Algebra I

praktikumiülesanded

2021. a. sügissemester

1. Ühe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.

Olgu antud hulk $A \neq \emptyset$.
n-kohaliseks algebraliseks tehteks hulgal A nimetatakse kujutust $f\colon \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ tegurit}} \to A$.

Hulka A koos temal def-tud kahekohalise algebralise tehtega f nimetatakse *rühmoidiks*.
Olgu (A, f) rühmoid.

(A, f) on *poolrühm* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x, y, z \in A \quad f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$.

(A, f) on *monoid* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \forall x, y, z \in A \quad f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)), \\ \exists 1 \in A \quad : \quad \forall x \in A \quad f(x, 1) = f(1, x) = x. \end{cases}$

Lause. Monoidis element 1 (*ühikelement*) on üheselt määratud.

(A, f) on *rühm* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \forall x, y, z \in A \quad f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)), \\ \exists 1 \in A \quad : \quad \forall x \in A \quad f(x, 1) = f(1, x) = x, \\ \forall x \in A \quad : \quad \exists y \in A \quad f(x, y) = f(y, x) = 1. \end{cases}$

Lause. Rühmas igale elemendile x vastav element y nii, et $f(x, y) = f(y, x) = 1$ (ehk elemendi x *pöördelement*) on üheselt määratud. Tähis: $x^{-1} = y$.

(A, f) on *Abeli rühm* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} (A, f) \text{ on rühm}, \\ \forall x, y \in A \quad f(x, y) = f(y, x). \end{cases}$

1. Naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ on defineeritud kahekohaline tehe $*$ võrdusega:

a) $a * b = \max\{a, b\}$;
b) $a * b = \min\{a, b\}$;
c) $a * b = a^b$;
d) $a * b = a^2 b^2$;
e) $a * b = \text{SÜT}(a, b)$;
f) $a * b = \text{VÜK}(a, b)$;
g) $a * b = a - b + 1$;
h) $a * b = a$.

Uurige iga tehet, s.t. tehke kindlaks, kas see tehe on algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, kas leidub selle tehte suhtes ühikelement ja millistel elementidel on olemas pöördelemendid.

2. Positiivsete reaalarvude hulgal $\mathbb{R}^+$ on defineeritud kahekohaline tehe $*$ võrdusega:

a) $a * b = \sqrt{ab}$;
b) $a * b = \sqrt[3]{ab}$;
c) $a * b = a^b$;
d) $a * b = \dfrac{a}{b}$;
e) $a * b = 1$.

Uurige iga tehet.

3. Olgu $X \neq \varnothing$ hulk ja $\mathscr{P}(X)$ tema kõigi alamhulkade hulk. Uurige tehet $*$ hulgal $\mathscr{P}(X)$, mis on defineeritud võrdusega:

a) $A * B = A \cup B$;
b) $A * B = A \setminus B$;
c) $A * B = A \cap B$;
d) $A * B = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Tooge näide algebralisest tehtest mingil hulgal, mille suhtes leidub mingil elemendil a) kaks, b) kolm pöördelementi.

5. Tehke kindlaks, kas järgmised hulgad on (Abeli) rühmad mainitud tehete suhtes:

a) täisarvude hulk $\mathbb{Z}$ (i) liitmise, (ii) korrutamise, (iii) lahutamise suhtes;
b) paarisarvude hulk liitmise suhtes;
c) paaritute arvude hulk liitmise suhtes;
d) ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ liitmise suhtes;
e) nullist erinevate ratsionaalarvude (reaalarvude) hulk korrutamise suhtes;
f) positiivsete ratsionaalarvude (reaalarvude) hulk korrutamise suhtes;
g) selliste ratsionaalarvude, mille nimetajad on 2 mittenegatiivsed astmed, hulk liitmise suhtes;
h) hulga $X \neq \varnothing$ bijektiivsete teisenduste hulk $\mathscr{S}(X)$ teisenduste korrutamise suhtes;
i) naturaalarvude hulga selliste bijektiivsete teisenduste, mis ei jäta paigale ainult lõplikku hulka arve, hulk teisenduste korrutamise suhtes;
j) tasandi pöörete (ümber fikseeritud punkti) hulk pöörete kui kujutuste korrutamise suhtes;
k) tasandi (ruumi) vabavektorite hulk vektorite liitmise suhtes;
l) ratsionaalarvuliste (reaalarvuliste, kompleksarvuliste) elementidega n. järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk (i) liitmise, (ii) korrutamise suhtes;
m) täisarvuliste (ratsionaalarvuliste, reaalarvuliste, kompleksarvuliste) elementidega selliste n. järku ruutmaatriksite, mille determinant on (i) 1, (ii) ± 1, hulk korrutamise suhtes.

