades saame võrratused $0 < b^{-1} < a^{-1}$. Niisiis,

$$0 < a < b \Rightarrow \ 0 < b^{-1} < a^{-1}.$$

**Lause 1.2** *Olgu $a$ ja $b$ järjestatud korpuse $F$ elemendid.*
(a) *Tingimus $ab > 0$ on samaväärne sellega, et kas* (i) $a > 0$ *ja* $b > 0$ *või* (ii) $a < 0$ *ja* $b < 0$.
(b) *Tingimus $ab < 0$ on samaväärne sellega, et kas* (i) $a > 0$ *ja* $b < 0$ *või* (ii) $a < 0$ *ja* $b > 0$.

**Tõestus.** Lause väited tõestatakse juhtude läbivaatamise teel. Kui vähemalt üks elementidest $a$ ja $b$ on 0, siis ka $ab = 0$ (vt. lauset 1.1(a)). Juhul $a > 0$ ja $b > 0$ saame $ab > 0$. Juhul $a > 0$ ja $b < 0$ kehtib $-b > 0$ (miks?✠) ning võrratuse $a > 0$ pooli positiivse elemendiga $-b$ korrutades leiame, et $a \cdot (-b) > 0 \cdot (-b)$, mistõttu $-(ab) > 0$ ehk $ab < 0$ (vt. lauset 1.1(c)). Analoogselt vaatame läbi ka ülejäänud kaks võimalust (iseseisvalt!)✠. ∎

**Definitsioon.** Kahte järjestatud korpust $F_1$ ja $F_2$ nimetatakse *isomorfseteks*, kui eksisteerib bijektiivne kujutus $\varphi : F_1 \to F_2$, mis rahuldab tingimusi
1) $\varphi(q + q') = \varphi(q) + \varphi(q')$,
2) $\varphi(qq') = \varphi(q) \cdot \varphi(q')$ ja
3) $q < q'$ korpuses $F_1$ parajasti siis, kui $\varphi(q) < \varphi(q')$ korpuses $F_2$.

### 1.1.3 Täielik järjestatud korpus

Olgu $X$ järjestatud korpuse $F$ mittetühi alamhulk.

**Definitsioon.** Öeldakse, et hulk $X$ on *ülalt tõkestatud* (*bounded from above, ограниченное сверху*), kui leidub selline $a \in F$, et võrratus $x \leqslant a$ kehtib iga $x \in X$ korral. Elementi $a$ nimetatakse sel juhul hulga $X$ *ülemiseks tõkkeks* (*upper bound, верхняя грань*). Analoogiliselt nimetatakse hulka $X \subseteq F$ *alt tõkestatuks*, kui leidub $b \in F$, et iga $x \in X$ korral kehtib võrratus $x \geqslant b$. Elementi $b$ nimetatakse siis hulga $X$ *alumiseks tõkkeks*. Ütleme, et hulk $X$ on *tõkestatud* (*bounded, ограниченное*), kui ta on nii ülalt kui ka alt tõkestatud.

Selge, et igal ülalt (alt) tõkestatud hulgal leidub lõpmata palju ülemisi (alumisi) tõkkeid. Küsimus on vähima ülemise ning suurima alumise tõkke olemasolus.

**Definitsioon.** Kui ülalt tõkestatud mittetühjal hulgal $X \subseteq F$ on olemas vähim ülemine tõke, siis seda nimetatakse hulga $X$ *ülemiseks rajaks* ehk *supreemumiks* (*supremum, точная верхняя граница*) ja tähistatakse $\sup X$ ehk $\sup\{x \mid x \in X\}$ (ka $\sup\limits_{x\in X} x$). Alt tõkestatud mittetühja hulga $X$ suurimat alumist tõket (kui see eksisteerib) nimetatakse selle hulga *alumiseks rajaks* ehk *infiimumiks* (*infimum, точная нижняя граница*) ja tähistatakse $\inf X$ ehk $\inf\{x \mid x \in X\}$ (ka $\inf\limits_{x\in X} x$).

Kui mittetühi hulk $X \subseteq F$ on ülalt tõkestamata, kirjutatakse $\sup X = \infty$. Analoogselt, kui hulk $X$ on alt tõkestamata, kirjutatakse $\inf X = -\infty$.

Vahetu kontroll näitab, et kui $\sup X$ eksisteerib, siis on ta üheselt määratud (kontrollida!)✠, sama kehtib ka alumise raja $\inf X$ puhul (veenduda!)✠.

Järgmised väited (a) ja (b) tulenevad vahetult eelnevast definitsioonist.

**Lause 1.3** *Olgu $X \subseteq F$ mittetühi alamhulk.*
(a) *Võrdus* $\sup X = a$ *kehtib parajasti siis, kui*
(i) $x \leqslant a$ *iga* $x \in X$ *korral ja*
(ii) *iga* $c \in F$ *korral, mis rahuldab võrratust* $c < a$*, leidub selline* $x_0 \in X$*, et* $c < x_0$.
*Tingimuse* (ii) *võib esitada temaga samaväärsel kujul*
(ii′) *iga positiivse* $\varepsilon \in F$ *korral leidub selline* $x_0 \in X$*, et* $a - \varepsilon < x_0$.
(b) *Võrdus* $\inf X = b$ *kehtib parajasti siis, kui*
(iii) $x \geqslant b$ *iga* $x \in X$ *korral ja*
(iv) *iga* $d \in F$ *korral, mis rahuldab võrratust* $d > b$*, leidub selline* $x_0 \in X$*, et* $x_0 < d$.
*Tingimuse* (iv) *võib esitada temaga samaväärsel kujul*
(iv′) *iga positiivse* $\varepsilon \in F$ *korral leidub selline* $x_0 \in X$*, et* $x_0 < b + \varepsilon$.

**Definitsioon.** Järjestatud korpust $F$ nimetatakse *täielikuks* (*complete, полное*), kui ta rahuldab järgmist ***pidevuse aksioomi***:
**(P)** *igal ülalt tõkestatud mittetühjal hulgal $X \subseteq F$ leidub ülemine raja.*

Järgneva lause kohaselt järeldub aksioomist **(P)** alumise raja olemasolu igal alt tõkestatud alamhulgal.

**Lause 1.4** *Täielikus järjestatud korpuses $F$ leidub igal alt tõkestatud mittetühjal hulgal alumine raja.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Järgmise lausega esitame edaspidiseks vajalikud arvutuseeskirjad supreemumi ning infiimumi jaoks.

**Lause 1.5** *Olgu $X$ ja $Y$ täieliku järjestatud korpuse $F$ mittetühjad alamhulgad.*
(a) *Kui $X$ ja $Y$ on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ja*

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y. \tag{1.7}$$

(b) *Kui $X$ ja $Y$ on alt tõkestatud, siis on ka hulk $X+Y$ alt tõkestatud ja*

$$\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y.$$

(c) *Kui $X$ on ülalt ja $Y$ alt tõkestatud, siis hulk $X - Y := \{x - y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ on ülalt tõkestatud ja*

$$\sup(X-Y) = \sup X - \inf Y.$$

(d) *Kui $X$ on alt ja $Y$ ülalt tõkestatud, siis hulk $X - Y$ on alt tõkestatud ja*

$$\inf(X-Y) = \inf X - \sup Y.$$

(e) *Olgu $X$ ja $Y$ sellised hulgad, mille kõik elemendid on mittenegatiivsed. Kui $X$ ja $Y$ on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ja*

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y.$$

**Tõestus.** (a) Kuna hulgad $X$ ja $Y$ on ülalt tõkestatud, siis pidevuse aksioomi kohaselt leiduvad ülemised rajad $a := \sup X$ ja $b := \sup Y$. Suvaliste $x \in X$ ning $y \in Y$ puhul kehtib võrratus $x + y \leqslant a + b$ (vrd. (1.5)), tähendab, hulk $X + Y$ on ülalt tõkestatud ja $a + b$ on tema ülemine tõke. Näitame, et kehtib võrdus (1.7).

Olgu $\varepsilon \in F$ suvaline positiivne element. Vastavalt lausele 1.3(a) fikseerime $x' \in X$ ning $y' \in Y$ nii, et $a - \frac{\varepsilon}{2} < x'$ ja $b - \frac{\varepsilon}{2} < y'$, siis

$$a + b - \varepsilon < x' + y'$$

(vrd. (1.5)). Sama lause kohaselt $a + b = \sup(X+Y)$ (selgitada!)✠.

Väide (b) tõestatakse analoogiliselt väitega (a) (iseseisvalt!)✠.

(c) Kuna $Y$ on alt tõkestatud hulk, siis hulk $\{-y \mid y \in Y\}$ on ülalt tõkestatud (selgitada!)✠ ning pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib ülemine raja $\sup\{-y \mid y \in Y\} = -\inf Y$. Väite (a) abil saame, et

$$\begin{aligned} \sup(X-Y) &= \sup\{x + (-y) \mid x \in X,\quad y \in Y\} \\ &= \sup X + \sup\{-y \mid y \in Y\} = \sup X - \inf Y. \end{aligned}$$

Väite (d) tõestus on analoogiline väite (c) tõestusega.

(e) Olgu $a := \sup X$ ja $b := \sup Y$. Väide kehtib ilmselt, kui vähemalt üks arvudest $a$ ja $b$ on võrdne nulliga (põhjendada!)✠. Eeldame, et $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, seostest $0 \leqslant x \leqslant a$ ja $0 \leqslant y \leqslant b$ tuleneb $xy \leqslant ab$ (põhjendada!)✠, niisiis on hulk $X \cdot Y$ ülalt tõkestatud ja $ab$ on selle hulga ülemine tõke. Näitame, et ta on vähim ülemine tõke.

Olgu $\varepsilon \in F$ positiivne element. Lause 1.3(a) kohaselt leiduvad $x_0 \in X$ ning $y_0 \in Y$, et

$$x_0 > a - \frac{\varepsilon}{2b} \text{ ja } y_0 > b - \frac{\varepsilon}{2a},$$

seega

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &= ab + (x_0 - a)\, b + (y_0 - b)\, x_0 \\ &\geqslant ab + (x_0 - a)\, b + (y_0 - b)\, a \\ &> ab - \frac{\varepsilon}{2b} b - \frac{\varepsilon}{2a} a = ab - \varepsilon \end{aligned}$$

(kontrollida!)✠. Sellega on võrdus $\sup(X \cdot Y) = ab$ tõestatud. ■

**Märkus.** Tingimusega (e) analoogne väide kehtib ka infiimumi jaoks: olgu $X$ ja $Y$ sellised hulgad, mille kõik elemendid on mittenegatiivsed, siis ka hulga $X \cdot Y$ elemendid on mittenegatiivsed ning

$$\inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y.$$

*Tõestuse skeem* on järgmine. Tähistame $a = \inf X$ ja $b = \inf Y$. Vahetu kontroll annab, et $ab \leqslant xy$ iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral.
1) Juhul $a = 0$ ja $Y = \{0\}$ on $X \cdot Y = \{0\}$.
2) Kui $a = 0$ ning leidub $y_0 \in Y$ nii, et $y_0 > 0$, siis vastavalt igale positiivsele elemendile $\varepsilon \in F$ leiame $x_0 \in X$ omadusega, et $0 \leqslant x_0 < \frac{\varepsilon}{y_0}$, nüüd $0 \leqslant x_0 y_0 < \varepsilon$.
3) Olgu $a > 0$ ja $b > 0$. Näitamaks, et $ab$ on hulga $X \cdot Y$ suurim alumine tõke, valime iga $\varepsilon > 0$ korral (eeldame, et $\varepsilon < ab$) elemendid $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$ omadusega $x_0 < a + \frac{\varepsilon}{4b}$ ja $y_0 < b + \frac{\varepsilon}{4a}$, siis

$$x_0 y_0 < \left(a + \frac{\varepsilon}{4b}\right) \cdot \left(b + \frac{\varepsilon}{4a}\right) = ab + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{4ab} < ab + \varepsilon.$$

## 1.2 Täieliku järjestatud korpuse eksisteerimine

Selles alapeatükis konstrueerime ühe konkreetse täieliku järjestatud korpuse. Lähtekohaks on hulgateooria konstruktsioonid: tühja hulga olemasolu, uute hulkade moodustamine, kujutuse ja otsekorrutise mõiste.

### 1.2.1 Naturaalarvud, täisarvud, ratsionaalarvud

Alustame **naturaalarvude hulga** moodustamisest. Tähistame $1 = \emptyset$, olgu $1$ naturaalarv. Kui $n$ on naturaalarv, siis $S(n) := n \cup \{n\}$ olgu naturaalarvule $n$ järgnev naturaalarv. Me tähistame $2 := S(1) = \{\emptyset\}$, $3 := S(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $4 := S(3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ jne. Kõigi ülaltoodud konstruktsiooni põhjal saadud hulkade hulka tähistame sümboliga $\mathbb{N}$ ning tema elemente nimetame *naturaalarvudeks* (*natural numbers, натуральные числа*).

Järgnevalt viime naturaalarvude hulka sisse liitmise ja korrutamise. See toimub rekursiivselt: nõuame, et $a+1 = S(a)$ ja $a+S(b) = S(a+b)$, kus $a, b \in \mathbb{N}$. Korrutamine: $a \cdot 1 = a$ ja $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$. Kontroll näitab, et liitmine ja korrutamine on assotsiatiivsed, kommutatiivsed ning on seotud distributiivsuse võrdustega.

Defineerime veel, et $a < b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}\colon a+c = b$. Saadud seos $<$ rahuldab trihhotoomia, transitiivsuse, liitmise ja korrutamise monotoonsuse nõudeid.

**Märkus.** Sageli defineeritakse hoopis $0 = \emptyset$ ning viiakse läbi ülaltoodud konstruktsioon, tulemuseks saadakse $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Nüüd koostame **täisarvude hulga**. Defineerime selleks hulgas $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ järgmise seose:
$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c.$
Kontroll näitab, et seos $\sim$ on ekvivalentsusseos; faktorhulka $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ tähistame tähega $\mathbb{Z}$ ja tema elemente nimetame *täisarvudeks* (*integers, целые числа*).

Liitmise ja korrutamise viime hulka $\mathbb{Z}$ sisse järgmiste valemitega:
$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$,
$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$.
Osutub, et tegemist on algebraliste tehetega (sh. on definitsioonid korrektsed).

Paneme tähele, et liitmise suhtes on $[(1, 1)]$ nullelement (tähistame seda sümboliga $0$) ning $[(b, a)]$ on $[(a, b)]$ vastandelement. Korrutamise suhtes on $[(2, 1)]$ ühikelement. Defineerime ka $[(a, b)] < [(c, d)]$, kui $a + d < b + c$.

Vahetu kontroll näitab, et kehtib järgmine lause.

**Lause 1.6** *Täisarvude hulk on järjestatud ring, s.t. ring, kus on defineeritud tehetega kooskõlas olev järjestusseos.*

Iga naturaalarvu $n$ samastame täisarvuga $[(S(n), 1)]$. Kontroll näitab, et see samastamine on kooskõlas tehete ja järjestusega. Niisiis $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Järgnevalt koostame **ratsionaalarvude hulga** (*rational numbers, рациональные числа*). Selleks defineerime hulgas $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ järgmise seose:
$(a, b) \cong (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$. Kontroll näitab, et seos $\cong$ on ekvivalentsusseos; faktorhulka $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\cong$ tähistame tähega $\mathbb{Q}$ ja nimetame ratsionaalarvude hulgaks.

Liitmise ja korrutamise viime hulka $\mathbb{Q}$ sisse järgmiste valemitega:
$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + cb, bd)]$,
$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$.
Osutub, et tegemist on algebraliste tehetega (sh. on definitsioonid korrektsed).

Järjestus hulgas $\mathbb{Q}$:
$[(a, b)] < [(c, d)]$, kui $ad < bc$.

Vahetu kontroll näitab, et kehtib järgmine lause.

**Lause 1.7** $\mathbb{Q}$ *on järjestatud korpus.*

Iga täisarvu $n$ samastame ratsionaalarvuga $[(n, 1)]$. Kontroll näitab, et see samastamine on kooskõlas tehete ja järjestusega. Niisiis $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

### 1.2.2 Täieliku järjestatud korpuse konstruktsioon

Nüüd saame asuda täieliku järjestatud korpuse konstrueerimisele.

**Teoreem 1.8** *On olemas täielik järjestatud korpus $F$.*

**Tõestus.** Olgu $F$ kõigi ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ selliste alamhulkade $A$ hulk, mis rahuldavad tingimusi
(a) kui $q \in A$ ja $p < q$, siis $p \in A$,
(b) hulgas $A$ ei ole suurimat elementi, (c) $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$.

Iga $q \in \mathbb{Q}$ puhul tähistame $\overline{q} := \{p \in \mathbb{Q} \colon p < q\}$, vahetu kontroll näitab, et $\overline{q} \in F$ ning kujutus

$$T \colon \mathbb{Q} \to F, \qquad q \mapsto \overline{q},$$

on üksühene. Seega $\mathbb{Q} \subseteq F$, selle sisalduvuse all mõistame tegelikult sisalduvust

$$\{\overline{q} \colon q \in \mathbb{Q}\} \subseteq F.$$

Märgime, et iga $A \in F$ on järjestatud korpuses $\mathbb{Q}$ ülalt tõkestatud alamhulk, olgu $\tilde{A}$ *hulga $A$ kõigi ülemiste tõkete hulk, millest on välja jäetud vähim ülemine tõke, kui see eksisteerib*. Seejuures omab $A$ vähima ülemise tõkke parajasti siis, kui $A = \overline{q}$ mingi $q \in \mathbb{Q}$ korral.

Defineerime hulgas $F$ **järjestuse** seosega

$$A < B \quad \Leftrightarrow \quad A \subsetneqq B. \tag{1.8}$$

Meie eesmärk on näidata, et sobivalt defineeritud liitmise ja korrutamise ning järjestusega (1.8) on $F$ täielik järjestatud korpus.

**(I)** Defineerime hulgas $F$ **liitmise** seosega

$$A + B := \{a + b\colon a \in A, b \in B\}. \tag{1.9}$$

Osutub, et $A + B \in F$, seejuures rahuldab seosega (1.9) määratud liitmine aksioome **(A1)–(A4)**.
**(A1)**: Võrdus $A + B = B + A$ kehtib, sest

$$A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\} = \{b + a\colon b \in B, a \in A\} = B + A.$$

**(A2)**: Võrdus $(A + B) + C = A + (B + C)$ kehtib, sest

$$\begin{aligned}(A + B) + C = \{(a + b) + c\colon a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a + (b + c)\colon a \in A, b \in B, c \in C\} = \\ = A + (B + C).\end{aligned}$$

**(A3)**: Iga $A \in F$ korral $A + \overline{0} = A$, s.t. $\overline{0}$ on nullelement.
**(A4)**: Elemendi $A \in F$ vastandelement on

$$-A := \left\{-q\colon q \in \tilde{A}\right\},$$

st. $A + (-A) = \overline{0}$.

**(II)** Defineerime hulgas $F$ **korrutamise**. Kui $A > \overline{0}$ ja $B > \overline{0}$, siis

$$A \cdot B := \{ab\colon a \in A, a \geqslant 0, b \in B, b \geqslant 0\} \cup \overline{0}, \tag{1.10}$$

vahetu kontroll näitab, et $A \cdot B \in F$. Defineerime
1) $A \cdot B := -(A \cdot (-B))$, kui $A > \overline{0}$ ja $B < \overline{0}$,
2) $A \cdot B := -((-A) \cdot B)$, kui $A < \overline{0}$ ja $B > \overline{0}$,
3) $A \cdot B := (-A) \cdot (-B))$, kui $A < \overline{0}$ ja $B < \overline{0}$,
4) $\overline{0} \cdot B := B \cdot \overline{0} := \overline{0}$
ja kontrollime korrutamise aksioomide **(M1)–(M4)** täidetust.
**(M1)**: Kui $A > \overline{0}$ ja $B > \overline{0}$, siis

$$A \cdot B = \{ab\colon a \in A, a > 0, b \in B, b > 0\} = \{ba \cdot b \in B, b > 0, a \in A, a > 0\} = B \cdot A.$$

Kui $A > \overline{0}$ ja $B < \overline{0}$, siis $A \cdot B = -(A \cdot (-B)) = -((-B) \cdot A) = B \cdot A$, analoogiliselt veendutakse korrutamise kommutatiivsuses juhul 2) ja 3). Kui $A = \overline{0}$, siis $\overline{0} \cdot B = B \cdot \overline{0} = \overline{0}$.
**(M2)**: Olgu $A > \overline{0}$, $B > \overline{0}$ ja $C > \overline{0}$, siis $A \cdot B > \overline{0}$ ja $B \cdot C > \overline{0}$. Seega

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot C &= \{(ab)c\colon a \in A, a > 0, b \in B, b > 0, c \in C, c > 0\} = \\ &= \{a(bc)\colon a \in A, a > 0, b \in B, b > 0, c \in C, c > 0\} = A \cdot (B \cdot C).\end{aligned}$$

Vaatleme juhtu $A > \overline{0}$, $B > \overline{0}$ ja $C < \overline{0}$. Kuna $A \cdot B > \overline{0}$ ja $B \cdot C = -(B \cdot (-C)) < \overline{0}$, siis

$$(A \cdot B) \cdot C = -((A \cdot B) \cdot (-C)) = -(A \cdot (B \cdot (-C))) = -(A \cdot (-(B \cdot C))) = A \cdot (B \cdot C).$$

Analoogiliselt kontrollitakse assotsiatiivsust ka ülejäänud variantide korral.
**(M3)**: Vahetu kontroll näitab, et $A \cdot \overline{1} = A$, s.t. $\overline{1}$ on ühikelement.
**(M4)**: Olgu $A > \overline{0}$, defineerime pöördelemendi

$$A^{-1} := \frac{1}{A} := \left\{\frac{1}{q}\colon q \in \tilde{A}\right\} \cup \{q \in \mathbb{Q}\colon q \leqslant 0\},$$

siis $A^{-1} \in F$ ja $A \cdot A^{-1} = \overline{1}$. Edasi defineerime

$$A^{-1} := -\left((-A)^{-1}\right), \quad \text{kui } A < \overline{0}.$$

Sel juhul $A^{-1} < \overline{0}$ ning korrutamise reeglite kohaselt

$$A \cdot A^{-1} = (-A) \cdot (-A)^{-1} = \overline{1}.$$

**(III)** Distributiivsuse aksioomi **(D)** kehtivuse kontrollimiseks olgu $A, B, C \in F$. Kui üks neist komponentidest on $\overline{0}$, siis seos

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{1.11}$$

ilmselt kehtib. Olgu $A > \overline{0}$, $B > \overline{0}$ ja $C > \overline{0}$, siis $B + C > \overline{0}$, mistõttu

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \{a(b + c)\colon a \in A, a > 0, b \in B, b > 0, c \in C, c > 0\} \cup \overline{0} = \\ &= \{ab + ac\colon a \in A, a > 0, b \in B, b > 0, c \in C, c > 0\} \cup \overline{0} = \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ülejäänud juhud taandatakse siinvaadeldud juhule vastavalt korrutise definitsioonile.

Seega on seostega (1.9) ja (1.10) defineeritud tehete korral hulgas $F$ rahuldatud kõik korpuse aksioomid, s.t. $F$ on korpus.

**(IV)** Veendume, et tegemist on **järjestatud korpusega**. See, et aksioomid **(O1)** ja **(O2)** on rahuldatud, on selge järjestuse definitsioonist 1.8. Aksioomi **(O3)** kontroll on lihtne: kui $A \subsetneqq B$, siis $A + C \subsetneqq B + C$, s.t. $A < B \Rightarrow A + C < B + C$ suvalise $C \in F$ puhul. Aksioomi **(O4)** kontrollimiseks paneme kõigepealt tähele, et kui $A > \overline{0}$ ja $C > \overline{0}$, siis $A \cdot C > \overline{0}$ (vrd. (1.10)). Seega, kui $A < B$ (aksioomi **(O3)** kohaselt on see samaväärne tingimusega $B - A > \overline{0}$) ja $C > \overline{0}$, siis

$$B \cdot C - A \cdot C = (B - A) \cdot C > \overline{0} \quad \text{ehk} \quad B \cdot C > A \cdot C.$$

**(V)** Lõpuks on vaja näidata, et korpus $F$ on täielik, s.t. **igal ülalt tõkestatud alamhulgal** $\mathcal{A} \subseteq F$ **on ülemine raja**. Defineerime

$$\sup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

siis $\sup \mathcal{A}$ on korpuse $F$ element. Element $\sup \mathcal{A} \in F$ on kindlasti hulga $\mathcal{A}$ ülemine tõke, sest $B \subsetneqq \bigcup\{A\colon A \in \mathcal{A}\}$ iga $B \in \mathcal{A}$ korral. Teisalt, iga $C < \sup \mathcal{A}$ puhul saab leida ratsionaalarvu $a_0$ omadusega $a_0 \in \sup \mathcal{A} \setminus C$. Seejuures on $a_0$ mingi hulga $A_0 \in \mathcal{A}$ element, mistõttu $A_0 > C$. Järelikult on $\sup \mathcal{A}$ tõepoolest hulga $\mathcal{A}$ vähim ülemine tõke. ■

## 1.3 Ratsionaalarvud järjestatud korpuses

Käesoleva alapeatüki eesmärk on näidata, et igas järjestatud korpuses on (isomorfismi täpsuseni) alamhulgana olemas ratsionaalarvude korpus. Selleks „leiame“ kõigepealt „üles“ igas järjestatud korpuses naturaalarvude hulga.

### 1.3.1 Naturaalarvud. Matemaatilise induktsiooni meetod

Naturaalarvude identifitseerimisel lähtume järgmisest ideest. Korpuse $F$ ühikelemendi $1 \in F$ põhjal määrame ülejäänud elemendid seostega

$$2 := 1 + 1,\ 3 := 1 + 1 + 1,\ 4 := 1 + 1 + 1 + 1 \text{ jne.}$$

Nii moodustatud hulk, mille me tähistame esialgu tähega $\mathcal{N}$, koosneb seega kõikvõimalikest lõplikest summadest $1 + 1 + \ldots + 1$.

Hulga $\mathcal{N}$ omaduste uurimiseks võtame kasutusele induktiivse hulga mõiste.

**Definitsioon.** Korpuse $F$ alamhulka $M$ nimetatakse *induktiivseks*, kui ta rahuldab tingimusi
(i) $1 \in M$ ja
(ii) kui $a \in M$, siis $a + 1 \in M$.

Induktiivseid alamhulki korpuses $F$ kindlasti leidub: hulk $F$ ise on induktiivne, samuti hulga $F$ kõigi positiivsete elementide hulk (selgitada!)✠.

**Definitsioon.** Kõigi induktiivsete alamhulkade $M \subseteq F$ ühisosa tähistame tähega $\mathbb{N}$, s.t.

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subseteq F,\\ M \text{ on induktiivne}}} M.$$

Hulga $\mathbb{N}$ elemente nimetame *naturaalarvudeks korpuses* $F$.

Definitsioonist tuleneb vahetult, et $\mathbb{N}$ on induktiivne hulk (kontrollida!)✠, seejuures vähim sisalduvuse mõttes, sest ta sisaldub igas teises induktiivses hulgas.

**Lause 1.9** ***(matemaatilise induktsiooni printsiip).*** *Kui mingi alamhulk* $A \subseteq \mathbb{N}$ *rahuldab tingimusi*
(i) $1 \in A$,
(ii) $[a \in A] \Rightarrow [a + 1 \in A]$,
*siis* $A = \mathbb{N}$.

**Tõestus.** Ühelt poolt $A \subseteq \mathbb{N}$ lause eelduse põhjal. Teisalt, kuna $A$ rahuldab induktiivse hulga definitsiooni tingimusi, siis $\mathbb{N} \subseteq A$. Kokkuvõttes $A = \mathbb{N}$. ■

Lausel 1.9 põhineb **matemaatilise induktsiooni meetod.** Olgu $P(n)$ mingi väide, mis *omab mõtet* iga naturaalarvu $n$ korral. Kui on vaja tõestada, et väide $P(n)$ *kehtib* iga naturaalarvu $n$ korral, siis piisab näidata, et
(a) $P(1)$ kehtib ja
(b) kui kehtib $P(n)$, siis kehtib ka $P(n+1)$.
Tõepoolest, kui tingimused (a) ja (b) on täidetud, siis hulk $A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ kehtib}\}$ on induktiivne (selgitada!)✠ ning lause 1.9 kohaselt $A = \mathbb{N}$.

**Näide 1.1.** Olgu $0 \neq x > -1$. Tõestame matemaatilise induktsiooni abil, et *Bernoulli võrratus* $(1+x)^n > 1 + nx$ kehtib kõikide naturaalarvude $n \geqslant 2$ puhul.

Olgu $P(n)$ järgmine väide:

$$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)\,x.$$

Väide $P(1)$ on õige, sest $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Seega on tingimus (a) täidetud. Tingimuse (b) kontrollimiseks võtame suvalise $n > 1$ ja veendume, et väitest $P(n)$ järeldub väide $P(n+1)$. Tõepoolest, kui eeldada, et $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)\,x$, siis

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)(1+x)^{n+1} > (1+x)(1+(n+1)\,x)\\ &= 1 + (n+1)\,x + x + (n+1)\,x^2 > 1 + (n+2)\,x,\end{aligned}$$

s.t. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Matemaatiline induktsioon võimaldab ***rekursiivselt defineerida naturaalarvulise argumendiga kujutusi*** $A\colon \mathbb{N} \to Z$, kus $Z$ on mingi (mittetühi) hulk. Selleks tuleb defineerida $A(1)$ ja esitada eeskiri, kuidas elemendist $A(n)$ saadakse $A(n+1)$. Näiteks:

- arvu $x \in F$ *astmete* $x^n$ defineerimiseks määrame $x^1 := x$ ja $x^{n+1} := x^n \cdot x$,
- naturaalarvude *faktoriaalide* $n!$ defineerimiseks määrame $1! := 1$ ja $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$,
- *lõplike summade* $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k := x_1 + \ldots + x_n$ defineerimiseks määrame $\sum\limits_{k=1}^{1} x_k := x_1$ ja seejärel $\sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}$.

Viimane näide võimaldab ka rekursiivselt defineerida käesoleva alapunkti alguses vaadeldud hulka

$$\mathcal{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}.$$

**Lause 1.10** $\mathbb{N} = \mathcal{N}$.

**Tõestus.** Kuna $\mathcal{N}$ on induktiivne hulk (selgitage!)✠, siis lause 1.9 põhjal piisab kontrollida sisalduvust $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$, selleks rakendame matemaatilise induktsiooni meetodit.

Selge, et $1 \in \mathbb{N}$. Kui hulga $\mathcal{N}$ element $n = 1 + \ldots + 1$ kuulub hulka $\mathbb{N}$, siis (tänu hulga $\mathbb{N}$ induktiivsusele) ka $n+1$ kuulub hulka $\mathbb{N}$. Seega sisaldab $\mathbb{N}$ hulga $\mathcal{N}$ kõik elemendid. ■

Järgnevalt veendume, et korpuses $F$ defineeritud naturaalarvude tehetega seotud omadused ei erine meile koolimatemaatikast tuntud vastavatest omadustest.

**Omadus 1.11** *Kahe naturaalarvu summa ja korrutis on naturaalarvud.*

**Tõestus.** Paneme tähele, et iga fikseeritud $m \in \mathbb{N}$ puhul on hulk $\{n \in \mathbb{N} \mid n + m \in \mathbb{N}\}$ induktiivne (selgitada!)✠, lause 1.9 põhjal langeb ta hulgaga $\mathbb{N}$ kokku. Seega $n + m \in \mathbb{N}$ suvaliste $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral.

Korrutise jaoks on tõestus analoogiline (iseseisvalt!)✠. ■

Arvestades omadust 1.11, on $\mathbb{N}$ kui järjestatud korpuse $F$ naturaalarvude hulga tähis, õigustatud. Nimelt, defineerides kujutuse $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subseteq F$ võrdustega $\varphi(\emptyset) = 1$ ja $\varphi(S(n)) = n + 1$, on kujutus $\varphi$ bijektsioon, kooskõlas tehete ja järjestusega. See kujutus võimaldab samastada alapeatükis 1.2.1 defineeritud hulga $\mathbb{N}$ ja igas järjestatud korpuses leitava kõigi induktiivsete hulkade ühisosa $\mathbb{N}$.

**Omadus 1.12** *Hulga* $\mathbb{N}$ *vähim element on* 1.

**Tõestus.** Hulk $\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant 1\}$ on induktiivne, seega sisaldab kõigi induktiivsete hulkade ühisosa $\mathbb{N}$. Järelikult iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib $n \geqslant 1$. ■

**Lemma 1.13** *Kui* $m \in \mathbb{N}$ *ja* $m \neq 1$, *siis* $m - 1 \in \mathbb{N}$.

**Tõestus.** Olgu $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, oletame vastuväiteliselt, et $m - 1 \notin \mathbb{N}$. Näitame, et hulk $A := \mathbb{N} \setminus \{m\}$ on induktiivne, siis lause 1.9 kohaselt saame vastuolu seose $\mathbb{N} \setminus \{m\} = \mathbb{N}$ näol.

Kuna $1 \neq m$, siis $1 \in A$, seega induktiivse hulga definitsiooni tingimus (i) on täidetud. Näitame, et ka (ii) on täidetud. Olgu $n \in A$, siis $n \in \mathbb{N}$, järelikult $n + 1 \in \mathbb{N}$, sest $\mathbb{N}$ on induktiivne. Seejuures $n + 1 \neq m$ (selgitada!)✠, s.t. $n + 1 \in A$. ∎

Tõestatud lemmat rakendame naturaalarvude lahutamistehte kirjeldamisel.

**Omadus 1.14** *Kui $m, n \in \mathbb{N}$ ning $m > n$, siis $m - n \in \mathbb{N}$.*

**Tõestus.** Olgu $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ suvaliselt fikseeritud, näitame induktsioonimeetodit kasutades, et $m - n \in \mathbb{N}$ iga naturaalarvu $n < m$ puhul.

Väide kehtib juhul $n = 1$, sest lemma 1.13 põhjal $m - 1 \in \mathbb{N}$.

Eeldame, et väide kehtib juhul $n$, s.t. $m - n \in \mathbb{N}$, ja veendume, et $m - (n + 1) \in \mathbb{N}$. Selleks rakendame veel kord lemmat 1.13, mille kohaselt

$$m - (n + 1) = (m - n) - 1 \in \mathbb{N}.$$

Väide on tõestatud. ∎

**Järeldus 1.15** *Kui $m, n \in \mathbb{N}$ ning $m > n$, siis $m \geqslant n + 1$.*

**Tõestus.** Rahuldagu naturaalarvud $m$ ja $n$ võrratust $m > n$, siis omaduse 1.14 põhjal $m - n \in \mathbb{N}$. Nüüd jääb üle rakendada omadust 1.12 (iseseisvalt!✠). ∎

Induktsioonimeetodiga saab veel lihtsalt tõestada (iseseisvalt!)✠, et järjestatud korpuse igas *lõplikus* alamhulgas on olemas suurim ja vähim element. Lõpmatute hulkade puhul see üldjuhul nii ei ole, küll aga kehtib järgmine väide.

**Omadus 1.16** *Igas naturaalarvude hulga mittetühjas alamhulgas on vähim element.*

**Tõestus.** Tõestuseks näitame induktsioonimeetodil, et väide
$P(n)$ : *igas alamhulgas $M \subseteq \mathbb{N}$, mis sisaldab arvu $n$, on vähim element*
kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Väide $P(1)$ on õige: kuna arv 1 on hulga $\mathbb{N}$ vähim element, siis on ta vähim ka igas teda sisaldavas alamhulgas $M \subseteq \mathbb{N}$.

Näitame, et $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Selleks eeldame, et igal arvu $n$ sisaldaval naturaalarvude hulgal on vähim element, ja veendume, et siis on vähim element ka igal arvu $n + 1$ sisaldaval naturaalarvude hulgal. Olgu $M \subseteq \mathbb{N}$ suvaline arvu $n + 1$ sisaldav hulk. Kui ka $n \in M$, siis on väide tõestatud. Kui $n \notin M$, siis moodustame hulga $N := M \cup \{n\}$, olgu $n_0$ hulga $N$ vähim element. Juhul $n_0 \in M$ on väide tõestatud (selgitada!)✠. Kui $n_0 \notin M$, siis $n_0 = n$ ja $m > n$, järelikult $m \geqslant n + 1$ (vrd. järeldus 1.15) iga $m \in M$ korral, mistõttu $n + 1$ on hulga $M$ vähim element. ∎

### 1.3.2 Ratsionaalarvude alamkorpus

Tähistame $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ning moodustame hulga $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$, selle elemente nimetame *täisarvudeks.* Arusaadavalt sisaldub $\mathbb{Z}$ korpuses $F$, tänu omadusele 1.14 võime kirjutada

$$\mathbb{Z} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

(kontrollida!)✠. Seetõttu $m + n \in \mathbb{Z}$ ja $m - n \in \mathbb{Z}$ suvaliste $m, n \in \mathbb{Z}$ puhul (selgitada!)✠, samuti on lihtne veenduda, et $mn \in \mathbb{Z}$ kõikide $m, n \in \mathbb{Z}$ korral (selgitada!)✠. Niisiis, *alamhulk* $\mathbb{Z} \subseteq F$ *on kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes.*

Valides kujutuse $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \subseteq F$, mis on defineeritud võrdusega $\varphi([(a, b)]) = a - b$, on $\varphi$ korrektselt defineeritud, bijektsioon, kooskõlas tehete ja järjestusega. Seega on hulgad $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}$ kujutuse $\varphi$ abil samastatavad.

Edasi, kui $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$, siis korpus $F$ sisaldab ka elemendi $\frac{m}{n} := m\frac{1}{n}$, teisisõnu, $F$ sisaldab kõigi *ratsionaalarvude* hulga

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(paneme tähele, et need ratsionaalarvud $mn^{-1}$ ja $m_1 n_1^{-1}$, mille korral $mn_1 = nm_1$, on võrdsed). Paneme tähele, et $\mathbb{Q}$ *on alamkorpus*. Tõepoolest, kui $a = \frac{m}{n}$ ja $b = \frac{p}{q}$ on ratsionaalarvud (s.o. *taandatud* harilikud murrud), siis korpuses $F$ kehtivad seosed

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = m\frac{1}{n} + p\frac{1}{q} = mq\frac{1}{nq} + np\frac{1}{nq} = \frac{1}{nq}(mq + np) = \frac{mq + np}{nq}, \\ ab &= \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = m\frac{1}{n} \cdot p\frac{1}{q} = \frac{mp}{nq}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

seega $a + b \in \mathbb{Q}$ ning $ab \in \mathbb{Q}$. Seostest (1.13) näeme, et igas korpuses $F$ toimub ratsionaalarvude liitmine ja korrutamine meile tuntud harilike murdude liitmise ja korrutamise reeglite järgi. Sama võib öelda ka järjestuse kohta:

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{m}{n} - \frac{p}{q} > 0 \Leftrightarrow \frac{mq - np}{nq} > 0 \Leftrightarrow mq > np \tag{1.14}$$

(selgitada!)✠, see on harilike murdude loomulik järjestus. Kokkuvõttes oleme selgitanud, et $\varphi \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \subseteq F$, kus $\varphi([(a, b)]) = ab^{-1}$, on järjestatud korpuste isomorfism.

Eelneva arutelu võtame kokku järgmises lauses 1.17.

**Lause 1.17** *Iga järjestatud korpus $F$ sisaldab alamkorpust $\mathbb{Q}$, mis on isomorfne kõigi ratsionaalarvude järjestatud korpusega $\mathbb{Q}$.*

Lõpuks märgime veel üht hulga $\mathbb{Q}$ tähelepanuväärset omadust. Meenutame, et hulka $A$ nimetatakse *loenduvaks*, kui tema ja kõigi naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ elementide vahel eksisteerib üksühene vastavus.

**Omadus 1.18** *Kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on loenduv.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

## 1.4 Täieliku järjestatud korpuse ühesus. Reaalarvude definitsioon

Praeguseks me juba teame, et **täielikke järjestatud korpusi eksisteerib**. Käesolevas alapeatükis anname vastuse küsimusele, kas selline korpus **on üheselt määratud**.

**Teoreem 1.19** *Suvalised kaks täielikku järjestatud korpust $F_1$ ja $F_2$ on isomorfsed.*

**Tõestus.** Teatavasti sisaldab iga järjestatud korpus alamkorpust, mis on isomorfne kõigi ratsionaalarvude korpusega $\mathbb{Q}$ (vt. punkt 1.3.2), tähistame need korpuste $F_1$ ja $F_2$ puhul vastavalt $Q_1$ ja $Q_2$. Olgu $\varphi\colon Q_1 \to Q_2$. Rõhutame, et $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ ja $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ kõikide $p, q \in Q_1$ korral ja võrratusest $p < q$ korpuses $Q_1$ järeldub $\varphi(p) < \varphi(q)$ korpuses $Q_2$. Defineerime otsitava kujutuse $\psi\colon F_1 \to F_2$ seosega

$$\psi(x) := \sup\{\varphi(q)\colon q \in C_x\}, \tag{1.15}$$

kus $C_x := \{r \in Q_1\colon r < x\}$ $(x \in F_1)$ ja supreemum on võetud korpuses $F_2$. Vahetu kontroll näitab, et kujutus $\psi$ on korrektselt defineeritud, seejuures

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{iga } x \in Q_1 \text{ korral.}$$

Kujutus $\psi$ **säilitab järjestuse**, s.t.

$$x < y \Rightarrow \psi(x) < \psi(y).$$

Sellest implikatsioonist tuleneb vahetult ka kujutuse $\psi$ **injektiivsus**. Kuna suvalise $y \in F_2$ korral kehtib $\psi(x) = y$, kus

$$x := \sup\{\varphi^{-1}(p)\colon p \in C_y\}$$

ja $C_y := \{p \in Q_2\colon p < y\}$, siis $\psi$ on **sürjektiivne**.

**Tõestame, et** $\psi(x + x') = \psi(x) + \psi(x')$. Olgu $q \in C_{x+x'}$, tähistame $\varepsilon := x + x' - q$, seega $\varepsilon > 0$. Leiame sellised $r \in C_x$ ja $s \in C_{x'}$, et

$$x - \frac{\varepsilon}{2} < r, \quad x' - \frac{\varepsilon}{2} < s,$$

siis $q = x + x' - \varepsilon < r + s < x + x'$. Teisi sõnu, iga $q \in C_{x+x'}$ korral leiduvad $r \in C_x$ ja $s \in C_{x'}$ omadusega $q < r + s < x + x'$. Niisiis,

$$\begin{aligned}
\psi(x + x') &= \sup\{\varphi(q)\colon q \in C_{x+x'}\} = \sup\{\varphi(r+s)\colon r \in C_x, s \in C_{x'}\} = \\
&= \sup\{\varphi(r) + \varphi(s)\colon r \in C_x, s \in C_{x'}\} = \\
&= \sup\{\varphi(r)\colon r \in C_x\} + \sup\{\varphi(s)\colon s \in C_{x'}\} = \\
&= \psi(x) + \psi(x').
\end{aligned}$$

Analoogiliselt **veendutakse, et** $\psi(xx') = \psi(x)\psi(x')$. ■

**Definitsioon.** *Reaalarvudeks* nimetame täieliku järjestatud korpuse elemente. Kõigi reaalarvude hulka (täpsemalt, järjestatud korpust) tähistame tähega $\mathbb{R}$.

Kuna käesolevas kursuses on kõik vaadeldavad arvud reaalarvud, siis tähendab sõna *arv* järgnevas alati *reaalarvu.*

## 1.5 Reaalarvude korpuse omadused

### 1.5.1 $n$-astme juur positiivsest reaalarvust. Irratsionaalarvud

Teatavasti ei ole positiivsetel arvudel üldjuhul ratsionaalse väärtusega ruutjuurt. Seevastu, nagu selgub järgmisest lausest, eksisteerib *reaalarvuline* ruutjuur igast mittenegatiivsest arvust.

**Lause 1.20** *Iga mittenegatiivse reaalarvu $b$ ja iga naturaalarvu $n$ korral leidub üheselt määratud mittenegatiivne reaalarv $x$ omadusega $x^n = b$.*

**Tõestus.** Kõigepealt märgime, et kui leidub selline arv $x \in \mathbb{R}$, et $x^n = b$, siis on see üheselt määratud, sest seostest $0 \leqslant x_1 < x_2$ järeldub võrratus $x_1^n < x_2^n$ (põhjendada!)✠.

Väide kehtib ilmselt juhul $b = 0$, siis $x = 0$, seega võime piirduda juhuga $b > 0$.

**A.** Vaatleme esiteks juhtu $b \geqslant 1$. Tähistame

$$X := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0,\, z^n \leqslant b\}\,,$$

selge, et $1 \in X$, järelikult $X \neq \varnothing$. Hulk $X$ on ülalt tõkestatud, nimelt on arv $b$ ise hulga $X$ ülemiseks tõkkeks (põhjendada!)✠. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $x := \sup X$, kuna $1 \in X$, siis $x \geqslant 1$, mistõttu

$$x^k \geqslant x \geqslant 1 \text{ iga } k \in \{1, \dots, n\} \text{ puhul.} \tag{1.16}$$

Meie eesmärgiks on näidata, et $x^n = b$, selleks veendume, et mõlemad vastuväitelised oletused $x^n < b$ ja $x^n > b$ viivad vastuolule.

(a) Olgu $x^n < b$, siis $c := b - x^n > 0$. Suvalise $a \in \mathbb{R}$ korral

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 + \ldots + a^n,$$

seejuures

$$M := \max\left\{\binom{n}{k} x^{n-k} \mid k \in \{1, \dots, n\}\right\} \geqslant 1.$$

Võtame $a := \min\left\{1, \frac{c}{nM}\right\}$, siis $0 < a^k \leqslant a$ ja

$$(x+a)^n \leqslant x^n + Ma + Ma^2 + \ldots + Ma^n \leqslant x^n + nMa \leqslant x^n + c = b.$$

Järelikult $x + a \in X$, kuid see on vastuolus asjaoluga, et $x$ on hulga $X$ ülemine tõke.

(b) Vaatleme juhtu $x^n > b$. Võtame $c := x^n - b$ ning defineerime arvud $M$ ja $a$ nii nagu eespool. Analoogiline arutelu annab võrratused

$$(x-a)^n \geqslant x^n - nMa \geqslant x^n - c = b \tag{1.17}$$

(kontrollida!)✠. Samal ajal, kuna $x - a < x$, siis vastavalt lausele 1.3(a) leidub $z \in X$ omadusega $x - a < z \leqslant x$. Seega $(x-a)^n < z^n \leqslant b$, mis on vastuolus tingimusega (1.17).

Niisiis on väide juhul $b \geqslant 1$ tõestatud.

**B.** Kui $0 < b < 1$, siis $d := \frac{1}{b} > 1$, juhul **A** tõestatu kohaselt eksisteerib $y > 0$ omadusega $y^n = d$. Tähistame $x := \frac{1}{y}$, siis

$$x^n = \left(\frac{1}{y}\right)^n = \frac{1}{y^n} = \frac{1}{d} = b.$$

Lause on tõestatud. ■

**Definitsioon.** Reaalarvu $b \geqslant 0$ korral nimetatakse tema *n-ndaks juureks* ehk *n-astme juureks* (*nth root, корень n-й степени*) mittenegatiivset arvu $x$, mille puhul $x^n = b$, seda tähistatakse $\sqrt[n]{b}$.

**Lause 1.21** *Kui $a$ ja $b$ on mittenegatiivsed arvud, siis*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

**Tõestus.** Tähistame $y := \sqrt[n]{a}$, $x := \sqrt[n]{b}$ ja $z := \sqrt[n]{ab}$. Kuna $a = y^n$ ja $b = x^n$, siis $(xy)^n = x^n y^n = ab = z^n$. Lause 1.20 kohaselt on positiivse arvu $ab$ $n$-s juur üheselt määratud, seetõttu $z = \sqrt[n]{ab} = xy$ ehk $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

Lausest 1.20 selgub muuhulgas tõsiasi, et meie poolt defineeritud kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on *rangelt* suurem kui kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$, näiteks $\sqrt{2} := \sqrt[2]{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Definitsioon.** Arve $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nimetatakse *irratsionaalarvudeks.*

### 1.5.2 Archimedese printsiip. Ratsionaalarvude hulga tihedus

Selles punktis selgitame, kuidas paiknevad naturaalarvud ja ratsionaalarvud korpuses $\mathbb{R}$. Arutelu aluseks on järgmine oluline järeldus pidevuse aksioomist.

**Lause 1.22** ***(Archimedese printsiip).*** *Iga reaalarvu $a$ korral leidub selline naturaalarv $n$, et $a < n$. Teisisõnu, kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ei ole tõkestatud korpuses $\mathbb{R}$.*

**Tõestus.** Oletame vastuväiteliselt, et hulk $\mathbb{N}$ on ülalt tõkestatud, pidevuse aksioomi põhjal on tal siis ülemine raja $b := \sup \mathbb{N}$. Kuna $b - 1$ ei ole hulga $\mathbb{N}$ ülemine tõke, siis saame valida sellise $m \in \mathbb{N}$, et $b - 1 < m$ ehk $b < m + 1$. Seejuures $m + 1 \in \mathbb{N}$ (põhjendada!)✠, niisiis ei saa $b$ olla hulga $\mathbb{N}$ ülemiseks tõkkeks. Saime vastuolu, mis näitab, et vastuväiteline oletus on väär. ■

**Järeldus 1.23** *Iga reaalarv paikneb kahe järjestikuse täisarvu vahel: suvalise $a \in \mathbb{R}$ korral leidub selline $n \in \mathbb{Z}$, et $n - 1 \leqslant a < n$. Sealjuures $n$ on üheselt määratud.*

**Tõestus.** Tähistame arvu $a \in \mathbb{R}$ korral

$$S := \{k \in \mathbb{Z} \mid k > a\},$$

lause 1.22 kohaselt $S \neq \varnothing$, seejuures on arv $a$ hulga $S$ alumine tõke. Vastavalt lausele 1.4 eksisteerib $\inf S =: c$. Kuna $c$ on hulga $S$ suurim alumine tõke, siis

$$a \leqslant c \leqslant k \text{ iga } k \in S \text{ puhul}$$

(selgitage!)✠, kuid $c+1$ ei ole hulga $S$ alumiseks tõkkeks. Järelikult leidub selline $n \in S \subseteq \mathbb{Z}$, et $n < c+1$ ehk $n-1 < c$. Seega $n-1 \notin S$, mistõttu $n-1 \leqslant a$. Kokkuvõttes $n-1 \leqslant a < n$.

Oletades, et leiduvad $m, n \in \mathbb{Z}$ nii, et $m < n$ ja $m-1 \leqslant a < m$ ja $n-1 \leqslant a < n$, saame esimesest ja teisest võrdusest $m$ lahutamisel, et $n-m-1 \leqslant a-m < 0$. Et $n-m > 0$ ja $n-m \in \mathbb{Z}$, siis $n-m \in \mathbb{N}$, seega $n-m \geqslant 1$ (vt. omadust 1.12). Saadud vastuolu näitab, et täisarv $n$ on üheselt määratud (selgitage!)✠. ■

**Märkus.** Järelduses 1.23 esinevat täisarvu $n-1$ nimetatakse reaalarvu $a$ *alumiseks täisosaks* (*floor, пол*) ja tähistatakse $\lfloor a \rfloor$. Analoogselt saab defineerida ka *ülemise täisosa* (*ceiling, потолок*): see on täisarv $k+1$ nii, et $k < a \leqslant k+1$. Analoogselt alumise täisosaga saab ka tõestada, et igal reaalarvul on olemas üheselt määratud ülemine täisosa.

**Järeldus 1.24** $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$

**Tõestus.** Archimedese printsiibi kohaselt saab iga $\varepsilon > 0$ jaoks leida niisuguse $n \in \mathbb{N}$, et $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ehk $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Seega $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0$. ■

Lihtne on veenduda, et iga kahe reaalarvu vahel leidub veel reaalarve (selgitada!)✠. Tegelikult kehtib järgmine tugevam väide, mis ütleb, et *nii ratsionaalarvud kui ka irratsionaalarvud paiknevad reaalarvude hulgas* $\mathbb{R}$ ***tihedalt.***

**Teoreem 1.25** *Olgu $a$ ja $b$ niisugused reaalarvud, et $a < b$.*
(a) *Leidub selline ratsionaalarv $r$, et $a < r < b$.*
(b) *Leidub niisugune irratsionaalarv $\rho$, et $a < \rho < b$.*

**Tõestus.** (a) Kuna $a < b$, siis $\frac{1}{b-a} > 0$, Archimedese printsiibi kohaselt leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $n > \frac{1}{b-a}$ ehk

$$\frac{1}{n} < b-a. \tag{1.18}$$

Järelduse 1.23 põhjal leiame arvu $na$ jaoks $m \in \mathbb{Z}$ omadusega $m-1 \leqslant na < m$, niisiis

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}.$$

Tänu seosele (1.18) tuleneb siit, et

$$a < \frac{m}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Kokkuvõttes $r := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ja $a < r < b$.

(b) Kui $a < b$, siis $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ ja väite (a) põhjal leidub $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ omadusega $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$ (selgitada!)✠. Siis $r\sqrt{2}$ on irratsionaalarv (põhjendada!)✠ ning $a < r\sqrt{2} < b$. ■

Teoreemi 1.25(a) abil tõestame järgmise olulise lause.

**Lause 1.26** *Kõigi ratsionaalarvude järjestatud korpus $\mathbb{Q}$ ei ole täielik.*

**Tõestus.** Näitame, et alamhulgal

$$A := \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < \sqrt{2} \right\},$$

mis on korpuses $\mathbb{Q}$ ülalt tõkestatud, ei ole selles korpuses ülemist raja. Vastavalt teoreemile 1.25(a) $\sqrt{2} = \sup A$ korpuses $\mathbb{R}$ (põhjendada!)✠. Teatavasti $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, seega hulga $A$ kõik *ratsionaalarvulised* ülemised tõkked on suuremad kui $\sqrt{2}$ (selgitada!)✠. Oletame vastuväiteliselt, et nende hulgas leidub vähim, tähistame selle tähega $s$. Kuna $\sqrt{2} < s$ (põhjendada!)✠, siis teoreemi 1.25 kohaselt leidub selline $r \in \mathbb{Q}$, et $\sqrt{2} < r < s$, järelikult ei ole $s$ hulga $A$ vähim ratsionaalne ülemine tõke. Saime vastuolu, mis tähendab, et korpuses $\mathbb{Q}$ ei ole hulgal $A$ ülemist raja. ■

### 1.5.3 Reaalarvu absoluutväärtus. Intervallid

Arvu $a \in \mathbb{R}$ *absoluutväärtuseks* (*absolute value, абсолютная величина*) nimetatakse arvu

$$|a| := \begin{cases} a, \text{ kui } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ kui } a < 0. \end{cases}$$

Definitsioonist järeldub vahetult, et $|a| = 0$ parajasti siis, kui $a = 0$. Selge, et

$$|a| = \max\{a, -a\},$$

selle seose kohaselt
1) $a \leqslant |a|$ ja $-a \leqslant |a|$,
2) $|a| \geqslant 0$,
3) $|-a| = |a|$
(selgitada!)✠. Olulist rolli järgnevas mängib järgmine absoluutväärtuse omadus.

**Lause 1.27** *Arvude $a$ ja $c$ korral kehtib võrratus $|a| \leqslant c$ parajasti siis, kui $-c \leqslant a \leqslant c$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Lause 1.28** *Reaalarvude $a$ ja $b$ puhul kehtivad järgmised väited:*
(a) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ *(absoluutväärtuse kolmnurgaomadus),*
(b) $|a - b| \leqslant |a| + |b|$,
(c) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$,
(d) $|ab| = |a|\,|b|$.

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Absoluutväärtuse abil saab konstrueerida reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ lihtsa ja mugava geomeetrilise mudeli – **arvsirge.** Olgu mingil sirgel fikseeritud kaks punkti, mis vastavad arvudele 0 ja 1. Suunda punkti 0 poolt punkti 1 poole loeme positiivseks, vastupidist suunda negatiivseks. Sirglõigu, mille otspunktideks on 0 ja 1, pikkuse loeme ühikuks. Arvu $a$ puhul võtame lõigu pikkusega $|a|$ ning kanname ta punktist 0 lähtudes positiivses suunas, kui $a > 0$, ning negatiivses suunas, kui $a < 0$. Saadud punkt sirgel vastab arvule $a$. On selge, et $|a|$ tähistab punkti $a$ kaugust punktist 0. Seda geomeetrilist mudelit silmas pidades nimetame (mittenegatiivset) arvu $|a - b|$ reaalarvude $a$ ja $b$ *vaheliseks kauguseks.*

Arvsirge kui reaalarvude hulga geomeetriline mudel on oluliselt kujundanud ka reaalarvudega seotud terminoloogiat. Näiteks nimetame me reaalarve tihtipeale (arvsirge) punktideks, teatavaid reaalarvude hulki aga intervallideks.

**Definitsioon.** *Intervalliks* (*interval, промежуток*) nimetatakse mittetühja vähemalt kaheelemendilist alamhulka $X \subseteq \mathbb{R}$, millel on järgmine omadus: *kui* $a, b \in X$ *ja* $a < x < b$, *siis* $x \in X$.

Iga kaks reaalarvu $a$ ja $b$, kus $a < b$, määravad ära neli *tõkestatud intervalli*:
*vahemiku* (*open interval, интервал*) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
*poollõigud* (*half-open interval, полусегмент*) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ja
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ning
*lõigu* (*closed interval, сегмент*) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Arvsirgest kui reaalarvude hulga mudelist lähtudes defineerime kaks uut objekti $\infty$ ja $-\infty$ järgmiste tingimustega:
i) $-\infty < \infty$ ja
ii) $-\infty < x < \infty$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.
Rõhutame, et $-\infty$ ***ja*** $\infty$ ***ei kuulu reaalarvude hulka***, seetõttu ei saa neid liita ega korrutada, ei omavahel ega reaalarvudega. See-eest hõlbustavad nad paljudel juhtudel tingimuste üleskirjutamist, näiteks tähistame

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

analoogiliselt

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}.$$

Neid nelja hulka nimetame *tõkestamata intervallideks,* neile lisandub $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

**Definitsioon.** Olgu $\varepsilon > 0$. Reaalarvu (ehk punkti) $a \in \mathbb{R}$ puhul nimetatakse tema *$\varepsilon$-ümbruseks* (*$\varepsilon$-neighbourhood, $\varepsilon$-окрестность*) alamhulka

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Lause 1.27 põhjal $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (veenduda!)✠.

**Definitsioon.** Alamhulga $X \subseteq \mathbb{R}$ punkti $x$ nimetatakse tema *sisepunktiks* (*interior point, внутренная точка*), kui leidub selline $\delta > 0$, et ümbrus $U_\delta(x)$ sisaldub hulgas $X$, s.t. $(x - \delta, x + \delta) \subseteq X$. Hulga $X$ kõigi sisepunktide hulka nimetame tema *sisemuseks* ning tähistame $X^o$.

### 1.5.4 Hulga $\mathbb{R}$ mitteloenduvus

Kõigepealt tõestame ühe tõkestatud intervallidega seotud väite.

**Lause 1.29** *Kui* $[a_n, b_n]$, *kus* $n \in \mathbb{N}$, *on sellised lõigud, et*

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots,$$

*siis* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

**Tõestus.** Kuna $a_k < b_n$ suvaliste indeksite $k$ ja $n$ puhul (selgitada!)✠, siis $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on ülalt tõkestatud hulk. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $\sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} =: c$. Seejuures $c \leqslant b_n$ iga $n$ korral (selgitada!)✠, järelikult $c \in [a_n, b_n]$ suvalise $n \in \mathbb{N}$ puhul. Seega $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$. ■

Lause 1.29 abil tõestame nüüd reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ mitteloenduvuse.

**Lause 1.30** *Ükski vahemik $(a_0, b_0) \subseteq \mathbb{R}$ ei ole loenduv hulk. Seega on ka hulk $\mathbb{R}$ mitteloenduv.*

**Tõestus.** Võtame vahemikus $(a_0, b_0)$ *suvalise loenduva alamhulga* $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ja näitame, et $E \neq (a_0, b_0)$. Selleks kasutame järgmist lihtsat tähelepanekut (kontrollida!)✠:
(*) *antud vahemiku $(a, b)$ ja punkti $x \in \mathbb{R}$ korral saab leida lõigu $[c, d] \subseteq (a, b)$ omadusega $x \notin [c, d]$.*
Selle kohaselt valime kõigepealt lõigu $[a_1, b_1] \subseteq (a_0, b_0)$ omadusega $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Edasi leiame lõigu $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ nii, et $x_2 \notin [a_2, b_2]$ jne. Kui $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ on valitud, siis leiame $a_{n+1}$ ja $b_{n+1}$ nii, et $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ ja $x_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Kokkuvõttes saame sisestatud lõigud $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$, lause 1.29 põhjal leidub $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Seejuures $z \in (a_0, b_0) \setminus E$ (selgitada!)✠, mistõttu $E \neq (a_0, b_0)$.

Kuna alamhulk $(a_0, b_0) \subseteq \mathbb{R}$ on mitteloenduv, siis ei ole ka $\mathbb{R}$ loenduv. ■

### 1.5.5 Dedekindi lõiked

Kui on antud kaks reaalarvude hulka $A$ ja $B$, mis rahuldavad tingimusi
1) $A \cup B = \mathbb{R}$,
2) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
3) suvaliste $a \in A$ ja $b \in B$ korral kehtib võrratus $a < b$,
siis öeldakse, et nad moodustavad kõigi reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ *Dedekindi lõike,* tähistame seda $A \mid B$. Kui leidub selline arv $x$, et $a \leqslant x \leqslant b$ kõikide $a \in A$ ning $b \in B$ korral, siis arvu $x$ nimetame lõike $A \mid B$ *eraldusarvuks.*

Paneme tähele, et *kui eraldusarv eksisteerib, siis on ta üheselt määratud.* Tõepoolest, kui oletada, et antud lõike $A \mid B$ korral leiduvad eraldusarvud $x_1$ ja $x_2$ nii, et $x_1 < x_2$, siis leidub arv $z \in (x_1, x_2)$ (põhjendada!)✠, järelikult $a \leqslant x_1 < z < x_2 \leqslant b$, mistõttu $z \notin A$ ja $z \notin B$ (selgitada!)✠. See on vastuolus tingimusega 1).

Osutub, et küsimus eraldusarvu olemasolust suvalise Dedekindi lõike puhul on samaväärne küsimusega ülalt tõkestatud hulga ülemise raja olemasolust. Paljudes õpikutes ongi pidevuse aksioom **(P)** sõnastatud Dedekindi lõike abil (ehk nn. lõikeaksioomina):
**(P')** *Igal Dedekindi lõikel $A \mid B$ reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ on eraldusarv.*

**Teoreem 1.31** *Väited* **(P)** *ja* **(P')** *on samaväärsed.*

**Tõestus.** **(P)** $\Rightarrow$ **(P')** Olgu $A \mid B$ suvaline lõige hulgas $\mathbb{R}$. Eeldame, et pidevuse aksioom **(P)** kehtib, ning näitame, et lõikel $A \mid B$ on eraldusarv $x$. Hulk $A$ ei ole tühi, seejuures on iga $b \in B$ tema ülemine tõke (vrd. 3)). Aksioomi **(P)** kohaselt leidub $x := \sup A$, seejuures $a \leqslant x$ iga $a \in A$ korral. Kuna $x$ on hulga $A$ vähim ülemine tõke, siis $x \leqslant b$ iga $b \in B$ puhul. Kokkuvõttes $a \leqslant x \leqslant b$ kõikide $a \in A$ ning $b \in B$ korral. Seega on $x = \sup A$ lõike $A \mid B$ eraldusarv.

**(P')** $\Rightarrow$ **(P)** Eeldame, et väide **(P')** kehtib. Olgu $M$ mingi ülalt tõkestatud mittetühi reaalarvude hulk. Kui hulgas $M$ on olemas suurim element $\max M$, siis see ongi ülemine raja ja väide **(P)** kehtib.

Eeldame, et suurimat elementi hulgas $M$ ei ole. Olgu $B$ hulga $M$ kõigi ülemiste tõkete hulk, tähistame $A := \mathbb{R} \setminus B$. Kuna $M \cap B = \emptyset$ (selgitada!)✠, siis $M \subseteq A$.

Veendume, et hulgad $A$ ja $B$ määravad lõike. Tingimused 1) ja 2) on ilmselt täidetud, kontrollime tingimust 3). Kui oletada, et mingite $a_0 \in A$ ja $b_0 \in B$ korral kehtib võrratus $a_0 \geqslant b_0$, siis oleks ka $a_0$ hulga $M$ ülemine tõke (selgitada!)✠ ning seega $a_0 \in B$. See oleks vastuolus faktiga $A = \mathbb{R} \setminus B$. Niisiis, meil on lõige $A \mid B$. Eelduse **(P')** põhjal leidub selline $x \in \mathbb{R}$, et $a \leqslant x \leqslant b$ kõikide $a \in A$ ning $b \in B$ korral. Veendume, et $x = \sup M$. Tõepoolest, kui $z \in M$, siis $z \in A$, seega $z \leqslant x$, järelikult on $x$ hulga $M$ ülemine tõke. Kui $b$ on hulga $M$ suvaline ülemine tõke, siis $b \in B$, mistõttu $x \leqslant b$. Seega $x$ on hulga $M$ vähim ülemine tõke, s.t. $x = \sup M$. ■

Lõikeaksioomi **(P')** tegelik sõnum on, et erinevalt ratsionaalarvude hulgast $\mathbb{Q}$, ***reaalarvude hulgas*** $\mathbb{R}$ ***ei ole lünki.***

## 1.6 Võrratused

### 1.6.1 Aritmeetiliste keskmiste ja geomeetriliste keskmiste võrdlemine

Valemist $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$ saame mittenegatiivsete arvude $a_1$ ja $a_2$ jaoks võrratuse

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \tag{1.19}$$

(kontrollida!)✠. Osutub, et kehtib järgmine üldisem väide.

**Lause 1.32** *Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *korral*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}. \tag{1.20}$$

**Tõestus.** Veendume, et väide (1.20), mida me järgnevas tähistame $P(n)$, kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõestuse esimeses osas näitame, et $P\left(2^k\right)$ on õige iga $k \in \mathbb{N}$ korral, teises osas põhjendame implikatsiooni $P(n) \Rightarrow P(n-1)$. Kokkuvõttes saame väite $P(n)$ kehtivuse kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral.

**(I)** *Näitame induktsioonimeetodi abil, et* $P(n)$ *kehtib, kui* $n = 2^k$ *suvalise* $k \in \mathbb{N}$ *korral.* Seose (1.19) põhjal kehtib väide $P(2)$. Eeldame, et väide $P\left(2^k\right)$ on õige, ja veendume väite $P\left(2^{k+1}\right)$ õigsuses.

Olgu $2^k = n$, siis $2^{k+1} = 2n$, olgu antud $2n$ mittenegatiivset arvu $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Tähistame

$$b_1 := \frac{a_1 + a_2}{2},\ b_2 := \frac{a_3 + a_4}{2}, \ldots,\ b_n := \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2},$$

siis $b_i \geqslant \sqrt{a_{2i-1} a_{2i}}$ kõikide $i = 1, 2, \ldots, n$ puhul. Eelduse $P\left(2^k\right)$ põhjal

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} \geqslant \sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$$

(kontrollida!)✠. Niisiis, väide $P\left(2^{k+1}\right)$ kehtib.

**(II)** *Näitame, et väitest* $P(n)$ *järeldub suvalise* $n \in \mathbb{N}$ *korral* $P(n-1)$. Kehtigu väide $P(n)$ ja olgu $a_1, \ldots, a_{n-1}$ mittenegatiivsed arvud. Tähistame $c_1 := a_1, c_2 := a_2, \ldots, c_{n-1} := a_{n-1}, c_n := \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$, eelduse $P(n)$ järgi

$$\frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n}$$

ehk

$$\frac{1}{n}\left(a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right) \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}.$$

Paneme tähele, et võrratuse vasak pool on $\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$, paremat poolt teisendades saame

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} &\geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}\\ &= \left(\sqrt[n-1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

ehk

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{1-\frac{1}{n}} \geqslant \left(\sqrt[n-1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{n}},$$

millest järeldub väide $P(n-1)$. ■

### 1.6.2 Hölderi ja Minkowski võrratus

Olgu $r=\frac{m}{n}$ ratsionaalarv, kus $0<m<n$, ning olgu $x$ ja $y$ positiivsed reaalarvud. Võttes $a_1:=a_2:=\ldots:=a_m:=x$ ja $a_{m+1}:=\ldots:=a_n:=y$, saame võrratuse (1.20) kujul

$$\frac{mx+(n-m)\,y}{n}\geqslant\left(x^m y^{n-m}\right)^{\frac{1}{n}},$$

millest tuleneb võrratus

$$rx+(1-r)\,y\geqslant x^r y^{1-r}.$$

Tuues sisse uued tähistused $a:=x^r$, $b:=y^{1-r}$, $p:=\frac{1}{r}$, $q:=\frac{1}{1-r}$ (seega $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), jõuame siit järgmise väiteni: *kui $a$ ja $b$ on positiivsed reaalarvud ning $p$ ja $q$ on sellised ratsionaalarvud, et $p>1$ ja $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, siis kehtib võrratus*

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab. \tag{1.21}$$

Olgu nüüd $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ mittenegatiivsed reaalarvud ja olgu $p$ ning $q$ sellised ratsionaalarvud, et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Võtame võrratuses (1.21)

$$a:=\frac{a_i}{(a_1^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}},\quad b:=\frac{b_i}{(b_1^q+\ldots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

kõikide $i=1,\ldots,n$ korral ja liidame vastavad võrratused, saame

$$\frac{1}{p}\frac{a_1^p+\ldots+a_n^p}{a_1^p+\ldots+a_n^p}+\frac{1}{q}\frac{b_1^q+\ldots+b_n^q}{b_1^q+\ldots+b_n^q}\geqslant\frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{(a_1^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\,(b_1^q+\ldots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}.$$

Kuna viimase võrratuse vasak pool võrdub arvuga 1, siis

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Seda võrratust nimetatakse *Hölderi võrratuseks.* Juhul $p=2$ saame *Cauchy-Schwarzi võrratuse*

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Hölderi võrratuse abil tuletame järgnevalt *Minkowski võrratuse*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.22}$$

Tähistame $S := \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p$ ja paneme tähele, et

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Hölderi võrratust rakendades jõuame seoseni

$$S \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ehk (peame silmas võrdust $(p-1)\,q = p$)

$$S \leqslant S^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

millest tulenebki võrratus (1.22) (veenduda!)✠.

Minkowski võrratust (1.22) juhul $p = 2$ nimetatakse *kolmnurga võrratuseks.*

# 2 Arvjadad

Olgu $D$ mingi mittetühi reaalarvude hulk, s.t. $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Kui igale arvule $x$ hulgast $D$ on mingi eeskirja järgi seatud vastavusse üheselt määratud arv $y =: f(x)$, siis öeldakse, et hulgas $D$ on defineeritud *funktsioon* $f$, mida me tavaliselt märgime $f\colon D \to \mathbb{R}$, mõnikord ka $y = f(x)$ või $x \mapsto f(x)$. Hulka $D$ nimetatakse seejuures funktsiooni $f$ *lähtehulgaks* ehk *määramispiirkonnaks* (*domain, область определения*), hulka

$$R := \{f(x) \mid x \in D\}$$

aga *väärtuste hulgaks* (*range, область значений*). Punktide hulka

$$\mathrm{Gr} f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

$xy$-tasandil nimetatakse funktsiooni $f$ *graafikuks*. See, mis puudutab funktsioonide esitusviise, nende liike, graafikuid jne., on lugejale tuttav eelnevatest matemaatilise analüüsi kursustest.

## 2.1 Koonduvad jadad

### 2.1.1 Koonduvate jadade üldised omadused

**Arvjadaks** (*sequence, последовательность*) nimetatakse reaalarvuliste väärtustega funktsiooni $x$, mille määramispiirkond on kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$. Selline funktsioon $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ seab igale naturaalarvule $n$ vastavusse reaalarvu $x(n)$, mis tavaliselt kirjutatakse kujul $x_n$. Neid funktsiooni väärtusi $x_n$ nimetatakse arvjada $x$ *liikmeteks*, naturaalarve $n \in \mathbb{N}$ aga *indeksiteks*. Arvjada $x$ ennast tähistame sümboliga $(x_n)$, vajaduse korral märgime juurde indeksite määramispiirkonna, näiteks $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ või $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Tihtipeale kasutame ka tähistust $(x_1, x_2, \ldots)$. Tavaliselt ütleme *arvjada* asemel lihtsalt *jada.*

Mõnikord on kasulik võtta jada indeksite hulgaks $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sel juhul saame jada $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

**Definitsioon.** Ütleme, et jada $(x_n)$ on *tõkestatud* (*bounded, ограниченная*), kui tema liikmete hulk $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud.

Selle definitsiooni kohaselt on jada $(x_n)$ tõkestatud parajasti siis, kui

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant x_n \leqslant M \ \ (n \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

Tingimusega (2.1) on samaväärne tingimus

$$\exists K > 0 : |x_n| \leqslant K \ \ (n \in \mathbb{N})$$

(selgitada!)✠.

**Definitsioon.** Ütleme, et *jada* $(x_n)$ *koondub arvuks* $a$ (kirjutame kas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ või $x_n \to a$), kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, et $|x_n - a| < \varepsilon$ kõikide $n \geqslant N$ korral. Arvu $a$ nimetatakse sel juhul jada $(x_n)$ *piirväärtuseks* (*limit, предел*) ja jada ennast *koonduvaks* (*convergent, сходящаяся*). Mittekoonduvaid jadasid nimetatakse *hajuvateks* (*divergent, расходящаяся*).

Niisiis,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;:\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N}:\; n \geqslant N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

selle seose parema poole võime kirjutada kujul

$$\forall\varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N}:\; x_n \in U_\varepsilon(a) \text{ kõikide } n \geqslant N \text{ korral}$$

(kontrollida!)✠, kus

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

on punkti $a$ $\varepsilon$-ümbrus.

Paneme tähele, et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

(selgitada!)✠.

**Omadus 2.1** *Koonduva jada piirväärtus on üheselt määratud: kui $x_n \to a$ ja $x_n \to b$, siis $a = b$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 2.2** *Koonduv jada on tõkestatud: kui $x_n \to a$, siis leiduvad sellised arvud $m$ ja $M$, et $m \leqslant x_n \leqslant M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 2.3** *Kui $x_n \to 0$ ja $(y_n)$ on tõkestatud jada, siis $x_n y_n \to 0$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Näide 2.1.** Lihtsaimaks näiteks koonduvast jadast on *konstantne jada* $(a, a, \ldots)$, sel juhul on piirväärtuseks arv $a$. Tõepoolest, iga $\varepsilon > 0$ ning $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$, seega võib piirväärtuse definitsiooni tingimuses (2.2) suvalise $\varepsilon > 0$ korral võtta $N := 1$. Samuti on koonduv ka nn. *statsionaarne jada*, s.o. jada $(x_1, \ldots, x_{n_0}, a, a, \ldots)$, mis on konstantne mingist indeksist $n_0 + 1$ alates.

**Näide 2.2.** Archimedese printsiibi kohaselt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (tõestada!✠, kasutada järeldust 1.24.)

**Näide 2.3.** Jada $((-1)^n)$ hajub, sest suvalise $a \in \mathbb{R}$ korral jääb lõpmata palju selle jada liikmeid välja ümbrusest $U_{1/2}(a)$ (selgitada!)✠.

**Definitsioon.** Ütleme, et jadal $(x_n)$ on *lõpmatu piirväärtus* $\infty$ (kirjutame $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ või $x_n \to \infty$), kui iga $M > 0$ jaoks leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n > M$ kõikide $n \geqslant N$ korral. Seega

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \;:\Leftrightarrow\; \forall M > 0\; \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow x_n > M.$$

Piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ defineeritakse analoogiliselt (defineerida!)✠.

Rõhutame, et lõpmatu piirväärtusega jada on tõkestamata, seega on ta hajuv. Samas ei pruugi tõkestamata jadal lõpmatut piirväärtust olla (tooge näide!)✠.

### 2.1.2 Koonduvate jadade järjestusega seotud omadused

**Omadus 2.4** (piirväärtuse monotoonsus) *Olgu $a, b \in \mathbb{R}$. Kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$ ning seejuures leidub selline $N_0 \in \mathbb{N}$, et*

$$x_n \leqslant y_n \text{ iga } n \geqslant N_0 \text{ korral,}$$

*siis $a \leqslant b$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Järeldus 2.5** *Olgu $a, c \in \mathbb{R}$. Kui $x_n \to a$ ja leidub selline $N_0 \in \mathbb{N}$, et $x_n \leqslant c$ $(x_n \geqslant c)$ iga $n \geqslant N_0$ korral, siis $a \leqslant c$ $(a \geqslant c)$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Järeldus 2.6** *Kui leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n \in [a, b]$ iga $n \geqslant N$ korral, ja $x_n \to c$, siis $c \in [a, b]$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Omadus 2.7** (piirväärtuse keskmise muutuja omadus) *Kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$ ja seejuures leidub selline $N_0 \in \mathbb{N}$, et*

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \text{ iga } n \geqslant N_0 \text{ korral,}$$

*siis $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

**Tõestus.** Eeldame, et

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \ (n \geqslant N_0) \tag{2.3}$$

ning $x_n \to a$ ja $y_n \to a$, olgu $\varepsilon > 0$. Meie eesmärk on tõestada sellise $N \in \mathbb{N}$ olemasolu, et kehtiks tingimus

$$|z_n - a| < \varepsilon \text{ iga } n \geqslant N \text{ korral.} \tag{2.4}$$

Vastavalt eeldusele leiame niisugused $N_1 \in \mathbb{N}$ ja $N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \text{ ja } n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$$

Võtame $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Kui $n \geqslant N$, siis $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|y_n - a| < \varepsilon$, teisisõnu, $x_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ ning $y_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Pidades silmas võrratusi (2.3), saame, et

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon \ \ (n \geqslant N)$$

(selgitada!)✠, niisiis on väide (2.4) tõestatud.
∎

**Märkus.** Formaalselt kehtib omadus 2.7 ka juhul, kui $a = \infty$ ja $a = -\infty$. Täpsemalt, *kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ja leidub selline $N_0 \in \mathbb{N}$, et $x_n \leqslant z_n$ iga $n \geqslant N_0$ korral, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.* Analoogiliselt, *kui $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ ja leidub selline $N_0 \in \mathbb{N}$, et $z_n \leqslant y_n$ iga $n \geqslant N_0$ korral, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.* (Iseseisvalt!)✠

### 2.1.3 Koonduvate jadade tehetega seotud omadused

Alustame järgmise lihtsa lemmaga.

**Lemma 2.8** *Kui jada $(x_n)$ koondub nullist erinevaks arvuks $a$, siis leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et*

$$\frac{|a|}{2} < |x_n| < \frac{3\,|a|}{2} \text{ iga } n \geqslant N \text{ korral.} \tag{2.5}$$

**Tõestus.** Eeldame, et $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$. Võtame $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$ ja leiame vastavalt piirväärtuse definitsioonile (2.2) sellise $N \in \mathbb{N}$, et $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$ kõikide $n \geqslant N$ korral. Siis $||x_n| - |a|| < \frac{|a|}{2}$ iga $n \geqslant N$ puhul (vrd. lause 1.28(c)), mis on samaväärne tingimusega (2.5). ■

**Omadus 2.9** *Olgu $a, b \in \mathbb{R}$. Kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis*
(a) $x_n + y_n \to a + b$,
(b) $x_n y_n \to ab$,
(c) $\lambda y_n \to \lambda b$ *iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *puhul,*
(d) $x_n - y_n \to a - b$,
(e) $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$ *(eeldusel, et* $b \neq 0$*),*
(f) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ *(eeldusel, et* $b \neq 0$*).*

**Tõestus.** (b) Eeldame, et $x_n \to a$ ja $y_n \to b$. Kõigepealt märgime, et kui üks arvudest $a$ ja $b$ võrdub nulliga, siis väide järeldub eelpool tõestatud omadustest 2.3 ja 2.2 (selgitada!)✠. Vaatleme juhtu, kus $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, olgu $\varepsilon > 0$. Peame veenduma, et saab valida $N_0 \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n \geqslant N_0 \Rightarrow |x_n y_n - ab| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Jada $(y_n)$ on omaduse 2.2 põhjal tõkestatud, seega leidub $M > 0$, et

$$|y_n| \leqslant M \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Leiame $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ja } n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\,|a|},$$

ning võtame $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$. Kui $n \geqslant N_0$, siis

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\overset{\pm a y_n}{=} |(x_n - a)\, y_n + a\,(y_n - b)| \leqslant |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + |a| \frac{\varepsilon}{2\,|a|} = \varepsilon, \end{aligned}$$

seega kehtib (2.6).

Väide (c) tuleneb väitest (b). Nimelt, kui vaatleme jada $(x_n)$, kus $x_n := \lambda$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$ (vt. näide 2.1) ja väite (b) kohaselt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda y_n = \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lambda b.$$

Väide (d) järeldub vahetult väidetest (a) ja (c) (selgitada!)✠.

(e) Olgu $\varepsilon > 0$. Eelduse kohaselt $y_n \to b \neq 0$, peame näitama, et

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon.$$

Vastavalt lemmale 2.8 fikseerime sellise $N_1 \in \mathbb{N}$, et $|y_n| \geqslant \frac{|b|}{2}$, kui $n \geqslant N_1$. Tähendab,

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n|\,|b|} \leqslant \frac{2}{|b|^2} |y_n - b| \quad (n \geqslant N_1)\,. \tag{2.7}$$

Edasi valime vastavalt definitsioonile (2.2) indeksi $N_2$ omadusega

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}. \tag{2.8}$$

Paneme tähele, et kui $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$, siis kehtivad mõlemad võrratused (2.7) ja (2.8), mistõttu $\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$.

Väide (f) tuleneb väidetest (b) ja (e) (selgitada!)✠. ∎

### 2.1.4 Tähtsad piirväärtused

**Lause 2.10** (a) *Kui* $|a| < 1$, *siis* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. *Juhul* $a = 1$ *kehtib võrdus* $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$. *Kui* $a = -1$ *või* $|a| > 1$, *siis jada* $(a^n)$ *hajub.*
(b) *Kui* $a > 0$, *siis* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

**Tõestus.** (a) Ilmselt kehtib väide juhul kui $a = 0$ või $a = 1$, samuti on selge, et juhul $a = -1$ saame hajuva jada $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ (vt näidet 2.3).

Kui $0 < |a| < 1$, siis $b := \frac{1}{|a|} - 1 > 0$. Binoomvalemi kohaselt

$$\frac{1}{|a|^n} = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 + \ldots + b^n > nb,$$

mistõttu

$$0 < |a^n| = |a|^n < \frac{1}{b}\frac{1}{n} \to 0,$$

omaduse 2.7 põhjal $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ (selgitada!)✠.

Kui $|a| > 1$, siis $b := |a| - 1 > 0$ ja

$$|a|^n = (1+b)^n > nb \to \infty,$$

seega ei ole jada $(a^n)$ tõkestatud. Omaduse 2.2 põhjal on ta hajuv.

(b) Kui $a = 1$, siis väide kehtib. Olgu $a > 1$, siis ka $\sqrt[n]{a} > 1$ (selgitada!)✠, seega $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$, kus $x_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral. Binoomvalemist saame, et

$$a = (1 + x_n)^n > n x_n \quad (n \in \mathbb{N})\,,$$

niisiis $0 < x_n < a\frac{1}{n} \to 0$, mistõttu $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Kui $a < 1$, siis $b := \frac{1}{a} > 1$, seega $\sqrt[n]{b} \to 1$ ning (vrd. lause 1.21)

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to 1.$$

(c) Kuna iga $n = 2, 3, \ldots$ korral $\sqrt[n]{n} > 1$, siis $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$. Binoomvalemi abil saame võrratuse

$$n = (1 + x_n)^n > 1 + \frac{n\,(n-1)}{2} x_n^2 \ \text{ ehk } x_n^2 < \frac{2\,(n-1)}{n\,(n-1)} = \frac{2}{n},$$

millest tuleneb, et $0 < x_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0$, järelikult $\sqrt[n]{n} \to 1$. ■

## 2.2 Koonduvuseteooria neli printsiipi

Selles alapunktis esitame neli pidevuse aksioomist järelduvat fundamentaalse tähendusega teoreemi.

### 2.2.1 Monotoonsuseprintsiip

**Definitsioon.** Ütleme, et jada $(x_n)$ on
1) *kasvav* (*increasing, неубывающая*), kui $x_{n+1} \geqslant x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
2) *rangelt kasvav* (*strictly increasing, возрастающая*), kui $x_{n+1} > x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
3) *kahanev* (*decreasing, невозрастающая*), kui $x_{n+1} \leqslant x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
4) *rangelt kahanev*, kui $x_{n+1} < x_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.
Jada $(x_n)$ nimetatakse *monotoonseks* (*monotonic, монотонная*), kui ta on kas kasvav või kahanev.

**Teoreem 2.11** ***(monotoonsuseprintsiip).*** *Monotoonne jada $(x_n)$ koondub parajasti siis, kui ta on tõkestatud. Kui $(x_n)$ on seejuures kasvav, siis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kui $(x_n)$ on kahanev, siis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus* on ilmne, sest iga koonduv jada on tõkestatud.

*Piisavus.* Olgu $(x_n)$ kasvav tõkestatud jada, siis pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: b$. Näitame, et $\lim\limits_n x_n = b$. Olgu $\varepsilon > 0$, vastavalt ülemise raja definitsioonile leidub niisugune indeks $N$, et $x_N > b - \varepsilon$ (selgitada!)✠. Kuna jada $(x_n)$ kasvab, siis

$$b - \varepsilon < x_n \leqslant b < b + \varepsilon \ \text{ iga } n \geqslant N \text{ puhul} \tag{2.9}$$

ehk $|x_n - b| < \varepsilon$, kui $n \geqslant N$. Niisiis, iga $\varepsilon > 0$ korral saab valida indeksi $N$ nii, et $|x_n - b| < \varepsilon$ kõikide $n \geqslant N$ puhul, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Analoogiliselt tõestatakse väide kahaneva tõkestatud jada puhul (iseseisvalt!)✠. ■

### 2.2.2 Bolzano–Weierstrassi teoreem

**Definitsioon.** Olgu $(x_n)$ mingi arvjada ning $(n_k)$ rangelt kasvav naturaalarvude (indeksite) jada, s.t. $n_k \in \mathbb{N}$ ja $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ . Jada $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ nimetatakse esialgse jada $(x_n)$ *osajadaks* (*subsequence, подпоследовательность*).

Märgime, et indeksite jada $(n_k)$ range kasvavus ja järeldus 1.15 aitavad matemaatilise induktsiooni meetodil tõestada, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $n_k \geqslant k$. (Iseseisvalt!)✠

Teisisõnu, osajada on jada, mis saadakse esialgsest jadast lõpliku või loenduva arvu liikmete väljajätmisel.

Märgime, et rangelt kasvava naturaalarvude jada $(n_k)$ korral kehtib omadus (tõestage!)✠:

$$n_k \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

**Omadus 2.12** (a) *Tõkestatud jada iga osajada on tõkestatud.*
(b) *Piirväärtuseks a koonduva jada $(x_n)$ iga osajada $(x_{n_k})$ koondub samuti piirväärtuseks a: kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siis $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Lause 2.13** *Iga jada sisaldab monotoonse osajada.*

**Tõestus.** Tõestuseks kasutame jada tippkoha mõistet. Ütleme, et

indeks $m$ on jada $(x_n)$ *tippkoht*, kui $x_n \leqslant x_m$ iga $n > m$ korral.

Põhimõtteliselt on jada $(x_n)$ puhul kolm võimalust:
1) tal on lõpmata palju (täpsemalt loenduv arv) tippkohti,
2) tal on lõplik arv tippkohti ja
3) tal ei ole üldse tippkohti.
Juhul 1) paneme tähele, et tippkohtade $n_1 < n_2 < \ldots$ järgi moodustub *kahanev* osajada $(x_{n_k})$: kui $n_k$ on tippkohale $n_{k-1}$ järgnev tippkoht, siis $x_{n_k} \leqslant x_{n_{k-1}}$ (põhjendada!)✠. Juhul 2) konstrueerime *kasvava* osajada $(x_{n_i})$ järgmiselt. Olgu $n_1$ mingi indeks, mis on suurem kõikidest tippkohtadest, siis on võimalik leida indeks $n_2 > n_1$ nii, et $x_{n_2} \geqslant x_{n_1}$ (põhjendada!)✠. Edasi leiame sellise $n_3 > n_2$, et $x_{n_3} \geqslant x_{n_2}$ jne. Tulemuseks saame kasvava osajada $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$. Samamoodi toimime ka juhul 3), võttes $n_1 := 1$. Lause on tõestatud. ■

Lausest 2.13 ja monotoonsuseprintsiibist tuleneb vahetult järgmine teoreem.

**Teoreem 2.14** ***(Bolzano–Weierstrassi teoreem).*** *Iga tõkestatud jada sisaldab koonduva osajada.*

**Tõestus.** Olgu $(x_n)$ tõkestatud jada, vastavalt lausele 2.13 on tal monotoonne osajada $(x_{n_k})$, mis samuti on tõkestatud (vrd. omadus 2.12(a)). Monotoonsuseprintsiibi 2.11 põhjal osajada $(x_{n_k})$ koondub. ■

### 2.2.3 Cauchy kriteerium

Järgnevalt defineerime Cauchy jada mõiste, mis kirjeldab jada liikmete omavahelist võnkumist. Tõestame, et arvjada on koonduv parajasti siis, kui ta on Cauchy jada. Cauchy tingimuse põhiline eelis jada piirväärtuse definitsiooni ees on asjaolu, et kui uurime, kas jada on koonduv või hajuv, ei pea me teadma (ega aimama) piirväärtuse kandidaati. Cauchy tingimus iseloomustab ainult jada liikmete sisemist vahekorda ning vahetult ei tegele lähenemisega mingile kindlale suurusele.

**Definitsioon.** Öeldakse, et jada $(x_n)$ on *Cauchy jada*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline indeks $N \in \mathbb{N}$, et

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ kõikide } n, m \geqslant N \text{ korral.}$$

**Omadus 2.15** *Iga koonduv jada on Cauchy jada.*

**Tõestus.** Eeldame, et $x_n \to a$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, leiame $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ iga } n \geqslant N \text{ korral.} \tag{2.10}$$

Kui $n, m \geqslant N$, siis seosest (2.10) saame, et

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

seega on $(x_n)$ Cauchy jada. ■

**Omadus 2.16** *Iga Cauchy jada on tõkestatud.*

**Tõestus.** Eeldame, et $(x_n)$ on Cauchy jada. Definitsiooni kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|x_n - x_m| < 1 \text{ kõikide } n, m \geqslant N \text{ korral.}$$

Tähistame $A := x_N$, siis $|x_n - A| < 1$ iga $n \geqslant N$ korral ehk

$$A - 1 < x_n < A + 1 \quad (n \geqslant N)$$

(selgitada!)✠. Võttes

$$m := \min\{x_1, \ldots, x_{N-1}, A - 1\} \quad \text{ja} \quad M := \max\{x_1, \ldots, x_{N-1}, A + 1\},$$

saame, et $m \leqslant x_n \leqslant M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega on jada $(x_n)$ tõkestatud. ■

Me tõestame nüüd kolmanda koonduvuseprintsiibi, mida nimetatakse Cauchy kriteeriumiks.

**Teoreem 2.17** ***(Cauchy kriteerium)***. *Jada koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus* on tõestatud omadusega 2.15.

*Piisavus.* Olgu $(x_n)$ Cauchy jada. Kuna iga Cauchy jada on tõkestatud, siis Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.14 kohaselt sisaldab jada $(x_n)$ koonduva osajada $(x_{n_k})$. Tähistame $a := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ ja näitame, et $x_n \to a$.

Olgu $\varepsilon > 0$, vastavalt Cauchy jada definitsioonile valime indeksi $N$ omadusega

$$n, m \geqslant N \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Kui $K \in \mathbb{N}$ on valitud nii, et $K \geqslant N$ ja

$$|x_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.12}$$

(põhjendada sellise $K$ olemasolu!)✠, siis tingimuste (2.11) ja (2.12) tõttu

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_K}| + |x_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kõigi indeksite $n \geqslant N$ puhul (selgitada!)✠, järelikult $x_n \to a$. ■

### 2.2.4 Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest

Vaatleme üksteisesse sisestatud lõike

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots \,. \tag{2.13}$$

Nende vasakpoolsete otspunktide jada $(a_n)$ on kasvav ning parempoolsete otspunktide jada $(b_n)$ on kahanev, seejuures

$$a_k < b_n \text{ suvaliste } k, n \in \mathbb{N} \text{ puhul}$$

(vt. lause 1.29 tõestus). Seega on hulk $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ülalt tõkestatud ja $b_n$ on selle hulga ülemine tõke iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib

$$a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \text{ seejuures } a \leqslant b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Näeme, et $a$ on hulga $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alumine tõke, seega

$$a \leqslant \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: b.$$

Niisiis,

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ puhul},$$

mistõttu

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Märgime veel, et kuna $(a_n)$ on kasvav ja $(b_n)$ kahanev jada, siis monotoonsuseprintsiibi 2.11 kohaselt kehtivad võrdused

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ ja } b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

*Kui lisaks eeldada, et* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, siis

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a,$$

s.t. $b = a$. Näitame, et sel juhul on $a$ lõikude $[a_n, b_n]$ ainuke ühine punkt. Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et $c$ on veel mingi punkt hulgast $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ ja $c \neq a$, siis lõik otspunktidega $a$ ja $c$ sisaldub igas lõigus $[a_n, b_n]$ (põhjendada!)✠ ja $|c - a| =: \varepsilon_0 > 0$. Seega $b_n - a_n \geqslant \varepsilon_0$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral, kuid see on vastuolus eeldusega $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Tähendab, $a$ on hulga $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ ainuke punkt.

Me tõestasime järgmise teoreemi.

**Teoreem 2.18** ***(Cantori teoreem sisestatud lõikudest).*** *Kui lõigud*

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

*rahuldavad tingimust* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *siis leidub täpselt üks arv* $a$, *mis kuulub igasse lõiku* $[a_n, b_n]$. *Seejuures* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**Märkus.** Ülal tõestasime Bolzano–Weierstrassi teoreemi lähtudes vahetult monotoonsusprintsiibist. Teine võimalus selleks on kasutada Cantori teoreemi üksteisesse sisestatud lõikudest.

Olgu $(x_n)$ tõkestatud jada, siis leiduvad reaalarvud $a_0, b_0$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $a_0 \leqslant x_n \leqslant b_0$. Iga $k = 1, 2, \ldots$ korral tegutseme järgnevalt. Moodustame indeksite hulgad

$$N_1 = \left\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in \left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}\right]\right\}, \quad N_2 = \left\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in \left[\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]\right\}.$$

Ilmselt $N_1 \cup N_2 = \mathbb{N}$, mistõttu vähemalt üks hulkadest $N_1$ ja $N_2$ on lõpmatu. Kui $N_1$ on lõpmatu, siis tähistame $a_k = a_{k-1}$ ja $b_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ ning valime $n_k \in N_1$ nii, et $n_k > n_{k-1}$ (kui $k > 1$). Kui $N_1$ on lõplik (siis $N_2$ on lõpmatu), tähistame $a_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ ja $b_k = b_{k-1}$ ning valime $n_k \in N_2$ nii, et $n_k > n_{k-1}$ (kui $k > 1$). (Selgitage sellise $n_k$ valiku võimalikkust!✠)

Tulemusena saadav üksteisesse sisestatud lõikude jada omab teoreemi 2.18 põhjal täpselt ühte ühist punkti $c$. On jäänud kontrollida, et $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ (tehke läbi!✠).

### 2.2.5 Reaalarvu kümnendesitus

Järgnevalt demonstreerime koonduvusteooria printsiipide rakendamist, selgitamaks reaalarvude üht esitusviisi – esitust lõpmatute kümnendmurdudena. Olgu $z_0 \in \mathbb{N}_0$ ning $z_1, z_2, \ldots$ numbrid hulgast $\{0, \ldots, 9\}$. Moodustame jada $(a_n)$, kus

$$a_n := z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \ldots + \frac{z_n}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Paneme tähele, et jada $(a_n)$ on kasvav (kontrollida!)✠ ja ülalt tõkestatud:

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant z_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} = z_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) \\ &= z_0 + \frac{9}{10}\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} < z_0 + \frac{9}{10}\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = z_0 + 1 \quad (n \in \mathbb{N})\,. \end{aligned}$$

Monotoonsuseprintsiibi kohaselt eksisteerib piirväärtus $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Tähistame lühidalt $a_n =: z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots z_n$ ja

$$a =: z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots,$$

seda kirjutusviisi nimetame (lõpmatuks) kümnendmurruks, täpsemalt, reaalarvu *a kümnendesituseks.* Seega esitab kümnendmurd $z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ lühemal kujul jada $(a_n)$, aga ka selle jada piirväärtuse.

**Näitame, et iga reaalarv $a \in \mathbb{R}$ on esitatav kümnendmurruna.** Vaatleme *esiteks juhtu* $a \in [0, 1)$. Jagame lõigu $I_0 := [0, 1]$ kümneks võrdseks osaks, selge, et arv $a$ kuulub täpselt ühte poollõikudest $\left[0, \frac{1}{10}\right)$, $\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right), \ldots, \left[\frac{9}{10}, 1\right)$. Teisisõnu, leidub üheselt määratud number $z_1$, et

$$\frac{z_1}{10} \leqslant a < \frac{z_1 + 1}{10}.$$

Edasi jagame lõigu $I_1 := \left[\frac{z_1}{10}, \frac{z_1+1}{10}\right]$ jälle kümneks võrdseks osaks ja leiame poollõikude $\left[\frac{z_1}{10} + \frac{k}{10^2}, \frac{z_1}{10} + \frac{k+1}{10^2}\right)$ hulgast selle, millesse kuulub arv $a$. Niisiis leidub üheselt määratud number $z_2$, et

$$\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} \leqslant a < \frac{z_1}{10} + \frac{z_2 + 1}{10^2}.$$

Jagame lõigu $I_2 := \left[\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2}, \frac{z_1}{10} + \frac{z_2+1}{10^2}\right]$ kümneks võrdseks osaks ja leiame $z_3 \in \{0, \ldots, 9\}$, et

$$\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3}{10^3} \leqslant a < \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3 + 1}{10^3}$$

jne. Nii jätkates saame üksteisesse sisestatud lõigud

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots,$$

mis kõik sisaldavad punkti $a$. Kuna lõikude $I_n$ pikkused $\frac{1}{10^n}$ protsessis $n \to \infty$ lähenevad nullile, siis teoreemi 2.18 põhjal on $a$ nende lõikude ainuke ühine punkt ja

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \ldots + \frac{z_n}{10^n} \right) = a.$$

Eespool kokkulepitud tähistusviisi kohaselt $a = 0, z_1 z_2 \ldots$. Seejuures, kuna

$$a < \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \ldots + \frac{z_n + 1}{10^n} \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ puhul} \tag{2.14}$$

(selgitada!)✠, siis *ei ole võimalik, et a oleks esitatud sellise kümnendmurruna, mis lõpeb numbriga 9 perioodis***.** Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et saab valida $m \in \mathbb{N}$ omadusega

$$z_n = 9 \text{ iga } n > m \text{ korral,}$$

siis

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=1}^{m} \frac{z_n}{10^n} + 9 \lim_{p\to\infty} \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{z_n}{10^n} + \frac{9}{10^{m+1}} \lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{z_n}{10^n} + \frac{1}{10^m} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{z_n}{10^n} + \frac{z_m + 1}{10^m}, \end{aligned}$$

mis on vastuolus võrratusega (2.14).

Märgime veel üht kümnendesituse $a = 0, z_1z_2\ldots$ omadust:

$$0,0\ldots 0z_{k+1}z_{k+2}\ldots = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{z_n}{10^n} < \frac{1}{10^k} \text{ suvalise } k\in\mathbb{N}_0 \text{ puhul.} \tag{2.15}$$

Nimelt, kuna vaadeldav kümnendmurd ei lõpe numbriga 9 perioodis, siis saame valida $j > k$, et $h := 9 - z_j \geqslant 1$, mistõttu

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{z_n}{10^n} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1,\ n\neq j}^{m}\frac{z_n}{10^n} + \frac{9}{10^j} - \frac{h}{10^j} \leqslant -\frac{h}{10^j} + 9\lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{1}{10^n}$$
$$= -\frac{h}{10^j} + 9\frac{\frac{1}{10^{k+1}}}{1-\frac{1}{10}} = -\frac{h}{10^j} + \frac{1}{10^k} < \frac{1}{10^k}.$$

*Üldjuhul, kui $a$ on suvaline positiivne reaalarv*, leiame kõigepealt (üheselt määratud) $z_0 \in \mathbb{N}_0$ omadusega $z_0 \leqslant a < z_0 + 1$. Siis $a - z_0 \in [0, 1)$ ja eelneva arutelu kohaselt saame esituse $a - z_0 = 0, z_1z_2\ldots$ ehk $a = z_0, z_1z_2\ldots$.

**Näitame, et selline esitus $a = z_0, z_1z_2\ldots$ on alati ühene.** Oletame vastuväiteliselt, et arvul $a$ leidub kaks *erinevat* kümnendesitust $z_0, z_1z_2\ldots$ ja $u_0, u_1u_2\ldots$, siis

$$a = z_0 + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{z_n}{10^n} = u_0 + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n}{10^n}.$$

Olgu $k \in \mathbb{N}$ vähim sellistest indeksitest $n$, et $z_n \neq u_n$, konkreetsuse mõttes olgu $z_k < u_k$. Niisiis, $z_n = u_n$ $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$ ja $z_k \leqslant u_k - 1$. Kõigepealt paneme tähele, et kuna $z_0$ ja $u_0$ on täisarvud ning

$$z_0 \leqslant a < z_0 + 1 \text{ ja } u_0 \leqslant a < u_0 + 1,$$

siis järelduse 1.23 põhjal $z_0 = u_0$, mistõttu $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{z_n}{10^n} = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{u_n}{10^n}$. Siit tuleneb võrdus

$$\frac{z_k}{10^k} + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{z_n}{10^n} = \frac{u_k}{10^k} + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{u_n}{10^n}$$

(selgitada!)✠, seega

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{z_n}{10^n} = \frac{u_k - z_k}{10^k} + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=k+1}^{m}\frac{u_n}{10^n} \geqslant \frac{u_k - z_k}{10^k} \geqslant \frac{1}{10^k},$$

mis on vastuolus eelpool kontrollitud seosega (2.15).

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise väite.

**Lause 2.19** *Iga positiivne reaalarv on üheselt esitatav lõpmatu kümnendmurruna.*

Negatiivse arvu $a$ puhul on $-a$ esitatav kümnendmurruna $-a = z_0, z_1z_2z_3\ldots$, arvu $a$ jaoks saame üheselt määratud negatiive kümnendmurru

$$a = -z_0, z_1z_2z_3\ldots. = -\lim_{n\to\infty}\left(z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \ldots + \frac{z^n}{10^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-z_0 - \frac{z_1}{10} - \frac{z_2}{10^2} - \ldots - \frac{z^n}{10^n}\right).$$

### 2.2.6 Arv e

Vaatleme jada $(x_n)$, kus

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Binoomvalemi kohaselt

$$\begin{aligned} x_n &:= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} \\ &+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\ &+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Seejuures on $(x_n)$ rangelt kasvav jada. Et selles veenduda, esitame

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

ja paneme tähele, et $x_{n+1} > x_n$ (kontrollida!)✠.

Näitame, et jada $(x_n)$ on ülalt tõkestatud. Kuna

$$x_n \leqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

(selgitada!)✠, siis tänu seosele

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(veenduda!)✠ saame võrratuse

$$x_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Seejuures on $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}$ geomeetrilise progressiooni liikmete summa, mistõttu

$$0 < x_n \leqslant 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) =: y_n, \tag{2.16}$$

kui $n =\in \mathbb{N}$ (selgitada!)✠. Selge, et $y_n \to 3$, seega on jada $(y_n)$ tõkestatud, seoste (2.16) tõttu on ka jada $(x_n)$ tõkestatud. Niisiis on $(x_n)$ tõkestatud monotoonne jada, monotoonsuseprintsiibi (vt. teoreem 2.11) kohaselt eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: \mathrm{e}$, seejuures $2 < \mathrm{e} \leqslant 3$ (selgitada!)✠.

## 2.3 Osajadad. Ülemine ja alumine piirväärtus

### 2.3.1 Jada osapiirväärtused

**Definitsioon.** Arvjada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajadade piirväärtusi nimetatakse selle jada *osapiirväärtusteks* (*subsequential limit, частичный предел*).

Tõestame nüüd käesoleva alapunkti põhitulemuse.

**Lause 2.20** *Jada* $(x_n)$ *koondub parajasti siis, kui ta on tõkestatud ja tal on vaid üks osapiirväärtus.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siis $(x_n)$ on tõkestatud ja ka iga osajada $(x_{n_k})$ koondub piirväärtuseks $a$ (selgitage!)✠, mis on seega jada $(x_n)$ ainus osapiirväärtus.

*Piisavus.* Olgu $(x_n)$ tõkestatud jada, millel on parajasti üks osapiirväärtus $a$. Oletame vastuväiteliselt, et $a$ ei ole selle jada piirväärtus. Sel juhul leidub selline $\varepsilon > 0$, et $x_n \notin U_\varepsilon(a)$ lõpmata paljude indeksite $n$ korral (selgitada!)✠. Tähendab, lõpmata paljude indeksite $n$ korral kas $x_n \leqslant a - \varepsilon$ või $x_n \geqslant a + \varepsilon$.

Esimesel juhul eksisteerib osajada $(x_{n_k})$ omadusega $x_{n_k} \leqslant a - \varepsilon$, sellest saab Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt moodustada koonduva osajada $\left(x_{n_{k_i}}\right)$. Olgu $c := \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_{k_i}}$, siis $c \leqslant a - \varepsilon < a$ (selgitada!)✠. Teisalt on $c$ jada $(x_n)$ osapiirväärtus, mistõttu $c = a$. Saime vastuolu.

Analoogiliselt jõutakse vastuoluni, kui eeldada võrratust $x_n \geqslant a + \varepsilon$ lõpmata paljude indeksite $n$ korral (veenduda!)✠. Seega on meie vastuväiteline oletus, et $a$ ei ole jada $(x_n)$ piirväärtus, väär. ■

Osapiirväärtuse mõistega on seotud järgmised väited:
- igal tõkestatud jadal on vähemalt üks reaalarvuline osapiirväärtus (miks?)✠;
- igal jadal (tõkestatud või tõkestamata) on vähemalt üks osapiirväärtus (selgitage!)✠;
- tõkestamata jadal võivad reaalarvulised osapiirväärtused puududa (tooge näide!)✠;
- kui arv $b$ esineb jada $(x_n)$ liikmena lõpmata palju kordi, siis $b$ on selle jada osapiirväärtus (miks?)✠.

Järgnevas alapeatükis tõestatakse (vt. teoreemi 2.22 ja selle järel märkust), et *igal jadal* (ükskõik, kas tõkestatud või tõkestamata) *leidub osapiirväärtus.*

### 2.3.2 Ülemine ja alumine piirväärtus

Järgnevalt defineerime jada piirväärtuse „nõrgemad variandid“ – ülemise ja alumise piirväärtuse. Järgmises alapeatükis näeme, et ülemise ja alumise piirväärtuse omadused sarnanevad piirväärtuse omadustele (monotoonsus, aditiivsus jms.). Ülemise ja alumise piirväärtuse põhiline eelis on, et nad on alati olemas (olgu siis reaalarvulised või lõpmatud), seega nendega töötamisel langeb ära vajadus käsitleda juhtumeid, kui „piirväärtus puudub“.

**Definitsioon.** Olgu $(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ ülalt tõkestatud arvjada. Piirväärtust

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k \tag{2.17}$$

nimetatakse jada $(x_n)$ *ülemiseks piirväärtuseks* (*upper limit, верхний предел*) ja tähistatakse sümboliga $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ või $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n := \limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k. \tag{2.18}$$

Märgime, et piirväärtus (2.17) eksisteerib, sest

(1) jada $(x_n)$ ülalt tõkestatuse tõttu eksisteerib iga $n \in \mathbb{N}$ korral lõplik ülemine raja $\sup\limits_{k\geqslant n} x_k$ (selgitage!)✠;

(2) arvjada $\left(\sup\limits_{k\geqslant n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ on kahanev ja seega eksisteerib tal (lõplik või lõpmatu) piirväärtus (miks?)✠.

Juhime tähelepanu, et ülalt tõkestatud arvjada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ puhul saab tema ülemine piirväärtus (2.18) olla kas lõplik (s.t reaalarvuline) või $-\infty$.

Ülalt tõkestamata arvjada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ puhul defineerime

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n := \limsup_{n\to\infty} x_n := \infty.$$

Arvjada alumine piirväärtus defineeritakse analoogiliselt tema ülemise piirväärtusega.
**Definitsioon.** Olgu $(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ alt tõkestatud arvjada. Piirväärtust

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k \tag{2.19}$$

nimetatakse jada $(x_n)$ *alumiseks piirväärtuseks* (*lower limit, нижний предел*) ja tähistatakse sümboliga $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ või $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n := \liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k. \tag{2.20}$$

(Selgitage, miks piirväärtus (2.19) eksisteerib!)✠
Juhime tähelepanu, et alt tõkestatud arvjada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ puhul saab tema alumine piirväärtus (2.20) olla kas lõplik (s.t reaalarvuline) või $\infty$.

Alt tõkestamata arvjada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ puhul defineerime

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n := \liminf_{n\to\infty} x_n := -\infty.$$

Järgnevalt on meie eesmärgiks seostada ülemise ja alumise piirväärtuse mõiste osapiirväärtuste hulgaga. Osutub, et osapiirväärtuste hulgas leidub suurim ja vähim element (see võib-olla ka $\infty$ või $-\infty$), kusjuures jada suurim osapiirväärtus on jada ülemine piirväärtus ning jada vähim osapiirväärtus on tema alumine piirväärtus.

Vaatame kõigepealt läbi üht tüüpi lõpmatu erijuhu.

**Lemma 2.21** *Järgmised väited on samaväärsed.*

*(i)* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,

*(ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,

*(iii) jada* $(x_n)$ *iga osajada piirväärtus on* $\infty$.

*Järgmised väited on samaväärsed.*

*(i')* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$,

*(ii')* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$,

*(iii') jada* $(x_n)$ *iga osajada piirväärtus on* $-\infty$.

**Tõestus.** Väide (ii)$\Leftrightarrow$(iii) on ilmne (selgitage!)✠.

Tõestame, et (i)$\Rightarrow$(ii). Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \geqslant \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$, seega, arvestades, et

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

kehtib ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (miks?)✠.

Tõestame, et (ii)$\Rightarrow$(i). Fikseerime arvu $E > 0$. Eelduse $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ tõttu leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad x_n > 2E \quad \Rightarrow \quad \inf\{x_k \colon k \geqslant n\} \geqslant 2E > E$$

(selgitage!)✠. Oleme saanud, et $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k = \infty$.

Väidete (i')$\Leftrightarrow$(ii')$\Leftrightarrow$(iii') tõestus on analoogne. ■

**Teoreem 2.22** *(a) Iga arvjada osapiirväärtuste hulgas on olemas suurim, kusjuures see suurim osapiirväärtus on võrdne selle jada ülemise piirväärtusega. Niisiis, jada ülemine piirväärtus on selle jada suurim osapiirväärtus.*

*(b) Iga arvjada osapiirväärtuste hulgas on olemas vähim, kusjuures see vähim osapiirväärtus on võrdne selle jada alumise piirväärtusega. Niisiis, jada alumine piirväärtus on selle jada vähim osapiirväärtus.*

**Tõestus.** Olgu $(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ suvaline arvjada.

(a). Tähistame $A := \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Väite tõestuseks piisab näidata, et

(1) jada $(x_n)$ suvalise piirväärtust omava osajada $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ korral

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant A;$$

(2) leidub jada $(x_n)$ osajada $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, mille korral

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A.$$

Vaatleme eraldi juhtusid, kus

$$A = \infty, \qquad A \in \mathbb{R} \qquad \text{ja} \qquad A = -\infty.$$

**Juhtum $A = \infty$.** Olgu $A = \infty$, s.t jada $(x_n)$ on ülalt tõkestamata. Ilmselt eeldusel, et eksisteerib $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, kehtib $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \infty$.

Konstrueerime jada $(x_n)$ osajada, mille piirväärtus oleks $\infty$. Defineerime $n_1 := 1$ ning, edasi, kui mingi naturaalarvu $k \geqslant 2$ korral on defineeritud naturaalarv $n_{k-1}$, siis, arvestades, et jada $(x_n)$ ülalt tõkestamatuse tõttu hulk $\{x_n\colon\ n > n_{k-1}\}$ on ülalt tõkestamata (miks?)✠, saame valida naturaalarvu $n_k > n_{k-1}$ nii, et $x_{n_k} \geqslant k$. Ilmselt rahuldab selliselt konstrueeritud osajada $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tingimust $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty = A$.

**Juhtum $A \in \mathbb{R}$.** (1). Olgu $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jada $(x_n)$ osajada, millel on olemas piirväärtus. Iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$x_{n_k} \leqslant \sup_{m\geqslant k} x_m$$

(sest $n_k \geqslant k$), järelikult jada piirväärtuse monotoonsuse tõttu (vt. omadust 2.4)

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geqslant k} x_m = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = A.$$

(2). Defineerime $n_1 := 1$ ning, edasi, kui mingi naturaalarvu $k \geqslant 2$ korral on defineeritud naturaalarv $n_{k-1}$, siis, arvestades, et $A = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$, saame leida naturaalarvu $L_k > n_{k-1}$ (kuidas leiame?)✠ nii, et

$$\sup_{m\geqslant L_k} x_m > A - \frac{1}{k},$$

niisiis saame me leida naturaalarvu $n_k \geqslant L_k > n_{k-1}$ nii, et $x_{n_k} > A - \dfrac{1}{k}$ (selgitage $n_k$ leidmist!)✠. Nüüd iga $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, korral (arvestades, et $n_k \geqslant k$)

$$A - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant \sup_{m\geqslant k} x_m;$$

niisiis, arvestades, et eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{k\to\infty}\left(A - \frac{1}{k}\right) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geqslant k} x_m = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = A,$$

eksisteerib (omaduse 2.7 põhjal) ka piirväärtus $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

**Juhtum $A = -\infty$.** See juhtum on lemmaga 2.21 analoogne (selgitage!)✠.

Väide (b) tõestatakse analoogselt väitega (a) (iseseisvalt!)✠. ■

**Märkus.** Teoreemi 2.22 osa (2) juures võib arutleda ka nii: kuna

$$A - \frac{1}{k} < \sup_{m \geqslant L_k} x_m < A + \frac{1}{k},$$

siis valime $n_k \geqslant L_k$ nii, et

$$x_{n_k} \in \left( A - \frac{1}{k}, \sup_{m \geqslant L_k} x_m \right).$$

Seega $A - \frac{1}{k} < x_{n_k} < A + \frac{1}{k}$ ning rakendame keskmise muutuja omadust (vt. omadus 2.7).

### 2.3.3 Ülemise ja alumise piirväärtuse omadused

Teoreem 2.22 võimaldab jada ülemist ja alumist piirväärtust arvutada kahes keeles – ülemise/alumise raja keeles ja osajadade keeles. Kõiki järgmisi omadusi saab tõestada mõlemas keeles.

**Omadus 2.23** *Olgu $(x_n)$ ja $(y_n)$ tõkestatud jadad, kusjuures iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \leqslant y_n$. Siis*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} y_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 2.24** *Olgu $(x_n)$ tõkestatud jada. Kui $c > 0$, siis*

$$\varliminf_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \varliminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \varlimsup_{n\to\infty} x_n;$$

*kui $c < 0$, siis*

$$\varliminf_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 2.25** *Olgu $(x_n)$ ja $(y_n)$ tõkestatud jadad. Siis*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n), \qquad \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Tõestame ainult esimese võrratuse, teise võrratuse tõestus on analoogiline.

**Tõestus „sup/inf keeles“.** Jadad $(x_n)$ ja $(y_n)$ on alt tõkestatud, seega ka $(x_n + y_n)$ on alt tõkestatud (miks?)✠, mistõttu nende kõigi jadade alumised piirväärtused on reaalarvud.

Märgime $u_n := \inf_{k \geqslant n} x_k$ ja $v_n := \inf_{k \geqslant n} y_k$. Siis kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral võrratus

$$u_n + v_n \leqslant \inf\{x_k + y_k \colon k \geqslant n\} \tag{2.21}$$

Tõepoolest, iga $k \geqslant n$ korral $x_k \geqslant u_n$ ja $y_k \geqslant v_n$, seega $u_n + v_n$ on hulga $\{x_k + y_k \colon k \geqslant n\}$ mingi alumine tõke.