6*. Olgu R lõplik monoid. Tõestage, et iga element, millel on olemas parempoolne pöördelement, on pööratav.

7*. Olgu G lõplik rühm, milles on paarisarv elemente. Tõestage, et vähemalt kahe elemendi $g \in G$ jaoks kehtib võrdus $g^2 = 1$, kus 1 on G ühikelement.

8*. Olgu S poolrühm, milles on vasakpoolne ühikelement (st. element $\varepsilon \in S$ omadusega, et iga $a \in S$ korral $\varepsilon a = a$) ning igal elemendil $a \in S$ leidub vasakpoolne pöördelement, st. element $b \in S$ nii, et $ba = \varepsilon$.

a) Tõestage, et S on rühm, täpsemalt, et $a\varepsilon = a$ iga $a \in S$ korral, ning kui $ba = \varepsilon$, siis ka $ab = \varepsilon$.
b) Kas samamoodi saaksime rühma, kui nõuaksime vasakpoolse ühikelemendi ning iga elemendi jaoks parempoolse pöördelemendi olemasolu?

2. Ühe ja kahe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.

Olgu f ja g kahekohalised algebralised tehted hulgal A.

$$(A, f, g) \text{ on } \textit{ring} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} (A, f) \text{ on Abeli rühm,} \\ \forall x, y, z \in A \quad g(f(x, y), z) = f(g(x, z), g(y, z)), \\ \forall x, y, z \in A \quad g(x, f(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z)), \\ (A, g) \text{ on monoid.} \end{cases}$$

Ringis (A, f, g) Abeli rühma (A, f) ühikelementi tähistame 0 ja nimetame *nullelemendiks*. Tähis 1 jääb monoidi (A, g) ühikelemendi jaoks.

$$(A, f, g) \text{ on } \textit{korpus} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} A \text{ on vähemalt kahe-elemendiline hulk,} \\ (A, f, g) \text{ on ring,} \\ \forall x, y \in A \quad g(x, y) = g(y, x), \\ \forall x \in A \setminus \{0\} \quad \exists y \in A \quad : \quad g(x, y) = g(y, x) = 1. \end{cases}$$

Ringi (A, f, g) element $x \in A$ on *pööratav* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists y \in A \quad : \quad g(x, y) = g(y, x) = 1.$
Ringi A pööratavate elementide hulka tähistatakse $U(A)$.

Ringi (A, f, g) element $x \in A \setminus \{0\}$ on *nullitegur* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists y \in A \setminus \{0\} \colon (g(x, y) = 0 \vee g(y, x) = 0).$

9. Tehke kindlaks, millised hulga $\mathbb{R}$ teisenduste hulgad on (Abeli) rühmad teisenduste korrutamise suhtes:

a) $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \colon (a \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b)\}$;
b) $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R} \colon \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = x + b\}$;
c) $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \colon (a < 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b)\}$;
d) $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{Q} \colon (a > 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b)\}$;
e) $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \colon \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 2^k x\}$.

10. Geomeetrilise kujundi teisendust, mis viib kujundi iseendaks, nimetatakse selle kujundi *sümmeetriateisenduseks*. Kujundi sümmeetriateisendusteks on tema pöörded ja peegeldused ning sümmeetriateisenduste hulk on rühm teisenduste korrutamise suhtes.
Leidke a) korrapärase kolmnurga, b) ruudu, c) rombi, mis ei ole ruut, d) ristküliku, mis ei ole ruut, sümmeetriateisenduste rühma Cayley tabel.

11. Olgu G lõplik mittetühi hulk koos temal defineeritud algebralise tehtega $*$. Tõestage, et kui $(G, *)$ on rühm, siis tehte $*$ Cayley tabelis on igas reas kõiki elemente täpselt üks kord ja igas veerus kõiki elemente täpselt üks kord. Kas kehtib ka vastupidine implikatsioon?

12. Tõestage, et ratsionaalarvude järjestatud paaride (a, b) hulk, kus $a \neq 0$, moodustab rühma tehte suhtes, mis on defineeritud võrdusega $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$.

13. Tõestage, et kui A on monoid, mille iga elemendi a korral $a^2 = 1$, siis A on kommutatiivne rühm (Abeli rühm).

14. Tehke kindlaks, millised hulgad on ringid või korpused. Iga ühikelemendiga ringi korral, mis ei ole korpus, leidke selle ringi kõigi pööratavate elementide hulk. Ülesannetes a)–g) on teheteks arvude tavaline liitmine ja korrutamine.

a) Hulk $\mathbb{Z}$;
b) paarisarvude hulk;
c) hulgad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$;
d) $\{a + b\sqrt{2}\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$;
e) $\{a + b\sqrt{2}\colon a, b \in \mathbb{Q}\}$;
f) $\{a + b\sqrt{3}\colon a, b \in 2\mathbb{Z}\}$;
g) kõigi ratsionaalarvude (taandatud kujul) hulk, mille nimetajad ei jagu fikseeritud algarvuga p;
h) hulk $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$, kus $n > 1$, maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes;
i) hulk $m\mathbb{Z} = \{ma\colon a \in \mathbb{Z}\}$, kus $m \in \mathbb{N}$;
j) reaalarvude hulk liitmise ja korrutamise suhtes, mis on defineeritud võrdustega
$$\begin{aligned} a \oplus b &= a + b - 1, \\ a \otimes b &= a + b - ab; \end{aligned}$$
k) reaalarvude hulgal defineeritud lineaarfunktsioonide hulk funktsioonide punktiviisilise liitmise ja funktsioonide korrutamise (s.o. järjestrakendamise) suhtes.

15*. Olgu R assotsiatiivne ring (võib-olla mittekommutatiivne, võib-olla ühikuta). Tähistame $C(R) = \{a \in R\colon ab = ba\ \forall b \in R\}$. (Hulka $C(R)$ nimetatakse ringi R *tsentriks*.)
Kehtigu ringis R iga elemendi $a \in R$ korral implikatsioon $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. Tõestage, et kui element $c \in R$ rahuldab tingimust $c^2 = c$ (st. c on *idempotent*), siis $c \in C(R)$.
Näpunäide: Uurige muuhulgas elementi $bc - cbc$.

16*. Olgu $R \neq \{0\}$ lõplik ring ning $a \in R \setminus \{0\}$. Tõestage, et a on pööratav või a on nullitegur.

3. Kahe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.

17. Tõestage, et järgmised maatriksite hulgad on ringid maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes.
Tehke kindlaks, millised neist ringidest on kommutatiivsed ja millised on korpused.
Nendes ühikelemendiga ringides, mis ei ole korpused, leidke kõik pööratavad elemendid.
Nulliteguritega ringides leidke kõik nullitegurid.

a) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$;
b) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$;
c) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in 3\mathbb{Z}\right\}$;
d) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$;
e) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$;
f) n. järku ($n > 1$) reaalarvuliste elementidega diagonaalmaatriksite hulk;
g) kõigi 2. järku ruutmaatriksite hulk üle $\mathbb{Q}$, mis kommuteeruvad maatriksiga $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Olgu $H \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ fikseeritud maatriks. Otsustage, millal hulk $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ on ring maatriksite tavalise liitmise ja korrutamise suhtes, mis on defineeritud võrdusega

$$A \otimes B = AHB.$$

19. Tõestage, et järgmised funktsioonide $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulgad on kommutatiivsed ühikelemendiga ringid punktiviisilise liitmise ja punktiviisilise korrutamise suhtes. Leidke nende ringide pööratavad elemendid. Millistes neist ringidest leidub nullitegureid?

a) Lõigus $[-1, 1]$ pidevate funktsioonide hulk;
b) lõigus $[-1, 1]$ paarisfunktsioonide hulk;
c) vahemikus $(-1, 1)$ diferentseeruvate funktsioonide hulk;
d) lõigus $[-1, 1]$ tõkestatud funktsioonide hulk.

20. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Öeldakse, et täisarvud a ja b on *kongruentsed* mooduli n järgi, kui arv $a-b$ jagub arvuga n. Tähistatakse $a \equiv b \pmod{n}$. Kontrollige, et $a \equiv b \pmod{n}$ parajasti siis, kui a ja b annavad arvuga n jagamisel sama jäägi. Kontrollige, et kongruentsuse seos on ekvivalentsusseos hulgal $\mathbb{Z}$. Ekvivalentsiklassi $\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \colon a \equiv b \pmod{n}\}$ nimetatakse arvu *a jäägiklassiks* mooduli n järgi. Tähistame $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ ja defineerime sellel hulgal liitmise ja korrutamise võrdustega

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Tõestage, et $\mathbb{Z}_n$ on ring nende tehete suhtes. (Sealhulgas tõestage, et need tehted on korrektselt defineeritud!) Seda ringi nimetatakse *jäägiklassiringiks* mooduli n järgi.

21. Koostage ringide $\mathbb{Z}_5$ ja $\mathbb{Z}_6$ liitmis- ja korrutamistehte Cayley tabelid. Kas need ringid on korpused?

22. Tõestage, et

a) kui n on kordarv, siis ringis $\mathbb{Z}_n$ leidub nullitegureid;
b) $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ on pööratav siis ja ainult siis, kui $\mathrm{SÜT}(a, n) = 1$;
c) $\mathbb{Z}_n$ on korpus siis ja ainult siis, kui n on algarv.

23. Leidke ringide $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{12}$ ja $\mathbb{Z}_7$ kõik pööratavad elemendid.

24. Tõestage, et maatriksid

$$O = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

üle $\mathbb{Z}_2$ moodustavad maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes korpuse. Koostage selle korpuse liitmise ja korrutamise Cayley tabelid.

25. Tõestage, et hulga $X \neq \varnothing$ kõigi alamhulkade hulk $\mathscr{P}(X)$ on ring tehete $\triangle$ ja $\cap$ suhtes, kus $\triangle$ (hulkade sümmeetriline vahe) on defineeritud võrdusega

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$A, B \in \mathscr{P}(X)$. Mis on selle ringi ühikelement?

26*. Tõestage, et lõplik kommutatiivne nulliteguriteta (assotsiatiivne, aga mitte tingimata ühikuga) ring R, milles on vähemalt kaks elementi, on korpus.
Näpunäide: Vaadelge kujutusi $r\cdot\colon R\setminus\{0\}\to R\setminus\{0\}$, kus $r\cdot(x)=rx$, $r\in R\setminus\{0\}$.

27*. Olgu R ring (võib-olla ühikuta), milles on vähemalt kaks elementi. Leidugu iga elemendi $a\in R\setminus\{0\}$ jaoks üheselt määratud element $b\in R$ nii, et $aba=a$. Tõestage, et R on (võib-olla mittekommutatiivne) korpus, see tähendab, R-s on olemas ühikelement ning ringi R igal nullist erineval elemendil on olemas pöördelement.

28*. Ringi aksioom $a(b+c)=ab+ac$ on asendatud aksioomiga $a(b-c)=ab-ac$. Kas tegemist on endiselt ringiga?

4. Kompleksarvud.

Viime hulka $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\colon x,y\in\mathbb{R}\}$ sisse liitmise ja korrutamise:
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\overset{\text{def}}{=}(x_1+x_2,y_1+y_2)$,
$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\overset{\text{def}}{=}(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$.
Tähistame $\mathbb{C}:=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.
Lause. $\mathbb{C}$ on korpus.
Lause. Hulk $R=\{(x,0)\colon x\in\mathbb{R}\}$ on korpuse $\mathbb{C}$ alamkorpus. Sealjuures korpused R ja $\mathbb{R}$ on isomorfsed; isomorfismiks on $\varphi(x)=(x,0)$.
Arvestades viimase lause tulemust, kirjutatakse sageli $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.
Tähistame $\mathrm{i}:=(0,1)$ ning seega $(x,y)=x+y\mathrm{i}$.
Lause. $\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}\quad (x_1+y_1\mathrm{i})+(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i}$,
$\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}\quad (x_1+y_1\mathrm{i})\cdot(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\mathrm{i}$,
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad (x+y\mathrm{i})^{-1}=\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(x-y\mathrm{i})$.
Lause. Kujutus $f\colon(0,\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, kus $f(r,\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$, on bijektsioon.
Olgu $z=(x,y)\in\mathbb{C}$. Kompleksarvu z kuju $x+y\mathrm{i}$ nimetatakse tema *algebraliseks* kujuks. Eelmises lauses märgitud bijektsiooni f kaudu leitud kuju $r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ nimetatakse z *trigonomeetriliseks* kujuks. Tähistades $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}:=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$, saame kompleksarvu z *eksponentkuju* $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=r\exp(\mathrm{i}\varphi)$.
Lause. Kehtivad järgmised arvutusreeglid:
$\forall r_1,r_2\geqslant 0\ \forall\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}\quad r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\varphi_2)=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,
$\forall r\geqslant 0\ \forall\varphi\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad (r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)$ (*Moivre'i valem*),
$\forall r\geqslant 0\ \forall\varphi\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad \sqrt[n]{r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}=\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\colon k\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}$.
Olgu $n\in\mathbb{N}$.
$z\in\mathbb{C}$ on n-astme ühejuur $\overset{\text{def}}{\iff}$ $z^n=1$,
n-astme ühejuur z on n-astme algjuur $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{z,z^2,\dots,z^n\}=\{w\in\mathbb{C}\colon w^n=1\}$.