Minnes nüüd võrratuses (2.21) piirile $n \to \infty$, saame piirväärtuse monotoonsuse (vt. omadust 2.4) kohaselt, et

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) \leqslant \\ \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k+y_k\colon k \geqslant n\} = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)\end{aligned}$$

(selgitage detaile!)✠. ■

**Tõestus „osajadade keeles“.** Olgu jada $(x_n+y_n)$ osajada $(x_{n_k}+y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ selline, et $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k}) = \underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ (miks osajada leidub?)✠. Kuna jada $(x_{n_k})$ on tõkestatud, siis tal leidub Bolzano–Weierstrassi teoreemi (vt. teoreemi 2.14) kohaselt koonduv osajada $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j=1}^{\infty}$. Et $y_{n_{k_j}} = (x_{n_{k_j}}+y_{n_{k_j}}) - x_{n_{k_j}}$, siis ka $\left(y_{n_{k_j}}\right)$ on koonduv jada (selgitage!)✠. Kokkuvõttes jada piirväärtuse monotoonsuse tõttu (vt. omadust 2.4) kehtib

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} + \lim_{j\to\infty} y_{n_{k_j}} = \lim_{j\to\infty}(x_{n_{k_j}}+y_{n_{k_j}}) = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

■

**Teoreem 2.26** *Arvjadal $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eksisteerib piirväärtus parajasti siis, kui selle jada alumine ja ülemine piirväärtus on võrdsed:*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n. \tag{2.22}$$

*Seejuures on selle jada piirväärtus võrdne tema alumise ja ülemise piirväärtuse ühise väärtusega:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n. \tag{2.23}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eksisteerigu piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Teoreemi 2.22 põhjal leiduvad jada $(x_n)$ osajadad $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ja $(x_{l_n})_{n=1}^{\infty}$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} x_{l_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Omaduse 2.12(b) põhjal on jada $(x_n)$ kõik osapiirväärtused võrdsed selle jada enda piirväärtusega, seega

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{l_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n,$$

s.t võrdused (2.22) ja (2.23) kehtivad.

*Piisavus.* Kehtigu võrdus (2.22). Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\inf_{k\geqslant n} x_k \leqslant x_n \leqslant \sup_{k\geqslant n} x_k,$$

kusjuures piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k = \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k = \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ eksisteerivad ning on tingimuse (2.22) põhjal võrdsed, siis keskmise muutuja omaduse (vt. omadust 2.7) põhjal eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, kusjuures kehtib (2.23). ■

**Märkus.** Teoreemi 2.26 valguses on lause 2.20 kehtivus ilmne: koonduvus ehk reaalarvulise piirväärtuse olemasolu tähendab ülemise ja alumise piirväärtuse võrdumist ehk seda, et osapiirväärtuste hulk on ühe-elemendiline.

Järgnevad kaks lauset selgitavad ülemise ja alumise piirväärtuse mõistete geomeetrilist sisu.

**Lause 2.27** *Olgu $(x_n)$ tõkestatud jada. Võrdus $a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ kehtib parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul arv $a$ rahuldab võrratust*

$$x_n > a - \varepsilon \quad \text{lõpmata paljude jada liikmete } x_n \text{ korral} \tag{2.24}$$

*ja võrratust*

$$x_n > a + \varepsilon \quad \text{vaid lõpliku arvu jada liikmete } x_n \text{ korral.} \tag{2.25}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et arv $a$ on jada $(x_n)$ suurim osapiirväärtus, olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Punkti $a$ ümbruses $U_\varepsilon(a)$ on lõpmata palju jada $(x_n)$ liikmeid, seega kehtib tingimus (2.24). Oletame vastuväiteliselt, et tingimus (2.25) ei ole täidetud. Siis eksisteerib osajada $(x_{n_k})$, mille kõik liikmed on suuremad kui $a+\varepsilon$. Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt sisaldab jada $(x_{n_k})$ koonduva osajada $\left(x_{n_{k_i}}\right)$, tähistame tähega $c$ tema piirväärtuse. Kuna $\left(x_{n_{k_i}}\right)$ on ka esialgse jada $(x_n)$ osajada, siis on $c$ jada $(x_n)$ osapiirväärtus. Seejuures võrratusest $x_{n_{k_i}} > a + \varepsilon$ tuleneb tingimus $a < a + \varepsilon \leqslant c$ (põhjendada!)✠, mis on vastuolus eeldusega $a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. Niisiis, eeldusest $a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ järelduvad tingimused (2.24) ja (2.25).

*Piisavus.* Olgu tingimused (2.24) ja (2.25) täidetud suvalise $\varepsilon > 0$ puhul, siis punkti $a$ ümbruses $U_\varepsilon(a)$ on lõpmata palju jada $(x_n)$ liikmeid (põhjendada!)✠. See tähendab, et arv $a$ on jada $(x_n)$ osapiirväärtus. Seejuures ükski punkt $c > a$ ei saa osapiirväärtus olla: kui võtame $\varepsilon := \frac{1}{2}(c-a)$, siis punkti $c$ ümbruses $U_\varepsilon(c)$ on vaid lõplik arv jada $(x_n)$ liikmeid. Tähendab, $a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. ■

Analoogiliselt eelnevaga tõestatakse ka järgmine lause (iseseisvalt!)✠.

**Lause 2.28** *Olgu $(x_n)$ tõkestatud jada. Võrdus $b = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ kehtib parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul arv $b$ rahuldab võrratust*

$$x_n < b + \varepsilon \quad \text{lõpmata paljude jada liikmete } x_n \text{ korral}$$

*ja võrratust*

$$x_n < b - \varepsilon \quad \text{vaid lõpliku arvu jada liikmete } x_n \text{ korral.}$$

## 2.4 Aritmeetilised ja kaalutud keskmised. Stolzi teoreem

### 2.4.1 Aritmeetilised keskmised

Olgu $(x_k)$ mingi arvjada, moodustame uue jada $(z_n)$ tema liikmete *aritmeetilistest keskmistest*

$$z_1 := x_1,\ z_2 := \frac{x_1 + x_2}{2},\ z_3 := \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots,\ z_n := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \ldots ,$$

s.t. $(z_n) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Esitame kaks küsimust.

1. Kui jada $(x_k)$ on koonduv, kas siis koondub ka jada $(z_n)$?
2. Kas jada $(z_n)$ koonduvusest järeldub jada $(x_k)$ koonduvus?

Esimesele küsimusele annab positiivse vastuse järgmine lause.

**Lause 2.29** ***(Cauchy piirväärtusteoreem).*** *Kui* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ , *siis* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = a$.

**Tõestus.** (1) Näitame kõigepealt, et väide kehtib juhul $a = 0$. Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $x_k \to 0$, siis leidub selline $m \in \mathbb{N}$, et
$$|x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ iga } k \geqslant m \text{ korral.}$$
Seega iga $n \geqslant m+1$ korral
$$\frac{|x_{m+1} + \ldots + x_n|}{n-m} \leqslant \frac{|x_{m+1}| + \ldots + |x_n|}{n-m} < \frac{(n-m)\frac{\varepsilon}{2}}{n-m} = \frac{\varepsilon}{2},$$
millest tuleneb, et
$$\frac{|x_{m+1} + \ldots + x_n|}{n} < \frac{|x_{m+1} + \ldots + x_n|}{n-m} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > m)\,.$$
Teisalt, kuna $m$ on fikseeritud, siis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_1+\ldots+x_m|}{n} = 0$ (selgitada!)✠. Järelikult saab valida sellise indeksi $l$, et $\frac{|x_1+\ldots+x_m|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ iga $n \geqslant l$ korral. Niisiis, kui $n \geqslant N := \max\{m+1, l\}$, siis
$$\frac{|x_1 + \ldots + x_n|}{n} \leqslant \frac{|x_1 + \ldots + x_m|}{n} + \frac{|x_{m+1} + \ldots + x_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = 0$.

(2) Üldjuhul, kui $x_k \to a$, kus $a$ on suvaline reaalarv, siis $x_k - a \to 0$ ja tõestuse esimese osa põhjal
$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a = \frac{(x_1 - a) + \ldots + (x_n - a)}{n} \to 0,$$
s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = a$. ■

Vastus teisele küsimusele on eitav, see selgub järgmisest näitest.

**Näide 2.4.** Vaatleme jada $\left((-1)^k\right)$, s.t. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, .... Kuna sellel jadal on kaks osapiirväärtust $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1$ ja $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1$ (selgitada!)✠, siis lause 2.20 kohaselt ta hajub. Samal ajal
$$\begin{aligned} z_n &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{(-1) + 1 + \ldots + (-1)^n}{n} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{kui } n = 2i-1, \\ 0, & \text{kui } n = 2i \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N})\,, \end{aligned}$$
seega $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Cauchy piirväärtusteoreemiga analoogiline väide kehtib ka positiivsete liikmetega jada $(x_k)$ *geomeetriliste keskmiste*
$$z_1 := x_1,\ z_2 := \sqrt{x_1 x_2}, \ldots,\ z_n := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \ldots$$
korral.

**Lause 2.30** *Kui* $x_k > 0$ *iga* $k \in \mathbb{N}$ *korral ja* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *siis* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a$.

**Tõestus.** Kõigepealt märgime, et $a \geqslant 0$ (põhjendada!)✠. Vaatleme algul juhtu $a > 0$. Allpool tõestame, et logaritmfunktsioon on pidev (vt. alaptk. 3.4.3), seetõttu eeldusest $x_k \to a$ järeldub, et $\ln x_k \to \ln a$ (selgitada!)✠. Seega lause 2.29 põhjal

$$\alpha_n := \ln z_n = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n} \to \ln a \quad (n \to \infty).$$

Eksponentfunktsiooni pidevust (vt. alaptk. 3.4.2) kasutades saame, et

$$z_n = e^{\alpha_n} \to e^{\ln a} = a \quad (n \to \infty)$$

(selgitada!)✠.

Juhul $a = 0$ kasutame võrratust $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ (vrd. lause 1.32), millest tänu lausele 2.29 saame, et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = 0$. ■

### 2.4.2 Kaalutud keskmised ja Stolzi teoreem

Aritmeetiliste keskmiste üldistusena vaadeldakse antud jada kaalutud keskmisi. Nende defineerimiseks fikseeritakse nn. *kaalude jada* $(p_k)$, kusjuures eeldatakse, et

$$p_k > 0 \text{ ja } P_n := p_1 + p_2 + \ldots + p_n \to \infty.$$

Jada $(x_k)$ jaoks defineeritakse tema *kaalutud keskmiste jada* $(z_n)$ seosega

$$z_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Selle definitsiooni kohaselt on aritmeetilised keskmised kaaluga 1, s.t. $p_k = 1$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Kaalutud keskmiste puhul kehtib järgmine lausega 2.29 analoogiline väide.

**Lause 2.31** *Kui* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *siis* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{P_n} = a$.

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠. (Tõestus kordab lause 2.29 tõestust.) ■

Kaalutud keskmiste abil saab anda lihtsa tõestuse järgmisele lausele.

**Lause 2.32** ***(Stolzi teoreem).*** *Olgu* $(v_k)$ *tõkestamata rangelt kasvav positiivsete arvude jada. Kui* $(u_k)$ *on selline jada, et*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k - u_{k-1}}{v_k - v_{k-1}} = a,$$

*siis* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = a$.

**Tõestus.** Olgu $u_0 := v_0 := 0$, võtame lauses 2.31 $p_k := v_k - v_{k-1}$. Siis $p_k > 0$ ja $P_n \to \infty$ (kontrollida!)✠ ning lausest 2.31 järeldub, et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{p_1 \frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} + p_2 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} + \ldots + p_n \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}}{P_n} \to a.$$

Lause on tõestatud. ■

Stolzi teoreemi rohkearvulistest rakendustest toome järgmise näite.

**Näide 2.5.** Leida piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \ldots + k^r}{k^{r+1}}, \text{ kus } r \text{ on mingi naturaalarv.}$$

Rakendame lauset 2.32, võttes selles $u_k := 1^r + 2^r + \ldots + k^r$ ja $v_k := k^{r+1}$, siis $u_k - u_{k-1} = k^r$ ja $v_k - v_{k-1} = k^{r+1} - (k-1)^{r+1}$. Lause 2.32 põhjal

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \ldots + k^r}{k^{r+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{k^{r+1} - (k-1)^{r+1}}.$$

Kuid Newtoni binoomvalemi kohaselt

$$(k-1)^{r+1} = k^{r+1} - (r+1)\,k^r + \ldots + (-1)^{r+1},$$

kust $k^{r+1} - (k-1)^{r+1} = (r+1)\,k^r + \ldots + (-1)^r$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Saame, et

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{k^{r+1} - (k-1)^{r+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{(r+1)\,k^r + \ldots + (-1)^r} = \frac{1}{r+1},$$

niisiis, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1^r+2^r+\ldots+k^r}{k^{r+1}} = \frac{1}{r+1}$.

**Märkus.** Arvutades Riemanni integraali funktsioonist $f(x) = x^r$ lõigus $[0,1]$ kahel viisil – integraalsummade piirväärtusena ja Newton–Leibnizi valemi abil –, saame alternatiivse viisi näites 2.5 toodud piirväärtuse arvutamiseks (vt. ptk. 5).

# 3 Pidevad funktsioonid

## 3.1 Funktsiooni piirväärtus

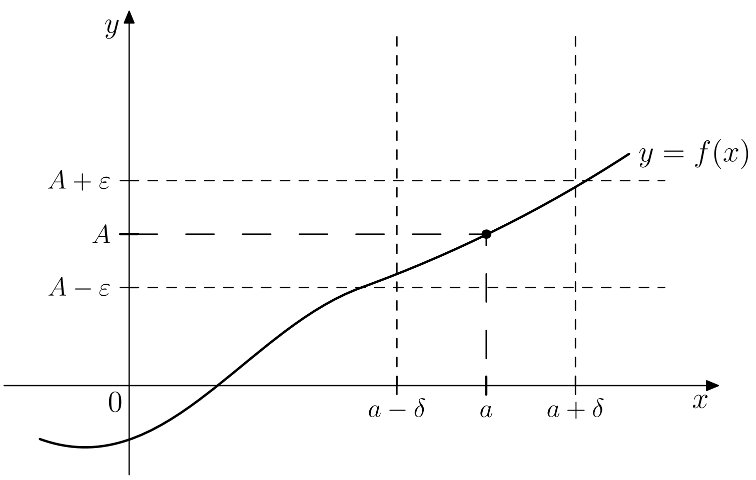
**Definitsioon.** Ütleme, et arv $a \in \mathbb{R}$ on
1) hulga $D \subseteq \mathbb{R}$ *sisepunkt* (*interior point, внутренная точка*) (kirjutame $a \in D^o$), kui leidub selline $\rho > 0$, et $(a-\rho, a+\rho) \subseteq D$,
2) hulga $D \subseteq \mathbb{R}$ *isoleeritud punkt*, kui $a \in D$ ja $(a-\sigma, a+\sigma) \cap D = \{a\}$ mingi $\sigma > 0$ korral,
3) hulga $D \subseteq \mathbb{R}$ *kuhjumispunkt* (*limit point, предельная точка*), kui iga $\rho > 0$ korral sisaldab punkti $a$ ümbrus $(a-\rho, a+\rho)$ lõpmata palju hulga $D$ punkte.

Paneme tähele, et
• hulga kõik sisepunktid on tema kuhjumispunktid (selgitage!)✠, kuid vastupidine väide on väär (tooge näide!)✠,
• isoleeritud punkt ei saa olla kuhjumispunkt (selgitage!)✠,
• arv $a$ on hulga $D$ kuhjumispunkt parajasti siis, kui punkti $a$ iga ümbrus $(a-\rho, a+\rho)$ sisaldab vähemalt ühe $a$-st erineva hulga $D$ punkti (tõestage!)✠,
• arv $a$ on hulga $D$ kuhjumispunkt parajasti siis, kui leidub selline jada $(x_n)$, et $x_n \in D \setminus \{a\}$ ning $x_n \to a$ (tõestage!)✠.

**Näide 3.1.** Hulga $D := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup [1,2]$ sisepunktideks on parajasti kõik vahemiku $(1,2)$ punktid, lisaks neile on kuhjumispunktid veel $0, 1$ ja $2$. Arvud $\frac{1}{n}$, kus $n = 2, 3, \ldots$, on isoleeritud punktid (põhjendada!)✠.

**Definitsioon.** Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D$ kuhjumispunkt. Ütleme, et arv $A$ on funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ *piirväärtus punktis* $a$ (ütleme ka *piirväärtus kohal* $a$), ja tähistame $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : [x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.1}$$




Joonis 3.1: Funktsiooni piirväärtus.

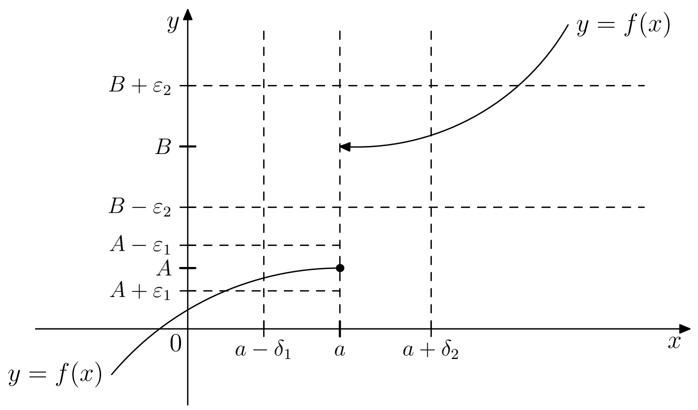
See on funktsiooni ***piirväärtuse definitsioon*** **$\varepsilon$-$\delta$-keeles** (vrd. joonis 3.1). Juhime lugeja tähelepanu kahele asjaolule. *Esiteks,* eeldus, et $a$ on määramispiirkonna $D$ kuhjumispunkt, on oluline, sest kui mingi $\delta > 0$ puhul $U_\delta(a) \cap D = \varnothing$, siis tingimuses (3.1) on implikatsiooni eeldust rahuldavate argumendi väärtuste hulk tühi ning formaalselt on tingimus (3.1) täidetud suvalise $A \in \mathbb{R}$ korral. *Teiseks,* nõue $0 < |x-a|$ (s.t. $x \neq a$) tingimuses (3.1) on vajalik ja asjakohane, kui $a \in D$, vastasel juhul sõltuks piirväärtuse olemasolu funktsiooni väärtusest kohal $a$ (selgitada!)✠.

**Ühepoolsed piirväärtused. Definitsioon.** (a) Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D \cap (-\infty, a)$ kuhjumispunkt. Ütleme, et arv $A$ on funktsiooni $f$ *vasakpoolne piirväärtus punktis* $a$, ning tähistame $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : [x \in D, \, 0 < a - x < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(b) Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt. Ütleme, et arv $A$ on funktsiooni $f \colon D \to \mathbb{R}$ *parempoolne piirväärtus punktis* $a$, ning tähistame $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : [x \in D, \, 0 < x - a < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$




Joonis 3.2: Ühepoolsed piirväärtused.

Näite sellest, et funktsiooni *ühepoolsed piirväärtused antud punktis võivad olla erinevad*, saame, kui vaatleme seosega

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

määratud *signum-funktsiooni*, nimelt kehtivad võrdused $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ ning $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ (veenduda!)✠.

Olgu $a \in \mathbb{R}$ mõlema hulga $D \cap (-\infty, a)$ ja $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt. Vahetu kontroll näitab (veenduda!)✠, et sel juhul

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \ \text{ parajasti siis, kui } \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = A. \tag{3.2}$$

**Lõpmatud piirväärtused ja piirväärtused lõpmatuspunktides. Definitsioon.** Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D$ kuhjumispunkt. Funktsiooni $f \colon D \to \mathbb{R}$ korral kirjutame $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, kui

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : [x \in D, \, 0 < |x - a| < \delta] \Rightarrow f(x) > M.$$

Analoogiliselt defineeritakse $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, samuti lõpmatud ühepoolsed piirväärtused kohal $a$ (iseseisvalt!)✠.

**Definitsioon.** Olgu $D \subseteq \mathbb{R}$ selline hulk, et iga $N > 0$ puhul leidub $x \in D$ omadusega[1] $x > N$. Arvu $A$ nimetatakse funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ piirväärtuseks protsessis $x \to \infty$ ning tähistatakse $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R} : [x \in D,\ x > M] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Analoogiliselt defineeritakse $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ (iseseisvalt!)✠.

**Piirväärtuste kirjeldamisel koonduvate jadade abil** on aluseks järgmine lause.

**Lause 3.1** ***(piirväärtuse Heine kriteerium).*** *Olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga $D$ kuhjumispunkt. Arv $A$ on funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ piirväärtus punktis $a$ parajasti siis, kui iga arvuks $a$ koonduva argumendi väärtuste jada $(x_k)$ korral, kus $x_k \neq a$ $(k \in \mathbb{N})$, funktsiooni väärtuste jada $(f(x_k))$ koondub arvuks $A$. Teisisõnu, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon*

$$[x_k \in D \setminus \{a\} \quad (k \in \mathbb{N}),\ \ x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to A. \tag{3.3}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, olgu $(x_k)$ selline hulga $D \setminus \{a\}$ punktide jada, mis koondub arvuks $a$. Kuna $a$ on hulga $D$ kuhjumispunkt, siis selliseid jadasid leidub. Meie eesmärgiks on näidata, et $f(x_k) \to A$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, leiame $\delta > 0$ vastavalt tingimusele (3.1), s.t. $|f(x) - A| < \varepsilon$, kui $x \in D$ ja $0 < |x - a| < \delta$. Kuna $x_k \to a$, siis saame fikseerida sellise $N \in \mathbb{N}$, et $0 < |x_k - a| < \delta$ kõikide $k \geqslant N$ puhul. Tingimuse (3.1) põhjal $|f(x_k) - A| < \varepsilon$ iga $k \geqslant N$ korral, seega $f(x_k) \to A$.

*Piisavus.* Eeldame, et implikatsioon (3.3) kehtib, ja oletame vastuväiteliselt, et $A$ ei ole funktsiooni $f$ piirväärtus punktis $a$, s.t. tingimus (3.1) ei kehti. Sel juhul

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in D : 0 < |x_\delta - a| < \delta,\ \ |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0 \tag{3.4}$$

(veenduda, et see on tingimuse (3.1) eitus!✠). Iga $k \in \mathbb{N}$ puhul saame arvu $\delta := \frac{1}{k}$ jaoks valida punkti $x_k \in D$ vastavalt tingimusele (3.4), s.t.

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad |f(x_k) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Kui $k \to \infty$, siis $x_k \to a$ (selgitada!)✠, kuid $f(x_k) \nrightarrow A$ (põhjendada!)✠, nii saame vastuolu eeldusega (3.3). Järelikult $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ■

Lihtne on tõestada lausega 3.1 analoogilised väited funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ vasak- ja parempoolse piirväärtuse jaoks, samuti piirväärtuste jaoks lõpmatuspunktides. Järgnevad väited jäävad lugejale iseseisvalt tõestada:

• *kui $a \in \mathbb{R}$ on hulga $D \cap (-\infty, a)$ kuhjumispunkt, siis*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; [(x_k \in D,\ x_k < a \ \ (k \in \mathbb{N}),\ x_k \to a) \Rightarrow f(x_k) \to A]; \tag{3.5}$$

[1] Sel juhul öeldakse, et lõpmatuspunkt $\infty$ on hulga $D$ kuhjumispunkt. See on põhjendatud, kui pidada silmas, et intervalle $(N, \infty)$ nimetatakse lõpmatuspunkti $\infty$ ümbrusteks.

- *kui $a \in \mathbb{R}$ on hulga $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt, siis*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; [(x_k \in D,\, x_k > a \;\; (k \in \mathbb{N}),\, x_k \to a) \Rightarrow f(x_k) \to A]; \qquad (3.6)$$

- *kui hulk $D$ ei ole ülalt tõkestatud, siis*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; [(x_k \in D \;\; (k \in \mathbb{N}),\, x_k \to \infty) \Rightarrow f(x_k) \to A];$$

- *kui hulk $D$ ei ole alt tõkestatud, siis*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; [(x_k \in D \;\; (k \in \mathbb{N}),\, x_k \to -\infty) \Rightarrow f(x_k) \to A].$$

**Piirväärtusega seotud omadused.** Heine kriteerium võimaldab eespool tõestatud jadade piirväärtuse omadused (vt. alapunktid 2.1.1 – 2.1.3) kanda üle funktsiooni piirväärtustele. Olgu järgnevas $f$, $g$ ja $h$ hulgas $D \subseteq \mathbb{R}$ määratud funktsioonid ja olgu $a$ hulga $D$ kuhjumispunkt.

**Omadus 3.2** *Funktsiooni piirväärtus antud punktis on üheselt määratud: kui $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ja $\lim_{x \to a} f(x) = B$, siis $A = B$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Omadus 3.3** *Kui $\lim_{x \to a} f(x) = A$, siis leidub punktil $a$ selline ümbrus $U_\delta(a)$, et funktsioon $f$ on hulgas $U_\delta(a) \cap D$ tõkestatud.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Omadus 3.4** *Kui $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ja funktsioon $g$ on tõkestatud punkti $a$ mingis ümbruses*[2] *$U_\delta(a)$, siis $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Omadus 3.5** *Olgu punktil $a$ selline ümbrus $U_\delta(a)$, et $f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in U_\delta(a) \cap D \setminus \{a\}$ korral. Kui $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = B$, siis $A \leqslant B$.*

**Tõestus.** Eeldame, et
1) $\lim_{x \to a} f(x) = A$,
2) $\lim_{x \to a} g(x) = B$,
3) $f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in U_\delta(a) \cap D \setminus \{a\}$ korral.
Meie eesmärgiks on veenduda, et $A \leqslant B$.

Olgu $(x_k)$ selline jada, et $x_k \in D \setminus \{a\}$ ning $x_k \to a$. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$, et $x_k \in U_\delta(a)$ iga $k \geqslant N$ korral, seega

$$f(x_k) \leqslant g(x_k), \text{ kui } k \geqslant N.$$

Eeldustest 1) ja 2) saame tänu Heine kriteeriumile, et $f(x_k) \to A$ ja $g(x_k) \to B$. Rakendades jadadele $(f(x_k))$ ja $(g(x_k))$ omadust 2.4, saamegi võrratuse $A \leqslant B$. ∎

[2] S.t. $\{f(x) \mid x \in U_\delta(a) \cap D\}$ on tõkestatud hulk.

**Omadus 3.6** *Olgu punktil $a$ selline ümbrus $U_\delta(a)$, et $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in U_\delta(a) \cap D \setminus \{a\}$ korral. Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, siis $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Funktsioonidest $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ lähtudes defineerime uued funktsioonid

$$\begin{aligned} f \pm g &\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \pm g(x), \\ \lambda f &\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ fg &\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)\, g(x), \\ \frac{f}{g} &\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(eeldusel, et } g(x) \neq 0 \text{ iga } x \in D \text{ korral).} \end{aligned}$$

Nende puhul kehtivad järgmised väited.

**Omadus 3.7** *Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, siis*
(a) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
(b) $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A$,
(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = AB$,
(d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ *(eeldusel, et $B \neq 0$).*

**Tõestus.** Tõestame väite (c), ülejäänud väited tõestatakse analoogiliselt. Olgu $(x_k)$ selline jada, et $x_k \in D \setminus \{a\}$ ja $x_k \to a$. Heine kriteeriumi põhjal piisab väite (c) tõestuseks näidata, et $fg(x_k) \to AB$. Kuna $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, siis $f(x_k) \to A$ ja $g(x_k) \to B$, omaduse 2.9(b) kohaselt $fg(x_k) = f(x_k)\, g(x_k) \to AB$. ■

Omaduste 3.2 – 3.7 tõestused on lihtsalt ülekantavad nii ühepoolsete piirväärtuste juhule kui ka piirväärtustele lõpmatuspunktis.

**Landau sümbolid.** Kahe funktsiooni võrdlemiseks mingis protsessis on kasutusel Landau sümbolid ehk O-notatsioon. Olgu $\infty$ hulga $D$ kuhjumispunkt, olgu $\alpha$ ja $\beta$ mingid funktsioonid määramispiirkonnaga $D$.

Kirjutatakse, et $\alpha \in O(\beta)$, kui

$$\exists K > 0\ \exists M > 0\colon \forall x \in D\ x > M \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K|\beta(x)|.$$

Sel juhul öeldakse, et $\alpha$ *on asümptootiliselt ülalt tõkestatud $\beta$-ga* (protsessis $x \to \infty$).

Kirjutatakse, et $\alpha \in \Theta(\beta)$, kui $\alpha \in O(\beta)$ ja $\beta \in O(\alpha)$. Sel juhul öeldakse, et $\alpha$ *on asümptootiliselt ülalt ja alt tõkestatud $\beta$-ga* (protsessis $x \to \infty$).

Kirjutatakse, et $\alpha \in o(\beta)$, kui

$$\forall K > 0\ \exists M > 0\colon \forall x \in D\ x > M \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K|\beta(x)|.$$

Sel juhul öeldakse, et $\alpha$ *on $\beta$ poolt domineeritud* (protsessis $x \to \infty$), või kui $\beta(x) \to 0$, siis, et $\alpha$ on $\beta$ suhtes kõrgemat järku lõpmata väike.

Lihtne on näha, et $\alpha \in o(\beta)$ on samaväärne asjaoluga, et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Kirjutatakse, et $\alpha \sim \beta$, kui $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Sel juhul öeldakse, et *$\alpha$ ja $\beta$ on ekvivalentsed* (protsessis $x \to \infty$).

Analoogiliselt saab Landau sümbolid (tõkestatus ja domineeritus) defineerida ka kõigi teiste protsesside ning ka jada piirväärtuse jaoks.

**Märkus.** Nagu jada piirväärtuse puhul, on võimalik defineerida ka funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ ülemine ja alumine piirväärtus, mis vabastavad meid olukorrast, kus piirväärtus puudub:

$$\overline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup\{f(x)\colon x \in D \cap U_\delta(a) \setminus \{a\}\}, \quad \underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \inf\{f(x)\colon x \in D \cap U_\delta(a) \setminus \{a\}\},$$
$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \sup\{f(x)\colon x \in D \cap (N,\infty)\}, \quad \underline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \inf\{f(x)\colon x \in D \cap (N,\infty)\},$$
$$\overline{\lim_{x\to-\infty}}\, f(x) = \lim_{N\to-\infty} \sup\{f(x)\colon x \in D \cap (-\infty,N)\}, \quad \underline{\lim_{x\to-\infty}}\, f(x) = \lim_{N\to-\infty} \inf\{f(x)\colon x \in D \cap (-\infty,N)\}.$$

Need piirväärtused (lõplikud või lõpmatud) eksisteerivad alati tänu monotoonsusprintsiibi pidevale analoogile (vt. lauset 5.28). Funktsiooni ülemise ja alumise piirväärtuse omadused on analoogilised jada ülemise ja alumise piirväärtuse vastavate omadustega.

## 3.2 Funktsiooni pidevus

Funktsiooni piirväärtuse $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mõiste defineerimisel lähtutakse seisukohast, et piirväärtuse olemasolu ning tema väärtus ei tohi sõltuda sellest, kas funktsioon $f$ on kohal $a$ määratud või mitte. Ammugi ei tohi ta sõltuda funktsiooni väärtusest $f(a)$, kui see eksisteerib. Definitsioonis (3.1) saavutatakse see (nagu eespool rõhutatud) tingimusega $0 < |x-a|$.

**Näide 3.2.** Vaatleme funktsioone

$$f_1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$$
$$f_2\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \neq 1,\\ 0, & \text{kui } x = 1,\end{cases}$$
$$f_3\colon [0,\infty)\setminus\{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3-x^2}{x-1}.$$

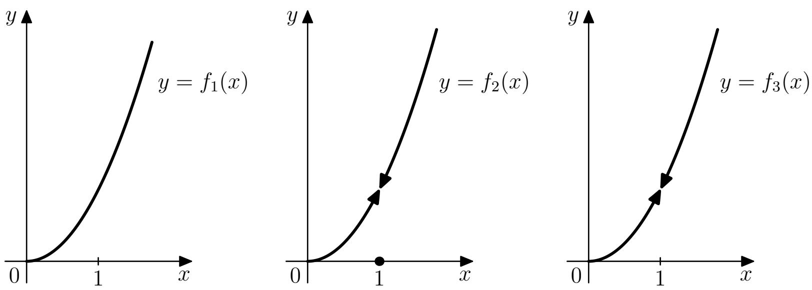
Tegemist on kolme erineva funktsiooniga, mis hulgas $[0,\infty)\setminus\{1\}$ langevad kokku, seetõttu

$$\lim_{x\to1} f_1(x) = \lim_{x\to1} f_2(x) = \lim_{x\to1} f_3(x) = \lim_{x\to1} x^2 = 1.$$

**Definitsioon.** Olgu $a \in D$ hulga $D$ kuhjumispunkt. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *pidevaks punktis $a$* (ka *pidevaks kohal $a$*) (*continuous at a, непрерывная в a*), kui

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Kui $a \in D$ on hulga $D \cap (-\infty,a)$ või hulga $D \cap (a,\infty)$ kuhjumispunkt ning kehtib vastavalt võrdus $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$ või $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, siis kõneldakse vastavalt *vasakpoolsest* ja *parempoolsest pidevusest punktis $a$* (*left, right continuous at a, непрерывная слева, справа*).




Joonis 3.3: Näide 3.2.

Seose (3.2) põhjal on *funktsioon $f$ oma määramispiirkonna* sisepunktis *$a$ pidev parajasti siis, kui ta on selles punktis vasakult ja paremalt pidev* (selgitada!)✠.

Tuleme veel kord tagasi näite 3.2 juurde. Funktsioon $f_1$ on pidev kohal $x = 1$, kuna $\lim_{x\to 1} f_1(x) = 1 = f(1)$. Erinevatel põhjustel on funktsioonid $f_2$ ja $f_3$ sel kohal mittepidevad: funktsioon $f_3$ ei ole kohal $x = 1$ määratud ning $\lim_{x\to 1} f_2(x) = 1 \neq 0 = f_2(1)$.

See näide illustreerib hästi pidevuse geomeetrilist sisu: funktsioon $f$ on oma määramispiirkonna sisepunktis $a$ pidev parajasti siis, kui joon $y = f(x)$ (s.t. funktsiooni $f$ graafik) on punktis $(a, f(a))$ pidev.

Pidades silmas piirväärtuse definitsiooni (3.1), saame ***pidevuse definitsiooni $\varepsilon$-$\delta$-keeles***: olgu $a \in D$, olgu $a$ hulga $D$ kuhjumispunkt, funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis $a$ parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : [x \in D,\ |x - a| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Kui piirväärtuse definitsioonis (3.1) oli oluline nõuda, et $0 < |x - a|$, s.t. $x \neq a$, siis antud juhul on see nõue üleliigne: kui $x = a$, siis $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, seega kehtib implikatsiooni (3.7) väide automaatselt.

**Märkus.** Nõuet, et $a$ oleks funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ kuhjumispunkt, abstraktsemates kursustes (funktsionaalanalüüs, üldine topoloogia) lihtsuse huvides sageli ei püstitata. Seal piirdutakse nõudega, et $a \in D$.

Kuhjumispunkti nõue võimaldab vältida olukorda, kus tingimus $|x - a| < \delta$ on alati väär ja seega implikatsioon $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ alati tõene, mistõttu $f$ oleks sellises punktis alati pidev (sõltumata väärtusest $f(a)$ ja funktsiooni $f$ käitumisest).

Nii näiteks funktsiooni $f\colon \{0\} \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$, kus $f(x) = 5$ iga $x \in \{0\} \cup [1, 2]$ korral, pidevuse kohta punktis 0 ei saa käesolevas kursuses üldse küsimust esitada, kuna 0 pole hulga $\{0\} \cup [1, 2]$ kuhjumispunkt. Kui aga loobuda nõudest, et $f$ pidevuse uurimiseks punktis 0 peab 0 olema hulga $\{0\} \cup [1, 2]$ kuhjumispunkt, on $f$ punktis 0 pidev – tõepoolest, vastavalt antud arvule $\varepsilon > 0$ valime $\delta = \frac{1}{2}$ ning näeme, et implikatsioon $|x| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ on iga $x \in \{0\} \cup [1, 2]$ korral tõene.

Järgmine oluline lause on vahetu järeldus lausest 3.1.

**Lause 3.8** ***(pidevuse Heine kriteerium)***. *Olgu $a \in D$ hulga $D$ kuhjumispunkt. Funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis $a$ parajasti siis, kui iga arvuks $a$ koonduva argumendi väärtuste jada $(x_k)$ korral funktsiooni väärtuste jada $(f(x_k))$ koondub piirväärtuseks $f(a)$, s.t. kui kehtib implikatsioon*

$$[x_k \in D\ \ (k \in \mathbb{N}),\ \ x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to f(a). \tag{3.8}$$

Lausega 3.8 analoogilised väited kehtivad parempoolse ja vasakpoolse pidevuse jaoks:
• eeldusel, et $a \in D$ on hulga $D \cap (-\infty, a)$ kuhjumispunkt, on funktsioon $f$ vasakult pidev punktis $a$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon

$$[x_k \in D \ \ (k \in \mathbb{N}), \ \ a \geqslant x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to f(a);$$

• eeldusel, et $a \in D$ on hulga $D \cap (a, \infty)$ kuhjumispunkt, on funktsioon $f$ paremalt pidev punktis $a$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon

$$[x_k \in D \ \ (k \in \mathbb{N}), \ \ a \leqslant x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to f(a).$$

**Tehted pidevate funktsioonidega.** Lausest 3.7 järeldub vahetult järgmine väide.

**Lause 3.9** *Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ pidevad punktis $a$, siis ka funktsioonid $f+g$, $\lambda f$, $fg$ ja $\frac{f}{g}$ on punktis $a$ pidevad (funktsiooni $\frac{f}{g}$ puhul eeldame, et $g(a) \neq 0$).*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Lause 3.10** ***(liitfunktsiooni pidevus).*** *Olgu $a \in D$ hulga $D$ kuhjumispunkt ning olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $f(D) \subseteq E$. Kui $f$ on pidev punktis $a$ ja $\varphi$ on pidev punktis $b := f(a)$, siis seosega*

$$\varphi \circ f(x) := \varphi(f(x)) \quad (x \in D)$$

*määratud liitfunktsioon $\varphi \circ f$ on pidev punktis $a$.*

**Tõestus.** Olgu $(x_k)$ selline jada, et $x_k \in D$ ja $x_k \to a$, meie eesmärgiks on näidata, et $\varphi \circ f(x_k) \to \varphi \circ f(a)$. Funktsiooni $f$ pidevusest punktis $a$ järeldub, et

$$z_k := f(x_k) \to f(a) = b,$$

teiseks järeldub funktsiooni $\varphi$ pidevusest punktis $b = f(a)$ koonduvus $\varphi(z_k) \to \varphi(b)$. Niisiis, $\varphi \circ f(x_k)) = \varphi(f(x_k)) = \varphi(z_k) \to \varphi(b) = \varphi(f(a)) = \varphi \circ f(a)$. ■

**Katkevuspunktide klassifikatsioon.** Olgu $a$ hulga $D$ kuhjumispunkt. Kui $a \notin D$ või funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ ei ole punktis $a$ pidev, siis öeldakse, et $a$ on funktsiooni $f$ *katkevuspunkt* (*point of discontinuity, точка разрыва*).

Kui funktsioonil $f$ eksisteerib katkevuspunktis $a$ piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, siis öeldakse, et funktsioonil $f$ on punktis $a$ *kõrvaldatav katkevus.* Näiteks, funktsioonil $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ on punktis $x = 0$ kõrvaldatav katkevus (kontrollida!)✠. Mõnedes allikates eeldatakse, et lugeja kõrvaldab katkevuse iseseisvalt, näiteks võidakse kirjutada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, ning oodatakse, et sellisest kirjutisest loetakse välja kogu reaalteljel pidev funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Kui funktsioonil $f$ eksisteerivad katkevuspunktis $a$ mõlemad lõplikud ühepoolsed piirväärtused, kusjuures need ühepoolsed piirväärtused on erinevad, siis kõneldakse *esimest liiki katkevusest*, ülejäänud juhtude puhul on tegemist *teist liiki katkevusega*.

Esimest liiki katkevuse puhul nimetatakse vahet $\lim\limits_{x\to a+} f(x) - \lim\limits_{x\to a-} f(x) \neq 0$ funktsiooni $f$ *hüppeks* punktis $a$. Näiteks funktsiooni $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ puhul on kõik arvud $n \in \mathbb{Z}$ esimest liiki katkevuspunktid hüppega 1 (kontrollida!)✠.

**Funktsiooni pidevus.** Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *pidev*, kui ta on pidev igas punktis $x \in D$.

**Funktsiooni pidevus antud hulgas.** Olgu $D_1 \subseteq D$. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *pidev hulgas* $D_1$, kui ahend $f|_{D_1}\colon D_1 \to \mathbb{R}$ on pidev. (Teatavasti funktsiooni ahend on defineeritud järgmiselt: $f|_{D_1}(x) = f(x)$ iga $x \in D_1$ korral.)

Selle definitsiooni kohaselt on funktsioon $f$ pidev lõigus $[a, b]$ parajasti siis, kui ta on pidev igas punktis $x \in (a, b)$, vasakult pidev punktis $b$ ja paremalt pidev punktis $a$.

**Märkus.** On kiusatus defineerida funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidevus hulgas $D_1 \subseteq D$ järgmise tingimusega:

$$\forall x \in D_1 \quad f \text{ on pidev punktis } x. \tag{3.9}$$

Ent tingimuse (3.9) korral võib $f$ pidevus hulgas $D_1$ hakata sõltuma tema käitumisest hulgas $D \setminus D_1$. Näiteks kui $D = \mathbb{R}$ ja $D_1 = [0, 1]$, on $f$ pidevus punktis 0 mõjustatud ka asjaolust, kuidas $f$ käitub punktides $x < 0$ (tooge konkreetseid näiteid!)✠.

Kui nõutav on ahendi $f|_{D_1}\colon D_1 \to \mathbb{R}$ pidevus, siis uurimise all on ainult $D_1$ kuhjumispunktid ning koondumise $\lim\limits_{x\to a} f|_{D_1}(x) = f|_{D_1}(a)$ kontrollimisel kasutatakse ainult $D_1$ punkte, mistõttu $f$ käitumine hulgas $D \setminus D_1$ ei mõjusta $f$ pidevust hulgas $D_1$.

## 3.3 Lõigus pideva funktsiooni omadused

### 3.3.1 Bolzano–Cauchy teoreem nullkohast

**Teoreem 3.11** ***(Bolzano–Cauchy teoreem lõigus pideva funktsiooni nullkohast).*** *Kui lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni $f$ väärtused lõigu otspunktides on erinevate märkidega, siis leidub punkt $c \in (a, b)$ omadusega $f(c) = 0$.*

**Tõestus.** Olgu konkreetsuse mõttes $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Jagame lõigu $[a, b]$ pooleks punktiga $\frac{a+b}{2}$. Võib juhtuda, et $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, siis on tõestus lõppenud. Kui see nii ei ole, siis kahest lõigust $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ja $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ühe puhul on funktsioonil $f$ lõigu otspunktides erimärgilised väärtused. Tähistame selle lõigu otspunktid vastavalt tähtedega $a_1$ ja $b_1$, siis $f(a_1) < 0$ ja $f(b_1) > 0$ (põhjendada!)✠. Jagame lõigu $[a_1, b_1]$ pooleks ning valime (juhul $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$) samal põhimõttel lõikude $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ hulgast välja eelislõigu, mille tähistame $[a_2, b_2]$. Siis $f(a_2) < 0$ ja $f(b_2) > 0$. Edasi jagame lõigu $[a_2, b_2]$ punktiga $\frac{a_2+b_2}{2}$ võrdseteks osadeks jne. See protsess kas katkeb mingil $n$-dal sammul (sel juhul $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ ning tõestus on lõppenud) või jätkub lõpmatuseni. Lõpmatu protsessi korral saame üksteisesse sisestatud lõikude jada

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \ldots ,$$

kusjuures

$$f(a_k) < 0 \quad \text{ja} \quad f(b_k) > 0 \tag{3.10}$$

ning

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0.$$

Rakendame teoreemi 2.18 sisestatud lõikudest, selle kohaselt on lõikudel $[a_k, b_k]$ parajasti üks ühine punkt $c$, seejuures $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Kuna funktsioon $f$ on pidev punktis $c$, siis Heine kriteeriumi 3.8 kohaselt $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k)$. Seejuures saame tingimustest (3.10) koonduvate jadade omadust 2.5 rakendades, et

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leqslant 0 \text{ ja } f(c) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) \geqslant 0,$$

niisiis $f(c) = 0$. ■

Tõestatud teoreemi geomeetriline tähendus selgub järgmisest väitest.

**Järeldus 3.12** *Kui lõigus pideva funktsiooni graafiku otspunktid asuvad teine teisel pool $x$-telge, siis graafik lõikab $x$-telge vähemalt ühes punktis.*

Teoreemil 3.11 on ka rakenduslik väärtus, teda saab kasutada võrrandi lahendi olemasolu tõestamisel ja ka ligikaudse lahendi leidmisel.

**Näide 3.3.** Vaatleme $n$-astme algebralist võrrandit $f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, eeldame, et $n$ on paaritu arv. Kirjutades funktsiooni $f$ ümber kujul

$$f(x) = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right),$$

on lihtne näha, et kui võtta $x$ küllalt suur, siis arvu $f(x)$ märk on sama, mis kordaja $a_0$ märk, aga kui $x$ on küllalt väike negatiivne arv, siis on väärtusel $f(x)$ vastupidine märk (veenduda!)✠. Seega saab fikseerida $a$ ja $b$ nii, et $f(a)$ ja $f(b)$ on erimärgilised. Teoreemi 3.11 põhjal on vaadeldaval võrrandil olemas lahend.

**Näide 3.4.** Vaatleme võrrandit

$$f(x) := x^4 - x - 1 = 0$$

ja paneme tähele, et $f(1) = -1$ ning $f(2) = 13$. Teoreemi 3.11 põhjal on sel võrrandil vahemikus $(1, 2)$ vähemalt üks lahend. Jagame lõigu $[1, 2]$ kümneks võrdseks osaks ja arvutame funktsiooni väärtuse neis jaotuspunktides:

$$f(1{,}1) = -0{,}63\ldots;\; f(1{,}2) = -0{,}12\ldots;\; f(1{,}3) = 0{,}55\ldots.$$

Seega peab üks lahend paiknema arvude 1,2 ja 1,3 vahel. Jagame nendevahelise lõigu kümneks võrdseks osaks, ning otsime üles osalõigu, mille otspunktides on funktsioonil $f$ erimärgilised väärtused:

$$f(1{,}22) = -0{,}004\ldots;\; f(1{,}23) = 0{,}058\ldots.$$

Tähendab, üks lahend paikneb arvude 1,22 ja 1,23 vahel. Me võime fikseerida ligikaudse lahendi täpsusega 0,01. Nii jätkates saame me põhimõtteliselt leida lahendeid suvalise etteantud täpsusega. Kuigi praktiliseks rakendamiseks on selline meetod ebaefektiivne, näitab ta kätte reaalselt rakendatava võrrandi lahendamise idee.

### 3.3.2 Bolzano–Cauchy teoreem vahepealsetest väärtustest

**Teoreem 3.13** ***(Bolzano–Cauchy teoreem vahepealsetest väärtustest (intermediate value theorem, теорема о промежуточном значении)).*** *Olgu $f$ intervallis $D$ pidev funktsioon. Kui $y_1$ ja $y_2$ on selle funktsiooni kaks erinevat väärtust, siis iga arv $A$ arvude $y_1$ ja $y_2$ vahel on funktsiooni $f$ väärtus.*

**Tõestus.** Olgu $D$ mingi (tõkestatud või tõkestamata) intervall. Eelduse kohaselt on $y_1$ ja $y_2$ funktsiooni kaks väärtust, s.t.

$$y_1, y_2 \in R := \{f(x) \mid x \in D\},$$

kusjuures $y_1 \neq y_2$. Konkreetsuse mõttes olgu $y_1 < y_2$. Võtame suvalise arvu $A$ vahemikust $(y_1, y_2)$ ning näitame, et mingi $a \in D$ korral $A = f(a)$.

Kuna $y_1, y_2 \in R$, siis leiduvad intervallis $D$ punktid $x_1$ ja $x_2$, et $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$. Vaatleme juhtu, kus $x_1 < x_2$, vastupidisel juhul on tõestus analoogiline. Moodustame seosega

$$h(x) := f(x) - A$$

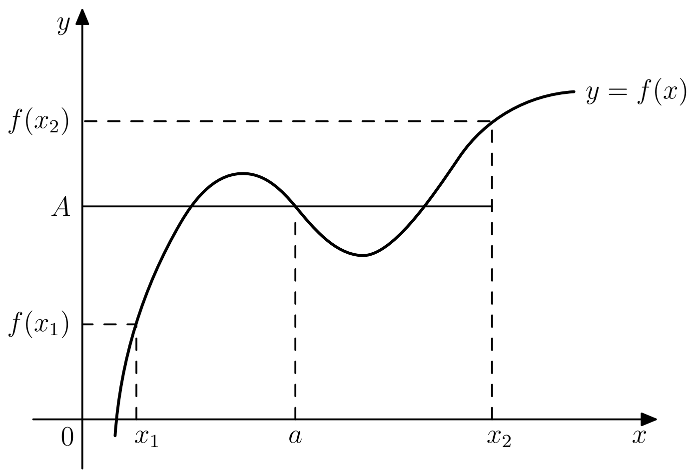
uue funktsiooni $h\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, mis ilmselt on pidev. Seejuures

$$h(x_1) = y_1 - A < 0 \quad \text{ning} \quad h(x_2) = y_2 - A > 0.$$

Teoreemi 3.11 põhjal leidub $a \in (x_1, x_2)$ omadusega $h(a) = 0$ ehk

$$f(a) = h(a) + A = A.$$

Väide on tõestatud. ■




Joonis 3.4: Teoreem vahepealsetest väärtustest.

**Järeldus 3.14** *Intervallis pideva funktsiooni väärtuste hulk on intervall.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Näide 3.5.** Teoreemi 3.13 abil saab anda veel ühe (seejuures väga lihtsa) tõestuse teoreemile $n$-astme juure olemasolust (vt. pt. 1, lause 1.20). Olgu $b > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$, näitame, et leidub parajasti üks selline $c > 0$, et $c^n = b$, s.t. $c = \sqrt[n]{b}$.

Vaatleme funktsiooni $f\colon\ [0, 1 + b] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^n$. See on pidev (kontrollida!)✠, kusjuures $f(0) = 0$ ja

$$f(1 + b) = (1 + b)^n = 1 + nb + \ldots + b^n > nb > b.$$

Teoreemi 3.13 põhjal leidub $c \in (0, 1 + b)$ omadusega $c^n = b$. Selle arvu $c$ ühesuse kontrollimiseks oletame, et võrdus $d^n = b$ kehtib veel mingi $d > 0$ korral. Siis

$$0 = d^n - c^n = (d - c)\left(d^{n-1} + d^{n-2}c + \ldots + c^{n-1}\right)$$

ja kuna $d^{n-1} + d^{n-2}c + \ldots + c^{n-1} > 0$, siis $d = c$.

### 3.3.3 Weierstrassi teoreem pideva funktsiooni tõkestatusest

**Definitsioon.** Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui tema väärtuste hulk $\{f(x) \mid x \in D\}$ on tõkestatud, s.t.

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \quad (x \in D).$$

Meid huvitab funktsioonide pidevuse ja tõkestatuse vahekord. Lihtne on leida näiteid pidevatest funktsioonidest, mis ei ole tõkestatud. Näiteks funktsioon

$$f\colon\ (0, 1] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{1}{x}$$

on pidev (põhjendada!)✠, kuid ei ole tõkestatud. Seevastu kehtib järgmine tähelepanuväärne teoreem.

**Teoreem 3.15** ***(Weierstrassi teoreem lõigus pideva funktsiooni tõkestatusest).*** *Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud.*

**Tõestus.** Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon, oletame vastuväiteliselt, et funktsioon $f$ ei ole tõkestatud, s.t. tema väärtuste hulk $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on tõkestamata. Siis iga naturaalarvu $n$ jaoks saab leida arvu $x_n \in [a, b]$, mille puhul $|f(x_n)| > n$ (selgitage!)✠. Saame tõkestatud jada $(x_n)$ (peame silmas, et $a \leqslant x_n \leqslant b$), Bolzano–Weierstrassi teoreemi (vt. teoreem 2.14) põhjal leidub tal koonduv osajada $(x_{n_k})$. Tähistame $c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, siis $c \in [a, b]$ (vrd. omadus 2.6). Tänu funktsiooni $f$ pidevusele kohal $c$ saame, et $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ (vrd. lause 3.8). Seega on funktsiooni $f$ väärtuste jada $(f(x_{n_k}))$ koonduv, järelikult ka tõkestatud. See fakt on vastuolus punktide $x_n$ valikuga, mille kohaselt $|f(x_{n_k})| > n_k \geqslant k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Saadud vastuolu põhjal on meie vastuväiteline oletus on väär. Teoreem on tõestatud. ■

### 3.3.4 Weierstrassi teoreem pideva funktsiooni ekstremaalsetest väärtustest

Sellest, et funktsioon $f$ on oma määramispiirkonnas $D$ tõkestatud, tuleneb pidevuse aksioomi kohaselt tema väärtuste hulga ülemise ja alumise raja olemasolu, s.t. eksisteerivad $\sup\{f(x) \mid x \in D\}$ ja $\inf\{f(x) \mid x \in D\}$. Kuid üldjuhul ei tähenda see veel suurima ja vähima väärtuse olemasolu. Näiteks funktsiooni

$$f\colon\ [0,1) \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{x}{1+x}$$

väärtused on ülalt tõkestatud arvuga $\frac{1}{2}$, kusjuures $\sup\left\{\frac{x}{1+x}\colon x \in [0,1)\right\} = \lim\limits_{x\to 1-}\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$, samal ajal $f(x) \neq \frac{1}{2}$ iga $x \in [0,1)$ korral. Seega ei ole funktsioonil $f$ poollõigus $[0,1)$ suurimat väärtust.

Nii nagu tõkestatus, on ka ekstremaalsete väärtuste olemasolu pideva funktsiooni korral garanteeritud, kui määramispiirkonnaks on lõik. See selgub järgmisest teoreemist.

**Teoreem 3.16** ***(Weierstrassi teoreem lõigus pideva funktsiooni ekstremaalsetest väärtustest).*** *Lõigus pideval funktsioonil on selles lõigus suurim ja vähim väärtus.*

**Tõestus.** Olgu $f$ lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon. Teoreemi 3.15 põhjal on ta tõkestatud ning pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib

$$M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Meie eesmärk on veenduda sellise $c \in [a,b]$ olemasolus, et $f(c) = M$.

Oletame vastuväiteliselt, et $f(x) \neq M$ iga $x \in [a,b]$ puhul, ja moodustame funktsiooni

$$g\colon\ [a,b] \to \mathbb{R},\quad g(x) := \frac{1}{M - f(x)}.$$

Kuna $g$ on pidev funktsioon (selgitada!)✠, siis on ta lause 3.15 põhjal tõkestatud, s.t. leidub $C > 0$, et $\frac{1}{M-f(x)} \leqslant C$ kõikide $x \in [a,b]$ korral ehk

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{C}\quad (x \in [a,b]).$$

Järelikult on arv $M - \frac{1}{C}$ väärtuste hulga $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ülemine tõke, kuid see on vastuolus asjaoluga, et $M$ on selle hulga vähim ülemine tõke. Saadud vastuolu lükkab ümber meie vastuväitelise oletuse.

Analoogiliselt tõestatakse vähima väärtuse

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

olemasolu. ■

Käesolevas alapunktis tõestatud tulemused annavad kokkuvõttes järgmise tähelepanuväärse teoreemi.

**Teoreem 3.17** *Lõigus $[a,b]$ pideva mittekonstantse funktsiooni $f$ väärtuste hulk $R$ on lõik $[m,M]$, kus $m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ja $M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.*

**Tõestus.** Teoreemi 3.16 kohaselt $m, M \in R$, seega $R \subseteq [m,M]$. Teoreemist 3.13 tuleneb, et $(m,M) \subseteq R$. Kokkuvõttes $R = [m,M]$. ■

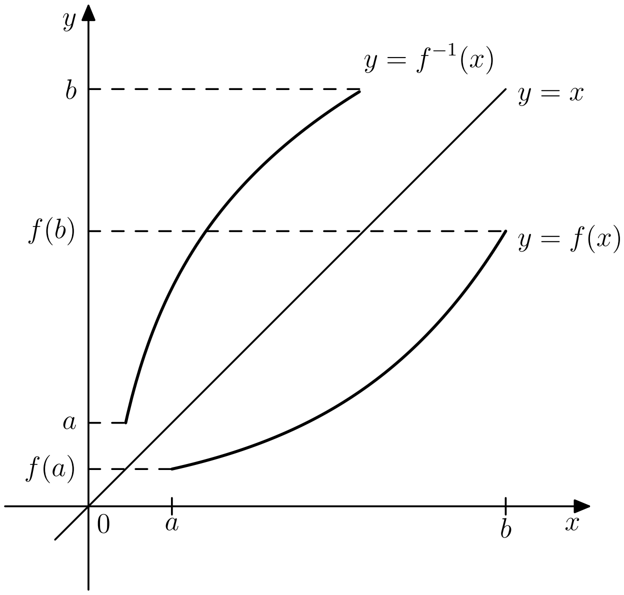
### 3.3.5 Pöördfunktsiooni pidevus

Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on selline, et igale funktsiooni väärtusele $y \in R := \{f(x) \mid x \in D\}$ vastab *ainult üks* argumendi väärtus $x \in D$ omadusega $y = f(x)$, siis saame defineerida funktsiooni

$$f^{-1}\colon R \to D,\ \ f(x) \mapsto x,$$

seda nimetatakse funktsiooni $f$ *pöördfunktsiooniks* (*inverse function, обратная функция*).

Paneme tähele, et kui pöördfunktsioon on esitatud kujul $x = f^{-1}(y)$, siis langeb tema graafik ühte funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga. Kui aga vaadelda pöördfunktsiooni kujul $y = f^{-1}(x)$, siis on tema graafik funktsiooni $y = f(x)$ graafiku peegelpilt sirge $y = x$ suhtes (vt. joonis 3.5).




Joonis 3.5: Pöördfunktsiooni graafik.

Pöördfunktsiooni olemasolu sõltub funktsiooni $f$ ***monotoonsusomadustest.***

**Definitsioon.** Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse hulgas $X \subseteq D$
1) *kasvavaks, kui* võrratusest $x < x'$ hulgas $X$ järeldub võrratus $f(x) \leqslant f(x')$,
2) *rangelt kasvavaks*, kui võrratusest $x < x'$ hulgas $X$ järeldub võrratus $f(x) < f(x')$,
3) *kahanevaks*, kui võrratusest $x < x'$ hulgas $X$ järeldub võrratus $f(x) \geqslant f(x')$,
4) *rangelt kahanevaks*, kui võrratusest $x < x'$ hulgas $X$ järeldub võrratus $f(x) > f(x')$.

Kui on täidetud üks neist neljast tingimusest, siis kõneleme vastavalt *monotoonsest* või *rangelt monotoonsest* funktsioonist.

**Märkus.** Funktsiooni monotoonsusomadustega seotud sõnu kasutatakse eri allikates eri tähenduses. Ranget võrratust sisaldava tingimusega funktsiooni kohta öeldakse mõnikord hoopis „kasvav", mitterange juht on sel juhul „mittekahanev" või „monotoonselt kasvav".

**Lause 3.18** *Kui $f$ on rangelt kasvav (rangelt kahanev) funktsioon hulgas $D$, siis tal on pöördfunktsioon $g := f^{-1}$, mis on hulgas $R$ rangelt kasvav (rangelt kahanev).*

**Tõestus.** Funktsiooni $f$ rangest monotoonsusest tuleneb, et

$$f(x_1) \neq f(x_2),\ \text{kui } x_1, x_2 \in D \text{ ja } x_1 \neq x_2$$

(kontrollida!)✠. Seega vastab igale arvule $y \in R$ tõepoolest üks arv $x \in D$, mille puhul kehtib võrdus $y = f(x)$. Niisiis, funktsioonil $f$ on olemas pöördfunktsioon, tähistame selle tähega $g$.

Kontrollime funktsiooni $g$ ranget monotoonsust. Eeldame, et $f$ on rangelt kasvav funktsioon, ja näitame, et siis on ka $g$ rangelt kasvav. Olgu $y_1, y_2 \in R$ ja $y_1 < y_2$. Kui oletada vastuväiteliselt, et $z_2 := g(y_2) \leqslant g(y_1) =: z_1$, siis

$$y_2 = f(g(y_2)) = f(z_2) \leqslant f(z_1) = f(g(y_1)) = y_1,$$

mis on vastuolus arvude $y_1$ ja $y_2$ valikuga. Rangelt kahaneva funktsiooni $f$ puhul on tõestus analoogiline. ■

**Lause 3.19** *Lõigus $[a,b]$ pideva rangelt monotoonse funktsiooni $f$ pöördfunktsioon $g := f^{-1}$ on pidev lõigus otspunktidega $f(a)$ ja $f(b)$.*

**Tõestus.** Olgu funktsioon $f$ konkreetsuse mõttes lõigus $[a,b]$ rangelt kasvav, siis pöördfunktsiooni $g$ määramispiirkond on lõik $[f(a), f(b)]$ (põhjendada!)✠. Teisisõnu, $m = f(a)$ ja $M = f(b)$, kus $m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ja $M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Selles lõigus $[m, M]$ on $g$ eelneva lause 3.18 põhjal rangelt kasvav. Tema pidevuse tõestamiseks näitame, et $g$ on
1) vasakult pidev igas punktis $y \in (m, M]$ ning
2) paremalt pidev igas punktis $y \in [m, M)$ (selgitada!)✠.

Tõestame väite 1), teine väide tõestatakse analoogiliselt. Olgu $y_0 \in (m, M]$ suvaline punkt. Kuna $m < y_0$, siis

$$a = g(m) < g(y_0) =: x_0,$$

sest $g$ on rangelt kasvav funktsioon. Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Meie eesmärk on näidata niisuguse $\delta > 0$ olemasolu, et kehtiks implikatsioon

$$[y \in [f(a), f(b)], \, y_0 - y < \delta] \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon, \tag{3.11}$$

see tähendaks seost $g(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0 -} g(y)$ ehk funktsiooni $g$ vasakpoolset pidevust punktis $y_0$. Valime $\varepsilon$ nii, et $x_0 - \varepsilon > a$ (miks selline valik ei kitsenda üldisust?✠), võrratuste $a < x_0 - \varepsilon < x_0$ tõttu $m < f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0$. Tähistame $\delta := y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$, siis $0 < \delta < y_0 - m$, järelikult $(y_0 - \delta, y_0) \subseteq (m, M)$, seejuures

$$g(y_0 - \delta) = g(f(x_0 - \varepsilon)) = x_0 - \varepsilon = g(y_0) - \varepsilon. \tag{3.12}$$

Kui $y$ on suvaline punkt vahemikust $(y_0 - \delta, y_0)$, s.t.

$$0 < y_0 - y < \delta,$$

siis seosest (3.12) ja funktsiooni $g$ rangest monotoonsusest saame, et

$$g(y_0) - \varepsilon = g(y_0 - \delta) < g(y) < g(y_0) < g(y_0) + \varepsilon$$

ehk $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Niisiis kehtib implikatsioon (3.11) ning väide on tõestatud. ■

**Teoreem 3.20** ***(pöördfunktsiooni pidevusest).*** *Intervallis $D$ pideva ja rangelt monotoonse funktsiooni $f$ pöördfunktsioon $g := f^{-1}$ on pidev intervallis $R := \{f(x) \mid x \in D\}$.*

**Tõestus.** Bolzano-Cauchy teoreemi 3.14 põhjal on $R$ intervall. Näitame, et $g$ on pidev suvalises punktis $y_0 \in R$. Olgu $x_0 := g(y_0)$ ning $x_0 \in [a,b] \subseteq D$. Funktsioon $f$ on pidev ja rangelt monotoonne lõigus $[a,b]$, seejuures väärtuste hulk $f([a,b]) =: [c,d]$ on lõik intervallis $R$ ja $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ on funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pöördfunktsioon (selgitada!)✠. Lause 3.19 kohaselt on $g$ lõigus $[c,d]$ pidev, seega pidev ka punktis $y_0$. ■

## 3.4 Elementaarfunktsioonid, nende pidevus

Selles alapunktis on meie eesmärgiks defineerida põhilised elementaarfunktsioonid (v.a. siinus ja koosinus) ja veenduda nende pidevuses. Me lähtume ratsionaalse argumendiga eksponentfunktsioonist, mis defineeritakse aritmeetiliste tehete abil, ning rakendades piirprotsessi, jätkame selle reaalarvulistele argumentidele. Logaritmfunktsioon määratakse kui eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon, astmefunktsioon ja hüperboolsed funktsioonid saadakse eksponentfunktsioonist vastavate liitfunktsioonide moodustamise teel. Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimise viime täielikult läbi siis, kui oleme arvridade teooria välja arendanud.

### 3.4.1 Ratsionaalse astendajaga astme- ja eksponentfunktsioon

**Ratsionaalse argumendiga astmefunktsioon.** Kuna funktsioon

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

on pidev, siis astmefunktsioon

$$y = x^p$$

kui pidevate funktsioonide korrutis on iga $p \in \mathbb{N}$ korral lause 3.9 kohaselt pidev hulgas $\mathbb{R}$. Sama lause põhjal on ka funktsioon

$$y = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$$

pidev kõikide $p \in \mathbb{N}$ puhul hulgas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Edasi, funktsioon

$$y = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$$

kui pideva rangelt monotoonse funktsiooni $x = y^q$, kus $y \geqslant 0$, pöördfunktsioon on suvaliste $q = 2, 3, \ldots$ puhul pidev hulgas $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ (vrd. teoreem 3.20).

Olgu nüüd $r := \frac{p}{q}$, kus $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$. Funktsioon

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

kui pidevate funktsioonide liitfunktsioon on pidev.

**Ratsionaalse argumendiga eksponentfunktsioon.** Olgu $a > 0$, siis vastavalt eelöeldule funktsioon

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto a^r$$

on määratud (selgitada!)✠.

**Lause 3.21** *Olgu $a > 0$, eeldame, et $a \neq 1$.*
(a) *Kehtib võrdus $f(r_1 + r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$, s.t. $a^{r_1+r_2} = a^{r_1}a^{r_2}$ suvaliste $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ korral.*
(b) *Juhul $a > 1$ on funktsioon $f$ rangelt kasvav, s.t. kui $r_1 < r_2$, siis $a^{r_1} < a^{r_2}$. Juhul $0 < a < 1$ on $f$ rangelt kahanev: kui $r_1 < r_2$, siis $a^{r_1} > a^{r_2}$.*
(c) *Funktsioon $r \mapsto a^r$ on pidev punktis 0, s.t. $\lim\limits_{r\in\mathbb{Q},\, r\to 0} a^r = 1$.*
(d) *Kui $(r_n)$ on korpuses $\mathbb{R}$ koonduv ratsionaalarvude jada, siis reaalarvude jada $(a^{r_n})$ on koonduv.*

**Tõestus.** (a) Selge, et $a^{q+n} = a^q a^n$ ja $a^{q-n} = \frac{a^q}{a^n}$ suvaliste naturaalarvude $q$ ja $n$ puhul. Seega, kuna iga täisarv $m$ on esitatav kujul $m = q - n$, kus $q, n \in \mathbb{N}$ (vt. alapunkt 1.2.2), kehtib väide suvaliste täisarvude $r_1$ ja $r_2$ korral: kui $r_1 = q_1 - n_1$ ja $r_2 = q_2 - n_2$, siis

$$\begin{aligned} a^{r_1+r_2} &= a^{(q_1-n_1)+(q_2-n_2)} = a^{(q_1+q_2)-(n_1+n_2)} = \frac{a^{q_1+q_2}}{a^{n_1+n_2}} = \frac{a^{q_1}a^{q_2}}{a^{n_1}a^{n_2}} \\ &= \frac{a^{q_1}}{a^{n_1}}\frac{a^{q_2}}{a^{n_2}} = a^{q_1-n_1}a^{q_2-n_2} = a^{r_1}a^{r_2}. \end{aligned}$$

Olgu $r_1 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ja $r_2 = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, kus $p, m \in \mathbb{Z}$ ja $q, n \in \mathbb{N}$, siis

$$\begin{aligned} a^{r_1+r_2} &= a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np+mq} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} \cdot \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \\ &= a^{\frac{np}{nq}} \cdot a^{\frac{mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}} = a^{r_1}a^{r_2} \end{aligned}$$

(põhjendada kõiki võrdusi!)✠.

(b) Väide kehtib, kui $r_1$ ja $r_2$ on täisarvud (kontrollida!)✠. Olgu $r_1 = \frac{p}{q} < r_2 = \frac{m}{n}$, kus $p, m \in \mathbb{Z}$ ja $q, n \in \mathbb{N}$, siis $\frac{pn}{qn} < \frac{qm}{qn}$ ehk $pn < qm$. Juhul $a > 1$ kehtib võrratus $a^{\frac{1}{qn}} > 1$ (selgitada!)✠, seetõttu

$$a^{r_1} = a^{\frac{pn}{qn}} = \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)^{pn} < \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)^{qm} = a^{\frac{qm}{qn}} = a^{r_2}.$$

Kui $0 < a < 1$, siis $b := \frac{1}{a} > 1$, mistõttu $b^{r_1} < b^{r_2}$ ning

$$a^{r_1} = \frac{1}{b^{r_1}} > \frac{1}{b^{r_2}} = a^{r_2}.$$

(c) *Vaatleme algul juhtu $a > 1$.* Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna lause 2.10(b) kohaselt $a^{1/n} \to 1$ ja $a^{-1/n} \to 1$ protsessis $n \to \infty$, siis

$$\begin{aligned} &\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \geqslant N_1 \Rightarrow \left|a^{1/n} - 1\right| < \varepsilon, \\ &\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \geqslant N_2 \Rightarrow \left|a^{-1/n} - 1\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

ning indeksi $m := \max\{N_1, N_2\}$ jaoks kehtivad võrratused

$$1 - \varepsilon < a^{-1/m} < a^{1/m} < 1 + \varepsilon$$

(kontrollida!)✠. Olgu $\delta := \frac{1}{m}$. Kui $|r| < \delta$, s.t. $-\frac{1}{m} < r < \frac{1}{m}$, siis väite (b) kohaselt

$$1 - \varepsilon < a^{-1/m} < a^r < a^{1/m} < 1 + \varepsilon,$$

seega $|a^r - 1| < \varepsilon$. Niisiis, $\lim\limits_{r\in\mathbb{Q},\, r\to 0} a^r = 1$.

*Kui* $0 < a < 1$, siis $b := \frac{1}{a} > 1$, mistõttu

$$\lim_{r\in\mathbb{Q},\, r\to 0} a^r = \lim_{r\in\mathbb{Q},\, r\to 0} \frac{1}{b^r} = \frac{1}{\lim\limits_{r\in\mathbb{Q},\, r\to 0} b^r} = 1.$$

(d) *Vaatleme esialgu juhtu* $a > 1$. Olgu $(r_n)$ koonduv ratsionaalarvude jada. Tema tõkestatuse tõttu saame valida sellise ratsionaalarvu $s$, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $r_n < s$, väite (b) kohaselt $a^{r_n} < a^s =: M$. Olgu $\varepsilon > 0$. Seosest $\lim\limits_{r\in\mathbb{Q},\, r\to 0} a^r = 1$ (vt. väide (c)) lähtudes leiame $\delta > 0$ omadusega

$$[|r| < \delta,\ r \in \mathbb{Q}] \Rightarrow |a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Kuna $(r_n)$ (kui koonduv jada) on Cauchy jada, siis leidub $N \in \mathbb{N}$, et

$$n, m \geqslant N \Rightarrow |r_n - r_m| < \delta,$$

mistõttu

$$n, m \geqslant N \Rightarrow \left|a^{r_n - r_m} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Väite (a) põhjal

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_n}\left|1 - a^{r_m - r_n}\right| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad (n, m \geqslant N),$$

mis tähendab, et $(a^{r_n})$ on Cauchy jada, seega koonduv.

*Kui* $0 < a < 1$, siis $b := \frac{1}{a} > 1$, seega eksisteerib $\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}$ ning $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}\right)^{-1}$.

Lause on tõestatud. ■

### 3.4.2 Eksponentfunktsioon $y = a^x$, kus $x \in \mathbb{R}$

Nagu eelnevas eeldame ka siin, et *a on positiivne reaalarv ning* $a \neq 1$. Kuna kõigi ratsionaalarvude korpus $\mathbb{Q}$ paikneb tihedalt korpuses $\mathbb{R}$, s.t. iga kahe erineva reaalarvu vahel leidub ratsionaalarve, siis kehtib järgmine lause.

**Lause 3.22** *Iga reaalarvu $x$ korral saab leida sellise ratsionaalarvude jada $(r_n)$, mis koondub arvuks $x$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Lausest 3.22 lähtudes defineerime

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \tag{3.13}$$

kus $r_n \in \mathbb{Q}$ ja $r_n \to x$. Lause 3.21(d) põhjal piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ eksisteerib. Definitsiooni (3.13) korrektsuse kontrollimiseks peame näitama, et see piirväärtus ei sõltu konkreetse jada

$(r_n)$ valikust, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n}$, kui $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$. Tõepoolest, kuna $r_n - r'_n \to 0$, siis lause 3.21(c) kohaselt $a^{r_n - r'_n} \to 1$, mistõttu

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(a^{r'_n} - a^{r_n}\right) + \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}\left(a^{r'_n - r_n} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} a^{r_n}\\ &= \lim_{n\to\infty} a^{r_n}\lim_{n\to\infty}\left(a^{r'_n - r_n} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.\end{aligned}$$

Loetleme seosega (3.13) defineeritud funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto a^x$$

omadusi.

**Lause 3.23** (a) *Kehtib võrdus* $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$, *s.t.* $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$ *suvaliste* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *korral.*
(b) $f(x) > 0$ *iga* $x\in\mathbb{R}$ *puhul.*
(c) *Juhul* $a > 1$ *on funktsioon* $f$ *rangelt kasvav, s.t. kui* $x_1 < x_2$*, siis* $a^{x_1} < a^{x_2}$*. Juhul* $0 < a < 1$ *on* $f$ *rangelt kahanev: kui* $x_1 < x_2$*, siis* $a^{x_1} > a^{x_2}$*.*
(d) *Funktsioon* $f$ *on pidev punktis* 0*, s.t.* $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$*.*

**Tõestus.** Piisab tõestada väited juhul $a > 1$. Nimelt, kui väited (a) – (d) on juhul $a > 1$ tõestatud, siis kehtivad nad tänu seosele

$$a^x = \left(a^{-1}\right)^{-x}$$

ka juhul $0 < a < 1$, vaid väites (c) asendub range kasvamine range kahanemisega (kontrollida!)✠. Niisiis ***eeldame, et*** $a > 1$.

(a) Olgu $(r_n)$ ja $(s_n)$ sellised ratsionaalarvude jadad, et $r_n \to x_1$ ja $s_n \to x_2$, sel juhul $r_n + s_n \to x_1 + x_2$ ning definitsiooni (3.13) kohaselt $a^{r_n} \to a^{x_1}$, $a^{s_n} \to a^{x_2}$ ja $a^{r_n+s_n} \to a^{x_1+x_2}$. Samas lause 3.21(a) ja omaduse 2.9(b) põhjal

$$a^{r_n+s_n} = a^{r_n}a^{s_n} \to a^{x_1}a^{x_2},$$

koonduva jada piirväärtuse ühesuse tõttu kehtib võrdus $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$.

(b) Olgu $x > 0$ ja $(r_n)$ selline ratsionaalarvude jada, et $r_n \to x$. Siis leidub $N\in\mathbb{N}$, et $r_n > 0$ kõikide $n \geqslant N$ korral (selgitada!)✠. Kuna $a^{r_n} > 1$, kui $n \geqslant N$ (põhjendada!)✠, siis $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \geqslant 1 > 0$. Kui $x = 0$, siis $a^x = a^0 = 1 > 0$.

Olgu nüüd $x < 0$, siis $-x > 0$, ja kui ratsionaalarvude jada $(r_n)$ koondub arvuks $x$, siis jada $(-r_n)$ koondub positiivseks arvuks $-x$ ning

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{-r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{-r_n}} = \frac{1}{a^{-x}} > 0.$$

(c) Olgu $x_1 < x_2$. Vastavalt definitsioonile (3.13) valime ratsionaalarvude jadad $(r_n)$ ja $(s_n)$ nii, et $r_n \to x_1$ ja $s_n \to x_2$, siis $a^{x_1} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ ja $a^{x_2} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n}$. Leiame ratsionaalarvud $r$ ja $s$, mis rahuldavad tingimusi $x_1 < r < s < x_2$ (selgitada sellise valiku võimalikkust!)✠

ning tähistame $\varepsilon := \min\{r - x_1, x_2 - s\}$, seega $\varepsilon > 0$. Kuna $r_n \to x_1$ ja $s_n \to x_2$, siis saame leida sellise $N \in \mathbb{N}$, et

$$|r_n - x_1| < \varepsilon \text{ ja } |s_n - x_2| < \varepsilon \text{ kõikide } n \geqslant N \text{ korral.}$$

Järelikult iga $n \geqslant N$ puhul kehtib ühelt poolt võrratus $r_n - x_1 < r - x_1$ ehk $r_n < r$, teiselt poolt $x_2 - s_n < x_2 - s$ ehk $s_n > s$. Neist tulenevad lause 3.21(b) kohaselt võrratused

$$a^{r_n} < a^r < a^s < a^{s_n} \quad (n \geqslant N)\,.$$

Protsessis $n \to \infty$ saame soovitud tulemuse:

$$a^{x_1} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^r < a^s \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^{x_2}.$$

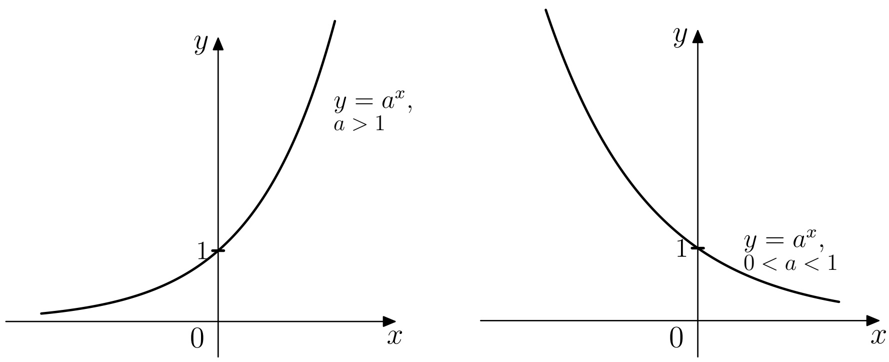
(d) Olgu $(x_n)$ suvaline reaalarvude jada, mis koondub piirväärtuseks 0. Väide on tõestatud, kui meil õnnestub veenduda, et $a^{x_n} \to 1$ (selgitada!)✠.

Valime ratsionaalarvude jadad $(r_n)$ ja $(s_n)$ nii, et

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < s_n < x_n + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(põhjendada selliste jadade olemasolu!)✠. Väite (c) põhjal $a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna $r_n \to 0$ ja $s_n \to 0$ (põhjendada!)✠, siis $a^{r_n} \to 1$ ja $a^{s_n} \to 1$ vastavalt lausele 3.21(c). Omaduse 2.7 kohaselt $a^{x_n} \to 1$. ■

Lause 3.23 põhjal formuleerime eksponentfunktsiooni kirjeldamiseks järgmise lause.




Joonis 3.6: Eksponentfunktsioon $y = a^x$.

**Lause 3.24** *Eksponentfunktsioon*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x,$$

*kus $a > 0$, on pidev. Juhul $a > 1$ on $f$ rangelt kasvav, juhul $a < 1$ on $f$ rangelt kahanev funktsioon. Mõlemal juhul on funktsiooni $f$ väärtuste hulgaks intervall $(0, \infty)$.*

**Tõestus.** Funktsiooni monotoonsusomadused tõestasime me juba eespool, kontrollime funktsiooni $f$ pidevust suvalises punktis $z \in \mathbb{R}$. Tõepoolest, kui $x \to z$, siis $x - z \to 0$ ning lause 3.23(d) põhjal $\lim\limits_{x \to z} a^{x-z} = 1$, mistõttu

$$\lim_{x \to z} a^x = \lim_{x \to z} a^z a^{x-z} = a^z \lim_{x \to z} a^{x-z} = a^z.$$

Kuna $f$ on intervallis $(-\infty, \infty)$ pidev funktsioon, siis vastavalt Bolzano–Cauchy teoreemi järeldusele 3.14 on tema väärtuste hulk samuti intervall. Lause 3.23(b) kohaselt koosneb see positiivsetest reaalarvudest. Seejuures juhul $a > 1$ kehtivad võrdused

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty \text{ ja } \lim_{x \to \infty} a^{-x} = 0,$$

juhul $0 < a < 1$ aga vastupidised seosed. Mõlemal juhul moodustavad funktsiooni väärtused intervalli $(0, \infty)$. ■

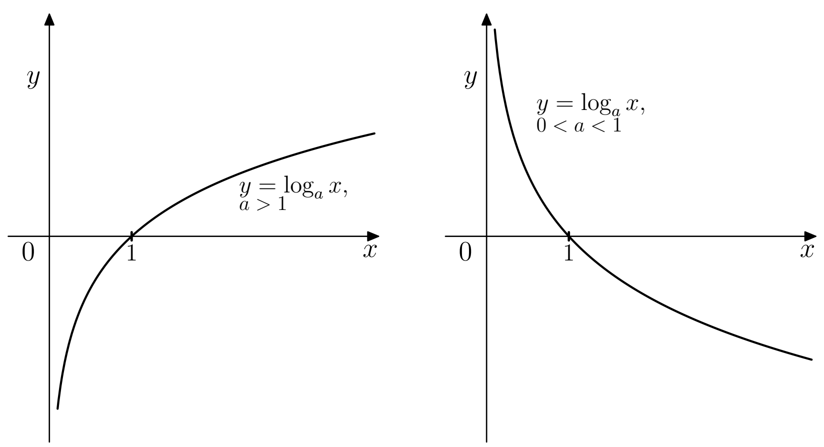
**Hüperboolsed funktsioonid** määratakse seostega

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ ja } \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Nad on pidevad, sest aritmeetilised tehted pidevate funktsioonidega annavad tulemuseks pideva funktsiooni.

### 3.4.3 Logaritm- ja astmefunktsioon

**Logaritmfunktsioon.** Olgu $a > 0$ ja $a \neq 1$. *Logaritmfunktsioon* $y = \log_a x$ defineeritakse kui eksponentfunktsiooni $x = a^y$ pöördfunktsioon. Kuna viimase väärtuste hulgaks on intervall $(0, \infty)$, siis see on logaritmfunktsiooni määramispiirkond. Vastavalt lausele 3.24 on juhul $a > 1$ eksponentfunktsioon rangelt kasvav ja juhul $0 < a < 1$ rangelt kahanev, lause 3.18 kohaselt on sama omadusega ka tema pöördfunktsioon. Eksponentfunktsiooni pidevusest tuleneb logaritmfunktsiooni pidevus oma määramispiirkonnas (vrd. teoreem 3.20).




Joonis 3.7: Logaritmfunktsioon $y = \log_a x$.

Kui $a = e$, siis kasutatakse logaritmfunktsiooni tähistamiseks sümbolit ln, arvu

$$\ln x := \log_e x$$

nimetatakse arvu $x \in (0, \infty)$ *naturaallogaritmiks.*

**Astmefunktsioon.** Naturaallogaritmi abil defineeritakse *astmefunktsioon.* Kui $\alpha \in \mathbb{R}$, siis suvalise $x > 0$ korral tähistame

$$x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \ln x}.$$

Seega on funktsioon $x \mapsto x^\alpha$ defineeritud liitfunktsioonina $f := \varphi \circ g$, kus

$$g\colon\ (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \alpha \ln x$$

ja

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ z \mapsto \mathrm{e}^z.$$

Kuna mõlemad komponendid $g$ ja $\varphi$ on pidevad, siis ka liitfunktsioon $f$ on pidev oma määramispiirkonnas $(0, \infty)$.

### 3.4.4 Trigonomeetrilised funktsioonid ja nende pöördfunktsioonid

Trigonomeetriliste funktsioonide

$$\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]\,,\ \cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

defineerimise lükkame edasi, kuni oleme välja arendanud arvridade teooria (vt. alaptk. 6.7).

Tangens- ja kootangensfunktsioon määratakse seostega

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \text{ ja } \quad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})\,. \tag{3.14}$$

Alapeatükis 6.7 tõestatakse, et

$$0 < |\sin x| < |x| < |\tan x|\,, \text{ kui } 0 < |x| < 1. \tag{3.15}$$

Samuti tõestatakse alapeatükis 6.7, et siinus- ja koosinusfunktsioon on pidevad igas punktis $x \in \mathbb{R}$. Funktsioonide tan ja cot pidevus tuleneb seostest (3.14) (selgitada!)✠.

Võrratustest (3.15) lähtudes saab tõestada, et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nimelt tuleneb seostest (3.15), et

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ kui } 0 < |x| < 1$$

(kontrollida!)✠. Kuna cos on pidev kohal $x = 0$, siis

$$1 = \cos 0 = \lim_{x \to 0} \cos x \leqslant \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1,$$

s.t. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Arv $\pi$ kui kahekordne koosinusfunktsiooni vähimast positiivsest nullkohast, defineeritakse alapeatükis 6.7. Selgub, et siinus on rangelt kasvav lõigus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ja koosinus on rangelt kahanev lõigus $[0, \pi]$.

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

ning

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

on pidevad kui pidevate rangelt monotoonsete funktsioonide pöördfunktsioonid.

## 3.5 Ühtlaselt pidevad funktsioonid

### 3.5.1 Ühtlase pidevuse mõiste. Cantori teoreem

Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, s.t.

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0 : [x' \in D,\ |x' - x| < \delta] \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \tag{3.16}$$

Ühtlase pidevuse definitsiooni juurde toob meid tähelepanek, et mõnede funktsioonide $f$ puhul saab tingimuses (3.16) fikseeritud arvu $\varepsilon > 0$ korral $\delta > 0$ määrata nii, et see ei sõltu punktist $x$, teiste funktsioonide puhul aga sellist universaalset positiivset arvu $\delta$ leida ei õnnestu.

**Definitsioon.** Ütleme, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *hulgas $X \subseteq D$ ühtlaselt pidev* (*uniformly continuous in X, равномерно непрерывная на X*), kui iga $\varepsilon > 0$ korral saab leida sellise $\delta > 0$, et suvaliste $x, x' \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$, kehtib võrratus $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Niisiis, erinevalt tingimusest (3.16) sõltub arv $\delta$ ühtlase pidevuse definitsioonis vaid arvust $\varepsilon$ ja ei sõltu punktide $x, x' \in X$ valikust. Seega on iga hulgas $X$ ühtlaselt pidev funktsioon selles hulgas pidev. Nagu selgub järgnevatest näidetest, on vastupidine väide üldjuhul vale.

**Näide 3.6.** Näitame, et ruutfunktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

ei ole oma määramispiirkonnas $D = \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev, kuigi on pidev. Selleks võtame $\varepsilon := 1$ ja leiame iga fikseeritud $\delta > 0$ korral $x$ ja $x'$, et $|x - x'| < \delta$ ja $|f(x) - f(x')| > 1$. Nimelt, kui $x := \frac{1}{\delta}$ ning $x' := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, siis $|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$, kuid

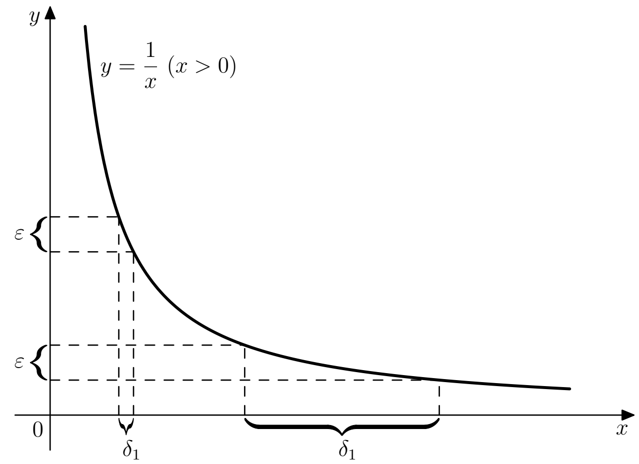
$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= \left|x^2 - (x')^2\right| = |x + x'|\,|x - x'| \\ &= \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > 1. \end{aligned}$$

**Näide 3.7.** Vaatleme pidevat funktsiooni

$$f\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x},$$

näitame, et ta ei ole poollõigus $(0,1]$ ühtlaselt pidev. Võtame $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ja paneme tähele, et suvalise $\delta \in (0,1)$ korral rahuldavad arvud $x := \sqrt{\delta}$ ja $x' := \sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}$ tingimusi $0 < x' < x < 1$ ning $|x - x'| < \delta$, kuid

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x - x'|}{|x'x|} \\ &> \frac{\delta/2}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$




Joonis 3.8: Funktsioon $y = \frac{1}{x}$ ei ole intervallis $(0,1]$ ühtlaselt pidev (vt. näide 3.7).

Niisiis, üldjuhul mingis intervallis pidev funktsioon ei ole selles intervallis ühtlaselt pidev. Samas kehtib järgmine teoreem.

**Teoreem 3.25** ***(Cantori teoreem ühtlasest pidevusest).*** *Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev.*

**Tõestus.** Olgu funktsioon $f$ lõigus $[a,b]$ pidev, oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole ühtlaselt pidev selles lõigus. Siis leidub selline $\varepsilon_0 > 0$, et iga $\delta > 0$ puhul saab valida punktid $x, x' \in [a,b]$ omadusega $|x - x'| < \delta$ ja $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$. Suvalise $n \in \mathbb{N}$ puhul leiame arvule $\frac{1}{n}$ vastavad punktid $x_n \in [a,b]$ ja $x'_n \in [a,b]$, s.t.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Saadud jadad $(x_n)$ ja $(x'_n)$ on tõkestatud, Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal on neil koonduvaid osajadasid. Olgu $(x_{n_k})$ jada $(x_n)$ osajada, mis koondub mingiks punktiks $c$, siis $c \in [a,b]$ (vrd. omadus 2.6). Eraldame jadast $(x'_n)$ *samade indeksitega* osajada $\left(x'_{n_k}\right)$. Kuna

$$0 < \left|x_{n_k} - x'_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k} \to 0, \text{ kui } k \to \infty,$$

siis $\lim\limits_{k\to\infty} \left(x_{n_k} - x'_{n_k}\right) = 0$, mistõttu

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k} - \left(x_{n_k} - x'_{n_k}\right)\right) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k} - x'_{n_k}\right) = c.$$

Tänu funktsiooni $f$ pidevusele

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(x'_{n_k}\right) = f\left(c\right)$$

(selgitada!)✠, niisiis

$$\lim_{k\to\infty} \left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right) = 0.$$

Jada koonduvuse definitsiooni kohaselt on mingist indeksist $N$ alates täidetud tingimus $\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| < \varepsilon_0$ (selgitada!)✠, kuid see on vastuolus punktide $x_n$ ja $x'_n$ valikuga. Oleme jõudnud vastuoluni, järelikult on meie vastuväiteline oletus vale, s.t. funktsioon $f$ on lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev. ■

### 3.5.2 Lipschitzi funktsioonid

Vaatleme näitena üht ühtlaselt pidevate funktsioonide klassi.

**Definitsioon.** Olgu $D$ mingi intervall. Kui funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ puhul leidub selline $C > 0$, et

$$\left|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\right| \leqslant C\left|x - x'\right| \text{ kõikide } x, x' \in D \text{ korral,} \tag{3.17}$$

siis nimetatakse funktsiooni $f$ *Lipschitzi funktsiooniks* (ehk *Lipschitzi mõttes pidevaks funktsiooniks*).

Kirjutades Lipschitzi tingimuse (3.17) ümber kujul

$$\left|\frac{f\left(x\right) - f\left(x'\right)}{x - x'}\right| \leqslant C \ \ \left(x, x' \in D,\ x \neq x'\right),$$

saame sellele anda lihtsa geomeetrilise tähenduse. Vaatleme funktsiooni $f$ graafiku punkte $(x, f(x))$ ja $(x', f(x'))$, kus $x, x' \in D$ ning $x \neq x'$. Murd $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ kirjeldab neid punkte ühendava lõikaja tõusu, täpsemalt, ta on selle tõusunurga tangens. Seega tähendab Lipschitzi tingimus (3.17) seda, et *kõikide funktsiooni $f$ graafiku kahte punkti omavahel ühendavate lõikajate tõusude hulk on tõkestatud.*

**Lause 3.26** *Iga intervallis $D$ määratud Lipschitzi funktsioon on selles hulgas ühtlaselt pidev.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Näide 3.8.** Lipschitzi funktsioonide klass on rangelt kitsam, kui kõigi ühtlaselt pidevate funktsioonide klass. Nimelt leidub lõigus (ühtlaselt) pidevaid funktsioone, mis ei rahulda selles lõigus Lipschitzi tingimust (3.17). Olgu $f(x) = \sqrt{x}$ ning $D = [0, 1]$, ilmselt on $f$ pidev ning seega ühtlaselt pidev hulgas $[0, 1]$. Seejuures

$$\left|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}\left|x - x'\right| \quad \left(x, x' \in \left(0, 1\right],\ x \neq x'\right).$$

Kui oletada, et $f$ on Lipschitzi funktsioon lõigus $[0, 1]$, siis

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}\left|x - x'\right| \ \leqslant C\left|x - x'\right| \ \left(x, x' \in \left(0, 1\right]\right)$$

mingi $C > 0$ korral ehk

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leqslant C \ \ \left(x, x' \in \left(0, 1\right]\right),$$

mis ilmselt ei ole õige (põhjendada!)✠.

### 3.5.3 Ühtlase pidevuse kirjeldamine jadade abil

Lihtne on näha, et iga Lipschitzi funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ rahuldab hulgas $D$ järgmist tingimust:

$$\textit{kui } x_k, x'_k \in D \ \textit{ ja } x_k - x'_k \to 0, \textit{ siis } f(x_k) - f(x'_k) \to 0 \tag{3.18}$$

(kontrollida!)✠. Nagu selgub järgmisest lausest, osutub see pideva funktsiooni $f$ ühtlase pidevuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks.

**Lause 3.27** *Pidev funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on intervallis $D$ ühtlaselt pidev parajasti siis, kui on täidetud tingimus* (3.18).

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Iseseisvalt!✠
*Piisavus.* Eeldame, et intervallis $D$ pidev funktsioon $f$ rahuldab tingimust (3.18), ja oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole ühtlaselt pidev. Sel juhul

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta, x'_\delta \in D : |x_\delta - x'_\delta| < \delta,\ |f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.19}$$

Seega saame iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leida punktid $x_n, x'_n \in D$ omadusega

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n},\quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Kuna $x_n - x'_n \to 0$, siis eelduse (3.18) tõttu $f(x_n) - f(x'_n) \to 0$. Seega leidub $N \in \mathbb{N}$, et

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon_0 \text{ iga } n \geqslant N \text{ korral.}$$

See on vastuolus punktide $x_n, x'_n \in D$ valikuga, järelikult on vastuväiteline oletus (3.19) väär. ■

**Näide 3.9.** Veendume lause 3.27 abil veel kord (vrd. näide 3.6), et pidev ruutfunktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ei ole hulgas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev. Tõepoolest, kui $x_n := \sqrt{n+1}$ ja $x'_n := \sqrt{n}$, siis

$$x_n - x'_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0\ \ (n \to \infty),$$

kuid $(x_n)^2 - (x'_n)^2 = 1 \nrightarrow 0$.

**Lause 3.28** (a) *Kui hulgas $D$ määratud funktsioon $f$ on selles hulgas ühtlaselt pidev, siis*

$$\textit{iga Cauchy jada } (x_n) \textit{ puhul, kus } x_n \in D, \textit{ on } (f(x_n)) \textit{ Cauchy jada.} \tag{3.20}$$

(b) *Kui hulk $D$ on tõkestatud, siis tingimus* (3.20) *on ka piisav funktsiooni $f$ ühtlaseks pidevuseks hulgas $D$.*

**Tõestus.** (a) Eeldame, et $f\colon D \to \mathbb{R}$ on hulgas $D$ ühtlaselt pidev funktsioon. Olgu $\varepsilon > 0$, leiame (vastavalt ühtlase pidevuse definitsioonile) sellise $\delta > 0$, et

$$[x, x' \in D,\ |x - x'| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{3.21}$$

Edasi, olgu $(x_n)$ Cauchy jada hulgas $D$, peame veenduma, et $(f(x_n))$ on Cauchy jada. Vastavalt Cauchy jada definitsioonile saame leida $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n, m \geqslant N \Rightarrow |x_n - x_m| < \delta,$$

tingimuse (3.21) põhjal

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \text{ kõikide } n, m \geqslant N \text{ korral.}$$

See tähendabki, et $(f(x_n))$ on Cauchy jada.

(b) Olgu $D \subseteq \mathbb{R}$ *tõkestatud* hulk, eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimust (3.20). Tõestuseks oletame vastuväiteliselt, et $f$ ei ole hulgas $D$ ühtlaselt pidev, ja leiame sellise Cauchy jada $(z_k)$ hulgas $D$, et $(f(z_k))$ ei ole Cauchy jada.

Nii nagu lause 3.27 tõestuses saame valida $\varepsilon_0 > 0$ ja jadad $(x_n)$ ning $(x'_n)$ hulgas $D$ omadusega

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$$

(selgitada!)✠. Kuna $D$ on tõkestatud, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal sisaldab jada $(x_n)$ koonduva osajada $(x_{n_k})$, tähistame $a := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Paneme tähele, et $x_n - x'_n \to 0$ $(n \to \infty)$, seega $x_{n_k} - x'_{n_k} \to 0$ $(k \to \infty)$ ning seosest $x'_{n_k} = x_{n_k} + \left(x'_{n_k} - x_{n_k}\right)$ saame, et $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = a$. Moodustame jada

$$(z_k) := \left(x_{n_1}, x'_{n_1}, x_{n_2}, x'_{n_2}, x_{n_3}, x'_{n_3}, \ldots\right),$$

see koondub hulgas $\mathbb{R}$ piirväärtuseks $a$ (kontrollida!)✠, seega on ta hulgas $D$ Cauchy jada. Arvude $x_n$ ja $x'_n$ valiku kohaselt

$$|f(z_{2k-1}) - f(z_{2k})| = \left|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \geqslant \varepsilon_0 \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

mistõttu $(f(z_k))$ ei ole Cauchy jada. ■

**Näide 3.10.** Veendume lause 3.28 abil veel kord (vrd. näide 3.7), et funktsioon $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ei ole hulgas $(0,1]$ ühtlaselt pidev. Tõepoolest, kui $x_n := \frac{1}{n}$, siis $(x_n)$ on Cauchy jada, kuid $(f(x_n)) = (n)$ ei ole Cauchy jada.

**Näide 3.11.** Lause 3.28(b) ei kehti üldjuhul, kui $D$ ei ole tõkestatud: ruutfunktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ei ole hulgas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev (vrd. näited 3.6 ja 3.9), kuigi iga Cauchy jada $(x_n)$ puhul on $(f(x_n))$ Cauchy jada (kontrollida!)✠.

### 3.5.4 Funktsiooni ühtlane pidevus tõkestamata intervallis

Tähelepanuväärne on järgmine piisav tingimus funktsiooni ühtlaseks pidevuseks tõkestamata intervallis.

**Lause 3.29** *Kui pideval funktsioonil $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ on lõplik piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: A$, siis $f$ on hulgas $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev.*

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, peame veenduma sellise $\delta > 0$ olemasolus, et kehtiks implikatsioon

$$\left[|x - x'| < \delta, \quad x, x' \in [a,\infty)\right] \Rightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon. \tag{3.22}$$

Kuna $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, siis saab valida sellise $M > a$, et

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kõikide } x \geqslant M \text{ korral.}$$

Kasutades asjaolu, et $f$ on pidev lõigus $[a, M+1]$, ning rakendades Cantori teoreemi 3.25, saame leida $\delta_1 > 0$ omadusega

$$\left|x - x'\right| < \delta_1 \Rightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon, \tag{3.23}$$

kui $x, x' \in [a, M+1]$ (selgitada!)✠. Võtame $\delta := \min\{1, \delta_1\}$ ja vaatleme arve $x, x' \in [a, \infty)$, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$. Siis kas $x, x' \in [a, M+1]$ või $x, x' \in [M, \infty)$ (selgitada!)✠. Esimesel juhul tuleneb implikatsioon (3.22) tingimusest (3.23), sest $\delta \leqslant \delta_1$. Teisel juhul

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant |f(x) - A| + \left|f(x') - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(põhjendada!)✠. Väide on tõestatud. ■

**Näide 3.12.** Kuna $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, siis funktsioon

$$f\colon\ [a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x}$$

on iga $a \in \mathbb{R}$ korral intervallis $[a, \infty)$ ühtlaselt pidev.

### 3.5.5 Antud vahemikus ühtlaselt pidevad funktsioonid

Eelpool toodud lihtsa näite 3.7 põhjal võime väita, et poollõigus või vahemikus pidev funktsioon ei pruugi selles intervallis olla ühtlaselt pidev. Küsimusele, *millistel eeldustel on **vahemikus** pidev funktsioon selles vahemikus ühtlaselt pidev,* annab vastuse järgmine lause.

**Lause 3.30** ***(funktsiooni pidevast jätkamisest).*** *Vahemikus $(a, b)$ määratud funktsioon $f$ on selles vahemikus ühtlaselt pidev parajasti siis, kui ta on pidevalt jätkatav lõiku $[a, b]$, s.t. kui leidub selline lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon $\varphi$, et $\varphi(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral.*

**Tõestus.** *Piisavus* (iseseisvalt!)✠.

*Tarvilikkus.* Olgu $f$ vahemikus $(a, b)$ ühtlaselt pidev funktsioon. Näitame, et teda saab *pidevalt* jätkata nii punkti $a$ kui ka punkti $b$. Teisisõnu, peame defineerima uue funktsiooni $\varphi\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$, mis vahemikus $(a, b)$ langeb kokku funktsiooniga $f$ ning oleks punktis $a$ paremalt pidev ja punktis $b$ vasakult pidev.

Olgu $(x_k)$ vahemiku $(a, b)$ punktide suvaline jada, mis koondub arvuks $a$. Sel juhul on ta Cauchy jada (selgitada!)✠ ning kuna $f$ on vahemikus $(a, b)$ ühtlaselt pidev funktsioon, siis lause 3.28(a) järgi on $(f(x_k))$ samuti Cauchy jada. Cauchy kriteeriumi kohaselt eksisteerib $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) =: L$. Näitame, et *seejuures ei sõltu piirväärtus $L$ jada $(x_k)$ valikust.* Tõepoolest, kui ka mingi teine jada $(x'_k)$ vahemikus $(a, b)$ koondub piirväärtuseks $a$, siis jada $(z_j) := (x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \ldots)$ koosneb vahemiku $(a, b)$ punktidest ning koondub arvuks $a$ (kontrollida!)✠. Lause 3.28(a) põhjal on $(f(z_j))$ Cauchy jada, seega eksisteerib $\lim\limits_{j\to\infty} f(z_j) =: L'$. Kuna $(x_k)$ on jada $(z_j)$ osajada, siis $f(x_k) \to L'$ (selgitada!)✠, järelikult $L' = L$ (selgitada!)✠. Niisiis koondub jada $(f(x'_k))$ samuti piirväärtuseks $L$, seega $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = L$ iga sellise vahemiku $(a, b)$ punktide jada $(x_k)$ korral, mis koondub arvuks $a$. Piirväärtuse Heine kriteeriumit silmas pidades, võime väita, et $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$ (vrd. (3.6)).

Analoogiliselt defineerime $M := \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$ (vrd. (3.5)), kus $x_k \in (a, b)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral ja $x_k \to b$. Moodustame uue funktsiooni

$$\varphi\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} L, & \text{kui } x = a, \\ f(x), & \text{kui } x \in (a, b), \\ M, & \text{kui } x = b. \end{cases}$$

Selge, et $\varphi$ on pidev igas punktis $x \in (a, b)$, kuid kuna

$$\varphi(a) = L = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} \varphi(x) \text{ ja } \varphi(b) = M = \lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} \varphi(x),$$

siis on funktsioon $\varphi$ pidev ka punktides $a$ ja $b$. Kokkuvõttes on $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev ning $\varphi(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral. Lause on tõestatud. ■

## 3.6 Pidevate funktsioonide lähendamine trepp- ja tükiti lineaarsete funktsioonidega

### 3.6.1 Lähendamine treppfunktsioonidega

Lõigus $[a, b]$ määratud funktsiooni $h$ nimetame *treppfunktsiooniks*, kui lõigu $[a, b]$ saab jaotada lõplikuks arvuks sellisteks osaintervallideks, milles $h$ on konstantne. Täpsemalt, $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on treppfunktsioon parajasti siis, kui

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \text{ kus } I_i \cap I_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

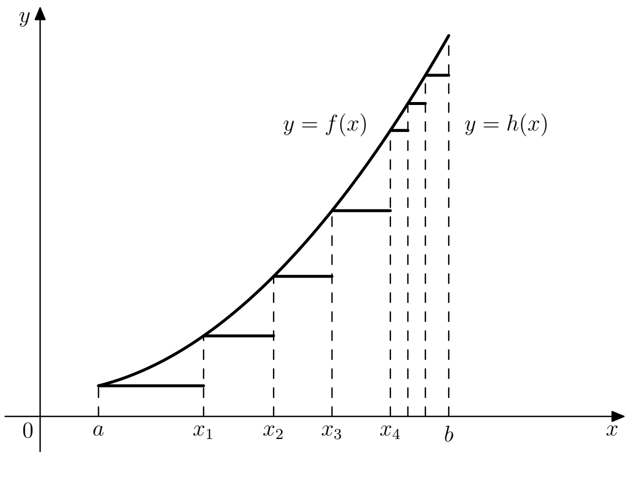
ning $I_1, \ldots, I_n$ on sellised intervallid, et

$$h(x) = c_i \quad (x \in I_i;\ i = 1, \ldots, n).$$

Näiteks täisosa-funktsioonil $h$, kus $h(x) := [x]$, on lõigus $[0, 100]$ 101 erinevat väärtust, ta on tüüpiline treppfunktsioon.

**Lause 3.31** *Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon. Siis iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline treppfunktsioon $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust*

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral.}$$




Joonis 3.9: Pideva funktsiooni $f$ lähendamine treppfunktsiooniga $h$.

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $f$ on Cantori teoreemi kohaselt lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev, siis ühtlase pidevuse definitsiooni kohaselt saab valida positiivse arvu $\delta$ omadusega

$$\left[\left|x - x'\right| < \delta,\ \ x, x' \in [a, b]\right] \Rightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon.$$

Võtame arvu $n \in \mathbb{N}$ nii suure, et $\rho := \frac{b-a}{n} < \delta$, ja jaotame lõigu $[a, b]$ $n$ võrdse pikkusega osaintervallideks

$$I_1 := [a, a+\rho), \quad I_2 := [a+\rho, a+2\rho), \dots, \; I_i := [a+(i-1)\rho, a+i\rho), \dots,$$
$$I_n := [a+(n-1)\rho, a+n\rho] = [b-\rho, b].$$

Defineerime igas osaintervallis $I_i$ konstantse funktsiooni $s_i$ seosega $s_i(x) := f(a+(i-1)\rho) \quad (x \in I_i)$ ning lõigus $[a, b]$ funktsiooni $h$ seosega

$$h(x) := s_i(x), \text{ kui } x \in I_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Sel juhul

$$|f(x) - s_i(x)| = |f(x) - f(a+(i-1)\rho)| < \varepsilon \text{ iga } x \in I_i \text{ korral } \; (i = 1, \dots, n)$$

(põhjendada!)✠, mis tähendab, et $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$ iga $x \in [a, b]$ korral. ■

### 3.6.2 Lähendamine tükiti lineaarsete funktsioonidega

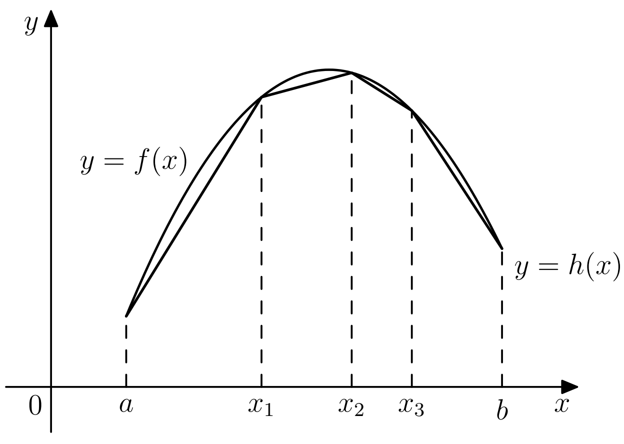
Öeldakse, et funktsioon $h$ on lõigus $[a, b]$ *tükiti lineaarne,* kui lõigu $[a, b]$ saab jaotada lõplikuks arvuks osaintervallideks, milles $h$ on lineaarne. Täpsemalt, funktsioon $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on tükiti lineaarne parajasti siis, kui

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \; I_i \cap I_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

ning $I_1, \dots, I_n$ on sellised intervallid, et

$$h(x) = A_i x + B_i \qquad (x \in I_i),$$

kus $A_i$ ja $B_i$ on iga $i = 1, \dots, n$ puhul konstantsed kordajad. Lihtne on veenduda, et tükiti lineaarne funktsioon $h$ on pidev parajasti siis, kui ta graafik on pidev murdjoon.




Joonis 3.10: Pideva funktsiooni $f$ lähendamine tükiti lineaarse funktsiooniga $h$.

**Lause 3.32** *Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon. Siis leidub iga $\varepsilon > 0$ jaoks lõigus $[a, b]$ pidev tükiti lineaarne funktsioon $h$, mis rahuldab tingimust*

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon \text{ \textit{iga} } x \in [a, b] \text{ \textit{korral.}} \tag{3.24}$$

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon > 0$. Samuti nagu eelmise väite tõestuses leiame $\delta > 0$ tingimusega

$$\left[\left|x - x'\right| < \delta,\ \ x, x' \in [a,b]\right] \Rightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon/2$$

ja moodustame intervallid $I_1, \ldots, I_n$ täpselt samamoodi, kui eelmises tõestuses. Igas intervallis $I_i$ defineerime lineaarse funktsiooni $s_i$ selliselt, et tema graafik ühendaks funktsiooni $f$ graafiku punkte

$$(a + (i-1)\rho,\ f(a + (i-1)\rho)) \text{ ja } (a + i\rho,\ f(a + i\rho)).$$

Funktsioon $h$ defineeritakse seosega

$$h(x) = s_i(x) \quad (x \in I_i;\ i = 1, \ldots, n).$$

Analüütiliselt esitatakse funktsioon $h$ valemiga

$$h(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \qquad (x \in I_i;\ i = 1, \ldots, n),$$

kus $x_i := a + i\rho$ on lõigu jaotuspunktid. Siis iga $x \in [a,b]$ korral leidub selline $i \in \{1, \ldots, n\}$, et $x \in I_i$, seega

$$\begin{aligned}
|f(x) - h(x)| &= \left|f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})\right| \\
&\leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \frac{|x - x_{i-1}|}{|x_i - x_{i-1}|} \\
&\leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vahetu kontroll näitab, et
1) igas intervallis $I_i$ on funktsioon $h$ lineaarne (veenduda!)✠ ja
2) punktides $x_i$ on $h$ pidev.
Väite 2) kontrollimiseks paneme tähele, et

$$\lim_{x \to x_i-} h(x) = \lim_{x \to x_i+} h(x) = f(x_i)$$

(kontrollida!)✠, seega on funktsioon $h$ tõepoolest pidev igas jaotuspunktis $x_i$. Kokkuvõttes on $h$ pidev funktsioon, mis rahuldab tingimust (3.24). ■

## 3.7 Heine-Boreli lemma

### 3.7.1 Heine-Boreli lemma

Reaalarvude omadus, mida kirjeldab alljärgnev väide, on lähtepunktiks olulisele ja ulatuslikule uurimissuunale üldises topoloogias – kompaktsete ruumide teooriale.

**Teoreem 3.33** ***(Heine-Boreli lemma).*** *Kui arvsirge lõik $[a,b]$ on kaetud lõpmatu arvu vahemikega, siis nende hulgast saab valida lõpliku arvu vahemikke, mis katavad lõigu $[a,b]$.*

**Tõestus.** Olgu $\Delta$ niisugune vahemikest $S$ koosnev lõpmatu hulk, mis katab lõigu $[a,b]$, niisiis, $[a,b] \subseteq \bigcup\{S \mid S \in \Delta\}$. Meie eesmärk on veenduda, et hulk $\Delta$ sisaldab niisuguse *lõpliku* alamhulga $\Delta_0 \subseteq \Delta$, millesse kuuluvad vahemikud samuti katavad $[a,b]$, s.t. $[a,b] \subseteq \bigcup\{S \mid S \in \Delta_0\}$.

Olgu $X$ kõigi niisuguste arvude $x \in [a, b]$ hulk, et lõiku $[a, x]$ saab katta lõpliku arvu vahemikega hulgast $\Delta$, s.t.

$$X := \left\{ x \in [a, b] \mid \text{leidub lõplik } \Delta_x \subseteq \Delta : [a, x] \subseteq \bigcup \{ S \mid S \in \Delta_x \} \right\}.$$

Märgime, et
1) $X$ ei ole tühihulk, sest $a \in X$ (põhjendada!)✠ ning
2) kui $x \in X$ ja $a \leqslant z \leqslant x$, siis $z \in X$ (selgitada!)✠.
Väide on tõestatud, kui oleme veendunud, et $b \in X$.

Selge, et $b$ on hulga $X$ ülemine tõke, seetõttu saame rakendada pidevuse aksioomi, mille kohaselt eksisteerib $c := \sup X$. Näitame kõigepealt, et $c \in X$. Kuna $X \subseteq [a, b]$, siis $c \in [a, b]$ (põhjendada!)✠. Seega leidub niisugune vahemik $S_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \Delta$, et $c \in S_0$. Paneme tähele, et vahemik $S_0$ peab sisaldama mingi punkti $x_0$ hulgast $X$, s.t. $x_0 \in S_0 \cap X$: kui oletada, et $S_0 \cap X = \varnothing$, siis $\alpha_0$ oleks hulga $X$ ülemine tõke, mis seose $\alpha_0 < c$ tõttu on vastuolus sellega, et $c$ on hulga $X$ ülemine raja. Hulga $X$ definitsiooni kohaselt leidub lõplik alamhulk $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subseteq \Delta$ omadusega $[a, x_0] \subseteq \bigcup \{S_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$, siis $[a, c] \subseteq \bigcup \{S_k \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ (põhjendada!)✠, niisiis, $c \in X$.

Näitame, et $c = b$. Oletame vastuväiteliselt, et $c < b$, siis eelpool vaadeldud vahemikus $S_0$ leidub mingi punkt $x^*$ omadusega $x^* > c$, $x^* \in [a, b]$. Kuid sel juhul $x^* \in X$ (põhjendada!)✠, mis on vastuolus tõsiasjaga, et $c$ on hulga $X$ ülemine raja. Tähendab, $b = c \in X$, mida me tahtsimegi tõestada. ■

### 3.7.2 Bolzano–Cauchy teoreemide tõestus Heine-Boreli lemma abil

Käesoleva peatüki punktis 3.2 tõestasime Bolzano–Cauchy teoreemi vahepealsetest väärtustest (teoreem 3.13), mis väidab, et *kui arvud $y_1$ ja $y_2$*, kus $y_1 \neq y_2$, *on mingis intervallis pideva funktsiooni $f$ väärtused, siis iga arv $A$, mis asub arvude $y_1$ ja $y_2$ vahel, on samuti funktsiooni $f$ väärtus.* See teoreem järeldub otseselt teoreemist lõigus pideva funktsiooni nullkohast (teoreem 3.11): *kui lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni $f$ väärtused lõigu otspunktides on erinevate märkidega, siis leidub vahemikus $(a, b)$ punkt $c$ omadusega $f(c) = 0$.* Teoreemi 3.11 tõestus oli üles ehitatud teoreemile sisestatud lõikudest (vt. teoreem 2.18).

Järgnevalt näitame, et teoreemi 3.11 (seega ka teoreemi 3.13) võib vaadelda järeldusena Heine–Boreli lemmast.

*Teoreemi 3.11 tõestus.* Eeldame, et funktsioon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev ning (konkreetsuse mõttes) $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Oletame vastuväiteliselt, et $f(x) \neq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Funktsiooni pidevuse definitsioonist tuleneb järgmine väide:
*kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis $z$ ja $f(z) > 0$ ($f(z) < 0$) siis leidub punktil $z$ selline ümbrus $U_\delta(z)$, et $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) iga $x \in U_\delta(z) \cap D$ korral*
(tõestada!)✠. Selle väite ning meie vastuväitelise oletuse kohaselt saab iga $x \in [a, b]$ jaoks leida talle vastava $\delta_x > 0$ nii, et funktsioon $f$ säilitab märki hulgas $U_{\delta_x}(x) \cap [a, b]$ (põhjendada!)✠. On selge, et $[a, b] \subseteq \bigcup \{U_{\delta_x}(x) \mid x \in [a, b]\}$, niisiis on lõik $[a, b]$ kaetud vahemikega $U_{\delta_x}(x)$ $(x \in [a, b])$. Teoreemi 3.33 kohaselt leiduvad punktid $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ lõigus $[a, b]$ nii, et

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{\delta_{x_k}}(x_k).$$

Sealjuures, võime eeldada, et $U_{\delta_{x_i}}(x_i) \cap U_{\delta_{x_{i+1}}}(x_{i+1}) \neq \varnothing$ iga $i = 1, \ldots, n-1$ puhul (miks?)✠. Kuna $a \in U_{\delta_{x_1}}(x_1)$ ning $f(a) < 0$ ja $f$ säilitab hulgas $U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cap [a, b]$ märki, siis $f(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cap [a, b]$ korral. Sellest, et $f$ säilitab hulgas $U_{\delta_{x_2}}(x_2) \cap [a, b]$ märki ja $U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cap U_{\delta_{x_2}}(x_2) \neq \varnothing$, tuleneb, et $f(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_{x_2}}(x_2) \cap [a, b]$ korral. Korrates sama mõttekäiku $n$ korda, jõuame tulemuseni, et $f(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_{x_n}}(x_n) \cap [a,b]$ korral. Kuid see on vastuolus meie eeldusega $f(b) > 0$, sest $b \in U_{\delta_{x_n}}(x_n) \cap [a,b]$. Saadud vastuolu kinnitab funktsiooni $f$ nullkoha olemasolu.

### 3.7.3 Weierstrassi teoreemide tõestus Heine–Boreli lemma abil

Punktis 3.2 tõestatud Weierstrassi teoreemid väidavad, et *iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud* (teoreem 3.15) ja *ta saavutab selles lõigus oma suurima ja vähima väärtuse* (teoreem 3.16). Teoreem 3.16 tuleneb teoreemist 3.15, mille tõestuseks rakendatakse Bolzano-Weierstrassi teoreemi.

Me näitame järgnevalt, et teoreem 3.15 (siis ka teoreem 3.16) on tuletatav Heine-Boreli lemmast.

*Teoreemi 3.15 tõestus.* Eeldame, et funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev, olgu $\varepsilon > 0$. Iga $x \in [a,b]$ korral saab valida tema sellise ümbruse $U_{\delta_x}(x)$, et

$$f(x) - \varepsilon < f(z) < f(x) + \varepsilon \text{ kõikide } z \in U_{\delta_x}(x) \cap [a,b] \text{ korral} \tag{3.25}$$

(selgitada!)✠. Kuna $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{x\in[a,b]} U_{\delta_x}(x)$, siis on lõik $[a,b]$ kaetud vahemikega $U_{\delta_x}(x)$. Heine-Boreli lemma põhjal saab lõigus $[a,b]$ valida punktid $x_1, x_2, \ldots, x_n$ omadusega

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{\delta_{x_k}}(x_k).$$

Seejuures on funktsioon $f$ seoste (3.25) tõttu igas hulgas $U_{\delta_{x_k}}(x_k) \cap [a,b]$ tõkestatud (selgitada!)✠, mistõttu leiduvad arvud $m_k$ ja $M_k$, et

$$m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k \quad \bigl(x \in U_{\delta_{x_k}}(x_k) \cap [a,b], \quad k = 1, \ldots, n\bigr).$$

Tähistame $m := \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} m_k$ ja $M := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} M_k$, siis

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (x \in [a,b])$$

(selgitada!)✠. Seega on funktsioon $f$ lõigus $[a,b]$ tõkestatud.

**Märkus.** Ka teoreemi 3.16 saab tõestada Heine–Boreli lemma abil. Nimelt, olgu $f$ tõkestatud lõigus $[a,b]$, olgu $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ning oletame väitevastaselt, et $f(x) < M$ iga $x \in [a,b]$ korral. Iga $x \in [a,b]$ jaoks olgu valitud $\varepsilon_x \in (0, M - f(x))$. Kuna $f$ on pidev lõigus $[a,b]$, siis iga $x \in [a,b]$ jaoks leidub $\delta_{\varepsilon_x} > 0$ omadusega, et $f(z) < f(x) + \varepsilon_x < M$, kui $z \in U_{\delta_{\varepsilon_x}}(x) \cap [a,b]$. Nüüd Heine–Boreli lemma võimaldab lõigu $[a,b]$ kattest $\bigcup\{U_{\delta_{\varepsilon_x}} : x \in [a,b]\}$ eraldada lõpliku alamkatte $\bigcup\Bigl\{U_{\delta_{\varepsilon_{x_k}}} : k = 1, \ldots, n\Bigr\} \supseteq [a,b]$. Niisiis osutub, et iga $z \in [a,b]$ jaoks $f(z) < \max\{f(x_k) + \varepsilon_{x_k} : k = 1, \ldots, n\} < M$, mis on vastuolus sellega, et $M$ on $f$ väärtuste hulga vähim ülemine tõke.

### 3.7.4 Cantori teoreemi tõestus Heine–Boreli lemma abil

Cantori teoreem (vt. teoreem 3.25), mis väidab, et *iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev,* on oluline abivahend matemaatilise analüüsi paljude tulemuste tõestamisel. Punktis 3.3 esitatud tõestus toetub Bolzano-Weierstrassi teoreemile.

Näitame järgnevalt, et Cantori teoreemi saab suhteliselt lihtsalt tõestada Heine-Boreli lemma abil.

*Teoreemi* 3.25 tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev. Olgu $\varepsilon > 0$. Meie eesmärgiks on näidata niisuguse $\delta > 0$ olemasolu, et $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, kui $x, x' \in [a,b]$ ja $|x - x'| < \delta$ (vrd. ühtlase pidevuse definitsioon alapunktis 3.5).

Pidevuse definitsioonist tulenevalt saame iga $x \in [a,b]$ puhul fikseerida arvu $\delta_x > 0$ nii, et

$$|f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kõikide } z \in U_{\delta_x}(x) \cap [a,b] \text{ korral.} \tag{3.26}$$

Paneme tähele, et kui $x' \in U_{\delta_x}(x) \cap [a,b]$, siis

$$\left|f(x') - f(z)\right| < \varepsilon \quad (z \in U_{\delta_x}(x) \cap [a,b])$$

(kontrollida!)✠. Vaatleme punktide $x$ ümbrusi $U_{\frac{\delta_x}{2}}(x) = \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right)$. Kuna

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{x \in [a,b]} U_{\frac{\delta_x}{2}}(x),$$

siis Heine-Boreli lemma põhjal leiduvad punktid $x_1, x_2, \ldots, x_n$ omadusega

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{\frac{\delta_{x_k}}{2}}(x_k).$$

Tähistame $\delta := \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\delta_{x_k}}{2}$, rahuldagu punktid $x, x' \in [a,b]$ tingimust $|x - x'| < \delta$. On selge, et $x' \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\frac{\delta_{x_k}}{2}}(x_k)$, seega

$$x' \in \left(x_{k_0} - \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2}, x_{k_0} + \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2}\right) \cap [a,b] \subseteq U_{\delta_{x_{k_0}}}(x_{k_0}) \cap [a,b]$$

mingi $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Kuna

$$|x - x_{k_0}| \leqslant \left|x - x'\right| + \left|x' - x_{k_0}\right| < \delta + \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2} \leqslant \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2} + \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2} = \delta_{x_{k_0}},$$

siis

$$x \in \left(x_{k_0} - \delta_{x_{k_0}}, x_{k_0} + \delta_{x_{k_0}}\right) \cap [a,b] = U_{\delta_{x_{k_0}}}(x_{k_0}) \cap [a,b],$$

ning seose (3.26) kohaselt

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant |f(x) - f(x_{k_0})| + \left|f(x_{k_0}) - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teoreem on tõestatud.

# 4 Diferentseeruvad funktsioonid

## 4.1 Diferentseeruvuse mõiste ja diferentseerimisreeglid

### 4.1.1 Tuletis, selle geomeetriline ja analüütiline tähendus

Olgu $D \subseteq \mathbb{R}$. Olgu $a \in D$ selline, et leidub ***intervall*** $X$ omadusega $a \in X \subseteq D$. Vaatleme funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$.

**Definitsioon.** Funktsiooni $f$ *tuletiseks* punktis $a \in D$ (*derivative, производная*) nimetatakse piirväärtust

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{4.1}$$

Kui piirväärtus $f'(a)$ on lõplik, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on *diferentseeruv* (*differentiable, дифференцируемая*) punktis $a \in D$. Kui eksisteerib ühepoolne piirväärtus

$$f'_{-}(a) := \lim_{x\to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad \text{või} \quad f'_{+}(a) := \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a},$$

siis kõneldakse vastavalt *vasak*- ja *parempoolsest tuletisest* kohal $a$.

**Definitsioon.** Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *diferentseeruv*, kui ta on diferentseeruv igas punktis $x \in D$. Funktsiooni $f'\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse sel juhul funktsiooni $f$ *tuletiseks* ehk *tuletisfunktsiooniks*.

Olgu $D_1 \subseteq D$. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *diferentseeruv hulgas* $D_1$, kui ahend $f|_{D_1}\colon D_1 \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv.

Me kasutame allpool funktsiooni $f$ (või avaldise $f(x)$) tuletise tähistamiseks tihti ka kirjutusviisi $(f(x))'$, näiteks (vt. näide 4.6))

$$(\sin x)' = \cos x \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Kui funktsioon $f'$ on hulgas $D$ diferentseeruv, siis tähistame $f^{(2)} := f'' := (f')'$, seda funktsiooni nimetatakse funktsiooni $f$ *teiseks* ehk *teist järku tuletiseks hulgas* $D$. Kui $f''$ on hulgas $D$ diferentseeruv, siis $f^{(3)} := f''' := (f'')'$ on funktsiooni $f$ *kolmas ehk kolmandat järku tuletis hulgas* $D$, jne. Üldjuhul tähistame funktsiooni $n$-dat järku tuletist sümboliga $f^{(n)}$.

**Lause 4.1** *Kui funktsioon $f$ on punktis $a \in D$ diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

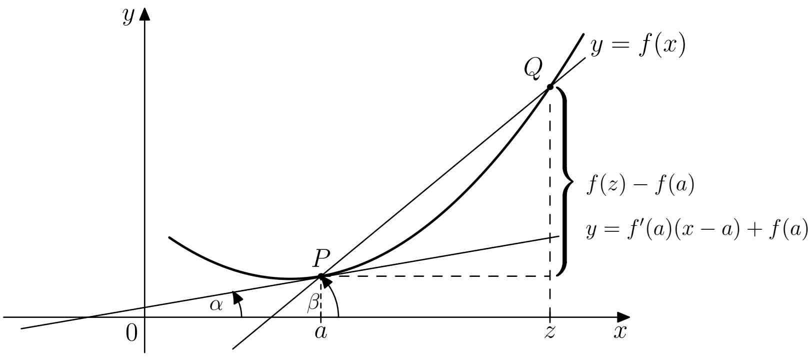
Meenutame diferentseeruvuse mõiste ***geomeetrilist sisu.*** Tõmbame läbi funktsiooni $f$ graafiku punktide $P = (a, f(a))$ ja $Q = (x, f(x))$ lõikaja (vt. joonis 4.1), see on määratud võrrandiga

$$Y = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(X - a), \tag{4.2}$$

kus $(X, Y)$ on vaadeldava sirge punkt (selgitada!)✠. Eeldame, et funktsioon $f$ on kohal $a$ diferentseeruv, siis protsessis $x \to a$ graafiku punkt $Q$ läheneb punktile $P$ (põhjendada!)✠, seejuures saab võrrand (4.2) kuju

$$Y = f(a) + f'(a)(X - a).$$

Sellega määratud sirget nimetatakse funktsiooni $f$ graafiku *puutujaks* punktis $P$. Niisiis, kohal $a$ diferentseeruva funktsiooni $f$ korral defineeritakse tema graafiku punktis $(a, f(a))$ puutuja kui punkte $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$ läbiva lõikaja piirseis protsessis $x \to a$, tuletis $f'(a)$ on võrdne puutuja tõusuga, s.t. tõusunurga tangensiga (vt. joonis 4.1). Seega iseloomustab diferentseeruvat funktsiooni tema graafiku teatav siledus, asjaolu, et graafik on "ilma nurkadeta".




Joonis 4.1: Diferentseeruva funktsiooni graafiku puutuja.

Funktsiooni diferentseeruvuse mõiste ***analüütiline sisu*** avaldub järgmise lausena.

**Lause 4.2** *Funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on kohal $a \in D$ diferentseeruv parajasti siis, kui leidub reaalarv $A$ ja funktsioon $\alpha \in o(x-a)$ (protsessis $x \to a$) nii, et iga $x \in D$ korral kehtib valem*

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + \alpha(x). \tag{4.3}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et $f$ on punktis $a$ diferentseeruv. Valime $A := f'(a)$ ja $\alpha(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a)$. Nüüd $\alpha \in o(x-a)$ ning iga $x \in D$ korral valem (4.3) kehtib (selgitage!)✠.

*Piisavus.* Saame, et

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \frac{\alpha(x)}{x-a}.$$

Kuna $\alpha \in o(x-a)$ protsessis $x \to a$, siis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$

(selgitage!)✠, mistõttu $f'(a) = A$ ja järelikult $f$ on diferentseeruv punktis $a$. ■

Lause 4.2 väidab järgmist: $f$ diferentseeruvus kohal $a$ on samaväärne sellega, et leidub $A \in \mathbb{R}$ nii, et leiab aset koondumine (selgitage!✠):

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_1(x)}{x-a} = 0, \tag{4.4}$$

kus $T_1(x) = f(a) + A \cdot (x-a)$. Sealjuures on arvu $A$ rollis sel juhul arv $f'(a)$.

Koondumisest (4.4) järeldub, et kehtib ka koondumine

$$\lim_{x\to a}(f(x)-T_1(x))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_1(x)}{x-a}\cdot(x-a)=0.$$

Niisiis, kui $f$ on diferentseeruv kohal $a$, on $f$ punkti $a$ ümbruses lähendatav lineaarfunktsiooniga $T_1$.

Kõrgemat järku polünoomidega lähendamist punkti $a$ ümbruses (kasutades sobivat järku diferentseeruvust) uuritakse alapeatükis „Taylori valem“ (vt. 4.3).

Tuletise definitsioonist lähtudes leitakse lihtsamate elementaarfunktsioonide tuletised. Näiteks,
1) konstantse funktsiooni $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto c$ puhul $f'(x)=0$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral (kontrollige!)✠,
2) $(cx+d)'=c$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral (kontrollige!)✠,
3) $(x^n)'=nx^{n-1}$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral (kontrollige!)✠.
Seevastu absoluutväärtusega määratud funktsioonil $x\mapsto|x|$ ei ole punktis $a=0$ tuletist (veenduge!)✠.

**Näide 4.1.** Leiame eksponentfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \mathrm{e}^x$$

tuletise. Selleks arvutame suvalise $a\in\mathbb{R}$ puhul piirväärtuse[3]

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{a+h}-\mathrm{e}^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^a\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^a}{h}=\mathrm{e}^a\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\mathrm{e}^a,$$

niisiis,

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x \text{ iga } x\in\mathbb{R} \text{ korral.}$$

**Näide 4.2.** Siinusfunktsiooni

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \sin x$$

jaoks (vt. ptk. 6.7) kehtib võrdus $\sin(x+y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$, millest järeldame, et $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ ning seetõttu

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos a,\end{aligned}$$

s.t.

$$(\sin x)'=\cos x \text{ iga } x\in\mathbb{R} \text{ korral.}$$

Analoogiliselt veendutakse, et $(\cos x)'=-\sin x$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral (kontrollida!)✠.

[3]Piirväärtuse $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ arvutamiseks teeme muutujavahetuse $z:=\mathrm{e}^h-1$, siis $h=\ln(z+1)$. Kui $h\to 0$, siis ka $z\to 0$, ning $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)}=1$.

### 4.1.2 Tehetega seotud diferentseerimisreeglid

**Lause 4.3** *Kui funktsioonid* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *on punktis* $a$ *diferentseeruvad, siis ka funktsioonid* $f+g$ *ja* $f-g$ *on selles punktis diferentseeruvad ning* $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Lause 4.4** *Kui funktsioon* $f$ *on punktis* $a$ *diferentseeruv, siis ka funktsioon* $\lambda f$ *on iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *korral selles punktis diferentseeruv ning* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Lause 4.5** *Kui funktsioonid* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *on punktis* $a$ *diferentseeruvad, siis ka nende korrutis* $fg$ *on selles punktis diferentseeruv funktsioon ning* $(fg)'(a) = f(a)\,g'(a) + f'(a)\,g(a)$.

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Lause 4.6** *Kui funktsioonid* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *on punktis* $a$ *diferentseeruvad ning* $g(a) \neq 0$, *siis ka funktsioon*

$$\frac{f}{g}\colon D' \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

*kus* $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, *on selles punktis diferentseeruv ja*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.$$

**Tõestus.** Paneme tähele, et hulk $D'$ ei pruugi olla intervall, kuid ilmselt on $a$ mingi alamintervalli $D'' \subseteq D'$ sisepunkt või otspunkt: kuna $g(a) \neq 0$, siis kehtib kas $g(a) < 0$ või $g(a) > 0$, seega saame valida sellise $\delta > 0$, et $D'' := (a-\delta, a+\delta) \subseteq D'$ (otspunkti korral $D'' := [a, a+\delta)$ või $D'' := (a-\delta, a]$) ja $g(x) < 0$ (vastavalt $g(x) > 0$) iga $x \in D''$ korral (selgitada!)✠.

Vaatleme algul juhtu, kus $f$ on konstantne funktsioon väärtusega 1, siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)\,g(a)} \frac{g(a)-g(x)}{x-a} = \frac{1}{g(a)^2}\left(-g'(a)\right).\end{aligned}$$

Sellest valemist saame lauset 4.5 rakendades, et

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f'(a)\,\frac{1}{g}(a) \\ &= f(a)\,\frac{-g'(a)}{g(a)^2} + f'(a)\,\frac{1}{g(a)} \\ &= \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Loetletud diferentseerimisreegleid rakendades on lihtne veenduda✠, et
1) iga polünoom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ on igas punktis $x \in \mathbb{R}$ diferentseeruv ning $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$,
2) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ iga $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} \pm k\pi \mid k = 0, 1, 2, \ldots\right\}$ korral,
3) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ iga $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm k\pi \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$ korral.

### 4.1.3 Liitfunktsiooni ja pöördfunktsiooni diferentseerimine

Järgmine lause esitab eeskirja kahest komponendist koosneva liitfunktsiooni diferentseeruvuseks, analoogiline eeskiri on meile hästi tuntud ka suurema arvu komponentide puhul. Seda eeskirja nimetatakse ka *ahelareegliks.*

**Lause 4.7** *Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ kohal $a \in D$ diferentseeruv. Kui $f(x) \in E$ iga $x \in D$ korral ja funktsioon $h\colon E \to \mathbb{R}$ on punktis $b := f(a)$ diferentseeruv, siis ka liitfunktsioon*

$$h \circ f\colon D \to \mathbb{R}, \quad h \circ f(x) := h(f(x))$$

*on punktis $a$ diferentseeruv ja*

$$(h \circ f)'(a) = h'(b)\, f'(a).$$

**Tõestus.** Eeldame, et funktsioon $u = f(x)$ on kohal $a$ ja funktsioon $y = h(u)$ kohal $b = f(a)$ diferentseeruv. Meie eesmärgiks on veenduda, et

$$\lim_{x \to a} \frac{h \circ f(x) - h \circ f(a)}{x - a} = h'(f(a))\, f'(a).$$

Defineerime abifunktsiooni

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \quad \varphi(u) := \begin{cases} \frac{h(u)-h(b)}{u-b}, & \text{kui } u \neq b, \\ h'(b), & \text{kui } u = b. \end{cases}$$

Kuna funktsioon $h$ on punktis $b$ diferentseeruv, siis $\varphi$ on kohal $b$ pidev:

$$\lim_{u \to b} \varphi(u) = \lim_{u \to b} \frac{h(u) - h(b)}{u - b} = h'(b) = \varphi(b). \tag{4.5}$$

Kuna funktsioon $f$ on kohal $a$ diferentseeruv, siis lause 4.1 kohaselt on ta selles punktis pidev. Et funktsioon $\varphi$ on pidev kohal $b = f(a)$, siis liitfunktsioon $\varphi \circ f$ on lause 3.10 põhjal pidev punktis $a$, seega

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)). \tag{4.6}$$

Paneme tähele, et

$$h(u) - h(b) = \varphi(u)(u - b) \text{ iga } u \in E \text{ puhul,}$$

niisiis

$$h(f(x)) - h(f(a)) = \varphi(f(x))(f(x) - f(a)) \text{ iga } x \in D \text{ korral.} \tag{4.7}$$

Seostest (4.7) ja (4.6) saame, et

$$\begin{aligned}(h\circ f)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{h\circ f(x)-h\circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{h(f(x))-h(f(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\varphi(f(x))\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\varphi(f(x))\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= \varphi(f(a))\,f'(a) = h'(f(a))\,f'(a).\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Teiseks tõestame ***pöördfunktsiooni diferentseerimise reegli.*** Meenutame, et kui $f\colon D\to\mathbb{R}$ on hulgas $D$ rangelt monotoonne funktsioon, siis tal on rangelt monotoonne pöördfunktsioon $g := f^{-1}$ (vt. lause 3.18). Kui seejuures $D$ on intervall ja $f$ on pidev, siis tema väärtuste hulk $R := \{f(x)\mid x\in D\}$, mis on pöördfunktsiooni $g$ määramispiirkond, on samuti intervall (vrd. teoreem 3.13).

**Lause 4.8** *Olgu pidev rangelt monotoonne funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$ punktis $a$ diferentseeruv. Pöördfunktsioon $g\colon D'\to\mathbb{R}$ on punktis $b := f(a)$ diferentseeruv parajasti siis, kui $f'(a)\neq 0$. Sel juhul*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{4.8}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et pöördfunktsioon $g$ on punktis $b = f(a)$ diferentseeruv. Kuna $g(f(x)) = x$ iga $x\in D$ korral, siis lause 4.7 kohaselt $g'(f(a))\,f'(a) = (g\circ f)'(a) = 1$. Siit järeldub, et $f'(a)\neq 0$ ja kehtib võrdus (4.8)

*Piisavus.* Olgu $f'(a)\neq 0$. Peame silmas, et $f(x)\neq f(a)$ iga $x\in D\setminus\{a\}$ korral, seega on funktsioon

$$F\colon D\setminus\{a\}\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

korrektselt defineeritud, kusjuures $\lim\limits_{x\to a}F(x) = \frac{1}{f'(a)}$ (selgitada!)✠. Tähistades $y = f(x)$ (seega $x = g(y)$) ja pidades silmas, et funktsioon $g$ on pidev punktis $b$ (põhjendada!)✠, saame seose $\lim\limits_{y\to b}x = \lim\limits_{y\to b}g(y) = a$. Niisiis,

$$\lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \lim_{x\to a}F(x) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Lause on tõestatud. ■

**Näide 4.3.** Leiame valemi (4.8) abil logaritmfunktsiooni

$$f\colon\ (0,\infty)\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto\ln x$$

tuletise. Kuna $y = f(x)$ on eksponentfunktsiooni

$$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ y\mapsto\mathrm{e}^y$$

pöördfunktsioon, siis lause 4.8 kohaselt

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}\ \ \text{iga } x\in(0,\infty)\ \text{korral.}$$

**Näide 4.4.** Kuna

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \arcsin x$$

on pideva rangelt kasvava funktsiooni

$$g\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]\,, \ \ y \mapsto \sin y$$

pöördfunktsioon, siis valemi (4.8) kohaselt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \text{ iga } x \in (-1,1) \text{ korral.}$$

Analoogiliselt tuletatakse valemid

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1))$$

ning

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \ \text{ ja } \ (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(kontrollida!)✠.

## 4.2 Diferentseeruvuse keskväärtusteoreemid, nende rakendused

### 4.2.1 Fermat' ja Rolle'i teoreem

Alustame olulise tähelepanekuga ***tuletise seosest funktsiooni ekstreemumitega.***

**Definitsioon.** Öeldakse, et funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ *suurim (vähim) väärtus* ehk *globaalne maksimum (miinimum)* (*global, absolute maximum, абсолютный максимум*), kui iga $x \in D$ korral kehtib võrratus $f(x) \leqslant f(a)$ (vastavalt $f(x) \geqslant f(a)$ iga $x \in D$ korral).

Kui funktsiooni $f$ määramispiirkonna $D$ sisepunktil $a$ on ümbrus $U_\delta(a)$ omadusega

$$f(x) \leqslant f(a) \ \text{ iga } x \in U_\delta(a) \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et funktsioonil $f$ on punktis $a$ *lokaalne maksimum* (*local, relative maximum, локальный максимум*). Kui $f(x) \geqslant f(a)$ iga $x \in U_\delta(a)$ korral, siis kõneldakse *lokaalsest miinimumist.* Kui funktsioonil on vaadeldavas punktis kas lokaalne maksimum või lokaalne miinimum, siis öeldakse, et tal on *lokaalne ekstreemum.*

**Lause 4.9** ***(Fermat' teoreem, tarvilik tingimus lokaalseks ekstreemumiks).*** *Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ intervalli $D$ sisepunktis $a$ diferentseeruv ning olgu tal selles punktis lokaalne ekstreemum. Siis $f'(a) = 0$.*

**Tõestus.** Konkreetsuse mõttes olgu funktsioonil $f$ punktis $a$ lokaalne maksimum. Olgu $\delta > 0$ selline arv, et $f(x) \leqslant f(a)$ iga $x \in U_\delta(a)$ korral. Siis

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \geqslant 0 \text{ kõikide } x \in (a-\delta, a) \text{ korral}$$

ja

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0 \text{ kõikide } x \in (a, a+\delta) \text{ korral}$$

(selgitada!)✠. Diferentseeruvuse eelduse tõttu eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \text{ ja } \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$$

(põhjendada!)✠. Kuna need peavad olema võrdsed, siis $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$.

Lokaalse miinimumi korral on tõestus analoogiline. ■

*Geomeetriliselt* tähendab lause 4.9 väide seda, et kui punktis $a$ diferentseeruval funktsioonil on selles punktis lokaalne ekstreemum, siis tema graafikule punktis $(a, f(a))$ võetud puutuja on paralleelne $x$-teljega (selgitada!)✠. Rõhutame, et tegemist on vaid ***tarviliku***, üldjuhul mitte piisava tingimusega, lihtsaks *kontranäiteks* on funktsioon $y = x^3$ (kontrollida!)✠.

**Lause 4.10** ***(Rolle'i teoreem).*** *Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon, mis vahemikus $(a, b)$ on diferentseeruv. Kui $f(a) = f(b)$, siis leidub selline $c \in (a, b)$, et $f'(c) = 0$.*

**Tõestus.** Kui $f$ on seejuures konstantne funktsioon, siis $f'(x) = 0$ iga $x \in (a, b)$ puhul. Mittekonstantse funktsiooni $f$ korral märgime kõigepealt seda, et Weierstrassi teoreemi kohaselt (vt. teoreem 3.16) on funktsioonil $f$ lõigus $[a, b]$ nii globaalne maksimum kui ka miinimum. Kuna $f$ ei ole konstantne, siis peab vähemalt üks neist ekstreemumitest olema vahemikus $(a, b)$ (selgitada!)✠, olgu see punktis $c \in (a, b)$. Lause 4.9 põhjal $f'(c) = 0$. ■

*Geomeetriliselt* tähendab Rolle'i teoreemi väide seda, et kui lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus $(a, b)$ diferentseeruva funktsiooni $f$ graafiku punkte $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ läbib selline lõikaja, mis on $x$-teljega paralleelne, siis on nende vahel selline graafiku punkt $(c, f(c))$, milles võetud puutuja on $x$-teljega paralleelne.

### 4.2.2 Lagrange'i keskväärtusteoreem ja funktsiooni monotoonsusomadused

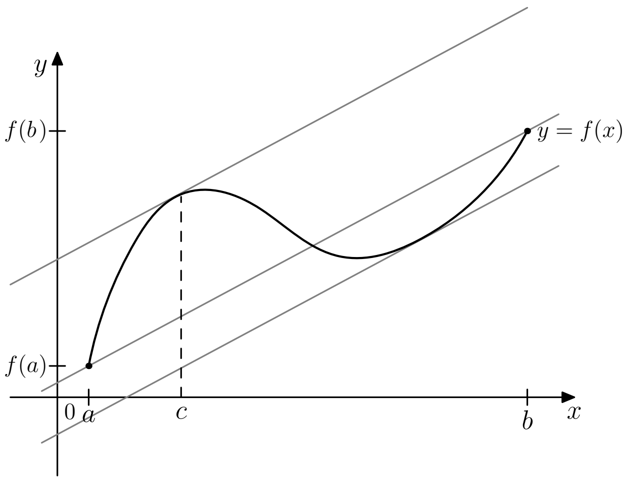
Ei ole põhjust arvata, et Rolle'i teoreemi väide kehtib vaid $x$-teljega paralleelsete lõikajate ja puutujate puhul. Järgmine lause – Lagrange'i keskväärtusteoreem – ütlebki, et lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus $(a, b)$ diferentseeruva funktsiooni $f$ korral saab vähemalt ühes graafiku punktis $(c, f(c))$ võtta puutuja, mis on paralleelne läbi punktide $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ tõmmatud lõikajaga (vt. joonis 4.2).

**Lause 4.11** ***(Lagrange'i keskväärtusteoreem).*** *Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon, mis vahemikus $(a, b)$ on diferentseeruv. Siis leidub selline $c \in (a, b)$, et*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{4.9}$$

**Tõestus.** Defineerime abifunktsiooni $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$




Joonis 4.2: Lagrange'i keskväärtusteoreem.

See on lõigus $[a, b]$ pidev (põhjendada!)✠ ning vahemikus $(a, b)$ diferentseeruv:

$$g'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x \in (a, b)).$$

Kuna seejuures $g(a) = g(b)$ (veenduda!)✠, siis saame funktsioonile $g$ rakendada Rolle'i teoreemi. Selle kohaselt leidub niisugune punkt $c \in (a, b)$, et

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

s.t. kehtib (4.9). ■

Tingimus (4.9) esitatakse tihti kujul

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)\, h \text{ mingi } \theta \in (0, 1) \text{ korral.}$$

Lagrange'i keskväärtusteoreem võimaldab meil lihtsalt rakendada funktsiooni tuletist selle funktsiooni ***monotoonsusomaduste*** kirjeldamisel.

**Lause 4.12** *Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis intervalli $D$ kõigis sisepunktides $x \in D^o$ on diferentseeruv.*
(a) *Kui $f'(x) = 0$ iga $x \in D^o$ korral, siis $f$ on konstantne funktsioon.*
(b) *Kui $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geqslant 0$) iga $x \in D^o$ korral, siis $f$ on rangelt kasvav (kasvav) funktsioon.*
(c) *Kui $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) iga $x \in D^o$ korral, siis $f$ on rangelt kahanev (kahanev) funktsioon.*

**Tõestus.** Olgu $y$ ja $z$ suvalised punktid intervallis $D$, eeldame, et $y < z$. Eelduse kohaselt on funktsioon $f$ lõigus $[y, z]$ pidev ning vahemikus $(y, z)$ diferentseeruv, seega leidub Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal $c \in (y, z)$ omadusega

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z - y). \tag{4.10}$$

Seejuures on $c$ hulga $D$ sisepunkt (põhjendada!)✠.

Juhul (a) kehtib võrdus $f'(c) = 0$, seega $f(z) - f(y) = 0$ ehk $f(y) = f(z)$ suvaliste $y, z \in D$ puhul.

(b) Kui $f'(x) > 0$ iga $x \in D^o$ korral, siis seose (4.10) kohaselt

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z - y) > 0,$$

seega on $f$ rangelt kasvav. Analoogiliselt saadakse väite (b) teine pool, samuti väide (c) (iseseisvalt!✠). ■

**Lause 4.13** *Olgu $\delta > 0$ ja olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidev punktis $a \in D^o$ ning diferentseeruv mõlemas vahemikus $(a - \delta, a)$ ja $(a, a + \delta)$.*
(a) *Kui $f'(x) \geqslant 0$ iga $x \in (a - \delta, a)$ korral ja $f'(x) \leqslant 0$ iga $x \in (a, a + \delta)$ korral, siis on funktsioonil $f$ punktis $a$ lokaalne maksimum.*
(b) *Kui $f'(x) \leqslant 0$ iga $x \in (a - \delta, a)$ korral ja $f'(x) \geqslant 0$ iga $x \in (a, a + \delta)$ korral, siis on funktsioonil $f$ punktis $a$ lokaalne miinimum.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Lause 4.13 võimaldab funktsiooni lokaalsete ekstreemumite olemasolu testida ka neis punktides, kus funktsioon on pidev, kuid ei ole diferentseeruv.

**Näide 4.5.** Teatavasti ei ole absoluutväärtusega määratud pidev funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto |x|$$

kohal $x = 0$ diferentseeruv, kuid

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Seega suvalise $\delta > 0$ puhul $f'(x) < 0$ intervallis $(-\delta, 0)$ ning $f'(x) > 0$ intervallis $(0, \delta)$, lause 4.13($b$) kohaselt tähendab see funktsiooni lokaalset (tegelikult globaalset) miinimumi punktis 0.

### 4.2.3 Funktsiooni kumerus ja nõgusus

Olgu $D \subset \mathbb{R}$.

**Definitsioon.** Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *kumeraks* intervallis $D_1 \subset D$, kui iga $x, y \in D_1$ ja iga $\lambda \in [0, 1]$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Funktsiooni $f$ nimetatakse *rangelt kumeraks* intervallis $D_1$, kui $\lambda \in (0, 1)$ korral see võrratus on range.

### 4.2.4 Cauchy keskväärtusteoreem

**Lause 4.14** ***(Cauchy keskväärtusteoreem).*** *Olgu $f$ ja $g$ lõigus $[a, b]$ pidevad funktsioonid, mis vahemikus $(a, b)$ on diferentseeruvad, ning olgu $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Siis leidub selline punkt $c \in (a, b)$, et*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.11}$$

**Tõestus.** Kõigepealt märgime, et $g(b) \neq g(a)$, sest vastasel juhul rahuldaks $g$ Rolle'i teoreemi tingimusi ning $g'(x)$ võrduks nulliga vähemalt ühes punktis $x \in (a, b)$. Moodustame abifunktsiooni

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

ja paneme tähele, et $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja vahemikus $(a, b)$ diferentseeruv:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \quad \text{iga } x \in (a, b) \text{ korral.}$$

Kuna $h(b) = h(a) = f(a)$ (kontrollida!)✠, siis Rolle'i teoreemi kohaselt $h'(c) = 0$ mingis punktis $c \in (a, b)$. Nii saamegi seose (4.11). ■

Analoogiliselt Lagrange'i keskväärtusteoreemiga saab ka valemile (4.11) anda teistsuguse kuju

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{g'(a + \theta h)} \text{ mingi } \theta \in (0, 1) \text{ korral.}$$

### 4.2.5 L'Hospitali reegel

Cauchy keskväärtusteoreemil põhineb lihtne ja efektiivne meetod funktsioonide ***piirväärtuse arvutamiseks*** määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ puhul.

**Lause 4.15** ***(l'Hospitali reegel).*** *Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ diferentseeruvad hulgas $(a, a + \theta)$, kus $\theta$ on mingi positiivne arv. Sealjuures olgu $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a, a + \theta)$ korral. Kui kas*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0 \tag{4.12}$$

*või*

$$\lim_{x \to a+} |f(x)| = \lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty \tag{4.13}$$

*ning eksisteerib piirväärtus*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L, \tag{4.14}$$

*siis*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{4.15}$$

**Tõestus. A.** *Vaatleme algul juhtu* (4.12). Eeldame, et funktsioonid $f$ ja $g$ on hulgas $(a, a+\theta)$ diferentseeruvad ja rahuldavad tingimusi (4.12) ja (4.14). Defineerime pidevad (kontrollida!)✠ abifunktsioonid $F\colon\ [a, a+\theta) \to \mathbb{R}$ ja $G\colon\ [a, a+\theta) \to \mathbb{R}$ seostega

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in (a, a+\theta), \\ 0, & \text{kui } x = a, \end{cases} \quad \text{ja} \quad G(x) := \begin{cases} g(x), & \text{kui } x \in (a, a+\theta), \\ 0, & \text{kui } x = a, \end{cases}$$

need on vahemikus $(a, a+\theta)$ diferentseeruvad, seejuures $G'(x) = g'(x) \neq 0$. Siit tuleneb, et $G(x) \neq 0$ vahemikus $(a, a+\theta)$: kui oletada, et mingi $x_0 \in (a, a+\theta)$ puhul $G(x_0) = 0$, siis Rolle'i teoreemi põhjal leiduks $c \in (a, x_0)$ omadusega $G'(c) = 0$.

Funktsioonidele $F$ ja $G$ saame rakendada Cauchy keskväärtusteoreemi (selgitada!)✠, selle kohaselt leidub iga $x \in (a, a+\theta)$ korral $c(x) \in (a, x)$ omadusega

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c(x))}{G'(c(x))} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

(selgitada!)✠. Arvestades, et $c(x)$ asub punktide $a$ ja $x$ vahel, läheme viimases võrduses piirile $x \to a$ ning saame, et

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(tehke läbi $\varepsilon$-$\delta$-keeles!)✠.

**B.** *Juhul* (4.13) on tõestus keerulisem. Eeldame, et funktsioonid $f$ ja $g$ on hulgas $(a, a+\theta)$ diferentseeruvad ja rahuldavad tingimusi (4.13) ning (4.14). Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Meie eesmärk on veenduda sellise $\delta > 0$ olemasolus, et

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon \text{ iga } x \in (a, a+\delta) \text{ puhul,}$$

see tähendabki väidet (4.15).

Valime kõigepealt $\eta > 0$ omadusega

$$\eta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2 + |L|}\right\},$$

sel juhul

$$\eta(\eta+1) + |L|\,\eta < 2\eta + |L|\,\eta = \eta(2 + |L|) \leqslant \varepsilon. \tag{4.16}$$

Edasi valime $h \in (0, \theta)$ nii väikese, et
1) $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a, a+h)$ korral (vrd. (4.14)),
2) $f(x) \neq 0$ ja $g(x) \neq 0$ iga $x \in (a, a+h)$ korral (vrd. (4.13)) ja
3) $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \eta$ iga $x \in (a, a+h)$ korral (vrd. (4.14))
(selgitada täpsemalt sellise valiku võimalikkust!)✠. Paneme tähele, et kui $x$ ja $t$ on kaks erinevat punkti vahemikus $(a, a+h)$, siis vastavalt Cauchy keskväärtusteoreemile 4.14 saab nende vahel leida punkti $c$ omadusega

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

järelikult

$$\left|\frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)}-L\right|<\eta \text{ kõikide } x,t\in(a,a+h) \text{ korral, kui } x\neq t \tag{4.17}$$

(selgitada!)✠.

Olgu $x_0 \in (a,a+h)$ fikseeritud punkt. Tänu eeldusele (4.13) saame valida sellise $\rho \in (0,h)$, et

$$f(x)\neq f(x_0) \text{ ja } g(x)\neq g(x_0) \text{ kõikide } x\in(a,a+\rho) \text{ korral.}$$

Tähistame suvalise $x\in(a,a+\rho)$ puhul

$$\varphi(x) := \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}},$$

siis $\lim\limits_{x\to a+}\varphi(x)=1$ (kontrollida!)✠. Seostest (4.17) ja

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{1}{\varphi(x)}\frac{f(x)}{g(x)}$$

saame võrratuse

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\eta \quad (x\in(a,a+\rho))$$

ehk

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\varphi(x)\right|<\eta\,|\varphi(x)| \quad (x\in(a,a+\rho)),$$

millest omakorda järeldub, et

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| &\leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\varphi(x)\right|+|L\varphi(x)-L| \\ &< \eta\,|\varphi(x)|+|L|\,|\varphi(x)-1| \quad (x\in(a,a+\rho)).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Valime nüüd $\delta\in(0,\rho]$ nii väikese, et iga $x\in(a,a+\delta)$ korral kehtib võrratus $|\varphi(x)-1|<\eta$ (peame silmas, et $\lim\limits_{x\to a+}\varphi(x)=1$), siis

$$|\varphi(x)|=\varphi(x)<\eta+1 \quad (x\in(a,a+\delta)). \tag{4.19}$$

Seostest (4.18), (4.19) ja (4.16) tulenevad võrratused

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\eta(\eta+1)+|L|\,\eta<\varepsilon \quad (x\in(a,a+\delta)).$$

Lause on tõestatud. ■

Analoogiliselt tõestatakse sama väide vasakpoolsete piirväärtuste puhul.

**Lause 4.16** ***(l'Hospitali reegel).*** *Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ diferentseeruvad hulgas $(a-\theta, a)$, kus $\theta$ on mingi positiivne arv. Sealjuures olgu $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a-\theta, a)$ korral. Kui kas*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} g(x) = 0$$

*või*

$$\lim_{x \to a-} |f(x)| = \lim_{x \to a-} |g(x)| = \infty$$

*ning eksisteerib piirväärtus*

$$\lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L,$$

*siis*

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Lausetest 4.15 ja 4.16 tuleneb vahetult l'Hospitali reegel kahepoolse piirväärtuse jaoks.

**Lause 4.17** ***(l'Hospitali reegel).*** *Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ diferentseeruvad mõlemas vahemikus $(a-\theta, a)$ ja $(a, a+\theta)$, kus $\theta$ on mingi positiivne arv. Sealjuures olgu $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a-\theta, a) \cup (a, a+\theta)$ korral. Kui kas*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

*või*

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$$

*ning eksisteerib piirväärtus*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L,$$

*siis*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Märgime veel, et eelnevatega samasugused väited kehtivad piirprotsesside $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$ puhul. (Tõestamiseks saab teostada muutujavahetuse $t = \frac{1}{x}$.)

Olukorras, kus $L = \infty$ või $L = -\infty$, läheb tõestuse A-osa ($x \to a$) läbi analoogiliselt. B-osa ($x \to \infty$) jaoks piisab märgata, et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ annab, et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ (paremalt). Ülalpool toodu abil saab veenduda, et sel juhul $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ (paremalt), mistõttu $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Analoogiline käitumine toimub juhul $L = -\infty$.

## 4.3 Taylori valem

Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ intervalli $D$ punktis $a$ diferentseeruv. Tähistame

$$h_1(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a),$$

siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + h_1(x)(x-a) =: T_1(x) + R_1(a,x) \quad (x \in D).$$

Lause 4.2 põhjal on funktsioon $f$ kohal $a$ lineaarselt lähendatav funktsiooniga $T_1$, kus

$$T_1(x) \coloneqq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Niisiis võib lineaarse polünoomi $T_1$ väärtusi $T_1(x)$ vaadelda funktsiooni $f$ ligikaudsete väärtustena punkti $a$ ümbruses, avaldis $R_1(a,x)$ kirjeldab seejuures tehtavat viga.

Sellise lineaarse lähendamise täpsus on väike. Suurema täpsuse saavutamiseks lähendatakse funktsiooni $f$ kõrgemat järku polünoomidega.

Eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on $n$ korda diferentseeruv intervallis $D$, olgu $a \in D$. Seame endale eesmärgiks leida niisugune $n$-astme polünoom

$$P(x) := a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + a_1(x-a) + a_0,$$

mis võimalikult hästi lähendaks funktsiooni $f$ punkti $a$ teatavas ümbruses. Selleks nõuame, et polünoom $P$ rahuldaks tingimusi

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ P''(a) = f''(a), \ldots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{4.20}$$

Neist esimene ütleb, et $(a, f(a))$ on funktsioonide $f$ ja $P$ graafikute ühine punkt, teise tingimuse kohaselt on graafikutel selles punktis ühine puutuja jne. See annab alust arvata, et polünoom $P$ on funktsioonile $f$ tõepoolest hea lähend.

Tingimused (4.20) võimaldavad meil polünoomi $P$ kordajad üheselt määrata. Selge, et $f(a) = P(a) = a_0$. Kuna

$$P'(x) = na_n(x-a)^{n-1} + \ldots + 2a_2(x-a) + a_1,$$

siis

$$a_1 = P'(a) = f'(a).$$

Edasi,

$$P''(x) = n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \ldots + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 2a_2,$$

mistõttu

$$a_2 = \frac{1}{2}P''(a) = \frac{1}{2}f''(a).$$

Üldiselt, kui $1 \leqslant k \leqslant n$, siis

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k} + \ldots + (k+1)k \cdot \ldots \cdot 2a_{k+1}(x-a) + k(k-1)\ldots 2a_k$$

ja
$$a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).$$

Tähistame
$$\begin{aligned} T_n(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \end{aligned}$$

(siin $f^{(0)} := f$), polünoomi $T_n$ nimetatakse funktsiooni $f$ *n-järku Taylori polünoomiks.* Olgu
$$R_n(a,x) := f(x) - T_n(x),$$

siis saame valemi
$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(a,x), \tag{4.21}$$

mida nimetatakse funktsiooni $f$ *Taylori valemiks* punktis $a$. Avaldist $R_n(a,x)$ nimetatakse Taylori valemi *jääkliikmeks*.

Järgnevalt näitame, et protsessis $x \to a$ läheneb jääkliige $R_n(a,x)$ kiiremini nullile kui $(x-a)^n$ (vrd. (4.22)) (jääkliikme *Peano kuju*) ning esitame ta *Lagrange'i kujul* (4.23).

**Teoreem 4.18** *Olgu $D \subseteq \mathbb{R}$ mingi intervall ja $a \in D$, olgu $n \in \mathbb{N}$.*
(a) *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on $n$ korda diferentseeruv, siis*
$$R_n(a,x) \in o((x-a)^n) \qquad \textit{protsessis } x \to a. \tag{4.22}$$

(b) *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on $n+1$ korda diferentseeruv, siis iga $x \in D \setminus \{a\}$ korral leidub punktide $a$ ja $x$ vahel selline punkt $c \in D$, et*
$$R_n(a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.23}$$

**Tõestus.** (a) Tõestuse viime läbi induktsiooniga $n$ järgi.

Kui $n = 1$, on tarvis näidata, et
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

See koondumine kehtib tänu sellele, et $f$ on dieferentseeruv punktis $a$ (selgitage!)✠

Kehtigu nüüd väide mingi $n$ korral; vaatleme väidet kujul, kus $n$ rollis on $n+1$. Niisiis, $f\colon D \to \mathbb{R}$ on $n+1$ korda diferentseeruv ning tarvis on näidata, et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$

Paneme tähele, et tuletisfunktsioon $f'\colon D \to \mathbb{R}$ on $n$ korda diferentseeruv, sealjuures tema $n$-järku Taylori polünoom on
$$f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{1}{2} f'''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n = T'_{n+1}(x).$$

Niisiis induktiivse eelduse tõttu saame, et

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T'_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=0. \tag{4.24}$$

Avaldise

$$\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}\quad (x\in D\diagdown\{a\})$$

puhul on protsessis $x\to a$ tegemist määramatusega $\frac{0}{0}$ (selgitada!)✠, rakendame selle avaldise piirväärtuse leidmiseks l'Hospitali reeglit. Saame, et

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T'_{n+1}(x)}{(n+1)(x-a)^n}=0,$$

viimase võrduse juures kasutasime koondumist (4.24).

(b) Eeldame nüüd, et $f$ on $n+1$ korda intervallis $D$ diferentseeruv. Olgu $x\in D\diagdown\{a\}$, meie eesmärk on veenduda sellise $c\in D$ olemasolus, mis paikneb punktide $a$ ja $x$ vahel ning rahuldab tingimust (4.23), seega võrdust

$$0=f^{(n+1)}(c)-\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!, \tag{4.25}$$

mille me kirjutame kujul

$$0=f^{(n+1)}(c)-T_n^{(n+1)}(c)-\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

(peame silmas, et $T_n^{(n+1)}(t)=0$ iga $t$ korral). Tähistame

$$h(t):=f(t)-T_n(t)-\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^{n+1}}(t-a)^{n+1}\quad(t\in D),$$

siis $h(a)=h'(a)=\ldots=h^{(n)}(a)=0$ (kontrollida!)✠, samuti $h(x)=0$. Funktsioon $h$ rahuldab lõigus otspunktidega $a$ ja $x$ kõiki Rolle'i teoreemi tingimusi (veenduda!)✠, selle põhjal leidub $c_1$ punktide $a$ ja $x$ vahel, et $h'(c_1)=0$. Edasi rakendame Rolle'i teoreemi funktsioonile $h'$ lõigus otspunktidega $a$ ja $c_1$ ning leiame $c_2$ punktide $a$ ja $c_1$ vahel omadusega $h''(c_2)=0$, jne. Lõpuks leidub $c:=c_{n+1}$ punktide $a$ ja $x$ vahel (täpsemalt, punktide $a$ ja $c_n$ vahel), et $h^{(n+1)}(c)=0$. Kuna

$$\begin{aligned}h^{(n+1)}(t)&=f^{(n+1)}(t)-T_n^{(n+1)}(t)-(n+1)!\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^{n+1}}\\&=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

iga $t\in D$ korral, siis rahuldab punkt $c$ tingimust (4.25). Teoreem on tõestatud. ■

Järgmise lause kohaselt on $n+1$ korda pidevalt diferentseeruva funktsiooni $f$ puhul Taylori polünoomi näol tegemist selle funktsiooni *parima lähendiga* kõikvõimalike $n$-astme polünoomide hulgas.

**Lause 4.19** *Kui funktsioon $f$ on $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv mingis intervallis $D$ ja $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ on selline polünoom, et $a \in D$ ja*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0, \tag{4.26}$$

*siis $P = T_n$, s.t.*

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \text{ kõikide } k = 0, ..., n \text{ korral.}$$

**Tõestus.** Asendame seosest (4.21) $f(x)$ valemisse (4.26), saame, et

$$\lim_{x\to a} \left( \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) - a_k \right) \frac{(x-a)^k}{(x-a)^n} + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a) \right) = 0.$$

Valime intervallis $D$ lõigu $I$, mis sisaldab punkti $a$ (otspunkti või sisepunktina). Kuna $f^{(n+1)}$ on pidev lõigus $I$, siis Weierstrassi teoreemi 3.15 põhjal on ta selles lõigus tõkestatud. Seega $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a) = 0$, mistõttu kehtib võrdus

$$\lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) - a_k \right) \frac{(x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

(selgitada!)✠. Näitame, et see on võimalik vaid juhul, kui $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ kõikide $k = 0, ..., n$ korral.

Tähistame $u_k := \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) - a_k$, siis

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{(x-a)^{n-k}} = \lim_{x\to a} \left( \frac{u_0}{(x-a)^n} + \frac{u_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + u_n \right) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{u_0 + u_1(x-a) + \ldots + u_n (x-a)^n}{(x-a)^n}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

järelikult $\lim\limits_{x\to a} (u_0 + u_1(x-a) + \ldots + u_n(x-a)^n) = 0$, seega $u_0 = 0$. Seosest (4.27) saame võrduse

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{u_1 + u_2(x-a) + \ldots + u_n(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}},$$

millest (analoogiliselt eelnevaga) tuleneb $u_1 = 0$. Nii jätkates veendume, et $u_k = 0$ kõikide $k = 0, \ldots, n$ korral, seega $P = T_n$. Lause on tõestatud. ■

**Näide 4.6.** Leiame eksponentfunktsiooni $y = \mathrm{e}^x$ esituse Taylori valemi abil punkti $a = 0$ ümbruses. Valemi (4.21) kohaselt

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kus $c$ on punktide 0 ja $x$ vahel (kontrollida!)✠. Jääkliige $R_n(0,x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ kirjeldab viga funktsiooni väärtuse $\mathrm{e}^x$ asendamisel polünoomi $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$ väärtusega. Selle vea hindamiseks paneme tähele, et kui $b > 0$, siis

$$\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}e^b \quad (|x| \leqslant b)\,.$$

# 5 Integreeruvad funktsioonid

## 5.1 Kõvertrapetsi pindala

Kui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on selline pidev funktsioon, et $f(x) \geqslant 0$ kõikide $x \in [a,b]$ korral, siis tema graafik $AB$ ning sirged $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ moodustavad $xy$-tasandil *kõvertrapetsi* $aABb$. Jagame lõigu $[a,b]$ suvalisel viisil $n$ osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

niisugust jaotust nimetame edaspidi *lõigu* $[a,b]$ *alajaotuseks* (*partition, разбиение*) ja tähistame $T[x_0, \ldots, x_n]$ või lühidalt $T$. Ta jaotab lõigu $[a,b]$ osalõikudeks

$$[a, x_1], [x_1.x_2], \ldots, [x_{n-1}, b],$$

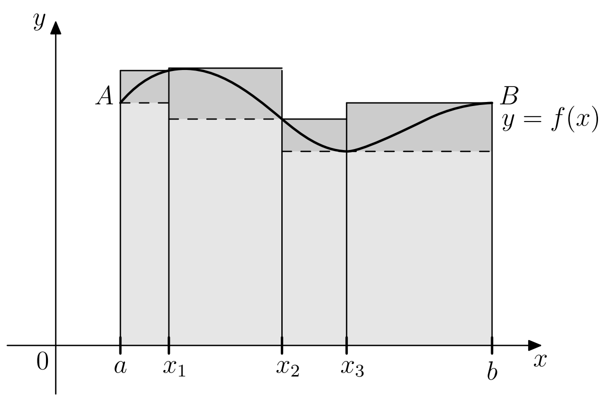
seejuures on $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ $k$-nda osalõigu $[x_{k-1}, x_k]$ pikkus.

Tänu funktsiooni $f$ pidevusele eksisteerivad

$$M_k := \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \text{ja} \quad m_k := \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

vaatleme ristkülikuid alusega $[x_{k-1}, x_k]$ ja kõrgusega $M_k$, kus $k = 1, \ldots, n$. Iga sellise ristküliku pindala on $M_k \Delta x_k$, summa $S(T) := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ kirjeldab neist ristkülikutest koosneva *ristküliksumma* $P^*(T)$ pindala. Samadele alustele $[x_{k-1}, x_k]$ kõrgusega $m_k$ konstrueeritud ristkülikud moodustavad teise ristküliksumma $P_*(T)$ pindalaga $s(T) := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ (vt. joonis 5.1). Paneme tähele, et

$$P_*(T) \subseteq aABb \subseteq P^*(T). \tag{5.1}$$




Joonis 5.1: Kõvertrapets ja ristküliksummad.

Vaatleme kõikvõimalikke alajaotusi $T$ lõigus $[a,b]$, tähistame nende hulga gooti tähega $\mathfrak{T}$, vajaduse korral täpsemalt $\mathfrak{T}_{[a,b]}$. Suvalise kahe alajaotuse $T, T' \in \mathfrak{T}$ puhul $P_*(T) \subseteq P^*(T')$, mistõttu $s(T) \leqslant S(T')$. Seega on iga arv $S(T')$ arvude hulga $\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ ülemine tõke.

Pidevuse aksioomi põhjal leidub $S_* := \sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$, seejuures $S_* \leqslant S(T')$ iga $T' \in \mathfrak{T}$ korral. Niisiis eksisteerib $S^* := \inf\{S(T') \mid T' \in \mathfrak{T}\}$ ning $S_* \leqslant S^*$. Kui $S_* = S^* =: S_{aABb}$, siis sisalduvusi (5.1) silmas pidades on loomulik lugeda arvu $S_{aABb}$ kõvertrapetsi $aABb$ pindalaks. Küsimus sellest, kas võrdus $S_* = S^*$ iga pideva mittenegatiivse funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korral tõepoolest kehtib, jääb esialgu lahtiseks.

## 5.2 Riemanni integraal

### 5.2.1 Integraali mõiste. Tarvilik tingimus integreeruvuseks

Erinevalt eelmisest punktist ei eelda me järgnevas funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidevust ega mittenegatiivsust. Olgu lõigus $[a,b]$ fikseeritud mingi alajaotus $T[x_0,\dots,x_n]$. Fikseerime iga $k$ korral ***suvaliselt punkti*** $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, tähistame $\xi := (\xi_1,\dots,\xi_n)$ ja moodustame (alajaotusest $T$ ning punktide $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ järjendist $\xi$ sõltuva) *integraalsumma*

$$\sigma(T,\xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

(vajaduse korral – kui juttu on kahe või enama funktsiooni integraalsummadest – kirjutame $\sigma(T,\xi)$ asemel $\sigma(f,T,\xi)$ või $\sigma_f(T,\xi)$).

Tähistame alajaotuse $T$ korral

$$\lambda(T) := \max\{\Delta x_k \mid k = 1,\dots,n\}.$$

Suurust $\lambda(T)$ nimetatakse mõnikord ka alajaotuse $T$ *normiks* või *diameetriks* (*mesh, шаг*).

**Definitsioon.** Kui leidub reaalarv $I$ nii, et *iga* $\varepsilon > 0$ *puhul saab leida sellise* $\delta > 0$, *et kui* $\lambda(T) < \delta$, *siis*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - I\right| < \varepsilon \ \textbf{\textit{suvaliste}}\ \xi_k \in [x_{k-1},x_k]\ \textbf{\textit{korral,}} \tag{5.2}$$

siis öeldakse, et funktsioon $f$ on *lõigus* $[a,b]$ *(Riemanni mõttes) integreeruv* (*Riemann integrable, интегрируемая по Риману*). Piirväärtust (5.3) nimetatakse funktsiooni $f$ *Riemanni integraaliks lõigus* $[a,b]$ ja tähistatakse $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Märkus 1.** Definitsiooni nõuet pannakse sageli lühemalt kirja järgmiselt:

$$\mathbb{R} \ni I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{5.3}$$

Siiski tuleb olla taolise piirväärtuse omaduste kasutamisel ettevaatlik, kuna tegemist **ei ole** eelnevates peatükkides vaadeldud jada ega funktsiooni piirväärtusega.

**Märkus 2.** Jada, funktsiooni ja integraalsumma piirväärtuse mõistet üldistatakse topoloogia kursuses pere piirväärtuse mõisteks. Sellisel juhul oleks pere liikmed integraalsummad, indeksid oleks paarid $(T,\xi)$ ning järjestus defineeritud nii, et $(T,\xi) \preccurlyeq (T',\xi')$, kui $T$ jaotuspunktid on kõik $T'$ jaotuspunktid. Saab näidata, et selline indeksite hulk on suunatud hulk.

**Märkus 3.** Ilmselt toob tingimus $\lambda(T) \to 0$ endaga kaasa protsessi $n \to \infty$, vastupidine implikatsioon ei tarvitse olla õige (selgitada!)✠.

**Näide 5.1.** Kui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on seosega $f(x) = c$ määratud konstantne funktsioon, siis iga alajaotuse $T$ korral

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c\,(b-a)\,.$$

Järelikult sobib tingimuses (5.2) arvu $I$ rolli $c\,(b-a)$, mistõttu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)$ (selgitada!)✠. Seega on kõik lõigus $[a,b]$ konstantsed funktsioonid selles lõigus integreeruvad, kusjuures integraali väärtuseks on funktsiooni graafiku ja sirgete $y=0$, $x=a$ ja $x=b$ poolt määratud ristküliku pindala.

Integreeruvate funktsioonide kirjeldamist alustame järgmise olulise lausega.

**Lause 5.1** ***(tarvilik tingimus integreeruvuseks).*** *Iga lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon $f$ on selles lõigus tõkestatud.*

**Tõestus.** Kui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integreeruv funktsioon, siis integreeruvuse definitsiooni kohaselt saab leida lõigu $[a,b]$ sellise alajaotuse $T[x_0,\ldots,x_n]$, et $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - I\right| < 1$ kõikvõimalike valikute $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ korral. Suvaliste $c_k, d_k \in [x_{k-1},x_k]$ puhul

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - I\right| < 1 \quad \text{ja} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(d_k)\,\Delta x_k - I\right| < 1,$$

mistõttu

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(d_k)\,\Delta x_k\right| < 2.$$

Kui $c_k = d_k$ kõikide $k = 2,3,\ldots,n$ korral, siis $2 > |f(c_1) - f(d_1)|\,\Delta x_1$ ehk

$$|f(c_1) - f(d_1)| < \frac{2}{\Delta x_1},$$

millest omakorda järeldub võrratus

$$|f(c_1)| < \frac{2}{\Delta x_1} + |f(d_1)|$$

(selgitada!)✠. Fikseerides punkti $d_1 \in [a,x_1]$, saame hinnangu

$$|f(x)| < M_1 := \frac{2}{\Delta x_1} + |f(d_1)| \quad (x \in [a,x_1])\,.$$

Seega on $f$ osalõigus $[a,x_1]$ tõkestatud. Analoogiliselt veendutakse, et $f$ on ülejäänud osalõikudes $[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$ tõkestatud, mis kokkuvõttes tähendab tõkestatust kogu lõigus $[a,b]$. ■

Teoreemis 5.1 toodud tingimus ei ole piisav, allpool (vt. näide 5.2) näeme, et üldjuhul tõkestatud funktsioon ei pruugi olla integreeruv.

### 5.2.2 Tõkestatud funktsiooni Darboux' summad, nende omadused

Kõigepealt lepime kokku, et kahe alajaotuse $T, T' \in \mathfrak{T}$ puhul mõistame me sisalduvuse $T \subseteq T'$ all nende jaotuspunktide sisalduvust, s.t. alajaotuse $T$ iga jaotuspunkt on ka alajaotuse $T'$ jaotuspunkt. Sel juhul ütleme, et $T'$ on *peenem* kui $T$, antud alajaotusele uute jaotuspunktide lisamisel kõneleme alajaotuse *peenendamisest.*

Teiseks, me kirjutame allpool $T'' = T \cup T'$, kui alajaotuse $T''$ jaotuspunktideks on parajasti need arvud, mis on kas $T$ või $T'$ jaotuspunktid.

Funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integreeruvuse uurimisel on integraalsumma $\sigma(T,\xi)$ kõrval kasulik vaadelda sellest oluliselt lihtsamaid Darboux' summasid. Eeldame, et $f$ on lõigus $[a,b]$ ***tõkestatud*** funktsioon, siis eksisteerivad

$$M := \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{ning} \quad m := \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Olgu $T[x_0,\ldots,x_n] \in \mathfrak{T}$ suvaline alajaotus, tähistame

$$M_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \text{ja} \quad m_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad (k=1,\ldots,n)$$

ning moodustame

$$S(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \quad \text{ja} \quad s(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

(ka siin kirjutame vajaduse korral $S(T)$ ja $s(T)$ asemel $S(f,T)$ ja $s(f,T)$). Summasid $S(T)$ ja $s(T)$ nimetatakse funktsiooni $f$ (alajaotusele $T \in \mathfrak{T}$ vastavaks) *Darboux' ülem- ja alamsummaks* (*upper, lower Darboux sum, верхняя, нижняя сумма Дарбу*). Pidades silmas, et suvalise $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ korral $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$, saame võrratused (selgitada!)✠

$$s(T) \leqslant \sigma(T,\xi) \leqslant S(T).$$

Paneme tähele, et Darboux' summad $s(T)$ ja $S(T)$ on *antud alajaotuse $T$ korral* konstantsed, integraalsumma $\sigma(T,\xi)$ aga sõltub punktide $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ valikust. Seejuures

*ülemsumma $S(T)$ on integraalsumma $\sigma(T,\xi)$ väärtuste ülemine raja.*

Täpsemalt, iga fikseeritud alajaotuse $T[x_0,\ldots,x_n]$ korral (vrd. lause 1.5(a))

$$\sup_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\ (1\leqslant k\leqslant n)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S(T).$$

Analoogiliselt saame võrduse

$$\inf_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\ (1\leqslant k\leqslant n)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = s(T),$$

niisiis,

*alamsumma $s(T)$ on integraalsumma $\sigma(T,\xi)$ väärtuste alumine raja.*

Kokkuvõttes, fikseeritud alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral

$$S(T) = \sup \sigma(T, \xi) \text{ ja } s(T) = \inf \sigma(T, \xi), \tag{5.4}$$

kus rajad on võetud üle kõikide valikute $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, milles $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Suvalise alajaotuse $T[x_0, ..., x_n]$ puhul tähistame $\omega_k(T) := M_k - m_k$, kus $M_k := \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ja $m_k := \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ning $k = 1, \ldots, n$. Seejuures

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(T) \Delta x_k.$$

Arvu $\omega_k(T)$ (vajaduse korral kirjutame $\omega_k(f, T)$) nimetatakse funktsiooni $f$ *võnkumiseks* lõigus $[x_{k-1}, x_k]$.

Darboux' summade omaduste kirjeldamist alustame järgmise lausega.

**Lause 5.2** *Olgu $T$ ja $T'$ lõigu $[a, b]$ kaks alajaotust, kus $T \subseteq T'$ ning $T'$ on alajaotusest $T$ saadud $p$ jaotuspunkti lisamisel. Siis*

$$0 \leqslant S(T) - S(T') \leqslant p(M - m)\lambda(T), \tag{5.5}$$
$$0 \leqslant s(T') - s(T) \leqslant p(M - m)\lambda(T). \tag{5.6}$$

**Tõestus. 1.** *Vaatleme kõigepealt juhtu, kus* $p = 1$, niisiis saadakse $T'$ esialgsest alajaotusest $T = T[x_0, \ldots, x_n]$ ***ühe*** jaotuspunkti $x'$ lisamisel. Kui $x'$ asub jaotuspunktide $x_{i-1}$ ja $x_i$ vahel, siis alajaotusele $T'$ vastav ülemsumma $S(T')$ on kujul

$$S(T') = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k \Delta x_k + M_i^1 (x' - x_{i-1}) + M_i^2 (x_i - x'),$$

kus $M_i^1 := \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x)$ ja $M_i^2 := \sup\limits_{x \in [x', x_i]} f(x)$. Kuna $M_i^1 \leqslant M_i$ ja $M_i^2 \leqslant M_i$, siis

$$0 \leqslant M_i - M_i^1 \leqslant M - m \text{ ja } 0 \leqslant M_i - M_i^2 \leqslant M - m,$$

mistõttu

$$\begin{aligned} S(T) - S(T') &= M_i \Delta x_i - M_i^1 (x' - x_{i-1}) - M_i^2 (x_i - x') \\ &= \left(M_i - M_i^1\right)(x' - x_{i-1}) + \left(M_i - M_i^2\right)(x_i - x') \\ &\leqslant (M - m)\Delta x_i \leqslant (M - m)\lambda(T). \end{aligned}$$

Seejuures on avaldis $(M_i - M_i^1)(x' - x_{i-1}) + (M_i - M_i^2)(x_i - x')$ ilmselt mittenegatiivne, sellest tuleneb võrratus $S(T) - S(T') \geqslant 0$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$0 \leqslant S(T) - S(T') \leqslant (M - m)\lambda(T). \tag{5.7}$$

**2.** *Olgu nüüd* $p > 1$, s.t. alajaotus $T'$ saadakse alajaotusest $T$ teatavate (mingil viisil nummerdatud) $p$ jaotuspunkti lisamise teel. Tähistame $T_0 := T$, olgu $T_1$ saadud alajaotusest $T_0$ esimese jaotuspunkti lisamisega, $T_2$ saadakse alajaotusest $T_1$ teise jaotuspunkti lisamisega jne., $T' = T_p$ saame alajaotusele $T_{p-1}$ $p$-nda jaotuspunkti lisamisel. Tõestuse esimeses osas tõestatud seoste (5.7) kohaselt

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant S(T_0) - S(T_1) \leqslant (M-m)\,\lambda(T_0)\,,\\
&0 \leqslant S(T_1) - S(T_2) \leqslant (M-m)\,\lambda(T_1)\,,\\
&\quad \ldots\\
&0 \leqslant S(T_{p-1}) - S(T_p) \leqslant (M-m)\,\lambda(T_{p-1})\,,
\end{aligned}$$

nende võrratuste liitmisel saame, et

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant S(T) - S(T') = S(T_0) - S(Tp) \leqslant (M-m)\left(\lambda(T_0) + \ldots + \lambda(T_{p-1})\right)\\
&\leqslant p\,(M-m)\,\lambda(T_0) = p\,(M-m)\,\lambda(T)
\end{aligned}$$

(selgitada!)✠. Sellega on võrratus (5.5) tõestatud, võrratuse (5.6) tõestus on analoogiline. ■

**Omadus 5.3** *Alajaotuse peenendamisel ei saa Darboux' ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.*

**Tõestus.** See on vahetu järeldus võrratustest (5.5) ja (5.6). ■

**Omadus 5.4** *Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.*

**Tõestus.** Olgu $T$ ja $T'$ lõigu $[a,b]$ kaks suvalist alajaotust, meie eesmärk on veenduda, et $s(T') \leqslant S(T)$. Kui $T'' = T \cup T'$, siis $T''$ on peenem alajaotustest $T$ ja $T'$, mistõttu omadusest 5.3 saame võrratused

$$s(T') \leqslant s(T'') \leqslant S(T'') \leqslant S(T)$$

(selgitada!)✠. ■

### 5.2.3 Darboux' ülem- ja alamintegraal. Integreeruvuse kriteerium

Omadusest 5.4 järeldub, et tõkestatud funktsiooni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ suvaline ülemsumma $S(T)$ on kõigi alamsummade hulga

$$\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$$

ülemine tõke. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib

$$\sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} =: I_*, \tag{5.8}$$

arvu $I_*$ nimetatakse funktsiooni $f$ *Darboux' alamintegraaliks* (*lower Darboux integral, нижний интеграл Дарбу*). Kuna $I_* \leqslant S(T)$ suvalise alajaotuse $T$ korral (põhjendada!)✠, siis

$$I^* := \inf\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} \geqslant I_*$$

(põhjendada!)✠. Arvu $I^*$ nimetatakse funktsiooni $f$ *Darboux' ülemintegraaliks.* Niisiis, lõigu $[a,b]$ suvalise alajaotuse $T$ puhul kehtivad võrratused

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T)\,. \tag{5.9}$$

Öeldakse, et funktsioon $f$ on *Darboux' mõttes integreeruv*, kui $I_* = I^*$.
Peatselt tõestame (vt. teoreemi 5.6), et

$$f \text{ on Riemanni mõttes integreeruv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ on Darboux' mõttes integreeruv.}$$

Integreeruvuse uurimine Darboux' mõttes on otstarbekas eeskätt seetõttu, et Riemanni integraalide definitsioonides on (lisaks alajaotusele) veel üks täiendav suurus – punktide valiku vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Lisaks sellele, Darboux' mõttes integreeruvus on rajade võrdumine. Raja definitsioonis on peidus tingimus „iga $\varepsilon$ korral leidub **mingi** element, mis rahuldab võrratust". Riemanni mõttes integreeruvus tähendab aga piirväärtuse olemasolu. Piirväärtuse definitsioonis nõutakse, et „iga $\varepsilon$ korral leidub $\delta$ nii, et **kõik** elemendid, mis klapivad $\delta$-ga, rahuldaks võrratust". Seetõttu teatud vaatepunktist on Riemanni mõttes integreeruvust keerukam kontrollida.

Rajade ja piirväärtuste sidumiseks tõestame kõigepealt ***Darboux' lemma.***

**Lemma 5.5** *Olgu $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et kui mingi alajaotus $T \in \mathfrak{T}$ rahuldab tingimust $\lambda(T) < \delta$, siis*

$$I_* - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I^* + \varepsilon.$$

**Märkus.** Darboux' lemma väidet saab piirväärtuse keeles panna kirja võrdustega

$$I_* = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T), \qquad I^* = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T).$$

**Tõestus.** Ilmselt kehtib lemma konstantse funktsiooni $f$ korral (põhjendada!)✠. Vaatleme juhtu, kus $f$ ei ole konstantne, s.t. $M - m > 0$. Olgu $\varepsilon > 0$. Lähtudes seosest (5.8), leiame vastavalt ülemise raja definitsioonile sellise alajaotuse $T_1\,[x_0, \ldots, x_n] \in \mathfrak{T}$, mis rahuldab tingimust

$$s(T_1) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.10}$$

Võtame

$$\delta_1 := \frac{\varepsilon}{2(n-1)(M-m)},$$

rahuldagu alajaotus $T \in \mathfrak{T}$ tingimust $\lambda(T) < \delta_1$. Moodustame uue alajaotuse $T' := T \cup T_1$, seega saadakse $T'$ alajaotusest $T$ ülimalt $n-1$ uue jaotuspunkti lisamisel. Olgu $p$ lisatud jaotuspunktide tegelik arv, siis $p \leqslant n-1$. Eelpool tõestatud seost (5.6) rakendades saame, et

$$\begin{aligned} s(T_1) &\leqslant s(T') \leqslant s(T) + p(M-m)\lambda(T) < s(T) + p(M-m)\frac{\varepsilon}{2(n-1)(M-m)} \\ &= s(T) + \frac{p\varepsilon}{2(n-1)} \leqslant s(T) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ning seost (5.10) arvestades

$$I_* - \varepsilon < s(T).$$

See võrratus kehtib iga tingimust $\lambda(T) < \delta_1$ rahuldava alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral.

Analoogiliselt leitakse selline arv $\delta_2 > 0$, et kui $\lambda(T) < \delta_2$, siis $S(T) < I^* + \varepsilon$. Kuna võrratus $s(T) \leqslant S(T)$ kehtib kõikide alajaotuste $T$ puhul, siis arv $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ rahuldab lemma tingimusi. ∎

Eelneva lemma abil tõestame järgmise teoreemi, mis selgitab Darboux' summade ja Darboux' integraalide rolli funktsioonide integreeruvuse kirjeldamisel.

**Teoreem 5.6** *Lõigus $[a, b]$ tõkestatud funktsiooni $f$ korral on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *$f$ on (Riemanni mõttes) integreeruv,*
(b) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T)$,
(c) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(T)\Delta x_k = 0$,
(d) *iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lõigu $[a, b]$ selline alajaotus $T$, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$,*
(e) $I_* = I^*$.

**Tõestus.** (a) ⇒ (b) Eeldame, et funktsioon $f$ on lõigus $[a, b]$ integreeruv, olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Vastavalt integraali definitsioonile leidub selline $\delta > 0$, et kui alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n]$ maksimaalse osalõigu pikkus $\lambda(T)$ on väiksem kui $\delta$, siis $|I - \sigma(T, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ehk

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(T, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.11}$$

kus $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ on alajaotusele $T$ vastav integraalsumma ning $I := \int_a^b f(x)\,dx$, s.t. $I = \lim\limits_{\lambda(t)\to 0} \sigma(T, \xi)$. Seejuures kehtivad võrratused (5.11) punktide $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ kõikvõimalike valikute puhul. Nagu me eespool veendusime (vt. (5.4)), on Darboux' ülemsumma $S(T)$ ja alamsumma $s(T)$ vastavalt integraalsumma $\sigma(T, \xi)$ väärtuste ülemine ja alumine raja. Seetõttu saame eeldusel $\lambda(T) < \delta$ seostest (5.11) võrratused

$$I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s(T) \leqslant S(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon,$$

seega

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I \quad \text{ja} \quad \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I. \tag{5.12}$$

Implikatsioonide (b) ⇒ (c) ⇒ (d) kehtivus on ilmne.

(d) ⇒ (e) Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, eeldame, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$ mingi alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral. Seoste (5.9) põhjal

$$0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon,$$

s.t. mittenegatiivne arv $I^* - I_*$ on väiksem igast positiivsest arvust $\varepsilon$. Niisiis, $I^* = I_*$.

(e) ⇒ (a) Eeldame, et $I^* = I_* =: I$. Olgu $\varepsilon > 0$. Darboux' lemma 5.5 kohaselt saame leida niisuguse $\delta > 0$, et kui $T[x_0, \ldots, x_n]$ on alajaotus omadusega $\lambda(T) < \delta$, siis

$$I - \varepsilon < s(T) \leqslant S(T) < I + \varepsilon,$$

mistõttu

$$I - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < I + \varepsilon$$

ehk

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - I\right| < \varepsilon$$

iga valiku $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ korral. Seega on $f$ integreeruv ja $I = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

**Näide 5.2.** Olgu $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Dirichlet' funktsioon, s.t.

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv.} \end{cases}$$

Suvalise alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n] \in \mathfrak{T}_{[0,1]}$ puhul saab valida kõik $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ratsionaalsed (põhjendada!)✠, siis $f(\xi_k) = 1$ ning $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. Kuid samuti võib valida kõik $\xi_k$ irratsionaalsed (selgitada!)✠, siis $f(\xi_k) = 0$ ja $\sigma(T, \xi) = 0$. Niisiis, $s(T) = 0$ ja $S(T) = 1$, seega $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 1$, teoreemi 5.6 põhjal ei ole funktsioon $f$ lõigus $[0, 1]$ integreeruv.

Näitest 5.2 selgub oluline tõsiasi: *tõkestatus ei ole piisav tingimus funktsiooni integreeruvuseks.*

## 5.3 Riemanni integraali omadused

### 5.3.1 Integreeruvus osalõigus. Integraali aditiivsus

**Omadus 5.7** *Kui funktsioon $f$ on integreeruv lõigus $[a, b]$, siis on ta integreeruv igas osalõigus $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$.*

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Kuna $f$ on lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon, siis teoreemi 5.6 kohaselt saame valida sellise $\delta > 0$, et iga alajaotuse $T$ korral, mis rahuldab tingimust $\lambda(T) < \delta$, kehtib võrratus $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Olgu $T_1$ lõigu $[a_1, b_1]$ suvaline selline alajaotus, mille maksimaalse osalõigu pikkus on väiksem kui $\delta$. Jaotame lõigud $[a, a_1]$ ning $[b_1, b]$ mingil viisil osalõikudeks, mille pikkused on samuti väiksemad kui $\delta$. Koos jaotusega $T_1$ oleme niiviisi lõigus $[a, b]$ tekitanud alajaotuse $T'$ omadusega $\lambda(T') < \delta$, seega $\sum_{T'} \omega_k(T')\,\Delta x_k = S(T') - s(T') < \varepsilon$ (siin $\sum_{T'} \omega_k(T')\,\Delta x_k$ on alajaotusele $T'$ vastav summa). On selge, et

1) $S(T_1) - s(T_1) = \sum_{T_1} \omega_k(T')\,\Delta x_k$ sisaldab vaid osa liidetavaid summast $\sum_{T'} \omega_k(T')\,\Delta x_k$ ja

2) kõik liidetavad summas $\sum_{T'} \omega_k(T')\,\Delta x_k$ on mittenegatiivsed,

seetõttu

$$S(T_1) - s(T_1) = \sum\nolimits_{T_1} \omega_k(T')\,\Delta x_k \leqslant \sum\nolimits_{T'} \omega_k(T')\,\Delta x_k < \varepsilon.$$

Seega $S(T_1) - s(T_1) < \varepsilon$ lõigu $[a_1, b_1]$ iga alajaotuse $T_1$ korral, mille kõigi osalõikude pikkused on väiksemad kui $\delta$. Tähendab, $\lim\limits_{\lambda(T_1)\to 0} (S(T_1) - s(T_1)) = 0$, väide tuleneb teoreemist 5.6. ■

Riemanni integraali defineerimisel lähtusime me lõigust $[a, b]$, s.t. eeldasime, et $a < b$. ***Lepime kokku***, et

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0 \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ kui } b < a.$$

**Omadus 5.8** ***(integraali aditiivsus).*** *Olgu $a < b$. Kui funktsioon $f$ on integreeruv lõikudes otspunktidega vastavalt $a$ ja $c$ ning $c$ ja $b$, siis on ta integreeruv lõigus $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Sama väide kehtib ka juhul $b < a$.*

**Tõestus.** Väide kehtib ilmselt juhul $c = a$ või $c = b$, see tuleneb eelnevast kokkuleppest.

*Vaatleme kõigepealt juhtu $a < c < b$.* Olgu $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ lõigu $[a, b]$ alajaotusele $T[x_0, ..., x_n]$ ja punktide komplektile $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ vastav integraalsumma. Kuna $c \in (a, b)$, siis $c$ paikneb mingis osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$. Moodustame summad

$$\sigma'(T, \xi') := \sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(c)(c - x_{i-1}) \quad \text{ja} \quad \sigma''(T, \xi'') := f(c)(x_i - c) + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

need on funktsiooni $f$ integraalsummad vastavalt lõigus $[a, c]$ ja $[c, b]$. Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$; eelduse kohaselt eksisteerivad reaalarvud $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et kehtivad implikatsioonid

$$\lambda(T) < \delta_1 \Rightarrow \left|\sigma'(T, \xi') - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \lambda(T) < \delta_2 \Rightarrow \left|\sigma''(T, \xi'') - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna

$$\sigma(T, \xi) = \sigma'(T, \xi') + \sigma''(T, \xi'') + (f(\xi_i) - f(c))\,\Delta x_i$$

(veenduda!)✠ ja leidub $\delta_3 > 0$ omadusega, et kui $\lambda(T) < \delta_3$, siis $|(f(\xi_i) - f(c))\,\Delta x_i| < \frac{\varepsilon}{3}$ (selgitada!)✠, siis eeldusel $\lambda(T) < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ kehtib võrratus

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma(T, \xi) - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left|\sigma'(T, \xi') - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\sigma''(T, \xi'') - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |(f(\xi_i) - f(c))\,\Delta x_i| < \\
&\qquad < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Olgu nüüd $c > b$* (juhul $c < a$ on tõestus analoogiline). Eelduse kohaselt on funktsioon $f$ integreeruv lõigus $[a, c]$, omaduse 5.7 põhjal siis ka lõigus $[a, b]$, kusjuures tõestuse eelneva osa kohaselt $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, millest (tänu eelnenud kokkuleppele)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analoogiliselt tõestatakse vastavad väited juhul $b < a$. ■

Omadustest 5.7 ja 5.8 saame järgmise väite.

**Omadus 5.9** *Kui funktsioon $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis suvaliste $c, c' \in [a, b]$ korral*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{c'} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c'}^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

### 5.3.2 Integraali tehetega seotud omadused

**Omadus 5.10** *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on lõigus $[a,b]$ integreeruvad, siis ka nende summa $f+g$ on lõigus $[a,b]$ integreeruv ja*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Olgu $\sigma(f,T,\xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ ja $\sigma(g,T,\xi) := \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k$ vastavalt funktsiooni $f$ ja $g$ integraalsumma lõigu $[a,b]$ mingi alajaotuse $T[x_0,\ldots,x_n]$ korral. Fikseerime $\varepsilon>0$; eelduse põhjal leiduvad $\delta_1>0$ ja $\delta_2>0$ nii, et kehtivad implikatsioonid

$$\lambda(T)<\delta_1 \Rightarrow \left|\sigma(f,T,\xi) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \lambda(T)<\delta_2 \Rightarrow \left|\sigma(g,T,\xi) - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu $\lambda(T)<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, siis

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma(f+g,T,\xi) - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| = \\
&\quad = \left|\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)+g(\xi_k))\,\Delta x_k - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ■

**Omadus 5.11** *Kui funktsioon $f$ on lõigus $[a,b]$ integreeruv, siis iga reaalarvu $\lambda$ korral on ka funktsioon $\lambda f$ integreeruv ja*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Omaduse 5.10 abil saab lihtsalt tõestada järgmise olulise väite.

**Omadus 5.12** *Olgu funktsioon $f$ lõigus $[a,b]$ integreeruv ja olgu $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ selline funktsioon, mis erineb funktsioonist $f$ vaid lõpliku arvu argumendi väärtuste korral. Siis $g$ on lõigus $[a,b]$ integreeruv ning*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.14}$$

**Tõestus.** Eeldame, et $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ on integreeruv ja $\{x\in[a,b]\mid g(x)\neq f(x)\}$ on lõplik hulk. Tähistame $h(x):=g(x)-f(x)$ iga $x\in[a,b]$ korral ja näitame, et $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=0$, siis omaduse 5.10 põhjal on $g$ integreeruv ning kehtib võrdus (5.14) (selgitada!)✠.

Funktsiooni $h$ väärtused on mingi lõpliku arvu punktide $c_1,c_2,\dots,c_p\in[a,b]$ korral nullist erinevad, olgu $M:=\max\{|h(c_i)|\mid i=1,\dots,p\}$. Lõigu $[a,b]$ iga alajaotuse $T[x_0,\dots,x_n]$ puhul saab punkt $c_i$ kuuluda üheaegselt ülimalt kahte osalõiku $[x_{k-1},x_k]$. Järelikult on funktsiooni $h$ integraalsummas $\sigma(h,T,\xi)$ suvaliste $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ korral ülimalt $2p$ nullist erinevat liidetavat, mistõttu

$$\left|\sum_{k=1}^{n}h(\xi_k)\,\Delta x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|h(\xi_k)|\,\Delta x_k\leqslant 2pM\lambda(T),$$

seega

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=0$$

(selgitage!)✠.

Väide on tõestatud. ■

**Omadus 5.13** *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on lõigus $[a,b]$ integreeruvad, siis ka nende korrutis $fg$ on selles lõigus integreeruv.*

**Tõestus.** Integreeruvad funktsioonid $f$ ja $g$ on lõigus $[a,b]$ tõkestatud: leiduvad arvud $M>0$ ja $K>0$, et $|f(x)|\leqslant M$ ning $|g(x)|\leqslant K$ iga $x\in[a,b]$ puhul. Seejuures $|f(x)\,g(x)|\leqslant MK$ iga $x\in[a,b]$ korral, tähendab, $fg$ on tõkestatud funktsioon lõigus $[a,b]$. Olgu $T[x_0,\dots,x_n]$ lõigu $[a,b]$ mingi alajaotus, meie eesmärk on veenduda, et iga $\varepsilon>0$ jaoks leidub $\delta>0$ omadusega

$$\lambda(T)<\delta\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}\omega_k(fg,T)\,\Delta x_k<\varepsilon$$

kus $\omega_k(fg,T)$ tähistab funktsiooni $fg$ võnkumist lõigus $[x_{k-1},x_k]$, seejuures (vrd. lause 1.5)

$$\begin{aligned}\omega_k(fg,T)&=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}(f(x)\,g(x))-\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}(f(x)\,g(x))\\&=\sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]}\left(f(x)\,g(x)-f(x')\,g(x')\right)\\&\overset{✠}{=}\sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]}\left|f(x)\,g(x)-f(x')\,g(x')\right|.\end{aligned}$$

Me näitame järgnevalt, et

$$\omega_k(fg,T)\leqslant M\omega_k(g,T)+K\omega_k(f,T)\quad(k=1,...,n). \tag{5.15}$$

Olgu $x$ ja $x'$ suvalised punktid lõigus $[x_{k-1},x_k]$, siis seosest

$$f(x)\,g(x)-f(x')\,g(x')=f(x)\,(g(x)-g(x'))+g(x')\,(f(x)-f(x'))$$

saame võrratuse

$$\left|f(x)\,g(x)-f(x')\,g(x')\right|\leqslant M\left|g(x)-g(x')\right|+K\left|f(x)-f(x')\right|.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\omega_k(fg,T) &= \sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left|f(x)\,g(x) - f(x')\,g(x')\right| \\ &\leqslant M \sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left|g(x) - g(x')\right| + K \sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left|f(x) - f(x')\right|,\end{aligned}$$

niisiis kehtib võrratus (5.15) (selgitada!)✠.

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$.

Lause eelduste kohaselt leiduvad arvud $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ nii, et kehtivad implikatsioonid

$$\lambda(T) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f,T)\,\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2K}, \qquad \lambda(T) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g,T)\,\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Tänu võrratusele (5.15) saame, et

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg,T)\,\Delta x_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g,T)\,\Delta x_k + K \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f,T)\,\Delta x_k,$$

(põhjendage!)✠, millest eeldusel $\lambda(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ järeldub, et

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg,T)\,\Delta x_k < \varepsilon$$

(selgitage!)✠. See aga tähendab teoreemi 5.6 põhjal funktsiooni $fg$ integreeruvust lõigus $[a,b]$ (selgitage!)✠.

Väide on tõestatud. ■

### 5.3.3 Integraali monotoonsusomadused

**Omadus 5.14** (a) *Kui $f(x) \geqslant 0$ iga $x \in [a,b]$ korral ja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.*
(b) *Kui $f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral ja funktsioonid $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integreeruvad, siis $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 5.15** *Olgu $a \leqslant b$. Kui $f$ on lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon, siis ka seosega $|f|(x) := |f(x)|$ määratud funktsioon $|f|$ on integreeruv ja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{5.16}$$

**Tõestus.** Paneme tähele, et antud alajaotuse $T[x_0,\ldots,x_n]$ korral (vrd. lause 1.5(c))

$$\begin{aligned}\omega_k(|f|,T) := &\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)| - \inf_{x'\in[x_{k-1},x_k]} |f(x')| = \sup_{x,\,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left(|f(x)| - |f(x')|\right) \\ \leqslant &\sup_{x,\,x'\in[x_{k-1},x_k]} |f(x) - f(x')| = \sup_{x,\,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left(f(x) - f(x')\right) \\ = &\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \inf_{x'\in[x_{k-1},x_k]} f(x') = \omega_k(f,T) \quad (k = 1,\ldots,n).\end{aligned}$$

Funktsiooni $|f|$ Darboux' summade $S(|f|, T)$ ja $s(|f|, T)$ jaoks järeldub siit, et

$$0 \leqslant S(|f|, T) - s(|f|, T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(|f|, T)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f, T)\Delta x_k = S(f, T) - s(f, T).$$

Seega $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S(|f|, T) - s(|f|, T)) = 0$ (põhjendage!)✠. Teoreemi 5.6 põhjal on funktsioon $|f|$ integreeruv lõigus $[a, b]$ (selgitage!)✠.

Võrratuse (5.16) saamiseks piisab märgata, et $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ ja rakendada omadust 5.14. ■

Märgime, et ilma eelduseta $a \leqslant b$ kehtib valem (5.16) kujul

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right|$$

(selgitada!)✠.

### 5.3.4 Integraali keskväärtusteoreem

**Omadus 5.16** ***(keskväärtusteoreem).*** *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on lõigus $[a, b]$ integreeruvad ning $g$ säilitab märki, siis leidub selline arv $\mu$, et*

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x) =: M$$

*ja*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Omaduse 5.13 kohaselt on funktsioon $fg$ lõigus $[a, b]$ integreeruv. Olgu (konkreetsuse mõttes) $g(x) \geqslant 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Võrratustest $m \leqslant f(x) \leqslant M$ järelduvad võrratused $mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$, integraali monotoonsusomadustest 5.14 saame, et

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

kusjuures $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Kui $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, siis $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (miks?)✠ ja väide kehtib. Kui $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, siis võtame

$$\mu := \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x},$$

see arv rahuldab väite mõlemat tingimust (kontrollida!)✠. ■

**Järeldus 5.17** *Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ nagu omaduses* 5.16, *eeldame, et $f$ on seejuures pidev. Siis leidub selline punkt $c \in [a, b]$, et*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt! (Kasutada teoreemi 3.13.)✠ ■

## 5.4 Pidevate ja katkevate funktsioonide integreerimine

### 5.4.1 Pidevate ja monotoonsete funktsioonide integreeruvus

Cantori teoreemi 3.25 kasutades tõestame järgmise tähtsa väite.

**Lause 5.18** *Iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus integreeruv.*

**Tõestus.** Eeldame, et funktsioon $f$ on pidev lõigus $[a,b]$, siis Cantori teoreemi põhjal on ta selles lõigus ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Vastavalt ühtlase pidevuse definitsioonile (vt. alapunkt. 3.5.1) leidub selline $\delta > 0$, et kui $x, x' \in [a,b]$ ja $|x - x'| < \delta$, siis

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{5.17}$$

Valime lõigu $[a,b]$ alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n]$ nii, et $\lambda(T) < \delta$, siis suvaliste $x$ ja $x'$ puhul osalõigust $[x_{k-1}, x_k]$ kehtib võrratus (5.17). Kuna $f$ on pidev lõigus $[x_{k-1}, x_k]$, siis Weierstrassi teoreemi 3.16 kohaselt $m_k = \min\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ja $M_k = \max\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, niisiis $m_k = f(x'_k)$ ja $M_k = f(x''_k)$ mingite $x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ korral, järelikult $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Niisiis,

$$S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

teoreemi 5.6 kohaselt on $f$ integreeruv lõigus $[a,b]$. ■

Tulles tagasi alapunkti 5.1 juurde, võime teoreemi 5.6 silmas pidades sõnastada Riemanni integraali ***geomeetrilise tähenduse***: *kui mittenegatiivne funktsioon $f$ on lõigus $[a,b]$ pidev, siis tema graafiku ja sirgetega $x = a$, $x = b$ ning $y = 0$ määratud kõvertrapetsil on pindala ning see on võrdne integraaliga $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.* Tõepoolest, selline funktsioon $f$ on lause 5.18 kohaselt integreeruv, mistõttu teoreemi 5.6 põhjal $S_* = I_* = I^* = S^*$ ja $S_{aABb} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Järeldusest 5.17 ja lausest 5.18 tuleneb vahetult järgmine ***pidevate funktsioonide integraalarvutuse keskväärtusteoreem***.

**Järeldus 5.19** *Kui $f$ on lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon, siis leidub selline $c \in (a,b)$, et*

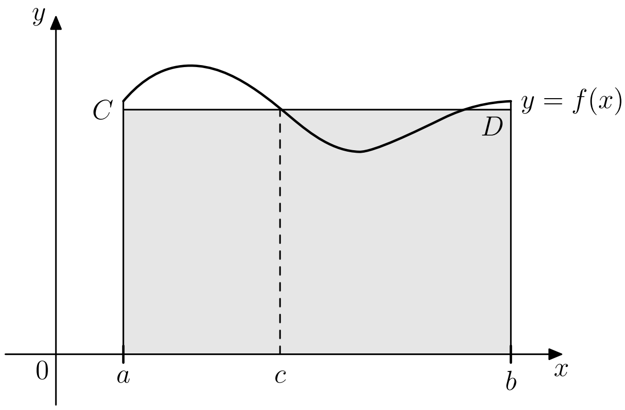
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Selle keskväärtusteoreemi *geomeetrilist sisu* illustreerib joonis 5.2: kui $f$ on lõigus $[a,b]$ pidev mittenegatiivne funktsioon, siis leidub selline $c \in (a,b)$, et alusele $[a,b]$ ehitatud ristkülik kõrgusega $f(c)$ ja funktsiooni $f$ graafikuga määratud kõvertrapets on pindalalt võrdsed.

***Pidevus ei ole tarvilik tingimus integreeruvuseks***, see selgub järgmisest väitest.

**Lause 5.20** *Iga lõigus monotoonne tõkestatud funktsioon on integreeruv.*




Joonis 5.2: Integraalarvutuse keskväärtusteoreem.

**Tõestus.** Kui $f$ on konstantne funktsioon, siis on ta integreeruv (vt. näide 5.1). Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ *kasvav mittekonstantne* tõkestatud funktsioon ja olgu $T[x_0, \ldots, x_n]$ selle lõigu mingi alajaotus. Siis on lihtne kirjeldada funktsiooni $f$ võnkumist $\omega_k(T)$ osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$, see on $f(x_k) - f(x_{k-1})$. Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv, võtame $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Kui $\lambda(T) < \delta$, siis

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(T)\,\Delta x_k < \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

mis teoreemi 5.6 kohaselt tähendabki funktsiooni $f$ integreeruvust lõigus $[a, b]$.

*Kahaneva* funktsiooni puhul on tõestus analoogiline. ■

### 5.4.2 Katkevate funktsioonide integreeruvus

Katkevate funktsioonide integreeruvust kirjeldab järgmine lause.

**Lause 5.21** *Kui tõkestatud funktsioonil $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on lõigus $[a, b]$ vaid lõplik arv katkevuspunkte, siis $f$ on integreeruv.*

**Tõestus. 1.** Vaatleme juhtu, kus funktsiooni $f$ ainsaks katkevuspunktiks on üks lõigu otspunktidest. Olgu selleks punkt $a$, punkti $b$ korral on tõestus analoogiline. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Valime sellise punkti $x_1 \in (a, b)$, mis rahuldab tingimust

$$x_1 - a < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

kus $\omega := \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ on funktsiooni $f$ võnkumine lõigus $[a, b]$ (miks $\omega > 0$?)✠. Lõigus $[x_1, b]$ on funktsioon $f$ pidev, seega ka integreeruv, vastavalt teoreemile 5.6 leiame selle lõigu alajaotuse $T'[x_1, \ldots, x_n]$ omadusega

$$\sum_{k=2}^{n} \omega_k(T')\,\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siis lõigu $[a, b]$ alajaotuse $T\,[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, mis saadakse osalõigu $[x_1, b]$ alajaotusest $T'$ jaotuspunkti $x_0 := a$ lisamisel, on rahuldatud teoreemi 5.6 tingimus (d):

$$\begin{aligned} S\,(T) - s\,(T) &= \sum_{k=1}^{n} \omega_k\,(T)\,\Delta x_k \\ &= \left( \sup_{x\in[a,x_1]} f\,(x) - \inf_{x\in[a,x_1]} f\,(x) \right)(x_1 - a) + \sum_{k=2}^{n} \omega_k\,(T')\,\Delta x_k < \omega \frac{\varepsilon}{2\omega} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Seega on funktsioon $f$ integreeruv lõigus $[a, b]$.

**2.** Vaatleme üldist juhtu, kus vahemikus $(a, b)$ on funktsioonil katkevuspunktid

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_p.$$

Valime punktid $d_1, d_2, \ldots, d_{p+1}$ nii, et

$$a < d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < \ldots < c_p < d_{p+1} < b,$$

siis igas lõigus $[a, d_1], [d_1, c_1], [c_1, d_2], \ldots, [d_{p+1}, b]$ võib funktsioon $f$ olla katkev vaid lõigu ühes otspunktis. Tõestuse esimese osa kohaselt on $f$ igas sellises osalõigus integreeruv, vastavalt aditiivsuse omadusele 5.8 on ta integreeruv lõigus $[a, b]$. ■

## 5.5 Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem

Käesolevas alapunktis tõestame teoreemi, mis seob matemaatilise analüüsi kaks haru, diferentsiaal- ja integraalarvutuse. Selle teoreemi kõige tähtsam järeldus, mida nimetatakse Newton–Leibnizi valemiks, on meile hästi tuntud eelnevatest matemaatilise analüüsi kursustest.

Olgu funktsioon $f$ lõigus $[a, b]$ integreeruv. Omaduse 5.7 kohaselt eksisteerib iga $x \in [a, b]$ korral integraal

$$G\,(x) := \int_a^x f\,(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.18}$$

Funktsiooni $G\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ abil kirjeldataksegi seost integraali ja tuletise vahel.

**Teoreem 5.22** ***(põhiteoreem).*** *Olgu $f$ lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon.*
(a) *Seosega* (5.18) *määratud funktsioon $G$ on lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev.*
(b) *Kui $f$ on punktis $c \in [a, b]$ pidev, siis funktsioon $G$ on selles punktis diferentseeruv ja*

$$G'\,(c) = f\,(c)\,.$$

**Tõestus.** (a) Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $f$ on integreeruv, siis on ta tõkestatud lõigus $[a, b]$, s.t.

$$\exists\ M > 0 : |f\,(x)| \leqslant M \quad (x \in [a, b])\,.$$

Võtame $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$. Kui $x, x' \in [a, b]$ ning $|x - x'| < \delta$, siis, rakendades eelpool tõestatud omadusi 5.8 ja 5.15, saame, et

$$\begin{aligned} |G\,(x) - G\,(x')| &= \left| \int_a^x f\,(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x'} f\,(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{x'}^x f\,(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_{x'}^x |f\,(t)|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M\,|x - x'| < M\delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

s.t. $G$ on lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev funktsioon.

(b) Eeldame, et funktsioon $f$ on punktis $c \in [a,b]$ pidev. Olgu $\varepsilon > 0$, leiame $\delta > 0$, et

$$[|x-c| < \delta,\ \ x \in [a,b]] \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Seostest

$$\frac{G(x)-G(c)}{x-c} - f(c) = \frac{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-c} - f(c) = \frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t}{x-c}$$

saame tingimusel $0 < |x-c| < \delta$ ja $x \in [a,b]$, et

$$\left|\frac{G(x)-G(c)}{x-c} - f(c)\right| \leqslant \frac{\left|\int_c^x |f(t)-f(c)|\,\mathrm{d}t\right|}{|x-c|} < \varepsilon\frac{x-c}{x-c} = \varepsilon$$

(selgitada!)✠. Seega $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{G(x)-G(c)}{x-c} - f(c)\right) = 0$ ehk

$$G'(c) = \lim_{x\to c}\frac{G(x)-G(c)}{x-c} = f(c).$$

Teoreem on tõestatud. ■

**Märkus.** Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemi saab tõestada ka integraalarvutuse keskväärtusteoreemi (vt. järeldus 5.17) kasutades. Nimelt, kuna

$$\frac{G(x)-G(c)}{x-c} = \frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ning keskväärtusteoreemi kohaselt leidub $c$ ja $x$ vahel punkt $\xi$ omadusega

$$f(\xi) = \frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

siis piisab minna piirile $x \to c$ ja märgata, et seejuures ka $\xi \to c$. Et $f$ on pidev punktis $c$, siis ka $\lim\limits_{x\to c} f(\xi) = f(c)$. Kokkuvõttes $G'(c) = f(c)$, nagu soovitud.

Järgmine näide kinnitab, et ilma eelduseta funktsiooni $f$ pidevusest kohal $c \in [a,b]$ ei pruugi teoreemi 5.22 väide (b) kehtida, s.t. funktsioon $G$ ei pruugi olla punktis $c$ diferentseeruv.

**Näide 5.3.** Vaatleme funktsiooni $f\colon\ [0,2] \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } 0 \leqslant x < 1, \\ x+1, & \text{kui } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

paneme tähele, et $f$ ei ole punktis $x = 1$ pidev (veenduda!)✠. Seosest

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{kui } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{x^2}{2} + x - 1, & \text{kui } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

(selgitada!)✠ näeme, et $G\colon\ [0,2] \to \mathbb{R}$ on teoreemi 5.22(a) põhjal pidev funktsioon. Teoreemi 5.22(b) kohaselt

$$G'(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } 0 < x < 1, \\ x+1, & \text{kui } 1 < x < 2, \end{cases}$$

(selgitada!)✠, kuid kuna

$$\lim_{x\to 1-}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-}(x+1)=1,$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{x^2}{2}+x-1-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-}(x+3)=2,$$

siis funktsioon $G$ ei ole punktis $x=1$ diferentseeruv.

Meenutame, et funktsiooni $F\colon D\to\mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$ *algfunktsiooniks* intervallis $D$, kui iga $x\in D$ korral $F'(x)=f(x)$.

**Järeldus 5.23** *Kui funktsioon $f$ on pidev lõigus $[a,b]$, siis seosega* (5.18) *määratud funktsioon $G$ on funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigus $[a,b]$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Järelduse 5.23 abil saame tõestada Newton–Leibnizi valemi. Kõigepealt kirjeldame funktsiooni kõigi algfunktsioonide omavahelist vahekorda.

**Lause 5.24** *Olgu $D$ intervall, olgu funktsioonid $F$ ja $G$ funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$ algfunktsioonid intervallis $D$. Siis leidub $C\in\mathbb{R}$ nii, et $G(x)=F(x)+C$.*

**Tõestus.** Vaadelge funktsiooni $H(x)=G(x)-F(x)$, leidke, et $H'(x)=0$ ning järeldage lause 4.12 abil, et $H$ on konstantne funktsioon (iseseisvalt!✠). ■

Lause 5.24 tõttu on intervallis $D$ funktsiooni $f\colon D\to\mathbb{R}$ kõigi algfunktsioonide üldkuju $F(x)+C$, kus $F\colon D\to\mathbb{R}$ on funktsiooni $f$ **mingi** algfunktsioon. Algfunktsiooni üldkuju $F(x)+C$ märgitakse sümboliga $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ning nimetatakse funktsiooni $f$ *määramata integraaliks*. Juhime tähelepanu asjaolule, et määramata integraali leidmine on tuletise pöördoperatsioon ning määramata integraal pole otseselt seotud funktsiooni integreeruvuse ega integraalsummadega.

**Järeldus 5.25** ***(Newton-Leibnizi valem).*** *Kui funktsioon $f$ on pidev lõigus $[a,b]$, siis*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\,, \tag{5.19}$$

*kus $F$ on funktsiooni $f$ suvaline algfunktsioon lõigus $[a,b]$.*

**Tõestus.** Järelduse 5.23 kohaselt on $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigus $[a,b]$. Edasi kasutage lauset 5.24 (iseseisvalt!✠). ■

**Märkus.** Tõestasime Newton–Leibnizi valemi eeldusel, et integrand $f$ on pidev lõigus $[a,b]$. Tegelikult kehtib ka üldisem valem, kus *nõutakse ainult $f$ integreeruvust lõigus* $[a,b]$. Sellise Newton–Leibnizi valemi tõestamiseks tuleb vaadelda lõigu $[a,b]$ suvalist alajaotust $T$, leida igas alalõigus Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt punkt $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$ omadusega $F(x_k)-F(x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k$ ning minna piirile protsessis $\lambda(T)\to 0$.

Peatüki lõpetuseks toome veel kaks praktilist juhist funktsiooni määratud integraali leidmiseks.

**1. Ositi integreerimine.**

**Lause 5.26** *Olgu funktsioonide $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tuletised $f'$ ja $g'$ pidevad (lõigus $[a,b]$). Siis*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Kasutage korrutise tuletise valemit (vt. lauset 4.5) märkamaks, et funktsioon $f \cdot g$ on funktsiooni $f' \cdot g + f \cdot g'$ algfunktsioon lõigus $[a,b]$. Edasi rakendage Newton–Leibnizi valemit ning integraali aditiivsust (iseseisvalt!)✠. ∎

**2. Muutuja vahetus.** Lause 4.7 liitfunktsiooni diferentseerimisest annab, et kui $F\colon T \to \mathbb{R}$ on funktsiooni $f\colon T \to \mathbb{R}$ algfunktsioon intervallis $T$ ning $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ on intervallis $D$ diferentseeruv, kusjuures $\varphi(D) \subseteq T$, siis liitfunktsiooni $F \circ \varphi\colon D \to \mathbb{R}$ tuletis kohal $x \in D$ on $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Seda asjaolu saab märkida lühidalt kujul

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

**Lause 5.27** *Olgu $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev ja diferentseeruv ning olgu tuletis $\varphi'$ pidev lõigus $[a,b]$. Kehtigu sisalduvus $\varphi([a,b]) \subseteq [\varphi(a), \varphi(b)]$ ning olgu funktsioon $F$ funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigus $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Siis*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Kuna $f$, $\varphi$ ja $\varphi'$ on pidevad, siis funktsioon $x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$. Et $\varphi([a,b]) \subseteq [\varphi(a), \varphi(b)]$, siis selle funktsiooni algfunktsioon lõigus $[a,b]$ on $x \mapsto F(\varphi(x))$, mistõttu

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

nagu soovitud. ∎

**Märkus 1.** Nõue, et $\varphi([a,b]) \subseteq [\varphi(a), \varphi(b)]$ on garanteeritud (koguni võrdusena) näiteks juhul, kui $\varphi$ on rangelt kasvav. Rangelt kahaneva $\varphi$ jaoks saab sõnastada analoogse tulemuse, kasutades kokkulepet, et kui $\varphi(b) > \varphi(a)$, kehtib $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Märkus 2.** Nõuet, et $\varphi([a,b])$ sisalduks lõigus otspunktidega $\varphi(a), \varphi(b)$, ei saa kõrvale jätta. Valime näiteks $[a,b] = [-1,2]$, $\varphi(x) = x^2$, $f(t) = \frac{1}{t^2}$, kus $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$. Siis algfunktsioon on $F(t) = -\frac{1}{t}$ ning

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^4 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = F(4) - F(1) = \frac{3}{4},$$

aga määratud integraalis

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 f(x^2) \cdot 2x\,\mathrm{d}x$$

nõutakse funktsiooni $f$ väärtuste arvutamist väljaspool tema lähtehulka (kuna $\varphi([-1,2]) = [0,4] \nsubseteq [1,4] = [\varphi(-1), \varphi(2)]$). Seda määratud integraali $\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$ ei eksisteeri (isegi mitte päratu integraalina).

## 5.6 Päratud integraalid

### 5.6.1 Lõpmatute rajadega integraal

Olgu funktsioon $f$ määratud intervallis $[a,\infty)$ . Olgu $f$ integreeruv igas lõigus $[a,l]$, kus $l>a$. Piirväärtust

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^l f\left(x\right)\mathrm{d}x, \tag{5.20}$$

nimetatakse funktsiooni $f$ *päratuks integraaliks* rajades $a$-st $\infty$-ni (*improper integral, несобственный интеграл*) ja tähistatakse

$$\int_a^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x. \tag{5.21}$$

Kui seejuures piirväärtus (5.20) on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal (5.21) on *koonduv*. Mittekoonduvaid päratuid integraale nimetatakse *hajuvateks*.

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal

$$\int_{-\infty}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

ja tema koonduvus (defineerida!)✠.

Vaatleme nüüd funktsiooni $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Eksisteerigu mingi $c\in\mathbb{R}$ korral mõlemad päratud integraalid

$$\int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)\mathrm{d}x, \qquad \int_{c}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Kui mõlemad integraalid on lõplikud, siis defineerime, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x \coloneqq \int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x, \tag{5.22}$$

ning ütleme, et päratu integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ on *koonduv*.

Kui mõlemad integraalid $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ on $\infty$, või üks on lõplik ja teine $\infty$, siis defineerime $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\infty$. Analoogselt, kui mõlemad integraalid on $-\infty$, või üks on lõplik ja teine $-\infty$, siis defineerime $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=-\infty$. Juhul, kui mõlemad integraalid on eri märgiga lõpmatused, me päratut integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ei defineeri. (**NB!** Kõigil selles lõigus märgitud juhtudel on päratu integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *hajuv*.)

Olgu funktsioon $f$ igas osalõigus $[a,l]$, kus $l\geqslant a$, integreeruv, siis

$$\int_a^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x \text{ koondub parajasti siis, kui } \int_{a_1}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x \text{ koondub iga } a_1\geqslant a \text{ korral,} \tag{5.23}$$

see tuleneb (tänu integraali aditiivsusomadusele 5.8 kehtivast) seosest

$$\int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^l f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Samasugune väide kehtib muidugi ka integraali $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ puhul. Siit järeldub (kuidas?)✠, et kui päratu integraal (5.22) koondub, siis ei sõltu selle väärtus arvu $c \in \mathbb{R}$ valikust.

**Märkus.** Vaadeldakse ka päratu integraali üldisemat varianti – *Cauchy peaväärtust*. Kui $f$ on integreeruv igas lõigus $[-l, l]$, kus $l > 0$, siis defineeritakse

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x.$$

Vahetult saab kontrollida, et kui päratu integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ on koonduv, siis sama väärtusega on ka Cauchy peaväärtus $\text{p.v.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, ning et leidub funktsioone, mille Cauchy peaväärtus $\text{p.v.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ on lõplik, kuid päratu integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ on hajuv. (Iseseisvalt!)✠

**Näide 5.4.** Olgu $q > 0$ ja $a > 0$, uurime päratu integraali

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x \tag{5.24}$$

koonduvust. Juhul $q = 1$ kehtib võrdus $F(l) := \int_a^l \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln l - \ln a$ iga $l \geqslant a$ korral, on selge, et lõplikku piirväärtust $\lim\limits_{l\to\infty} F(l)$ sel juhul ei eksisteeri. Seevastu, kui $q \neq 1$, siis $F(l) = \frac{1}{(1-q)l^{q-1}} - \frac{1}{(1-q)a^{q-1}}$ ja lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty} F(l)$ on olemas parajasti siis, kui $q > 1$. Niisiis, *integraal* (5.24) *koondub parajasti siis, kui* $q > 1$.

Järgnev lause on jadade monotoonsuseprintsiibi pidev analoog.

**Lause 5.28** *Olgu* $F\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *kasvav funktsioon. Lõplik piirväärtus* $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ *leidub parajasti siis, kui hulk* $\{F(x)\colon x \in [a, \infty)\}$ *on ülalt tõkestatud. Sealjuures, kui nii on, siis*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \sup\{F(x)\colon x \in [a, \infty)\}.$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Leidugu piirväärtus $L = \lim\limits_{l\to\infty} F(l)$, siis mingi reaalarvu $N \in [a, \infty)$ korral garanteerib nõue $x > N$ selle, et kehtib $L - 1 < F(x) < L + 1$ (selgitage!)✠ Nüüd iga $x \in [a, \infty)$ korral $F(x) \leqslant L + 1$ (miks?)✠, mis tähendabki, et $F$ väärtuste hulk on ülalt tõkestatud.

*Piisavus.* Olgu $F$ väärtuste hulk ülalt tõkestatud, siis eksisteerib $L = \sup\{F(x)\colon x \in [a, \infty)\}$. Näitame, et $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = L$. Fikseerime reaalarvu $\varepsilon > 0$, siis lause 1.3 kohaselt leidub $x_0 \in [a, \infty)$ omadusega, et $F(x_0) > L - \varepsilon$. Kui nüüd $x > x_0$, siis

$$L - \varepsilon < F(x_0) \leqslant F(x) \leqslant L < L + \varepsilon,$$

mis tõestab koondumise $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = L$ (põhjendage!)✠. ■

Rakendame lauset 5.28 järgmises situatsioonis. Olgu $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ***mittenegatiivne,*** s.t. $f(x) \geqslant 0$ iga $x \geqslant a$ korral, eeldame, et $f$ on igas osalõigus $[a,l]$, kus $l \geqslant a$, integreeruv. Tähistame $F(l) := \int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x$, funktsioon $F\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ on intervallis $[a,\infty)$ kasvav ja mittenegatiivne: kui $l \geqslant a$, siis $F(l) \geqslant 0$ (vrd. lause 5.14), ning

$$a < l_1 < l_2 \Rightarrow F(l_2) = F(l_1) + \int_{l_1}^{l_2} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant F(l_1)\,.$$

**Järeldus 5.29** *Olgu mittenegatiivne funktsioon $f$ integreeruv igas osalõigus $[a,l]$, kus $l \geqslant a$. Lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ eksisteerib (s.t. päratu integraal $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ koondub) parajasti siis, kui funktsioon $F$ on tõkestatud intervallis $[a,\infty)$. Sel juhul*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{F(l) : l \in [a,\infty)\right\}.$$

**Tõestus.** Kuna kasvava funktsiooni $F$ väärtuste hulk $\{F(l)\colon l \in [a,\infty)\}$ on alt tõkestatud arvuga $F(a)$, järeldub see tulemus vahetult eelmisest lausest 5.28. ■

Järelduse 5.29 ja seose (5.23) abil saab lihtsalt tõestada järgmise lõpmatute rajadega integraalide ***võrdluslause.***

**Lause 5.30** *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on igas lõigus $[a,l]$, kus $l \geqslant a$, integreeruvad ning $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in [a,\infty)$ korral, siis integraali $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvusest järeldub integraali $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvus. Kui integraal $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ hajub, siis hajub ka integraal $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.*

**Tõestus.** Pidades silmas seost (5.23), võime lähtuda eeldusest $a = a_1$ (selgitada!)✠. Tähistame $G(l) := \int_a^l g(x)\,\mathrm{d}x$, siis intervallis $[a,\infty)$ kehtivast eeldusest $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ saame võrratuse $F(l) \leqslant G(l)$ iga $l \in [a,\infty)$ korral (vrd. lause 5.14). Kui eksisteerib piirväärtus $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty} G(l)$, siis järelduse 5.29 põhjal on funktsioon $G$ tõkestatud intervallis $[a,\infty)$, järelikult on ka funktsioon $F$ samas intervallis tõkestatud. Järelduse 5.29 kohaselt eksisteerib $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) = \int_a^l f(x)\,\mathrm{d}x$.

Kui $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ hajub, siis $\{F(l) \mid l \in [a,\infty)\}$ on tõkestamata hulk, järelikult on tõkestamata ka $\{G(l) \mid l \in [a,\infty)\}$, mistõttu $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ hajub. ■

**Näide 5.5.** Integraal $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ on koonduv, sest

$$0 \leqslant \frac{\cos^2 x}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1,\infty))$$

ja $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ koondub näite 5.4 põhjal.

### 5.6.2 Tõkestamata funktsiooni päratu integraal

Olgu funktsioon $f\colon\ [a,b)\to\mathbb{R}$ poollõigu $[a,b)$ igas osalõigus $[a,l]$, kus $a<l<b$, integreeruv (siis ka tõkestatud), kuid poollõigus $[a,b)$ tõkestamata. Sel juhul ütleme, et funktsioon $f$ on *punkti $b$ ümbruses tõkestamata.* Piirväärtust

$$\lim_{l\to b-}\int_a^l f\left(x\right)\mathrm{d}x, \tag{5.25}$$

nimetatakse funktsiooni $f$ *päratuks integraaliks rajades $a$-st $b$-ni* ja tähistatakse (nagu tavalist Riemanni integraali) $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Kui piirväärtus (5.25) on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ on koonduv.

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x := \lim_{m\to a+}\int_m^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

juhul, kui funktsioon $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ on punkti $a$ ümbruses tõkestamata, kuid igas osalõigus $[m,b]\subseteq(a,b]$ integreeruv.

Kui $f\colon\ (a,b)\to\mathbb{R}$ on mõlema punkti $a$ ja $b$ ümbruses tõkestamata, kuid mingi $c\in(a,b)$ puhul eksisteerivad päratud integraalid $\int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$ ja $\int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$, mille väärtused ei ole eri märgiga lõpmatused, siis defineeritakse päratu integraal

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x := \int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Seda nimetatakse koonduvaks, kui võrduse parema poole mõlemad päratud integraalid koonduvad.

Ka sel juhul vaadeldakse mõnikord Cauchy peaväärtust, mis defineeritakse piirväärtusena

$$\mathrm{p.v.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{a+\varepsilon}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

On võimalik defineerida päratu integraal ka olukorras, kui mõni raja võib olla lõpmatus ning samal ajal punkte, mille ümbruses funktsioon on tõkestamata, on integreerimispiirkonnas suvaline lõplik arv. Selline päratu integraal defineeritakse sobiva summana ülaltoodud päratu integraali kahest „põhitüübist“.

**Näide 5.6.** Vaatleme integraali

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\left(b-x\right)^q} \tag{5.26}$$

kus $a<b$ ja $q>0$. Kui $q=1$, siis $F\left(l\right):=\int_a^l\frac{\mathrm{d}x}{b-x}=\ln\left(b-a\right)-\ln\left(b-l\right)$ ning $\lim\limits_{l\to b-}F\left(l\right)=\infty$. Kui $q\neq1$, siis $F\left(l\right)=\frac{1}{1-q}\left(b-a\right)^{1-q}-\frac{1}{1-q}\left(b-l\right)^{1-q}$ ning integraal (5.26) koondub parajasti siis, kui $q<1$.

Analoogiliselt lausega 5.30 tõestatakse järgmine ***võrdluslause.***

**Lause 5.31** *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on poollõigus $[a,b)$ tõkestamata, igas lõigus $[a,l]$, kus $a<l<b$, integreeruvad ning leidub $a_1 \in [a,b)$, et $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in [a_1,b)$ korral, siis päratu integraali $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvusest järeldub päratu integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvus ning päratu integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hajuvusest päratu integraali $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ hajuvus.*

Samasugune väide kehtib ka punkti $a$ ümbruses tõkestamata funktsioonide $f$ ja $g$ puhul.

**Näide 5.7.** Integraal $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ koondub, sest

$$0<\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\frac{1}{x\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad (x\in(1,2])$$

ja integraal $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ koondub (vt. näide 5.6).

**Märkus.** Nii lõpmatute rajadega päratu integraali kui tõkestamata funktsiooni päratu integraali jaoks on võimalik tõestada ka **II võrdluslause**. Nii näiteks kui $f,g\colon [a,\infty)\to\mathbb{R}$, kusjuures $f$ ja $g$ on igas lõigus $[a,l]$ integreeruvad, $f(x)\geqslant 0$ ja $g(x)>0$ iga $x\in[a,\infty)$ korral ning piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{f(l)}{g(l)}$ on positiivne reaalarv, siis koonduvad ja hajuvad päratud integraalid $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ samaaegselt. II võrdluslause tõestus matkib vastavat arvridade II võrdluslause tõestust (vt. lauset 6.18).

## 5.7 Wallise valem ja Euler–Poissoni integraal

### 5.7.1 Wallise valem

Tähistame

$$J_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m x\mathrm{d}x \quad (m=0,1,\dots)$$

ning paneme tähele, et $J_0=\frac{\pi}{2}$ ja $J_1=1$. Kui $m>1$, siis rakendame integraali $J_m$ arvutamiseks ositi integreerimise valemit, mille kohaselt

$$\begin{aligned}J_m &= \int_0^{\pi/2}\sin^{m-1} x\mathrm{d}(-\cos x) = -\sin^{m-1}x\cos x\big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ &= (m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\mathrm{d}x-(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^m x\mathrm{d}x = (m-1)\,J_{m-2}-(m-1)\,J_m\end{aligned}$$

ehk

$$J_m=\frac{m-1}{m}J_{m-2}.$$

Juhul $m=2n$ saame viimast seost kasutades, et

$$J_{2n}=\frac{(2n-1)\,(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2n\,(2n-2)\dots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2},$$

juhul $m=2n+1$ aga

$$J_{2n+1}=\frac{2n\,(2n-2)\dots 4\cdot 2}{(2n+1)\,(2n-1)\dots 3\cdot 1}.$$

Kui tähistada

$$m!! := \begin{cases} (2n)(2n-2)\ldots 4\cdot 2, & \text{kui } m = 2n, \\ (2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1, & \text{kui } m = 2n+1, \end{cases}$$

saame tulemuse üles kirjutada kujul

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}, & \text{kui } m \text{ on paarisarv,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{kui } m \text{ on paaritu arv.} \end{cases} \tag{5.27}$$

Saadud seose abil tõestame järgnevalt ***Wallise valemi***

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Lähtudes võrratustest

$$0 \leqslant \sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x \quad (x \in [0, \pi/2])$$

(põhjendada!)✠, saame seosed

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\mathrm{d}x$$

(põhjendada!)✠. Valemi (5.27) kohaselt

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Jagades võrratuse liikmeid arvuga $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, saame, et

$$x_n := \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 =: z_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Seejuures

$$z_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

mistõttu seostest

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} - x_n \leqslant z_n - x_n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

järeldub, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{\pi}{2}$. Valem on tõestatud.

### 5.7.2 Euler–Poissoni integraal

Wallise valemit rakendatakse paljude keeruliste integraalide arvutamisel. Me leiame järgnevalt selle valemi abil ***Euler–Poissoni integraali***

$$K := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

väärtuse. Tegemist on päratu integraaliga, mis mängib tähtsat rolli tõenäosusteoorias.

Vaatleme kõigepealt funktsiooni

$$f(t) = (1+t)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Uurides selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkondi, on lihtne veenduda, et $f$ saavutab oma maksimaalse väärtuse 1 punktis $t = 0$ (kontrollida!)✠, niisiis,

$$(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} < 1 \text{ iga } t \neq 0 \text{ puhul.}$$

Võttes $t := \pm x^2$, saame võrratused $\left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x^2} < 1$ ning $\left(1 + x^2\right) \mathrm{e}^{-x^2} < 1$, seega

$$1 - x^2 < \mathrm{e}^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \qquad (x > 0)$$

(kontrollida!)✠. Siit tuleneb, et suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral

$$0 < \left(1 - x^2\right)^n < \mathrm{e}^{-nx^2} \quad (x \in (0,1)) \quad \text{ja} \quad \mathrm{e}^{-nx^2} < \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \quad (x > 0)\,.$$

Integreerime esimese võrratuse mõlemat poolt rajades 0-st 1-ni ja teise mõlemat poolt rajades 0-st $\infty$-ni:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \mathrm{d}x < \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \mathrm{d}x \tag{5.28}$$

(põhjendada!)✠. Muutujavahetuse $t := \sqrt{n}x$ abil on lihtne veenduda, et

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} K \tag{5.29}$$

(kontrollida!)✠. Valemist (5.27) saame muutujavahetust $x = \cos t$ kasutades seose

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{5.30}$$

(kontrollida!)✠ ning muutujavahetuse $x = \cot t$ abil

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t \mathrm{d}t = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \tag{5.31}$$

(kontrollida)!✠. Seostest (5.28) – (5.31) järeldub, et

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K \leqslant \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N})\,,$$

millest omakorda tuleneb, et

$$x_n := \frac{n}{2n+1} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < K^2 \leqslant \frac{n}{2n-1} (2n-1) \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =: z_n$$

(kontrollida!)✠. Wallise valemi kohaselt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n\to\infty} (2n-1) \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

tähendab, $K^2 = \frac{\pi}{4}$ ehk

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

# 6 Funktsionaaljadad. Arv- ja funktsionaalread

## 6.1 Funktsionaaljadad, nende punktiviisi ja ühtlane koonduvus

### 6.1.1 Funktsionaaljada punktiviisi koonduvus

Olgu $(f_k)$ selline funktsioonide jada, mille kõik liikmed $f_k$ on määratud mingis mittetühjas hulgas $D \subseteq \mathbb{R}$. Sellist jada nimetame edaspidi (hulgas $D$ määratud) *funktsionaaljadaks* (*sequence of functions, функциональная последовательность*).

**Definitsioon.** Ütleme, et funktsionaaljada $(f_k)$ *koondub punktiviisi* hulgas $D$ (*converges pointwise, сходится поточенно*), kui iga $x \in D$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x). \tag{6.1}$$

Seos (6.1) määrab hulgas $D$ funktsiooni $f$, mida nimetatakse funktsionaaljada $(f_k)$ *piirfunktsiooniks* (*limit function, предельная функция*). Lühidalt kirjutame sel juhul "$f_k \to f$ *punktiviisi hulgas* $D$".

**Põhiprobleem** koonduvate funktsionaaljadade puhul on küsimus piirfunktsiooni analüütilistest omadustest. *Kas funktsioonide $f_k$ tähtsamad omadused (pidevus, diferentseeruvus, integreeruvus jm.) kanduvad üle seosega* (6.1) *määratud funktsioonile $f$?*

Järgnevad lihtsad näited kinnitavad, et üldjuhul on vastus esitatud küsimusele eitav.

**Näide 6.1.** Funktsionaaljada $(f_n)$, kus

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k},$$

koondub kogu arvteljel $\mathbb{R}$ ja

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Jada liikmed on pidevad funktsioonid (kontrollida!)✠, kuid kuna $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$, siis piirfunktsioon $f$ ei ole pidev punktis $x = 0$.

Selle näite põhjal võime öelda, et *punktiviisi koonduva pidevate funktsioonide jada piirfunktsioon ei pruugi olla pidev.* Veelgi enam, kuna funktsioonid $f_n$ on diferentseeruvad, tuleneb näitest 6.1, et punktiviisi koonduvate diferentseeruvate funktsioonide jada piirfunktsioon ei pruugi olla pidev, ammugi siis diferentseeruv.

**Näide 6.2.** Vaatleme funktsionaaljada $(f_k)$, kus

$$f_k\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{k}x^k.$$

Selge, et $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, seega $f'(x) = 0$ iga $x \in [0,1]$ korral. Seejuures $f_k'(x) = x^{k-1}$, niisiis on tuletiste jada $(f_k')$ punktiviisi koonduv lõigus $[0,1]$ ning

$$\lim_{k\to\infty} f_k'(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in [0,1), \\ 1, & \text{kui } x = 1. \end{cases}$$

Näeme, et

$$\lim_{k\to\infty} f_k'(x) \neq \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)', \text{ kui } x = 1.$$

Niisiis, *punktiviisi koonduva diferentseeruvate funktsioonide jada puhul üldjuhul ei ole lubatud piirileminek tuletise märgi all.*

**Näide 6.3.** Kui funktsionaaljada $(f_k)$ liikmeteks on funktsioonid

$$f_k\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto kx\left(1-x^2\right)^k,$$

siis suvalise $x \in (0,1)$ korral

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = x \lim_{k\to\infty} k\left(1-x^2\right)^k = x \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^k} = 0,$$

seega $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ iga $x \in [0,1]$ puhul. Seejuures

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty} k\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^k \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} k\int_0^1 \left(1-x^2\right)^k \mathrm{d}\left(1-x^2\right)\\ &= -\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2(k+1)}\left[\left(1-x^2\right)^{k+1}\right]_0^1\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Niisiis, üldjuhul

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x.$$

### 6.1.2 Funktsionaaljada ühtlane koonduvus

See, kas koonduva funktsionaaljada analüütilised omadused kanduvad üle tema piirfunktsioonile või mitte, sõltub selle jada koonduvuse iseloomust, täpsemalt sellest, kui hästi saab piirfunktsiooni $f$ lähendada funktsioonidega $f_k$. "Heaks" koonduvuseks osutub järgnevalt defineeritav ühtlane koonduvus**.**

**Definitsioon.** Ütleme, et funktsionaaljada $(f_k)$ *koondub funktsiooniks* $f$ *ühtlaselt* hulgas $D$ (*converges uniformly, сходится равномерно*), kui

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon k \geqslant N \Rightarrow \left[\left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon \textbf{ iga } x \in D \textbf{ korral}\right]. \tag{6.2}$$

Lühidalt kirjutame sel juhul "$f_k \to f$ *ühtlaselt hulgas* $D$".

Võrdluseks esitame $\varepsilon$-$N$-keeles punktiviisi koonduvuse definitsiooni: funktsionaaljada $(f_k)$ koondub funktsiooniks $f$ *punktiviisi* hulgas $D$ parajasti siis, kui

$$\forall x \in D\ \ \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon k \geqslant N \Rightarrow \left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

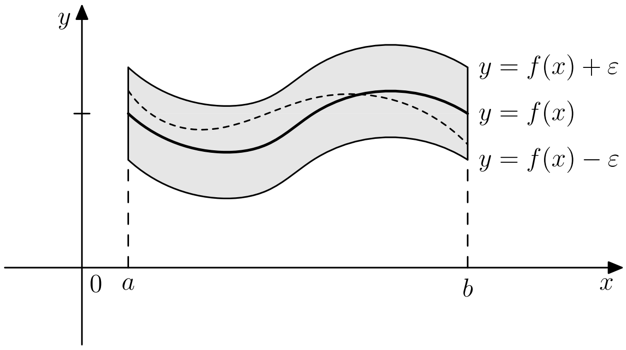
Nende kahe tingimuse võrdlemisel on selge, et kehtib järgmine väide.

**Lause 6.1** *Kui $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas $D$, siis $f_k \to f$ punktiviisi hulgas $D$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

*Geomeetriliselt* illustreerib funktsionaaljada $(f_k)$ ühtlast koonduvust funktsiooniks $f$ lõigus $[a, b]$ joonis 6.1: suvalise etteantud $\varepsilon > 0$ korral leidub selline indeks $N$, et iga $k \geqslant N$ korral asub funktsiooni $f_k$ graafik ribas

$$\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$




Joonis 6.1: Funktsionaaljada ühtlane koonduvus.

Vahetult definitsioonist (6.2) saame ühtlase koonduvuse jaoks järgmise kriteeriumi.

**Lause 6.2** *Funktsionaaljada $(f_k)$ koondub hulgas $D$ ühtlaselt funktsiooniks $f$ parajasti siis, kui $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$, kus*

$$r_k := \sup\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in D\}.$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas $D$, olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Vastavalt definitsioonile (6.2) leiame $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$k \geqslant N \Rightarrow \left[|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ iga } x \in D \text{ korral}\right],$$

seega on arv $\frac{\varepsilon}{2}$ hulga $\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in D\}$ ülemine tõke iga $k \geqslant N$ puhul. Seetõttu sama hulga vähim ülemine tõke $r_k$ rahuldab tingimust

$$r_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (k \geqslant N),$$

niisiis, $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$.

*Piisavus.* Eeldame, et $r_k = \sup\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in D\}$ eksisteerib iga $k \in \mathbb{N}$ korral ja $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$, olgu $\varepsilon > 0$. Arvjada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $r_k < \varepsilon$, kui $k \geqslant N$, seega

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \sup\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in D\} < \varepsilon \text{ iga } x \in D \text{ ja } k \geqslant N \text{ korral.}$$

See tähendabki, et $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas $D$. ■

**Näide 6.4.** Toome lihtsa näite punktiviisi koonduvast funktsionaaljadast, mis ei koondu ühtlaselt. Kui

$$f_k\colon\ [0,1] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^k,$$

siis

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in [0,1)\,, \\ 1, & \text{kui } x = 1, \end{cases}$$

seega koondub jada $(f_k)$ punktiviisi lõigus $[0,1]$ funktsiooniks $f$. See koonduvus ei ole ühtlane, sest

$$r_k := \sup\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in [0,1]\} = 1 \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

**Teoreem 6.3** ***(Cauchy kriteerium ühtlase koonduvuse jaoks).*** *Hulgas $D$ määratud funktsionaaljada $(f_k)$ koondub selles hulgas ühtlaselt parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et*

$$k, m \geqslant N \Rightarrow [|f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ iga } x \in D \text{ korral}]\,. \tag{6.3}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Olgu $\varepsilon > 0$ suvaliselt fikseeritud. Kui $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas $D$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$, et $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ iga $k \geqslant N$ ja $x \in D$ puhul. Siit tuleneb tingimus (6.3): kui $k, m \geqslant N$, siis iga $x \in D$ korral

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leqslant |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

*Piisavus.* Kehtigu tingimus (6.3), siis iga fikseeritud $x \in D$ korral on ***arv***jada $(f_k(x))$ koonduv (selgitada!)✠. Tähistame $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, seega $f_k \to f$ punktiviisi hulgas $D$. Näitame, et see koonduvus on ühtlane. Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu $N$ valitud vastavalt eeldusele (6.3), s.t. $|f_k(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kõikide $k, m \geqslant N$ ja $x \in D$ korral. Protsessis $m \to \infty$ saame, et

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ iga } k \geqslant N \text{ ja } x \in D \text{ korral.}$$

Seega $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas $D$. ■

### 6.1.3 Funktsionaaljadad, mille liikmed on pidevad funktsioonid

Olgu $D \subseteq \mathbb{R}$ mittetühi hulk ja olgu funktsioonid $f_k\colon D \to \mathbb{R}$, kus $k \in \mathbb{N}$, pidevad, s.t.

$$\lim_{t\to x} f_k(t) = f_k(x) \text{ kõikide } x \in D \text{ ja } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Eeldame, et $f_k \to f$ punktiviisi hulgas $D$, s.t.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ iga } x \in D \text{ korral.}$$

Piirfunktsiooni $f$ pidevus punktis $x \in D$ tähendab võrdust $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$, niisiis

$$\lim_{t\to x}\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \lim_{t\to x} f(t) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k\left(\lim_{t\to x} t\right) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to x} f_k(t)\,.$$

Me tõestasime järgmise väite.

**Lause 6.4** *Kui pidevate funktsioonide jada* $(f_k)$ *koondub hulgas* $D$ *punktiviisi funktsiooniks* $f$, *siis piirfunktsiooni* $f$ *pidevuseks hulgas* $D$ *on tarvilik ja piisav tingimus*

$$\lim_{t\to x}\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to x} f_k(t) \quad (x \in D)\,. \tag{6.4}$$

**Teoreem 6.5** *Kui hulgas* $D$ *pidevate funktsioonide jada* $(f_k)$ *koondub* ***ühtlaselt*** *selles hulgas funktsiooniks* $f$, *siis* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *on pidev funktsioon.*

**Tõestus.** Eeldame, et
1) $f_k : D \to \mathbb{R}$ on pidev iga $k \in \mathbb{N}$ korral ja
2) $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas $D$.
Fikseerime suvalise $x \in D$ ning kontrollime funktsiooni $f$ pidevust punktis $x$.

Olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt eeldusele 2) leiame $N \in \mathbb{N}$, et

$$|f(t) - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ suvaliste } t \in D \text{ ja } k \geqslant N \text{ korral.}$$

Eelduse 1) põhjal on funktsioon $f_N$ pidev kohal $x$, seega eksisteerib niisugune $\delta > 0$, et

$$[t \in D,\ |t - x| < \delta] \Rightarrow |f_N(t) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kokkuvõttes, kui $t \in D$ ja $|t - x| < \delta$, siis

$$|f(t) - f(x)| \leqslant |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

seega on funktsioon $f$ pidev punktis $x$. ■

Järgmine näide ütleb, et *ühtlane koonduvus ei ole tarvilik* tingimus punktiviisi koonduva funktsionaaljada piirfunktsiooni pidevuseks.

**Näide 6.5.** Pidevate funktsioonide

$$f_k(x) := \begin{cases} \sin kx, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{k}, \\ 0, & \text{kui } \frac{\pi}{k} < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

jada $(f_k)$ koondub lõigus $[0, \pi]$ *punktiviisi* pidevaks funktsiooniks $f$, mis on määratud seosega $f(x) = 0$ iga $x \in [0, \pi]$ korral (kontrollida!)✠. Kuna

$$r_k := \sup\left\{\sin kx \mid x \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right\} = 1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

siis lause 6.2 põhjal ei ole see koonduvus ühtlane.

Teoreemi 6.5 abil tõestame järgnevalt väited, mis kirjeldavad koonduva funktsionaaljada piirfunktsiooni diferentseerimise ning integreerimisega seotud omadusi. Seejuures kasutame me diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreemi 5.22. Meenutame, et kui funktsioon $f$ on lõigus $[a, b]$ integreeruv, siis eksisteerib

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a, b])$$

ning funktsioon $G$ on lõigus $[a, b]$ pidev. Kui seejuures $f$ on punktis $x_0 \in [a, b]$ pidev, siis $G$ on punktis $x_0$ diferentseeruv ning $G'(x_0) = f(x_0)$.

Alustame järgmise lemmaga.

**Lemma 6.6** *Kui lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide jada $(f_k)$ koondub ühtlaselt selles lõigus funktsiooniks $f$, siis*

$$\int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{ühtlaselt lõigus } [a,b]\,.$$

**Tõestus.** Kõigepealt märgime, et kuna $f_k \to f$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$ ja kõik funktsioonid $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidevad, siis funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on teoreemi 6.5 põhjal pidev. Lause 6.2 kohaselt

$$\max\{|f_k(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} =: r_k \to 0,$$

seega, kuna

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \max\left\{\left|\int_a^x f_k(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \mid x \in [a,b]\right\}\\
&\leqslant \max\left\{\int_a^x |f_k(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \mid x \in [a,b]\right\}\\
&\leqslant r_k \max\left\{\int_a^x \mathrm{d}t \mid x \in [a,b]\right\} = (b-a)\,r_k,
\end{aligned}$$

siis väide järeldub lausest 6.2 (selgitada!)✠. ∎

Lemma 6.6 abil tõestame teoreemid piirileminekust vastavalt integraali- ja tuletisemärgi all. Järgmine väide on vahetu järeldus lemmast 6.6.

**Teoreem 6.7** ***(piirileminekust integraalimärgi all).*** *Kui lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide jada $(f_k)$ koondub ühtlaselt selles lõigus funktsiooniks $f$, siis*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ∎

**Märkus 1.** Teoreem 6.7 kehtib ka nõrgemal eeldusel: pidevuse asemel piisab eeldada funktsioonide $f_k$, $k \in \mathbb{N}$, integreeruvust. Tõestuseks piisab märkida, et vastavalt antud arvule $\varepsilon > 0$ saab leida funktsionaaljada $(f_k)$ ühtlase koonduvuse tõttu indeksi $N$, et kui $k \geqslant N$, siis iga $x \in [a,b]$ korral $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{a-b}$. Edasi on jäänud rakendada integraali monotoonsusomadusi.

**Märkus 2.** *Kui integreeruvate funktsioonide jada $(f_k)$ koondub ühtlaselt piirfunktsiooniks $f$, on $f$ ka integreeruv.* Selle märkamiseks fikseeritakse $\varepsilon > 0$ ning leitakse $N$ nii, et iga $x \in [a,b]$ korral $f_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Nüüd osutub, et lõigu $[a,b]$ iga alajaotuse $T$ korral kehtib võrratus

$$S_f(T) - s_f(T) \leqslant S_{f_N}(T) - s_{f_N}(T) + \varepsilon(b-a),$$

mis garanteerib funktsiooni $f$ integreeruvuse lõigus $[a,b]$.

**Teoreem 6.8** ***(piirileminekust tuletisemärgi all).*** *Kui funktsioonid $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kus $k \in \mathbb{N}$, rahuldavad tingimusi*
1) *iga funktsioon $f_k$ on lõigus $[a,b]$ pidevalt diferentseeruv, s.t. $f_k'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev,*
2) *funktsionaaljada $(f_k)$ koondub punktiviisi lõigus $[a,b]$ mingiks funktsiooniks $f$,*
3) *tuletiste jada $(f_k')$ koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$ mingiks funktsiooniks $\varphi$,*

*siis $f_k \to f$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$, funktsioon $f$ on diferentseeruv ja*

$$f'(x) = \varphi(x) \quad \textit{iga } x \in [a,b] \textit{ korral.} \tag{6.5}$$

**Tõestus.** Funktsionaaljadale $(f_k')$ saab rakendada lemmat 6.6 (kontrollige eeldusi!)✠. Seega saame, et

$$\int_a^x f_k'(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ühtlaselt lõigus } [a,b].$$

Teiselt poolt tänu Newton–Leibnizi valemile (järeldus 5.25) kehtib võrdus

$$f_k(x) = f_k(a) + \int_a^x f_k'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kuna ühtlasest koonduvusest järeldub punktiviisi koonduvus, oleme saanud, et

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t \quad (x \in [a,b])$$

(selgitage!)✠. Selle võrduse mõlemast poolest võtame tuletise ning kasutame diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemi (teoreem 5.22), et saada tõestatav võrdus (6.5) (selgitage, miks $\varphi$ on pidev!)✠. Koondumine $f_k \to f$ on ühtlane, sest

$$f_k(x) - f(x) = (f_k(a) - f(a)) + \left(\int_a^x f_k'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

kusjuures iga $\varepsilon > 0$ korral võib leida $N$, et kui $k \geqslant N$, on mõlemad sulgavaldised võrduse paremal pool absoluutselt väiksemad kui $\frac{\varepsilon}{2}$ (selgitage detaile!)✠. ■

### 6.1.4 Dini teoreem funktsionaaljada ühtlasest koonduvusest

Teoreemi 6.5 kohaselt on lõigus ühtlaselt koonduva pidevate funktsioonide jada $(f_n)$ piirfunktsioon $f$ selles lõigus pidev. Kuid nagu selgus näitest 6.5, ei ole ühtlane koonduvus üldjuhul tarvilik tingimus piirfunktsiooni pidevuseks. Järgmine teoreem kirjeldab situatsiooni, kus ühtlase koonduvuse eeldus on tõepoolest tarvilik piirväärtuseks oleva funktsiooni pidevuseks.

**Lause 6.9** ***(Dini teoreem funktsionaaljada ühtlaseks koonduvuseks).*** *Olgu $(f_k)$ selline lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide jada, mis koondub punktiviisi selles lõigus* ***pidevaks*** *funktsiooniks $f$. Kui jada $(f_k)$ on lõigus $[a,b]$ monotoonne, siis $f_k \to f$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$.*

**Tõestus.** Konkreetsuse mõttes olgu $(f_k)$ lõigus $[a,b]$ kasvav jada, s.t.

$$f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x) \quad (x \in [a,b],\, k \in \mathbb{N}).$$

Tähistame $h_k := f - f_k$, siis funktsioonid $h_k$ on lõigus $[a,b]$ pidevad, seejuures $h_k(x) \to 0$ ja $h_k(x) \geqslant h_{k+1}(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Paneme tähele, et $h_k(x) \geqslant 0$ kõikide $k \in \mathbb{N}$ ning $x \in [a,b]$ puhul. Nimelt, kui oletada vastuväiteliselt, et $h_{k_0}(x_0) < 0$ mingite $k_0 \in \mathbb{N}$ ning $x_0 \in [a,b]$ korral, s.t. $\varepsilon := f_{k_0}(x_0) - f(x_0) > 0$, siis

$$f_k(x_0) - f(x_0) \geqslant f_{k_0}(x_0) - f(x_0) = \varepsilon > 0 \quad (k \geqslant k_0),$$

seega $f_k(x_0) \nrightarrow f(x_0)$, mis on vastuolus lause eeldustega.

Näitame, et $h_k \to 0$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$. Kuna $(h_k)$ on kahanev jada, siis piisab veenduda, et iga $\varepsilon > 0$ puhul saab valida sellise indeksi $k_0$, et $h_{k_0}(x) < \varepsilon$ iga $x \in [a,b]$ korral (põhjendada!)✠.

Oletame vastuväiteliselt, et teatava $\varepsilon_0 > 0$ korral see tingimus ei ole täidetud. Siis iga $k \in \mathbb{N}$ jaoks leidub $x_k \in [a,b]$ omadusega $h_k(x_k) \geqslant \varepsilon_0$. Jada $(x_k)$ on tõkestatud, Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal sisaldab ta koonduva osajada $(x_{k_i})$, olgu $c := \lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}$. Siis $c \in [a,b]$ ja

$$\lim_{i\to\infty} h_n(x_{k_i}) = h_n(c) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(selgitada!)✠. Teiselt poolt, iga $n \in \mathbb{N}$ puhul saab fikseerida nii suure $i$, et $k_i > n$. Sel juhul

$$h_n(x_{k_i}) \geqslant h_{k_i}(x_{k_i}) \geqslant \varepsilon_0,$$

kust protsessis $i \to \infty$ saame võrratuse $h_n(c) \geqslant \varepsilon_0$ iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks. See on vastuolus eeldusega, mille kohaselt $h_k(x) \to 0$ lõigus $[a,b]$. Järelikult on meie vastuväiteline oletus väär. ■

**Näide 6.6.** Tõestame Dini teoreemi kasutades, et funktsionaaljadad

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

koonduvad piirfunktsiooniks $f(x) = \mathrm{e}^x$ ühtlaselt igas lõigus $[0,a]$.

Jada $(f_n)$ punktiviisi koonduvus on põhjendatud näites 4.6, monotoonsus tuleneb sellest, et iga monoom $\frac{x^k}{k!}$ on mittenegatiivne, kui $x \geqslant 0$.

Jada $(g_n)$ punktiviisi koonduvus tuleneb (tänu muutujavahetusele $\frac{n}{x} = t$) sellest, et kehtib koondumine (funktsiooni piirväärtus)

$$\lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}. \tag{6.6}$$

Tõepoolest, jada piirväärtusena on see koondumine tuntud juba alapeatükist 2.2.6. Kui nüüd $\lfloor t \rfloor = n$, siis $n \leqslant t < n+1$, mistõttu $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{t} \leqslant 1n$. Seega

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Et selles ahelvõrratuses nii vasakul kui paremal seisva jada piirväärtus on $\mathrm{e}$ (miks?)✠, kehtib keskmise muutuja omaduse kohaselt koondumine (6.6).

Arvjada $(g_n(x))$ kasvavuse tõestame järgmiselt. Saame, et

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+1+x)}{(n+1)(n+x)}\right)^n \cdot \frac{n+1+x}{n+1} = \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - n \cdot \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{(n+1)^2(n+x)} > 1,$$

sealjuures võrratuse saamiseks kasutasime Bernoulli võrratust $(1-t)^n \geqslant 1 - tn$ (siin $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1)$), mida saab tõestada induktsiooniga $n$ järgi.

Dini teoreemi kohaselt $f_n(x) \to \mathrm{e}^x$ ja $g_n(x) \to \mathrm{e}^x$ ühtlaselt igas lõigus $[0,a]$.

Analoogiliselt tõestatakse ühtlane koonduvus piirväärtuse $e^{-x} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ korral.

## 6.2 Arvread, nende koonduvus

### 6.2.1 Arvrea mõiste, tema koonduvus ja hajuvus

**Definitsioon.** Olgu $(u_k)$ mingi arvjada. Avaldist

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

nimetame *arvreaks* (enamasti lühidalt *reaks*) (*series, ряд*), arve $u_k$ selle rea *liikmeteks* (*term*). Tavaliselt tähistame rida $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ sümboliga $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Antud rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ puhul moodustame tema *osasummad* (*partial sum, частичная сумма*)

$$s_1 := u_1, \quad s_2 := u_1 + u_2, \ldots, \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k, \ldots$$

ja *osasummade jada* $(s_n)$.

**Definitsioon.** Rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *summaks* (*sum, сумма*) nimetatakse tema osasummade jada $(s_n)$ piirväärtust $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =: s$, kui see eksisteerib. Sel juhul kirjutame $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = s$. Kui $s \in \mathbb{R}$, ütleme, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *on koonduv*. Mittekoonduvat rida nimetatakse *hajuvaks* (*divergent, расходящийся*).

Niisiis tähistab sümbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ nii rida ennast kui ka tema summat, kui see on olemas. Rõhutame, et juhul $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$ või $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = -\infty$ on tegemist hajuva reaga.

**Näide 6.7.** Geomeetriline rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub parajasti siis, kui $|q| < 1$, kusjuures sel juhul $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ (põhjendada!)✠.

**Lause 6.10** ***(tarvilik tingimus rea koonduvuseks).*** *Kui rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub, siis* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Näide 6.8.** Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ hajub. Seda saab põhjendada vahetult osasummade uurimise ja hajuvuse definitsiooni kaudu (tehke läbi!)✠. Kõige hõlpsam on aga kasutada lauset 6.10 ning tähelepanekut, et

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |u_k| = 0.$$

Nimelt, praegusel juhul $\lim\limits_{k\to\infty} |(-1)^k| = 1 \neq 0$.

**NB!** Lause 6.10 väide on ainult ühtepidi implikatsioon

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ on koonduv} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} u_k = 0.$$

Teistpidine implikatsioon **üldiselt ei kehti**, tuntud kontranäide on harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (vt. näidet 6.9). Seega *tarvilik tingimus* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ *ei ole piisav rea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koonduvuseks.*

Tihti on otstarbekas nummerdada rea liikmed nii, et esimene liige on indeksiga 0, s.t.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Kuid rea indeksid võivad alata ka suvalisest täisarvust, näiteks rida

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} u_k := u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots$$

nimetatakse esialgse rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ $p$-ndaks *jääkliikmeks* (*remainder, остаток*).

**Omadus 6.11** *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub parajasti siis, kui rida* $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} u_k$ *koondub suvalise* $p \in \mathbb{N}_0$ *korral.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Lihtne on veenduda (iseseisvalt!)✠, et koonduva rea jääkliikmed moodustavad nulliks koonduva jada, s.t. $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} u_k = 0$.

Igale reale $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ vastab (üheselt määratud) osasummade jada $(s_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$. Vastupidi, iga jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ korral leidub üheselt määratud rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, mille osasummade jada on $(x_n)$, selleks tuleb võtta $u_n := x_n - x_{n-1}$ (siin $x_0 := 0$). Niisiis, *kõigi ridade hulga ja kõigi jadade hulga vahel on olemas selline üksühene vastavus, et koonduvatele ridadele vastavad koonduvad jadad* (selgitada!)✠. Seetõttu on ridadele lihtsalt ülekantavad jadade koonduvust puudutavad väited. Järgmine lause demonstreerib seda Cauchy kriteeriumi näitel.

**Lause 6.12** ***(Cauchy kriteerium ridade jaoks).*** *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub parajasti siis, kui*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ : m > n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

**Tõestus.** Definitsiooni järgi tähendab rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koonduvus tema osasummade jada $(s_n)$ koonduvust. Cauchy kriteeriumi kohaselt (vt. teoreem 2.17) koondub jada $(s_n)$ parajasti siis, kui ta on Cauchy jada, see tähendab, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $N \in \mathbb{N}$, et $|s_m - s_n| < \varepsilon$ suvaliste $m, n \geqslant N$ puhul. Kuna eeldusel $m > n$ kehtib võrdus

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{m} u_k,$$

siis saamegi, et rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koonduvus on samaväärne tingimusega (6.7) (selgitada!)✠. ■

**Näide 6.9.** Veendume, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ hajub, kui $\alpha \leqslant 1$.

Tähistame $s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$, siis

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \geqslant \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral. Saadud tulemus näitab, et Cauchy kriteeriumi tingimus on rikutud (selgitage!)✠ ja järelikult rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ on hajuv.

Rea koonduvuse definitsioonist ning koonduvate jadade omadustest (vt. omadus 2.9 (a) ja (c)) tuleneb järgmine väide.

**Omadus 6.13** *Kui $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koonduvad vastavalt summaks $s$ ja $t$, siis rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ koondub summaks $s + t$ ning rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ summaks $\lambda s$, kus $\lambda$ on suvaline reaalarv.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

### 6.2.2 Mittenegatiivsete liikmetega read. Absoluutne koonduvus

Lihtne on näha, et kui rea liikmed $u_k$ on kõik mittenegatiivsed, siis osasummade jada $(s_n)$ on kasvav:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = s_{n-1} + u_n \geqslant s_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Monotoonsuseprintsiibi kohaselt kehtib järgmine väide.

**Omadus 6.14** *Mittenegatiivsete liikmetega rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub parajasti siis, kui ta osasummade jada $(s_n)$ on tõkestatud.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

***Lepime kokku,*** et mittenegatiivsete liikmetega rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ puhul märgib kirjutis $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ selle rea koonduvust, seevastu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$ tähendab hajuvust.

**Definitsioon.** Ütleme, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub absoluutselt* (*converges absolutely, сходится абсолютно*), kui $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$.

Selge, et mittenegatiivsete liikmetega rida koondub parajasti siis, kui ta koondub absoluutselt.

**Omadus 6.15** *Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv.*

**Tõestus.** Olgu rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ absoluutselt koonduv, s.t. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$. Näitame Cauchy kriteeriumi (vt. lause 6.12) abil, et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ koondub, siis leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$m > n \geqslant N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon.$$

Absoluutväärtuse kolmnurgaomaduse kohaselt

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon, \text{ kui } m > n \geqslant N,$$

lause 6.12 põhjal tähendab see rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koonduvust. ■

**Omadus 6.16** ***Üldine harmooniline rida*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *koondub parajasti siis, kui* $\alpha > 1$.

**Tõestus.** Näites 6.9 on juba tõestatud uuritava rea hajuvus, kui $\alpha \leqslant 1$.

Olgu $\alpha > 1$, näitame, et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$. Tähistame $r := 1 - \alpha < 0$ ning paneme tähele, et

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} < \frac{2}{2^\alpha} = 2^r, \quad \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < \frac{4}{2^{2\alpha}} = 2^{2r}, \text{ jne},$$

üldiselt suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral

$$s_{2^{n+1}-1} - s_{2^n-1} = \frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha} < \frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = 2^{nr}.$$

Seega kokkuvõttes

$$s_n \leqslant s_{2^{n+1}-1} \leqslant 1 + 2^r + \ldots + 2^{nr} = \frac{1-(2^r)^{n+1}}{1-2^r} \leqslant \frac{1}{1-2^r} =: M$$

(selgitada!)✠. Näeme, et positiivsete liikmetega rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ osasummad on tõkestatud, omaduse 6.14 järgi on see rida koonduv. ■

## 6.3 Ridade koonduvustunnused

Ridade koonduvuse testimiseks on leitud mitmeid koonduvustunnuseid. Enamasti on need rakendatavad mittenegatiivsete liikmetega ridade korral või siis rea absoluutse koonduvuse kindlakstegemisel. Tavaliselt võrreldakse uuritavat rida mingi lihtsama tuntud reaga.

### 6.3.1 Võrdluslaused

**Lause 6.17** ***(esimene võrdluslause)***. *Leidugu ridade* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *puhul indeks* $N \in \mathbb{N}$*, et*

$$0 \leqslant u_k \leqslant v_k \quad \text{iga } k \geqslant N \text{ korral.} \tag{6.8}$$

(a) *Kui rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *koondub, siis koondub ka rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

(b) *Kui rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *hajub, siis hajub ka rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

**Tõestus.** Teatavasti (vt. omadus 6.11) koonduvad read $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ parajasti siis, kui vastavalt koonduvad mittenegatiivsete liikmetega read $\sum\limits_{k=N}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{k=N}^{\infty} v_k$. Nende ridade osasummade jaoks saame seostest (6.8) võrratused

$$0 \leqslant \sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} v_k \text{ suvalise } n > N \text{ puhul.} \tag{6.9}$$

(a) Kui rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub, siis koondub ka rida $\sum\limits_{k=N}^{\infty} v_k$, järelikult on tema osasummade jada $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} v_k\right)_{n=N}^{\infty}$ ülalt tõkestatud, s.t. leidub $M > 0$, et $0 < \sum\limits_{k=N}^{n} v_k \leqslant M$ iga $n > N$ korral. Tänu seostele (6.9) on ka rea $\sum\limits_{k=N}^{\infty} u_k$ osasummade jada $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} u_k\right)_{n=N}^{\infty}$ tõkestatud (selgitada!)✠, mistõttu omaduse 6.14 kohaselt rida $\sum\limits_{k=N}^{\infty} u_k$ koondub. Omaduse 6.11 põhjal koondub siis ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Väide (b) tuleneb vahetult väitest (a). ■

**Lause 6.18** ***(teine võrdluslause).*** *Olgu* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *sellised* ***positiivsete*** *liikmetega read, et eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} =: L \neq 0.$$

*Sel juhul rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub parajasti siis, kui koondub rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

**Tõestus.** Rakendame jadale $\left(\frac{u_k}{v_k}\right)$ lemmat 2.8, selle kohaselt leidub niisugune $N \in \mathbb{N}_0$, et $\frac{L}{2} < \frac{u_k}{v_k} < \frac{3L}{2}$ iga $k > N$ korral ehk

$$v_k < \frac{2}{L} u_k \text{ ja } u_k < \frac{3L}{2} v_k \quad (k > N)$$

(selgitada!)✠. Nendest võrratustest saame esimest võrdluslauset 6.17 rakendades väite (selgitada!)✠. ■

### 6.3.2 Cauchy ja d'Alembert'i koonduvustunnus

Tõestatud võrdluslausete abil saab leida konkreetseid koonduvustunnuseid, kui võrrelda uuritavat rida mingi konkreetse reaga. Järgnevalt tõestame kaks lauset, kus rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *võrreldakse geomeetrilise reaga* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$**.**

**Lause 6.19** ***(Cauchy koonduvustunnus).*** *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub* ***absoluutselt****, kui*

$$c := \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|u_k|} < 1,$$

*ja hajub, kui* $c > 1$.

**Tõestus.** Eeldame, et $c < 1$, ja fikseerime suvalise $q \in (c, 1)$. Paneme tähele, et võrratus $\sqrt[k]{|u_k|} > q$ saab kehtida vaid lõpliku arvu indeksite $k$ korral, vastasel juhul saaksime moodustada osajada $\left(\sqrt[k_i]{|u_{k_i}|}\right)$, mis koondub arvust $c$ suuremaks piirväärtuseks (selgitada!)✠. Seega leidub niisugune indeks $N$, et $\sqrt[k]{|u_k|} \leqslant q$ kõikide $k \geqslant N$ puhul ehk

$$|u_k| \leqslant q^k, \text{ kui } k \geqslant N.$$

Geomeetrilise rea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ koonduvusest tuleneb esimese võrdluslause põhjal rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ koonduvus, seega koondub rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ absoluutselt.

Kui $c > 1$, siis võtame $\varepsilon > 0$ nii väikese, et $1 < c - \varepsilon < c$. Kuna arv $c$ on jada $\left(\sqrt[k]{|u_k|}\right)$ osapiirväärtus, siis sisaldab tema ümbrus $U_\varepsilon(c)$ lõpmata palju selle jada liikmeid. Kõik need liikmed on suuremad kui arv 1, seetõttu ei saa rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ liikmed rahuldada tingimust $u_k \to 0$, mis on tarvilik rea koonduvuseks (selgitage!)✠. ■

**Lause 6.20** ***(d'Alembert'i tunnus).*** *Olgu* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *selline rida, et* $u_k \neq 0$ *iga* $k \in \mathbb{N}$ *korral. See rida koondub absoluutselt, kui eksisteerib piirväärtus* $d := \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$ *ning* $d < 1$. *Kui* $d > 1$, *siis rida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *hajub.*

**Tõestus.** Olgu $d < 1$, näitame, et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u_k| < \infty$. Valime arvu $q$ omadusega $d < q < 1$, olgu $\varepsilon := q - d$. Kuna $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \to d$ protsessis $k \to \infty$, siis mingist indeksist $N$ alates kuuluvad jada $\left(\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\right)$ liikmed punkti $d$ ümbrusse $U_\varepsilon(d)$, need liikmed rahuldavad võrratust $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| < q$ (kontrollida!)✠. Niisiis, iga $k \geqslant N + 1$ puhul

$$\frac{|u_k|}{|u_N|} = \frac{|u_k|}{|u_{k-1}|} \cdot \frac{|u_{k-1}|}{|u_{k-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|u_{N+1}|}{|u_N|} < q^{k-N}$$

ehk

$$|u_k| < |u_N|\, q^{k-N} \quad (k \geqslant N + 1)\,.$$

Kuna rida $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |u_N|\, q^{k-N} = |u_N| \sum\limits_{i=1}^{\infty} q^i$ koondub (põhjendada!)✠, siis omaduse 6.11 põhjal koondub ka rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_N|\, q^{k-N}$ ja lause 6.17 kohaselt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u_k| < \infty$ (selgitada!)✠.

Teiseks vaatleme juhtu $d > 1$. Olgu $\varepsilon > 0$ selline arv, et $1 < d - \varepsilon < d$. Mingist indeksist $N$ alates kuuluvad jada $\left(\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\right)$ liikmed punkti $d$ ümbrusse $U_\varepsilon(d)$, seega rahuldavad nad võrratust $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| > 1$ (kontrollida!)✠, mistõttu

$$\frac{|u_k|}{|u_N|} = \frac{|u_k|}{|u_{k-1}|} \cdot \frac{|u_{k-1}|}{|u_{k-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|u_{N+1}|}{|u_N|} > 1$$

ehk

$$|u_k| > |u_N| > 0 \quad (k > N)\,.$$

Seega ei ole täidetud rea koonduvuseks tarvilik tingimus $u_k \to 0$. ∎

**Märkus 1.** Saab näidata, et kui $(u_k)$ on positiivsete liikmetega jada, siis

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \tag{6.10}$$

Võrratustest (6.10) järeldub, et kui arvrea $\sum\limits_k u_k$ jaoks eksisteerib lõplik piirväärtus $d := \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$, siis ka $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = d$ (miks?)✠. Niisiis, kui d'Alembert'i tunnus ei tööta põhjusel, et $d = 1$, on ka Cauchy tunnuses $c = 1$.

**Märkus 2.** Näitena reast, mille korral d'Alembert'i tunnus ei tööta ja Cauchy tunnus töötab, sobib rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k+(-1)^k} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \ldots$. Tähistades $u_k = 2^{-k+(-1)^k}$, saame, et $\varliminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{1}{8}$ ja $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 2$ (veenduge!)✠ ning $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{|u_k|} = \frac{1}{2}$ (kontrollige!)✠.

**NB!** See näide ei vähenda d'Alembert'i tunnuse väärtust, sest arvu $d$ leidmine on sageli lihtsam kui arvu $c$ leidmine.

**Märkus 3.** Saab näidata, et kui $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| < 1$, siis rida $\sum\limits_k u_k$ koondub absoluutselt, ning kui $\varliminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| > 1$, siis rida $\sum\limits_k u_k$ hajub.

### 6.3.3 Leibnizi koonduvustunnus

Olgu $u_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Öeldakse, et rida $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$ on *vahelduvate märkidega rida*. Piisava tingimuse vahelduvate märkidega rea koonduvuseks annab Leibnizi tunnus.

**Lause 6.21** ***(Leibnizi tunnus).*** *Olgu $u_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral, kusjuures jada $(u_k)$ olgu kahanev ja koondugu nulliks. Siis vahelduvate märkidega rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k$ on koonduv.*

**Tõestus.** Eelduse kohaselt $\lim\limits_k u_k = 0$, kusjuures $u_k \geqslant u_{k+1} > 0$. Vaatleme eraldi paaris- ja paaritu indeksiga osasummasid

$$s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k u_k \text{ ja } s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k \quad (n \in \mathbb{N}),$$

siis

$$s_{2n+2} = s_{2n} - u_{2n+1} + u_{2n+2} \leqslant s_{2n}$$

(kontrollida!)✠, seega on jada $(s_{2n})$ kahanev. Et

$$s_{2n} = -u_1 + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n} > -u_1,$$

on jada $(s_{2n})$ alt tõkestatud. Monotoonsuseprintsiibi kohaselt leidub lõplik piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Paneme tähele, et

$$s_{2n+1} = s_{2n} - u_{2n+1} \to s + 0 = s \quad (n \to \infty),$$

seega on ka paaritu indeksiga osasummade jada piirväärtus $s$. Jääb üle veenduda, et $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = s$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, leiame sellised indeksid $N_1$ ja $N_2$, et

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |s_{2n-1} - s| < \varepsilon \text{ ja } n \geqslant N_2 \Rightarrow |s_{2n} - s| < \varepsilon.$$

Kui $m \geqslant N$, kus $N := \max\{2N_1, 2N_2\}$, siis $|s_m - s| < \varepsilon$ iga $m \geqslant N$ puhul (kontrollida!)✠, seega $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = s$. Sellega on väide tõestatud. ■

**Märkus 1.** Nõuet, et $u_k > 0$, pole tegelikult vaja püstitada: eeldused, et jada $(u_k)$ on monotoonne ja koondub nulliks, garanteerivad juba, et leiab aset üks kahest: kas $0 \leqslant u_k \searrow 0$, s.t. jada $(u_k)$ koondub kahanedes nulliks, või $0 \geqslant u_k \nearrow 0$. Teisel juhul valime $v_k = -u_k$ ning rakendame Leibnizi tunnust reale $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k v_k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k)$. Sealjuures paneme ka tähele, et null-liikmed ei mõjusta rea koonduvust ega rea summat, mistõttu võime nad juba enne koonduvuse uurimist kõrvaldada.

**Märkus 2.** Kuna juhul $0 \leqslant u_k \searrow 0$ paarisarvuliste indeksitega osasummade jada $(s_{2n})$ kahaneb summaks $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k$ ja paarituarvuliste indeksitega osasummade jada $(s_{2n-1})$ *kasvab* summaks $s$, seega $s_{2n-1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$, siis saame seosed

$$0 \leqslant s - s_{2n-1} \leqslant s_{2n} - s_{2n-1} = u_{2n}, \ \ 0 \leqslant s_{2n} - s \leqslant s_{2n} - s_{2n+1} = u_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Kokkuvõttes oleme leidnud kasuliku võrratuse vahelduvate märkidega rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$ *jääkliikme hindamiseks:*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k\right| \leqslant |u_{n+1}| \qquad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{6.11}$$

Kui $0 > u_k \uparrow 0$, siis $s_{2n} \leqslant s \leqslant s_{2n+1}$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul ning eelnevaga analoogiline arutelu näitab, et hinnang (6.11) on õige ka sel juhul (kontrollida!)✠.

**Näide 6.10 (*koonduvast reast, mis ei ole absoluutselt koonduv*).** Eelpool veendusime, et harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ hajub, kui $\alpha \leqslant 1$. Leibnizi tunnuse kohaselt on rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ koonduv iga $\alpha > 0$ korral (põhjendada!)✠.

### 6.3.4 Integraaltunnus

Tõestame koonduvustunnuse mittenegatiivse kahaneva üldliikmega ridade jaoks.

**Lause 6.22** *Olgu $N \in \mathbb{N}$, olgu funktsioon $f\colon [N,\infty) \to \mathbb{R}$ mittenegatiivne ja kahanev. Siis rida $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ on koonduv parajasti siis, kui päratu integraal $\int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ on koonduv.*

**Tõestus.** Paneme tähele, et iga $x \in [N,n]$ korral $f(n) \leqslant f(x)$ ning iga $x \in [n,\infty)$ korral $f(x) \leqslant f(n)$, mistõttu iga täisarvu $n \geqslant N$ jaoks

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x = f(n)$$

ning kui $n \geqslant N+1$, siis

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Seega, võttes täisarvu $m > N$, saame, et

$$\int_N^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=N}^{m} f(n) \leqslant f(N) + \int_N^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(selgitage detaile!)✠. Piirileminek $m \to \infty$ koos I võrdluslause rakendamisega annab nüüd tõestatava väite (selgitage!)✠. ■

Integraaltunnus on otstarbekas juhtudel, kui päratu integraali uurimine on lihtne, rea uurimine aga keeruline või vastupidi. Näiteks see, et üldine harmooniline rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$, järeldub asjaolust, et päratu integraal

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{l\to\infty}(\ln l - \ln 1) = \infty, & \text{kui } \alpha = 1,\\ \lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{l^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right) = \frac{1}{\alpha-1}, & \text{kui } 1-\alpha < 0,\\ \lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{l^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right) = \infty, & \text{kui } 1-\alpha > 0 \end{cases}$$

koondub parajasti juhul $\alpha > 1$.

### 6.3.5 Cauchy kondensatsiooniprintsiip

Järgnevas on veel üks koonduvustunnus mittenegatiivse kahaneva üldliikmega ridade jaoks. See tunnus võtab osasummade asemel uurimise alla sellised osasummad, kus liikmed on plokiti asendatud, plokkide pikkused on $2$ astmed. Tulemusena saadav rida koondub parajasti siis, kui koondub uuritav rida.

**Lause 6.23** *Olgu iga naturaalarvu $k$ korral $u_k \geqslant u_{k+1} \geqslant 0$. Siis rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$.*

**Tõestus.** Antud read on mittenegatiivsete liikmetega. Näitame, et nende osasummade jadad on tõkestatud üheaegselt; kui see on tehtud, siis monotoonsuseprintsiip (vt. omadus 6.14) annab vajaliku väite.

Olgu $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ja $V_m = \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k u_{2^k}$. Vahetu kontroll näitab, et kui $n \leqslant 2^m$, siis $n < 2^{m+1} - 1$ ja seega $U_n \leqslant U_{2^{m+1}-1} \leqslant V_m$ (tehke läbi!✠). Samuti näitab vahetu kontroll, et kui $n > 2^m$, siis $U_n \geqslant U_{2^m} \geqslant \frac{1}{2} V_m$ (tehke läbi!✠). Niisiis osasummade jadad $(U_n)$ ja $(V_m)$ on tõkestatud üheaegselt. ∎

Cauchy kondensatsiooniprintsiip on kasulik ridade $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ jms. koonduvuse uurimisel.

Näiteks on printsiibi põhjal rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ koonduvus samaväärne rea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$ koonduvusega (kontrollige!✠). Viimane on aga geomeetriline rida, mis koondub parajasti siis, kui $2^{1-\alpha} < 1$ ehk $\alpha > 1$.

### 6.3.6 Abeli ja Dirichlet' koonduvustunnused

Järgnevalt tuletame kaks koonduvustunnust niisuguste ridade koonduvuse testimiseks, mis on esitatud kujul

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k.$$

Selliste ridade uurimisel kasutatakse sageli Abeli teisendust.

**Lemma 6.24** ***(Abeli teisendus).*** *Suvaliste arvude $u_1, \ldots, u_n$ ja $v_1, \ldots, v_n$ korral kehtib võrdus*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})\, s_k + v_n s_n,$$

*kus $s_k := u_1 + \ldots + u_k$.*

**Tõestus.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})\, s_k &= (v_1 - v_2)\, u_1 + (v_2 - v_3)\,(u_1 + u_2) + \ldots + (v_{n-1} - v_n)\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) \\
&= u_1\,((v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_{n-1} - v_n)) \\
&+ u_2\,((v_2 - v_3) + \ldots + (v_{n-1} - v_n)) + \ldots \\
&+ u_{n-1}\,((v_{n-1} - v_n)) \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1} - (u_1 + \ldots + u_{n-1})\, v_n \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1} + u_n v_n - (u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n)\, v_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} v_k u_k - v_n s_n.
\end{aligned}$$

■

Abeli teisendusest tuleneb vahetult järgmine oluline tähelepanek.

**Lause 6.25** *Rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k u_k$ *on koonduv, kui koonduvad jada* $(v_n s_n)$ *ja rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (v_k - v_{k+1}) s_k$. *Kui jada* $(v_k)$ *on monotoonne ja rea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *osasummade jada* $(s_n)$ *on tõkestatud, s.t. leidub* $L > 0$ *nii, et* $|s_n| \leqslant L$ *iga* $n \in \mathbb{N}$ *puhul, siis kehtib hinnang*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k u_k\right| \leqslant L\left(|v_1| + 2\,|v_n|\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{6.12}$$

**Tõestus.** Olgu jada $(v_n s_n)$ ja rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (v_k - v_{k+1})\, s_k$ koonduvad, rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k u_k$ koonduvus tuleneb sel juhul vahetult lemmast 6.24 (selgitada!)✠. Kui seejuures $(v_k)$ on monotoonne ja $|s_n| \leqslant L$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ puhul, siis

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} v_k u_k\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|\,|s_k| + |s_n|\,|v_n| \leqslant L\left(\sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_n|\right)\\ &\leqslant L\left(|v_1| + 2\,|v_n|\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

(selgitada!)✠. ■

Valem (6.12) on lähtekohaks kahe järgneva koonduvustunnuse tõestamisel.

**Lause 6.26** ***(Abeli koonduvustunnus).*** *Kui rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *koondub ning jada* $(v_k)$ *on monotoonne ja tõkestatud, siis rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k u_k$ *koondub.*

**Tõestus.** Jada $(v_k)$ tõkestatus tähendab, et

$$\exists K > 0 : |v_k| \leqslant K.$$

Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Kuna rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub, siis Cauchy kriteeriumi (vt. lause 6.12) kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et kui $m > n \geqslant N$, siis $|u_{n+1} + \ldots + u_m| < \frac{\varepsilon}{3K}$. Kasutame hinnangut (6.12), kus $L = \frac{\varepsilon}{3K}$ (selgitada!)✠ :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k u_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-n} v_{n+k} u_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3K}\left(|v_{n+1}| + 2\,|v_m|\right) \leqslant \varepsilon \quad (m > n \geqslant N)\,.$$

Cauchy kriteeriumi kohaselt rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k u_k$ koondub. ■

**Näide 6.11.** Abeli tunnuse kohaselt koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\arctan k}{\sqrt{k}}.$$

Nimelt, kui võtame $v_k := \arctan k$ ja $u_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, siis lause 6.26 eeldused on täidetud (veenduda!)✠.

Abeli teisendust kasutame ka järgmise Dirichlet' koonduvustunnuse tuletamisel.

**Lause 6.27** ***(Dirichlet' koonduvustunnus)****. Kui rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ osasummad on tõkestatud ning jada $(v_k)$ on monotoonne ja koondub nulliks, siis rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k u_k$ koondub.*

**Tõestus.** Rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ osasummade tõkestatus tähendab, et

$$\exists M > 0 : |s_n| \leqslant M.$$

Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Kuna $v_k \to 0$, siis leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|v_k| < \frac{\varepsilon}{6M} \text{ iga } k \geqslant N \text{ korral.}$$

Kui $m > n \geqslant N$, siis

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| = |s_m - s_n| \leqslant |s_m| + |s_n| \leqslant 2M$$

ja, võttes hinnangus (6.12) $L := 2M$, saame, et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k u_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{m-n} v_{n+k} u_{n+k} \right| \leqslant 2M \left( |v_{n+1}| + 2\,|v_m| \right) < 2M \left( 3 \frac{\varepsilon}{6M} \right) = \varepsilon \quad (m > n \geqslant N)\,.$$

Cauchy kriteeriumi kohaselt rida $\sum\limits_{k} v_k u_k$ koondub. ■

Märgime, et Leibnizi koonduvustunnus on Dirichlet' tunnuse erijuht (veenduda!)✠. Näitame, et *Abeli koonduvustunnus järeldub Dirichlet' tunnusest.* Kui Abeli tunnuse eeldused on täidetud, siis jada $(v_k)$ on koonduv (põhjendada!)✠, olgu $a := \lim\limits_{k \to \infty} v_k$. Kirjutame rea $\sum\limits_{k} v_k u_k$ ümber kujul

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_k - a)\, u_k + a \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Teine rida koondub Abeli tunnuse eelduste kohaselt, esimene koondub Dirichlet' tunnuse järgi (veenduda!)✠.

**Näide 6.12**. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

koonduvuse saab kindlaks määrata Dirichlet' tunnuse abil. Ilmselt see rida koondub, kui $x := m\pi$, kus $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, eeldame, et $x \neq m\pi$, ning võtame $u_k := \sin kx$ ja $v_k := \frac{1}{k}$. Jada $(v_k)$ puhul on lause 6.27 eeldused täidetud. Kuna

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| &= \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \left| \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx \right| = \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \left| \sum_{k=1}^{n} \left( \cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + kx\right) \right) \right| \\
&= \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \left| \cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \left( \left|\cos \frac{x}{2}\right| + \left|\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right| \right) \\
&\leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad (n \in \mathbb{N})\,,
\end{aligned}$$

siis rahuldab ka jada $(u_k)$ lause 6.27 eeldusi.

## 6.4 Ridade ümberjärjestused

Olgu $(m_k)$ selline naturaalarvude jada, milles iga $n \in \mathbb{N}$ esineb täpselt üks kord. Teiste sõnadega, jada $(m_k)$ saadakse mingi bijektiivse teisenduse $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto m_k$ rakendamisel. Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$ nimetatakse esialgse rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ümberjärjestuseks.*

**Definitsioon.** Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ nimetatakse *tingimatult koonduvaks* (*unconditionally, безусловно*), kui tema ***iga*** ümberjärjestus $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$ koondub. Koonduvat rida, mis ei koondu tingimatult, nimetatakse *tingimisi koonduvaks* (*conditionally, условно*).

Kuna antud rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja tema ümberjärjestuse $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$ vastavad osasummad $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ning $s'_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_{m_k}$ koosnevad üldjuhul (kas täielikult või osaliselt) erinevatest liidetavatest, siis ei ole selge, kas jada $(s_n)$ koonduvus toob endaga kaasa jada $(s'_n)$ koonduvuse. Niisiis, me otsime vastust küsimusele, *kas koonduva rea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *korral koondub ka rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$.

**Lause 6.28** ***(Dirichlet' teoreem)****.* ***Absoluutselt*** *koonduva rea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *iga ümberjärjestus* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$ *koondub samaks summaks, mis esialgne rida.*

**Tõestus.** Olgu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$ absoluutselt koonduva rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ suvaliselt valitud ümberjärjestus. Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ on koonduv (vt. omadus 6.15), tähistame tema summa tähega $s$, s.t. $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Meie eesmärgiks on veenduda, et $s = \lim\limits_{n\to\infty} s'_n$, kus $s'_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_{m_k}$. Selleks näitame, et $\lim\limits_{n\to\infty} (s'_n - s_n) = 0$, sest sel juhul

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} (s'_n - s_n) + \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$, siis Cauchy kriteeriumi (vt. lause 6.12) kohaselt saab leida niisuguse indeksi $N_1$, et

$$N_1 \leqslant i < r \Rightarrow |u_{i+1}| + |u_{i+2}| + \ldots + |u_r| < \varepsilon. \tag{6.13}$$

Valime indeksi $N_0 \geqslant N_1$ nii suure, et kõik arvud $1, 2, \ldots, N_1$ kuuluvad hulka $\{m_1, m_2, \ldots, m_{N_0}\}$ (selgitada sellise valiku võimalikkust!✠). Olgu $n \geqslant N_0$, vaatleme vahet $s'_n - s_n$. Kuna rea liikmed $u_1, u_2, \ldots, u_{N_1}$ esinevad mõlemas osasummas $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ja $s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{m_k}$, siis vahes

$s'_n - s_n$ on vaid sellised liikmed $u_k$, kus $k > N_1$. Seega tingimuse (6.13) kohaselt

$$|s'_n - s_n| = \left| \sum_{k\in\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}\setminus\{1,\ldots,N_1\}} u_k - \sum_{k=N_1+1}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=N_1+1}^{\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}} |u_k| < \varepsilon, \text{ kui } n \geqslant N_0$$

(selgitada!)✠. See tähendabki, et jada $(s'_n - s_n)$ koondub nulliks. Teoreem on tõestatud. ■

Dirichlet' teoreemi kohaselt on *iga absoluutselt koonduv rida tingimatult koonduv.* Nagu selgub järgmisest teoreemist, kehtib ka vastupidine väide.

**Teoreem 6.29** *Rida koondub absoluutselt parajasti siis, kui ta on tingimatult koonduv.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus* tuleneb lausest 6.28.

*Piisavus.* Eeldame, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub tingimisi ja leiame niisuguse ümberjärjestuse $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$, mille osasummade jada ei ole tõkestatud, siis see ümberjärjestus hajub.

Tähistame arvu $a \in \mathbb{R}$ korral

$$a^+ := \frac{|a| + a}{2} = \begin{cases} a, & \text{kui } a > 0, \\ 0, & \text{kui } a \leqslant 0, \end{cases} \qquad a^- := \frac{|a| - a}{2} = \begin{cases} -a, & \text{kui } a \leqslant 0, \\ 0, & \text{kui } a > 0. \end{cases}$$

Siis
1) $a^+, a^- \geqslant 0$,
2) $a^+ - a^- = a$ ja
3) $a^+ + a^- = |a|$

(selgitada!)✠. Paneme tähele, et *kui üks ridadest* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^+$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^-$ *koondub, siis koondub ka teine* (kontrollida!)✠. Sellest omakorda tuleneb, et kuna $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| = \infty$, siis *mõlemad read hajuvad* (veenduda!)✠. Kui jadast $\left(u_k^+\right)$ jätta välja kõik nulliga võrduvad liikmed, saame jada $(u_k)$ *kõigi positiivsete liikmete osajada*, tähistame selle $(p_k)$. Ülejäänud liikmetest moodustub osajada $(-q_k)$, see on jada $(u_k)$ *kõigi mittepositiivsete liikmete osajada.* Selge, et *jada* $(u_k)$ *iga liige esineb ühes ja ainult ühes jadadest* $(p_k)$ *ja* $(-q_k)$.

Kuna $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^+ = \infty$, siis rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ hajub, täpsemalt, tema osasummade jada $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)$ on ülalt tõkestamata (põhjendada!)✠. Seetõttu on võimalik leida indeks $l_1$, et $T_1 := \sum\limits_{k=1}^{l_1} p_k > 1$, kuid $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \leqslant 1$ kõikide $r = 1, \ldots, l_1 - 1$ puhul. Edasi valime $l_2 > l_1$ omadusega

$$T_2 := \sum_{k=1}^{l_1} p_k - q_1 + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} p_k > 2, \text{ kuid } \sum_{k=1}^{r} p_k - q_1 \leqslant 2 \text{ kõikide } r = 1, \ldots, l_2 - 1 \text{ puhul.}$$

Järgmisel sammul leiame *vähima* indeksi $l_3$, et

$$T_3 := \sum_{k=1}^{l_1} p_k - q_1 + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} p_k - q_2 + \sum_{k=l_2+1}^{l_3} p_k > 3, \text{ jne.}$$

Niimoodi saame esialgse rea $\sum\limits_k u_k$ ümberjärjestuse

$$p_1 + \ldots + p_{l_1} + (-q_1) + p_{l_1+1} + \ldots + p_{l_2} + (-q_2) + p_{l_2+1} + \ldots + p_{l_3} + (-q_3) + p_{l_3+1} + \ldots .$$

See hajub, sest meie konstruktsiooni kohaselt on tema osasummade jada $(T_i)$ tõkestamata (põhjendada!)✠. ■

Teoreemi 6.29 kohaselt sisaldab iga tingimisi koonduv rida hajuvaid (tegelikult tõkestamata osasummadega) ümberjärjestusi. Nagu selgub järgnevast Riemanni teoreemist, tingimisi koonduvast reast saab moodustada suvalise soovitud summaga ümberjärjestuse.

**Teoreem 6.30** ***(Riemanni teoreem).*** *Kui* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *on tingimisi koonduv rida, siis iga arvu* $a \in \mathbb{R}$ *korral leidub selline ümberjärjestus* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m_k}$, *mis koondub summaks* $a \in \mathbb{R}$.

**Tõestus.** Kasutame samu tähistusi, mis teoreemi 6.29 tõestuses. Kuna osasummade jadad $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)$ ning $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} q_k\right)$ on ülalt tõkestamata, siis on võimalik leida vähim indeks $n_1$, et

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > a, \text{ kuid } \sum_{k=1}^{r} p_k \leqslant a \text{ kõikide } r = 1, 2, \ldots, n_1 - 1 \text{ korral.}$$

Samuti saab leida vähima indeksi $n_2$, et

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{n_2} (-q_k) < a, \text{ kuid } \sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{r} (-q_k) \geqslant a \text{ kõikide } r = 1, 2, \ldots, n_2 - 1 \text{ korral.}$$

Edasi leidub *vähim* indeks $n_3$, et $\sum\limits_{k=1}^{n_1} p_k + \sum\limits_{k=1}^{n_2} (-q_k) + \sum\limits_{k=n_1+1}^{n_3} p_k > a$ jne. Tulemuseks on rida

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} + (-q_1) + \ldots + (-q_{n_2}) + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3} + (-q_{n_2+1}) + \ldots + (-q_{n_4}) + \ldots , \quad (6.14)$$

mis on esialgse rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ümberjärjestus. Tähistame

$$\begin{aligned} &P_1 := p_1 + \ldots + p_{n_1}, \quad Q_1 := p_1 + \ldots + p_{n_1} + (-q_1) + \ldots + (-q_{n_2}), \\ &P_2 := p_1 + \ldots + p_{n_1} + (-q_1) + \ldots (-q_{n_2}) + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3}, \\ &Q_2 := P_2 - q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_4}, \text{ jne.} \end{aligned}$$

Siis

$$0 < P_i - a \leqslant p_{n_{2i-1}} \text{ ja } 0 < a - Q_i \leqslant q_{n_{2i}} \text{ iga } i \in \mathbb{N} \text{ korral}$$

(põhjendada!)✠. Kuna $p_{n_i} \to 0$ ja $q_{n_i} \to 0$ protsessis $i \to \infty$ (põhjendada!)✠, siis $P_i \to a$ ja $Q_i \to a$.

Olgu $s'_m$ ümberjärjestuse (6.14) $m$-s osasumma. Siis leidub $i \in \mathbb{N}$, et kehtib kas $Q_{i-1} \leqslant s'_m \leqslant P_i$ või $Q_i \leqslant s'_m \leqslant P_i$ (põhjendada!)✠. Seejuures $i \to \infty$, kui $m \to \infty$, mistõttu $s'_m \to a$, s.t. vaadeldav ümberjärjestus koondub summaks $a$. ■

**Märkus.** Teoreemi 6.29 tõestuse käigus sisuliselt juba näidati, et teoreem 6.30 kehtib ka juhul $a = \infty$ ja $a = -\infty$. Näiteks juhul $a = \infty$ võib indeksiteks $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$, valida vähimad naturaalarvud, mille korral järgmine summa rahuldaks võrratust

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + (-q_1) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k + (-q_2) + \ldots + \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} p_k > j.$$

Nagu näha, vahele võetakse alati üks negatiivne liige.

## 6.5 Funktsionaalread, nende koonduvus

### 6.5.1 Funktsionaalridade punktiviisi ja ühtlane koonduvus

Olgu funktsioonid $f_k$, kus $k \in \mathbb{N}$, määratud mingis mittetühjas hulgas $D \subseteq \mathbb{R}$. Avaldist

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

nimetatakse hulgas $D$ määratud *funktsionaalreaks.*

**Definitsioon.** Öeldakse, et funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ koondub hulgas $D$

1) *punktiviisi,* kui arvrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ koondub iga $x \in D$ korral,

2) *absoluutselt,* kui $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$ iga $x \in D$ korral.

Tähistame

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad (x \in D,\, n \in \mathbb{N}).$$

Arvrea koonduvuse definitsiooni kohaselt koondub funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ punktiviisi hulgas $D$ parajasti siis, kui lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) =: s(x) \text{ eksisteerib iga } x \in D \text{ korral,}$$

funktsiooni $s\colon D \to \mathbb{R}$ nimetatakse sel juhul funktsionaalrea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *summaks.* Seega koondub funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ punktiviisi summaks $s$ parajasti siis, kui $s_n \to s$ punktiviisi hulgas $D$.

**Definitsioon.** Öeldakse, et funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *koondub ühtlaselt summaks $s$ hulgas $D$*, kui $s_n \to s$ ühtlaselt hulgas $D$.

**Lause 6.31** ***(Weierstrassi koonduvustunnus).*** *Olgu funktsionaalrida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *määratud hulgas* $D$. *Kui leidub selline* ***arv****rida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, *et*

$$|f_k(x)| \leqslant u_k \text{ iga } x \in D \text{ ja } k \in \mathbb{N} \text{ korral} \tag{6.15}$$

*ning* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$, *siis funktsionaalrida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *koondub hulgas* $D$ *ühtlaselt ja absoluutselt.*

**Tõestus.** Eeldame, et mittenegatiivsete liikmetega arvrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub ja funktsionaalrea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ liikmed rahuldavad tingimust (6.15). Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, vastavalt arvridade Cauchy kriteeriumile (vt. lause 6.12) leidub selline indeks $N$, et kui $m > n \geqslant N$, siis $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon$. Eelduse (6.15) kohaselt

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon \quad (m > n \geqslant N)$$

suvalise $x \in D$ korral. Funktsionaaljadade Cauchy kriteeriumi (vt. lause 6.3) põhjal on $(s_n)$ hulgas $D$ ühtlaselt koonduv, see tähendab funktsionaalrea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ühtlast koonduvust hulgas $D$. Absoluutne koonduvus tuleneb arvridade võrdluslausest 6.17 (selgitada!)✠. ■

**Näide 6.13.** Funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ koondub ühtlaselt ja absoluutselt kogu arvteljel $\mathbb{R}$, kui $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ (põhjendada!)✠.

**Näide 6.14.** Funktsionaalrea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$ ühtlane ja absoluutne koonduvus kogu arvteljel $\mathbb{R}$ järeldub Weierstrassi tunnusest, sest
1) $0 < \frac{1}{k^2+x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$ kõikide $x \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$ puhul ning
2) rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ koondub.

### 6.5.2 Funktsionaalrea summa omadused

Nagu eespoolgi on järgnevates tõestustes $s_n$ funktsionaalrea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ $n$-s osasumma, s.t.

$$s_n \colon D \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

**Lause 6.32** *Hulgas* $D$ *punktiviisi koonduva pidevate funktsioonide funktsionaalrea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *summa on selles hulgas pidev parajasti siis, kui*

$$\lim_{t\to x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{t\to x} f_k(t) \quad (x \in D).$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Funktsionaalrea summa pidevuse, diferentseeruvuse ja integreeruvuse uurimine taandub lihtsalt eespool tõestatud teoreemidele funktsionaaljada piirfunktsiooni vastavatest omadustest.

**Teoreem 6.33** *Kui funktsioonid* $f_k\colon D \to \mathbb{R}$ *on pidevad ja funktsionaalrida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *koondub ühtlaselt hulgas* $D$, *siis rea summa* $s\colon D \to \mathbb{R}$ *on pidev funktsioon.*

**Tõestus.** Eelduste kohaselt on funktsioonid $s_n$ pidevad ja $s_n \to s$ ühtlaselt hulgas $D$. Teoreemi 6.5 põhjal on $s$ pidev funktsioon. ■

**Teoreem 6.34** *Olgu funktsioonid* $f_k\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidevad ja koondugu funktsionaalrida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *ühtlaselt lõigus* $[a,b]$. *Siis*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k\,(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Tõestus.** Kuna funktsioonid $s_n\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidevad ja $s_n \to s$ ühtlaselt hulgas $[a,b]$, siis teoreemi 6.7 kohaselt

$$\begin{aligned}\int_a^b s\,(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n\,(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k\,(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k\,(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud. ■

**Teoreem 6.35** *Eeldame, et*
1) *funktsioonid* $f_k\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *on pidevalt diferentseeruvad,*
2) *funktsionaalrida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *koondub lõigus* $[a,b]$ *punktiviisi summaks* $s\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$,,
3) *funktsionaalrida* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ *koondub lõigus* $[a,b]$ *ühtlaselt summaks* $\varphi\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$.

*Siis* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *koondub lõigus* $[a,b]$ *ühtlaselt summaks* $s$, *funktsioon* $s$ *on diferentseeruv ning*

$$s'\,(x) = \varphi\,(x) \ \ \textit{iga } x \in [a,b] \ \ \textit{korral.}$$

**Tõestus.** Kuna eelduste põhjal on funktsioonid $s_n\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ pidevalt diferentseeruvad, $s_n \to s$ punktiviisi ning $s_n' \to \varphi$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$, siis teoreemist 6.8 saame, et funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ koondub ühtlaselt summaks $s$, mis on diferentseeruv, ja $s' = \varphi$. ■

**Näide 6.15.** Arvutame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 3^k x}{3^k}$. Paneme kõigepealt tähele, et vaadeldav funktsionaalrida koondub ühtlaselt kogu arvteljel: kuna

$$\left|\frac{\cos 3^k x}{3^k}\right| \leqslant \frac{1}{3^k}\ \ (x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}_0)\ \text{ ning }\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}<\infty,$$

siis Weierstrassi koonduvustunnuse kohaselt koondub rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 3^k x}{3^k}$ ühtlaselt hulgas $\mathbb{R}$. Tema liikmed on pidevad funktsioonid, teoreemi 6.33 põhjal on rea summa pidev ja (vrd. lause 6.32)

$$\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 3^k x}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3^k x}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{3}{2}.$$

**Näide 6.16.** Arvutame integraali $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}ke^{-kx}\right)\mathrm{d}x$. Kuna
1) funktsioonid $f_k(x)=ke^{-kx}$ on pidevad lõigus $[\ln 2,\ln 3]$ ja
2) funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}ke^{-kx}$ koondub ühtlaselt lõigus $[\ln 2,\ln 3]$ (kontrollida!)✠,
siis teoreemi 6.34 kohaselt

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-kx}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty}k\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-kx}\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kx}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(e^{\ln 2}\right)^k}-\frac{1}{\left(e^{\ln 3}\right)^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\\ &=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Näide 6.17.** Arvutame funtsionaalrea $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}\arccos\frac{x}{k+1}$ summa $s$ tuletise väärtuse $s'(0)$.
Paneme tähele, et
1) $f_k'(x)=-\frac{k+1}{2^k\sqrt{(k+1)^2-x^2}}\ \ \left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ k\in\mathbb{N}_0\right)$,
2) $|f_k(x)|\leqslant\frac{\pi(k+1)}{2^k}$ kõikide $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ja $k\in\mathbb{N}_0$ korral ning $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\pi(k+1)}{2^k}<\infty$,
3) $|f_k'(x)|\leqslant\frac{k+1}{2^k\sqrt{(k+1)^2-1/4}}$ kõikide $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ja $k\in\mathbb{N}_0$ korral ning $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k\sqrt{(k+1)^2-1/4}}<\infty$
(kontrollida!)✠, siis on teoreemi 6.35 tingimused 1) – 3) täidetud (selgitada!)✠, mistõttu

$$s'(0)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k'(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=-2.$$

## 6.6 Astmeread

### 6.6.1 Astmerea koonduvuspiirkond. Cauchy–Hadamardi teoreem

Olgu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mingi arvjada. *Astmereaks* (*power series, степенной ряд*) nimetatakse funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{6.16}$$

või üldisemalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \tag{6.17}$$

kus $a \in \mathbb{R}$ on fikseeritud. (Astmeridade teemas arvestame, et kehtib kokkulepe $0^0 = 1$.) Paneme tähele, et *astmerea osasummadeks on polünoomid.*

Kõigepealt otsime vastust küsimusele, *milliste arvude $x \in \mathbb{R}$ korral rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub (absoluutselt).* Teisisõnu, meie eesmärk on kirjeldada hulki

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub} \right\}$$

ja

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k x^k \right| < \infty \right\},$$

mida nimetatakse vastavalt astmerea (6.16) *koonduvuspiirkonnaks* ja *absoluutse koonduvuse piirkonnaks.* Selge, et $\{0\} \subseteq A \subseteq X$.

**Definitsioon.** Astmerea (6.16) ***koonduvusraadiuseks*** nimetatakse suurust

$$r = \sup \left\{ |x| \in \mathbb{R} \colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ on koonduv} \right\}.$$

On selge, et $r$ on alati olemas: kas mittenegatiivne reaalarv või $\infty$.

Järgnevast, ***Cauchy–Hadamardi*** teoreemist selgub,
1) kuidas arvutada koonduvusraadiust $r$,
2) et astmerida on *absoluutselt koonduv kogu vahemikus* $(-r, r)$ ning *hajuv lõigust* $[-r, r]$ *väljaspool.*

Seega $(-r, r)$ on suurim vahemik, kus astmerida on (absoluutselt) koonduv.

**Teoreem 6.36** *Koonduvusraadiust võib arvutada järgmise valemi abil:*

$$r = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

*(Juhul, kui nimetaja on 0, siis kehtib $r = \infty$ ning kui nimetaja on lõpmatus, siis $r = 0$.) Sealjuures, kui $r > 0$, siis astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub absoluutselt vahemikus $(-r, r)$ ja hajub hulgas $(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$, s.t.*

$$(-r, r) \subseteq A \subseteq X \subseteq [-r, r].$$

*Juhul* $r = 0$ *koondub rida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *vaid punktis* $x = 0$.

**Tõestus.** Kõigepealt on selge, et juhul $x = 0$ on rida (6.16) koonduv, sõltumata kordajatest. Vaatame siis edasises juhtu $|x| > 0$.

Rakendame rea (6.16) koonduvuse uurimiseks Cauchy koonduvustunnust (vt. lause 6.19). Tähistame $c = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x^k|}$. Saame järgmised väited:

- kui $c < 1$, siis rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub absoluutselt;
- kui $c > 1$, siis rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hajub.

On kolm võimalust.

*Esiteks*, kui $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, siis ka $c = |x| \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ ning rida (6.16) on hajuv. Seega sellel juhul rida koondub ainult punktis $x = 0$.

*Teiseks*, kui jada $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ on tõkestatud ning $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} > 0$, siis $c = |x| \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$ ning saame, et

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \Rightarrow \quad \text{rida (6.16) on absoluutselt koonduv,}$$

$$|x| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \Rightarrow \quad \text{rida (6.16) on hajuv.}$$

*Kolmandaks*, kui $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, siis iga $x \in \mathbb{R}$ korral $c = |x| \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ ning järelikult sellel juhul on astmerida (6.16) koonduv iga $x \in \mathbb{R}$ korral. ■

Paneme tähele, et Cauchy–Hadamardi teoreem ei väida midagi koonduvuse kohta *koonduvusvahemiku* $(-r, r)$ otspunktides $-r$ ja $r$. Et saada ettekujutust võimalikest situatsioonidest, piisab analüüsida lihtsaid näiteid $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (iseseisvalt!)✠.

### 6.6.2 Astmerea summa omadused

Olgu $r > 0$ astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koonduvusraadius ja funktsioon $s\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ selle rea summa, s.t. $s(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ iga $x \in (-r, r)$ korral. Enne, kui asume uurima funktsiooni $s$ omadusi, tõestame lause, mis kirjeldab ***astmerea ühtlast koonduvust.***

**Lause 6.37** *Astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub ühtlaselt igas lõigus* $[a, b]$, *kus* $-r < a < b < r$.

**Tõestus.** Olgu $[a, b]$ koonduvusvahemiku $(-r, r)$ suvaline osalõik, tähistame $\eta := \max\{|a|, |b|\}$, siis $[a, b] \subseteq [-\eta, \eta] \subseteq (-r, r)$ (selgitada!)✠. Paneme tähele, et

$$\left|a_k x^k\right| \leqslant |a_k| \, \eta^k \quad (x \in [-\eta, \eta], \, k \in \mathbb{N}_0),$$

kusjuures arvrida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| \eta^k$ koondub (selgitada!)✠. Weierstrassi koonduvustunnuse (vt. lause 6.31) kohaselt koondub astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ühtlaselt lõigus $[-\eta, \eta]$, seega ka lõigus $[a, b]$. ■

**Teoreem 6.38** ***(summa pidevusest).*** *Astmerea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *summa* $s\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ *on pidev funktsioon.*

**Tõestus.** Olgu $x$ suvaline punkt vahemikus $(-r, r)$, näitame, et funktsioon $s$ on selles punktis pidev. Leiame sellise $\eta > 0$, et $x \in [-\eta, \eta] \subseteq (-r, r)$. Kuna rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub lause 6.37 põhjal lõigus $[-\eta, \eta]$ ühtlaselt ning rea liikmed on pidevad funktsioonid (põhjendada!)✠, siis $s$ on lõigus $[-\eta, \eta]$ pidev funktsioon (vrd. teoreem 6.33). Seega on $s$ punktis $x$ pidev. ■

**Teoreem 6.39** ***(astmerea summa integreerimisest ja diferentseerimisest).*** (a) *Astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *võib igas lõigus otspunktidega* 0 *ja* $x$*, kus* $x \in (-r, r)$*, liikmeti integreerida, seejuures*

$$\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

*ning saadud astmerea koonduvusraadius on samuti* $r$*.*
(b) *Astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *võib igas punktis* $x \in (-r, r)$ *liikmeti diferentseerida, seejuures*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k \tag{6.18}$$

*ja astmerea* (6.18) *koonduvusraadius on* $r$*.*

**Tõestus.** See, et pärast manipulatsiooni saadud rea koonduvusraadius on endiselt $r$, järeldub järgmistest tähelepanekutest (teeme läbi juhu (b) jaoks):
1) ridadel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ ning $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = x \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ on sama koonduvusraadius ja
2) implikatsiooni

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{r} \quad \overset{\text{(miks?)✠}}{\Rightarrow} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k\,|a_k|} = \frac{1}{r}$$

tõttu on rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$ koonduvusraadiuseks $r$.

(a) Kuna astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub ühtlaselt lõigus otspunktidega 0 ja $x$, siis teoreemi 6.34 põhjal

$$\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^x t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

(b) Olgu $x \in (-r, r)$, valime sellise $\eta > 0$, et $x \in [-\eta, \eta] \subseteq (-r, r)$, ja rakendame teoreemi 6.35. Kuna astmerida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ on lõigus $[-\eta, \eta]$ ühtlaselt koonduv ning ka teoreemi 6.35 teised eeldused on täidetud (veenduda!)✠, siis

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Teoreem on tõestatud. ■

### 6.6.3 Funktsiooni Taylori rida

Üldisest astmereast

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{6.19}$$

saame muutujavahetusega $z := x - a$ seni vaadeldud tüüpi astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Kui viimase koonduvusraadius on $r$, siis astmerida (6.19) koondub absoluutselt vahemikus $(a - r, a + r)$. Samas vahemikus on rea (6.19) summa $s$ teoreemi 6.39($b$) põhjal diferentseeruv (seega pidev) funktsioon ning kehtib valem

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} \tag{6.20}$$

(selgitada!)✠. Matemaatilise induktsiooni abil on lihtne veenduda, et me võime astmerida (6.19) vahemikus $(a - r, a + r)$ kuitahes palju kordi liikmeti diferentseerida, koonduvusraadius $r$ seejuures ei muutu ja suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral avaldub funktsiooni $s$ $n$-dat järku tuletis $s^{(n)}$ kujul

$$s^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) a_k (x-a)^{k-n} \quad (x \in (a-r, a+r))$$

(kontrollida!)✠. Siit saame valemi $s^{(n)}(a) = n! a_n$ ehk

$$a_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{6.21}$$

(kokkuleppeliselt $0! = 1$), mis seob omavahel astmerea kordajad ning selle rea summa ja ta tuletiste väärtused punktis $x = a$.

Kordajad (6.21) on meile tuttavad Taylori valemist. Teatavasti avaldist $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ nimetatakse funktsiooni $f$ $n$-astme Taylori polünoomiks punktis $a$. Kui funktsioon $f$ on mingis intervallis $D$ lõpmata palju kordi diferentseeruv, siis Taylori valemi (4.21) ja teoreemi 4.18 kohaselt kehtib iga punkti $a \in D$ korral valem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(a, x) \quad (x \in D), \tag{6.22}$$

kusjuures jääkliige $R_n(a,x)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n}=0.$$

Seejuures võib jääkliikme $R_n(x)$ esitada Lagrange'i kujul

$$R_n(a,x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_n)(x-a)^{n+1},\ \text{kus } c_n \text{ on punkt arvude } a \text{ ja } x \text{ vahel.} \tag{6.23}$$

**Definitsioon.** Olgu $r>0$ ja funktsioon $f$ punkti $a\in\mathbb{R}$ ümbruses $U_r(a)=(a-r,a+r)$ lõpmata palju kordi diferentseeruv funktsioon. Astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$, mille kordajad on määratud valemiga

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\qquad (n\in\mathbb{N}_0),$$

nimetatakse *funktsiooni $f$ Taylori reaks punktis $a$*. Taylori rida punktis $a=0$ nimetatakse funktsiooni $f$ *Maclaurini reaks.*

Väljend *arendage funktsioon $f$ Taylori reaks punkti $a$ ümbruses* (mõnikord öeldakse ka: *arendage funktsioon $f$ Taylori reaks punktis $a$*) tähendab järgmist:
tuleb leida $r>0$ ning kordajate jada $(a_k)$ nii, et **iga** $x\in U_r(a)$ korral

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k.$$

Kerkib üles küsimus, millised funktsioonid võivad olla astmerea summaks ehk, teisiti sõnastades, milliseid funktsioone $f$ saab punkti $a$ ümbruses arendada Taylori reaks. On selge, et need funktsioonid $f$ peavad vaadeldavas intervallis $U_r(a)=(a-r,a+r)$ olema piiramatu arv kordi diferentseeruvad, s.t. neil peavad eksisteerima mistahes järku tuletised selles hulgas. (Sealjuures on teada, et kordajad $a_k$ avalduvad valemiga $a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.) Osutub, et see tingimus ei ole piisav. Järgnevast näitest selgub, et isegi siis, kui kogu arvteljel lõpmata palju kordi diferentseeruva funktsiooni Taylori rida on koonduv, ei pruugi selle summaks olla funktsioon ise. Täpsemalt, see näide demonstreerib, et implikatsioon

$$\forall x\in U_r(a)\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} f \text{ vahemikus } U_r(a) \text{ kuitahes} \\ \qquad \text{palju kordi diferentseeruv,} \\ \forall k\in\mathbb{N}_0\ a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\end{cases}$$

üldiselt **paremalt vasakule ei kehti**.

**Näide 6.18.** Olgu

$$f(x):=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{kui } x\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0.\end{cases}$$

Leiame $f'(x)=\frac{2}{x^3}\,e^{-1/x^2}$, $f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-1/x^2},\ldots$, üldiselt on funktsiooni $f$ $n$-dat järku tuletis punktis $x\neq 0$ kujul $f^{(n)}(x)=P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, kus $P_{3n}(t)$ on teatav $3n$-astme polünoom muutuja $t$ suhtes. Teatavasti kasvab eksponentfunktsioon argumendi piiramatul kasvamisel kiiremini kui mistahes astmefunktsioon, seetõttu

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x^2}} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Kuna kõik funktsioonid $f^{(n)}$ on ilmselt pidevad punktis $x = 0$, siis $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. Seega on funktsioon $f$ lõpmata palju kordi diferentseeruv kogu arvteljel ja tema Taylori rea kordajad $a_k$ on kõik võrdsed nulliga. Niisiis ei ole funktsioon $f$ oma Taylori rea summa.

**Lause 6.40** *Intervallis $U_r(a)$ piiramata arv kordi diferentseeruva funktsiooni $f$ Taylori rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ koondub selles intervallis summaks $f$ parajasti siis, kui*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0 \text{ iga } x \in U_r(a) \text{ korral.}$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Kuna arve $c_n$ arvude $a$ ja $x$ vahel ei õnnestu üldjuhul leida, siis on kasulik omada lihtsalt kontrollitavaid piisavaid tingimusi selleks, et $R_{n+1}(a,x) \to 0$ vahemikus $(a-r, a+r)$ protsessis $n \to \infty$. Järgmine lause esitab neist ühe.

**Lause 6.41** *Kui intervallis $U_r(a) = (a-r, a+r)$ lõpmata palju kordi diferentseeruv funktsioon $f$ rahuldab tingimust*

$$\text{leiduvad } \alpha > 0 \text{ ja } C > 0, \text{ et } \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \alpha C^n \text{ kõikide } x \in (a-r, a+r) \text{ ja } n \in \mathbb{N} \text{ korral,} \tag{6.24}$$

*siis tema Taylori rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ koondub **ühtlaselt** hulgas $(a-r, a+r)$ summaks $f$.*

**Tõestus.** Eeldusel (6.24) saame seostest (6.22) ning (6.23), et

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| &= \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n)(x-a)^{n+1}\right| \leqslant \alpha \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} C^{n+1} \\ &< \frac{\alpha (Cr)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in (a-r, a+r), \, n \in \mathbb{N}),\end{aligned}$$

millest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \text{ iga } b > 0 \text{ puhul (miks?)✠} \tag{6.25}$$

tulenebki ühtlane koonduvus $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \to f(x)$ hulgas $(a-r, a+r)$. ■

## 6.7 Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimine

### 6.7.1 Definitsioonid astmeridade abil

Defineerime iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{6.26}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{6.27}$$

Funktsioonide sin ja cos korrektselt defineeritus (ehk vastavate arvridade koondumine) järeldub Cauchy (või d'Alembert'i) tunnusest (iseseisvalt!)✠.

Järgnevalt kontrollime üle siinuse ja koosinuse mõned hästi tuntud omadused.

Olgu $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vaatleme tingimusi

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y) \tag{6.28}$$

ja

$$\forall x \in (0,1) \quad 0 < xg(x) < f(x) < x. \tag{6.29}$$

**Teoreem 6.42** *Funktsioonid $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ on mittekonstantsed, pidevad ning rahuldavad tingimusi (6.28) ja (6.29).*

**Tõestus.** Ilmselt $f(0) = 0$ ja $g(0) = 1$. Funktsioone $f$ ja $g$ määravad astmeread koonduvad Weierstrassi tunnuse põhjal ühtlaselt igas lõigus $[-x, x]$ (selgitage!)✠. Seega võib neid kogu reaalteljel liikmeti diferentseerida; saame, et $f' = g$ ning $g' = -f$. Et $f'(0) = 1$ ning $f'$ on pidev, leidub intervall $[-x_0, x_0]$, milles $f$ on rangelt kasvav (selgitage!)✠.

Kuna $f(0) = 0$, siis $f(x_0) > 0$. Seega leidub intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, milles $g' = -f < 0$. Järelikult on kõnealuses intervallis $g$ rangelt kahanev (selgitage!)✠. Kokkuvõttes ei ole $f$ ja $g$ konstantsed funktsioonid.

Diferentseeruvus ühtlasi annab, et $f$ ja $g$ on pidevad.

Tingimuse (6.28) täidetuses veendumiseks tegutseme järgnevalt.

Tõestame, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral $g(x)^2 + f(x)^2 = 1$. Funktsiooni $x \mapsto g(x)^2 + f(x)^2$ tuletised on kõik nullid kogu reaalteljel, seega tema arendis Maclaurini ritta on $g(x)^2 + f(x)^2 = g(0)^2 + f(0)^2 = 1$ (selgitage!)✠. Muuhulgas ka iga $x \in \mathbb{R}$ korral $|f(x)| \leqslant 1$ ja $|g(x)| \leqslant 1$.

Fikseerime nüüd $x \in \mathbb{R}$ ja tähistame

$$h(y) = g(x)g(y) + f(x)f(y).$$

Siis $h$ on lõpmata palju kordi diferentseeruv, kusjuures

$$\begin{aligned}
h'(y) &= -g(x)f(y) + f(x)g(y), \\
h''(y) &= -g(x)g(y) - f(x)f(y) = -h(y), \\
h'''(y) &= -h'(y), \\
h^{(4)}(y) &= h(y),
\end{aligned}$$

mistõttu

$$\begin{aligned} h^{(4k)}(x) &= g(x)^2 + f(x)^2 = 1, \\ h^{(4k+1)}(x) &= 0, \\ h^{(4k+2)}(x) &= -g(x)^2 - f(x)^2 = -1, \\ h^{(4k+3)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Taylori valemist (kohal $x$) saame, et ($\xi$ asub $x$ ja $y$ vahel)

$$\left| h(y) - \sum_{k=0}^{n} h^{(k)}(x) \cdot \frac{(y-x)^k}{k!} \right| = \left| h^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leqslant \frac{2|x-y|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n]{} 0.$$

Seega

$$h(y) = \sum_{n=0}^{\infty} h^{(n)}(x) \cdot \frac{(y-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(y-x)^{2n}}{(2n)!} = g(x-y),$$

mistõttu kehtib tingimus (6.28).

Uurime tingimust (6.29). Vaja on, et iga $x \in (0,1)$ korral

$$0 < xg(x) < f(x) < x.$$

Võrratus $f(x) < x$ järeldub Leibnizi tunnuse jääkliikme hinnangust, sest $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$ (veenduge!)✠.

Samal moel näeme, et $xg(x) > 0$, kuna $xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$ ja $\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+3}}{(2n+2)!}$.

Võrratuse $f(x) - xg(x) > 0$ saamiseks paneme tähele, et

$$(f(x) - xg(x))' = xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} > 0,$$

kuna $x \in (0,1)$ tõttu jälle $\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} > \frac{x^{2n+4}}{(2n+3)!}$. Seega on funktsioon $h(x) = f(x) - xg(x)$ intervallis $[0,1]$ rangelt kasvav. Järelikult $f(x) - xg(x) > 0$ (selgitage!)✠, nagu vaja. ■

### 6.7.2 Definitsioonid funktsionaalvõrrandite abil

Järgmine teoreem näitab, et tingimused (6.28) ja (6.29) määravad mittekonstantsete pidevate funktsioonide klassis täielikult ära siinuse ja koosinuse.

**Teoreem 6.43** *Olgu $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekonstantsed pidevad funktsioonid, mille korral kehtivad tingimused (6.28) ja (6.29). Siis $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$.*

Teoreemi 6.43 tõestamiseks teeme kõigepealt eeltööd, uurides lähemalt tingimusi (6.28) ja (6.29).

**Lause 6.44** *Rahuldagu funktsioonid $f$ ja $g$ tingimust (6.28). Siis $g$ on paarisfunktsioon.*

**Tõestus.** Paneme tähele, et $g(y-x) = g(x-y)$ iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral (selgitage!)✠. ■

**Lause 6.45** *Rahuldagu mittekonstantsed funktsioonid $f$ ja $g$ tingimust (6.28). Siis $f$ on paaritu funktsioon.*

**Tõestus.** Valemist

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(-y)$$

järeldame, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(-y) = f(y)f(-x),$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)^2 = f(-x)^2.$$

Tõestame, et funktsioon $f$ on paaritu. Kui mingi $x_0 \in \mathbb{R}$ on selline, et $f(x_0) = 0$, siis $f(-x_0) = -f(x_0)$ (selgitage!)✠. Oletame, et $x_0 \neq 0$ ning $f(-x_0) = f(x_0)$. Siis $f(x) = f(-x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, mistõttu $g(x+y) = g(x-y)$ iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral. Seega on $g$ konstantne funktsioon, mis on võimatu (selgitage detaile!)✠. ■

**Lause 6.46** *Rahuldagu mittekonstantsed funktsioonid $f$ ja $g$ tingimust (6.28). Siis mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ korral*

$$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y),$$
$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),$$
$$f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y).$$

**Tõestus.** Esimene valem järeldub vahetult tingimusest (6.28) ja sellest, et $f$ on paaritu.

Edasi saame, et

$$g(x+y+z) = (g(x)g(y) - f(x)f(y))g(z) - f(x+y)f(z) =$$
$$= g(x)(g(y)g(z) - f(y)f(z)) - f(x)f(y+z),$$

millest

$$(f(x+y) - f(y)g(x))f(z) = (f(y+z) - f(y)g(z))f(x).$$

Fikseerime $z_0 \in \mathbb{R}$ selliselt, et $f(z_0) \neq 0$, siis, tähistades

$$h(y) = \frac{1}{f(z_0)} \cdot (f(y+z_0) - f(y)g(z_0)),$$

saame, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) - f(y)g(x) = h(y)f(x). \tag{6.30}$$

Tõestame, et tegelikult $h = g$. Tingimuses (6.30) valime $x$ rolli $-y$, siis saame, et $f(y)(h(y) - g(y)) = 0$. Nüüd $x$ ja $y$ vahetamisel saame, et $f(x)(h(y) - g(y)) = f(y)(h(x) - g(x))$. Tulemusena leiame, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad 0 = f(x)f(y)(h(y) - g(y)) = f(y)^2(h(x) - g(x)),$$

millest $h = g$, kuna $f$ on mittekonstantne (selgitage kõiki samme!)✠.

Nüüd on jäänud tingimuse (6.30) põhjal tõestatavad valemid välja kirjutada. ■

**Järeldus 6.47** *Rahuldagu mittekonstantsed funktsioonid $f$ ja $g$ tingimust (6.28). Siis mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ korral*

$$f(2x) = 2f(x)g(x),$$
$$g(2x) = g(x)^2 - f(x)^2$$

**Järeldus 6.48** *Rahuldagu mittekonstantsed funktsioonid $f$ ja $g$ tingimust (6.28). Siis mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ korral*

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y). \tag{6.31}$$

Võrrandit (6.31) nimetatakse ka d'Alembert'i või Poissoni funktsionaalvõrrandiks.

**Lause 6.49** *Rahuldagu mittekonstantsed pidevad funktsioonid $f$ ja $g$ tingimusi (6.28) ja (6.29). Siis*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

**Tõestus.** Asjaolu, et $f$ on paaritu funktsioon, võimaldab saada tingimuse (6.29) analoogi ka negatiivsete arvude jaoks. Tõestuse detailid on jäetud lugejale✠. ■

**Lause 6.50** *Rahuldagu mittekonstantsed funktsioonid $f$ ja $g$ tingimust (6.28). Siis*

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)^2+g(x)^2=1.$$

**Tõestus.** Teame, et lause eeldustel $f(0)=0$, seega järeldub väide kergesti kontrollitavast tingimusest

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)^2+g(x)^2=g(0)=f(0)^2+g(0)^2$$

(iseseisvalt!)✠. ■

**Lause 6.51** *Rahuldagu mittekonstantsed pidevad funktsioonid $f$ ja $g$ tingimusi (6.28) ja (6.29). Siis $f$ ja $g$ on kuitahes palju kordi diferentseeruvad, kusjuures $f'=g$, $g'=-f$.*

**Tõestus.** Paneme tähele, et $g$ rahuldab tingimusega (6.31) duaalset tingimust

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad g(x+y)-g(x-y)=-2f(x)f(y).$$

Kuna $f$ on pidev, siis saame, et $g$ on igas punktis $x_0\in\mathbb{R}$ diferentseeruv:

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)f\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}=-f(x_0)$$

(selgitage detaile!)✠.

Analoogiliselt, kasutades tingimusi

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f(x+y)-f(x-y)=2g(x)f(y),$$

leiame, et $f$ on diferentseeruv, kusjuures

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=g(x)$$

(iseseisvalt!)✠. ■

**Teoreemi 6.43 tõestus.** Kasutame Taylori valemit jääkliikmega Lagrange'i kujul juhul $a=0$. Kuna iga $x\in\mathbb{R}$ korral $|f(x)|\leqslant 1$ ja $|g(x)|\leqslant 1$ (miks?)✠, siis

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|=\left|\frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}\cdot x^{2n+2}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\longrightarrow_n 0$$

(põhjendage!)✠. Analoogiliselt näitame $g(x)$ koondumise kehtivust. ■

Teoreemid 6.42 ja 6.43 näitavad, et leidub täpselt üks mittekonstantsete pidevate funktsioonide paar, mis rahuldab tingimusi (6.28) ja (6.29). Mõnikord defineeritaksegi siinus- ja koosinusfunktsioon kui neid (või mingeid analoogilisi) tingimusi rahuldavad funktsioonid $f$ ja $g$.

**Märkus.** Funktsionaalvõrranditega defineerimise asemel võib piirduda astmeridadega, nagu tegime alapeatüki alguses. Siiski on tingimuste (6.28) ja (6.29) abil defineerimine mõnevõrra elegantsem, kuna sel juhul nõutakse funktsioonidelt ainult pidevust; kuitahes palju kordi diferentseeruvus saadakse juba järeldusena. Lisaks sellele annavad funktsionaalvõrrandid (6.28), (6.31) jmt. võimaluse defineerida siinuse ja koosinuse analoogid ka hulkadel, kus pidevuse aksioom ei tule kõne alla ja funktsionaalridade teooria väljaarendamine pole võimalik.

### 6.7.3 Arv $\pi$

Definitsioonid (6.26) ja (6.27) on matemaatiliselt vettpidavad, kuna nad tuginevad ainult reaalarvude aksiomaatikale ning ei sisalda piltlikke kaalutlusi, nagu nurgale vastava täisnurkse kolmnurga kaatetite suhte leidmist jms. Ometi on sellisel kujul siinuse ja koosinuse sissetoomisel tõsine puudus, mis tuleb kõrvaldada: seni puudub täielikult seos trigonomeetriliste funktsioonide ja arvu $\pi$ vahel; õigupoolest, arv $\pi$ on isegi defineerimata.

Meie järgnev eesmärk on defineerida arv $\pi$ kui kahekordne koosinusfunktsiooni vähimast positiivsest nullkohast ning veenduda, et $\pi$ käitub trigonomeetriliste funktsioonide seisukohalt nii, nagu koolis õpitud.

Oletame, et iga $x > 0$ korral $\cos x \neq 0$, siis iga $x > 0$ korral $\cos x > 0$ (miks?)✠. Seega on siinus rangelt kasvav intervallis $[0, \infty)$, järelikult positiivne (selgitage!)✠. Nüüd saame, et niipea, kui $0 < x < y$, kehtib $(\sin x)(y - x) < \int_x^y \sin t \,\mathrm{d}t = \cos x - \cos y \leqslant 1$. Vastuolu (miks?)✠. Seega leidub $x > 0$ nii, et $\cos x = 0$.

Olgu $T = \{x > 0\colon\ \cos x = 0\}$. Et hulk $T$ on alt tõkestatud, leidub tal alumine raja $x_0$. Nüüd leidub jada $(x_n)$ elementidega hulgast $T$ nii, et $\lim_n x_n = x_0$ (miks?)✠. Seega $x_0 \in T$ (põhjendage!)✠.

Tähistame $\pi = 2x_0$. Nüüd $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$; tänu sellele, et koosinus on positiivne vahemikus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on siinus vastavas lõigus rangelt kasvav, mistõttu $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

**Lause 6.52** *Iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtivad võrdused*

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x,\\
\cos(\pi - x) &= -\cos x,\\
\sin(\pi - x) &= \sin x,\\
\cos(\pi + x) &= -\cos x,\\
\sin(\pi + x) &= -\sin x,\\
\sin(2\pi - x) &= -\sin x,\\
\cos(2\pi - x) &= \cos x,\\
\sin(x + 2\pi) &= \sin x,\\
\cos(x + 2\pi) &= \cos x
\end{aligned}$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ (Kasutage teoreemi 6.42 ja lauset 6.46.) ■

Praeguseks tuletatud valemite põhjal saab arvutada kõik koolist tuntud siinuse ja koosinuse täpsed väärtused.

Järgmises punktis tõestatakse (vt. näidet 6.22 ja teoreemi 6.53), et

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Leibnizi tunnuse jääkliikme hinnang võimaldab anda kuitahes täpsed tõkked arvule $\pi$:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{4} \leqslant 1,\\ &\frac{\pi}{4} \geqslant 1 - \frac{1}{3},\\ &\frac{\pi}{4} \leqslant 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5},\\ &\dots\end{aligned}$$

Osutub, et $\pi \in (3{,}14, 3{,}15)$.

Punktis 5.7.1 näidatakse, et

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

## 6.8 Funktsioonide arendamine astmereaks

Esitame mõnede elementaarfunktsioonide reaksarendused.

**Näide 6.19.** Leiame seosega $f(x) = \mathrm{e}^x$ määratud eksponentfunktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Maclaurini rea. Valemi (4.21) kohaselt suvalise $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{\mathrm{e}^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(vrd. näide 4.6). Jääkliikme $R_n(0,x) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$ hindamiseks paneme tähele, et kui $b > 0$, siis

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leqslant \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^b \quad (|x| \leqslant b)\,.$$

Seost (6.25) arvestades saame, et $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(0,x) = 0$ suvalise $x \in \mathbb{R}$ puhul (selgitada!)✠, s.t.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Sama tulemuse saame ka vahetult lauset 6.41 rakendades.

**Näide 6.20.** Arendame funktsiooni $f(x) = \ln(1+x)$, $f\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R}$, Maclaurini ritta. Saame, et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (x \in (-1,1)).$$

Seega Newton–Leibnizi valemi ning lause 6.39(a) põhjal

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \right) \mathrm{d}t = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (x \in (-1,1))\end{aligned}$$

(põhjendada!)✠.

**Näide 6.21.** Funktsioonid $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ ongi juba defineeritud teatavate astmeridade summana (vt. ptk. 6.7), täpsemalt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Näide 6.22.** Kuna

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad (x \in (-1,1)),$$

siis lause 6.39(a) kohaselt

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (x \in (-1,1))$$

(selgitada!)✠.

## 6.9 Mõned astmeridadega seotud klassikalised tulemused

### 6.9.1 Abeli piirväärtusteoreem

Astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ summa omadusi kirjeldavad teoreemid 6.38 ja 6.39 kehtivad koonduvusraadiusega $r$ määratud koonduvusvahemikus $(-r, r)$. Paljudel juhtudel koondub see astmerida ka selle vahemiku ühes või mõlemas otspunktis. Seoses sellega kerkib üles küsimus astmerea summa analüütilistest omadustest sellistes otspunktides. Summa pidevust koonduvusvahemiku otspunktis kirjeldab järgmine teoreem.

**Teoreem 6.53** ***(Abeli teoreem astmerea summa pidevusest koonduvusvahemiku otspunktis).*** *Olgu $r \in (0, \infty)$ astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koonduvusraadius. Kui see astmerida koondub punktis $r$, siis summa $f\colon\ (-r, r] \to \mathbb{R}$ on vasakult pidev selles punktis, s.t.*

$$\lim_{x \to r-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

**Tõestus.** Piisab, kui tõestada väide eeldusel $r = 1$. Nimelt, suvalise $r \in (0, \infty)$ korral teeme muutujavahetuse $y := \frac{x}{r}$, kui $x \to r-$, siis $y \to 1-$, ja eeldusel, et väide kehtib juhul $r = 1$, saame väite ka suvalise $r \in (0, \infty)$ puhul:

$$\lim_{x \to r-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{y \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k r^k\right) y^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Niisiis, vaatleme juhtu $r = 1$. Siis eelduse kohaselt rida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ koondub, s.t. tema osasummade $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ jada $(s_n)$ on koonduv. Astmerea osasummad saame esitada kujul (siin $s_{-1} := 0$)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1})\, x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k + s_n x^n$$

(veenduda!)✠. Fikseerides suvalise $x \in (-1, 1)$, saame protsessis $n \to \infty$ seose

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k \tag{6.32}$$

(põhjendada!)✠. Tähistame $s := \lim_{n\to\infty} s_n \left( = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, valime sellise $N \in \mathbb{N}$, et iga $n > N$ puhul $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seostest (6.32) ja $(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1$ (selgitada!)✠ saadakse, et

$$|f(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s)\, x^k \right| \leqslant (1-x) \sum_{k=0}^{N} |s_k - s|\, |x|^k + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} |s_k - s|\, |x|^k,$$

seejuures

$$(1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} |s_k - s|\, |x|^k \leqslant \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \frac{|x|^{N+1}}{1-x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(kontrollida!)✠. Valime $\delta > 0$ nii, et $\delta < 1$ ja $\delta < \varepsilon \left( 1 + 2 \sum_{k=0}^{N} |s_k - s| \right)^{-1}$. Siis iga $x \in (1-\delta, 1)$ korral

$$(1-x) \sum_{k=0}^{N} |s_k - s|\, |x|^k < \frac{\varepsilon}{2}$$

(kontrollida!)✠. Kokkuvõttes

$$0 < 1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon,$$

s.t. $\lim_{x\to 1-} f(x) = s = f(1)$. Teoreem on tõestatud. ■

**Märkus.** Abeli piirväärtusteoreemi saab vahetult järeldada *Abeli tunnusest funktsionaalrea ühtlaseks koonduvuseks*: kui funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ koondub ühtlaselt hulgas $D$ ning $(g_k)$ on monotoonne hulgas $D$ ühtlaselt tõkestatud funktsionaaljada, siis funktsionaalrida $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ koondub ühtlaselt hulgas $D$. Tõestus on analoogne arvridade variandi tõestusega (vt. lauset 6.26).

Tõepoolest, me valime $D = [0, 1]$, $f_k(x) = a_k$ ning $g_k(x) = x^k$. Funktsionaaljada $(g_k)$ monotoonsus järeldub sellest, et $x^k \geqslant x^{k+1}$, kus $x \in D$. Abeli tunnus annab, et funktsionaalrida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub ühtlaselt oma summaks $S(x)$ hulgas $[0, 1]$. Rakendades teoreemi 6.33, saame, et

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{x\to 1-} S(x) = S(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Märgime, et ka Dirichlet' koonduvustunnusel (vt. lauset 6.27) on analoog funktsionaalridade *ühtlase* koonduvuse jaoks.

**Näide 6.20 (jätk).** Eespool saime valemi

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (-1 < x < 1). \tag{6.33}$$

Abeli teoreemi abil võib selle võrduse laiendada ka vahemiku otspunkti $x = 1$. Leibnizi tunnuse kohaselt on rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ selles punktis koonduv, seega

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

### 6.9.2 Weierstrassi lähendusteoreem

Alapunkti 6.6.3 tulemuste kohaselt saab mingis lõigus lõpmata palju kordi diferentseeruvat funktsiooni, mis rahuldab tingimust (6.24), ühtlaselt lähendada samas lõigus selle funktsiooni Taylori polünoomidega. Analoogiline väide kehtib oluliselt suurema funktsioonide klassi korral, kui me Taylori polünoomide asemel lubame lähendamist suvaliste polünoomide jadaga.

**Teoreem 6.54** ***(Weierstrassi lähendusteoreem).*** *Iga lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni $f$ jaoks leidub selline polünoomide jada $(P_n)$, mis koondub funktsiooniks $f$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$.*

**Tõestus.** Lihtsuse mõttes (ja üldisust kitsendamata) eeldame, et
1) $a = 0$, $b = 1$ (vajaduse korral rakendame muutujate vahetust $x = (b-a)\,t + a$, siis funktsioon $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f((b-a)\,t + a)$ on pidev ning kui polünoomide $P_n'(t))$ jada koondub ühtlaselt lõigus $[0,1]$ funktsiooniks $h$, siis, tehes neis polünoomides muutuja vahetuse $t = \frac{x-a}{b-a}$, saame polünoomide jada $(P_n(x))$, mis koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$ funktsiooniks $f$ (selgitada!)✠),
2) $f(0) = f(1) = 0$, vastasel korral vaatleme funktsiooni $g = g(x)$, kus

$$g(x) := f(x) - f(0) - x\,[f(1) - f(0)],$$

see on lõigus $[0,1]$ pidev funktsioon ning $g(0) = g(1) = 0$; kui väide kehtib funktsiooni $g$ korral, siis kehtib ta ka funktsiooni $f$ korral, sest $f - g$ on polünoom (selgitada!)✠,
3) $f$ on määratud kogu reaalteljel $\mathbb{R}$, kusjuures $f(x) = 0$, kui $x \notin [0,1]$.
Vastavalt eeldusele 2) on $f$ hulgas $\mathbb{R}$ pidev funktsioon (kontrollida!)✠.

Moodustame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $2n$-astme polünoomi

$$Q_n(x) := c_n \left(1 - x^2\right)^n,$$

kus kordajad $c_n$ valime nii, et kehtiks võrdus

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{6.34}$$

Me ei vaja tõestuseks kordajate $c_n$ täpseid väärtusi, piisab seostest $0 < c_n < \sqrt{n}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, mis eeldusel (6.34) tulenevad võrratusest $\left(1-x^2\right)^n \geqslant 1-nx^2$ (kontrollida matemaatilise induktsiooni abil!)✠:

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}} \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x$$
$$\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}} \left(1-nx^2\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Edasi, kui $0 < \delta < 1$, siis

$$\delta \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n, \tag{6.35}$$

kusjuures

$$\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{6.36}$$

(kontrollida!)✠. Tähistame

$$P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)\, \mathrm{d}t \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}) \tag{6.37}$$

ja näitame, et $P_n$ on $2n$-astme polünoom. Kõigepealt paneme tähele, et kuna $f(z) = 0$ kõikide $z \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ korral, siis

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\, Q_n(t)\, \mathrm{d}t \ = \int_0^1 f(t)\, Q_n(t-x)\, \mathrm{d}t \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}).$$

Teiseks,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_n} Q_n(t-x) \ &= \ \left(1-(t-x)^2\right)^n \ = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (t-x)^{2j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{2j} (-1)^i \binom{2j}{i} t^{2j-i} x^i = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i x^i \sum_{j=\left[\frac{i}{2}\right]}^{2n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{2j}{i} t^{2j-i} \\
&= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i r_i(t)\, x^i,
\end{aligned}$$

kus $r_i(t) := \sum\limits_{j=\left[\frac{i}{2}\right]}^{2n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{2j}{i} t^{2j-i}$ ja $t \in [0,1]$. Siit järeldubki, et $P_n$ on $2n$-astme polünoom:

$$\begin{aligned}
P_n(x) \ &= \int_0^1 f(t)\, c_n \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i r_i(t)\, x^i \mathrm{d}t = c_n \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \int_0^1 f(t)\, r_i(t)\, \mathrm{d}t x^i \\
&= c_n \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i b_i x^i,
\end{aligned}$$

kui tähistada $b_i := \int_0^1 f(t)\, r_i(t)\, \mathrm{d}t$.

Näitame, et $P_n \to f$ ühtlaselt lõigus $[0,1]$. Fikseerime suvalise $\varepsilon > 0$. Kuna $f$ on hulgas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev funktsioon (põhjendada!)✠, siis saab leida niisuguse $\delta > 0$, et

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.38}$$

Ilmselt on $f$ hulgas $\mathbb{R}$ tõkestatud (põhjendada!)✠, seega $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$. Eelpool tõestatud seostest (6.34) – (6.38) järeldub suvalise $x \in [0,1]$ korral, et

$$\begin{aligned}|f(x) - P_n(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\, Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,\mathrm{d}t + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Vastavalt seosele (6.36) leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et kui $n > N$, siis $4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$, seega $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ iga $x \in [0,1]$ korral.Teoreem on tõestatud. ■

Lõpuks märgime, et Weierstrassi teoreemi võib sõnastada ka teisiti: *iga lõigus* $[a,b]$ *pideva funktsiooni* $f$ *ja arvu* $\varepsilon > 0$ *korral saab leida sellise polünoomi* $P$*, et*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \textit{iga } x \in [a,b] \quad \textit{puhul.}$$

### 6.9.3 Stirlingi valem

Lähtudes logaritmfunktsiooni $x \mapsto \ln(1+x)$ reaksarendusest

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad (-1 < x \leqslant 1) \tag{6.39}$$

(vt. näide 6.20 ja selle jätk), tõestame Stirlingi valemi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1$$

ehk

$$n! \backsim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}, \text{ kui } \; n \to \infty, \tag{6.40}$$

mis kirjeldab jada $(n!)$ asümptootilist käitumist protsessis $n \to \infty$.

Valemi (6.39) kohaselt

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x^k}{k}\right) \\ &= 2x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i}}{2i+1} \quad (x \in (-1,1)).\end{aligned}$$

Võttes siin $x := \frac{1}{2n+1}$, saame, et

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + ...\right) \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} < 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\\ &= 1+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = 1+\frac{1}{12n(n+1)}.\end{aligned}$$

Niisiis, $1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{12n(n+1)}$, mistõttu

$$\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \mathrm{e}^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \text{ iga } n\in\mathbb{N} \text{ korral} \tag{6.41}$$

(selgitada!)✠. Tähistame

$$x_n := \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n\in\mathbb{N}),$$

siis

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1$$

(vrd. (6.41)), tähendab, jada $(x_n)$ on kahanev. Kuna ta on alt tõkestatud, siis eksisteerib piirväärtus $a := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Tähistame $z_n := \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}x_n$, kuna $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} = 1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ ja

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}} < 1$$

(vrd. (6.41)), seega on jada $(z_n)$ kasvav. Näeme, et

$$0 < z_1 < z_n < a < x_n \quad (n\in\mathbb{N}),$$

meie jaoks on oluline fakt, et $a>0$. Seetõttu on olemas selline jada $(\varepsilon_n)$, et $\varepsilon_n \to 0$ ja

$$x_n = a(1+\varepsilon_n) \quad (n\in\mathbb{N})$$

(põhjendada!)✠. Niisiis, $\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = a(1+\varepsilon_n)$ ehk

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}(1+\varepsilon_n), \tag{6.42}$$

millest saame valemi (6.40), kui õnnestub näidata, et $a=\sqrt{2\pi}$.

Wallise valemi (vt. pt. 5) kohaselt $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$, seejuures seose (6.42) põhjal

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}$$

(kontrollida!)✠. Tähendab,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4}$$

ehk $a=\sqrt{2\pi}$.