29. Leidke reaalarvud x ja y võrrandist

a) $2x-5\mathrm{i}+7y+2x\mathrm{i}=-7-5\mathrm{i}$; b) $2x-5y\mathrm{i}-x-3y\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$.

30. Arvutage:

a) $(1+5\mathrm{i})(-2+3\mathrm{i})$;
b) $\left(1-\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(2+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$;
c) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$;
d) $\dfrac{5}{3\mathrm{i}-4}$;
e) $-\dfrac{4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$;
f) $\dfrac{\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}-\dfrac{2+\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}}$.

31. Tõestage võrdus $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{13+4\mathrm{i}}{17-9\mathrm{i}}$.

32. Kas kahe kompleksarvu ruutude summa võib olla negatiivne?

33. Millal on $a+b\mathrm{i}$ ruut puhtimaginaararv, st. kompleksarv kujul $d\mathrm{i}$, kus $d\in\mathbb{R}$?

34. Leidke antud kompleksarvude kaaskompleksarvud ning kujutage need arvud ja nende kaaskompleksarvud komplekstasandi punktidena: a) 5; b) 2i; c) $2+3\mathrm{i}$.

35. Tõestage võrdused:

a) $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$;
b) $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$;
c) $\overline{(\overline{z})}=z$;
d) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;
e) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;
f) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$;
g) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2\neq 0$;
h) $\overline{z^n}=\overline{z}^n$, $n\in\mathbb{N}$;
i) $\left|\overline{z}\right|=|z|$;
j) $z\overline{z}=|z|^2$.

36. Arvutage:

a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}^3}$;
b) i^n, kus n on täisarv;
c) $\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^{14}+\mathrm{i}^{24}+\mathrm{i}^{34}+\mathrm{i}^{44}$;
d) $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\ldots+\mathrm{i}^n$, $n>4$;
e) $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^3\cdot\mathrm{i}^4\cdot\ldots\cdot\mathrm{i}^{50}$.

37. Esitage järgnevad kompleksarvud trigonomeetrilisel kujul:

a) 1;
b) $-\mathrm{i}$;
c) $-1+\mathrm{i}$;
d) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$;
e) $4-3\mathrm{i}$;
f) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$;
g) $-\cos\dfrac{\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{7}$;
h) $\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha$ (siin $\alpha\in[0,2\pi)$);
i) $2(\cos 10^\circ-\mathrm{i}\sin 10^\circ)$;
j) $4(-\cos 15^\circ-\mathrm{i}\sin 15^\circ)$.

38. Kujutage komplekstasandil selliste punktide hulk, mis vastavad kompleksarvudele, mille moodul r ja argument φ rahuldavad järgmisi tingimusi:

a) $r=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$;
b) $r=3$;
c) $r\leqslant 3$;
d) $r>3$;
e) $2<r<3$;
f) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$;
g) $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{6}$;
h) $0<\varphi<\pi$.

39. Kujutage komplekstasandil punktide hulk, mis vastavad kompleksarvudele z, mis rahuldavad järgmisi võrratusi:

a) $\operatorname{Re} z > 0$;
b) $\operatorname{Im} z \leqslant 2$;
c) $|\operatorname{Re} z| < 1$;
d) $|\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$;
e) $|z| \leqslant 1$;
f) $|z + \mathrm{i}| > 1$;
g) $|z - \mathrm{i}| < 2$;
h) $1 < |z - 1 + 2\mathrm{i}| < 3$;
i) $|z + 3 - 2\mathrm{i}| > 1$;
j) $|z - \mathrm{i}| + |z + \mathrm{i}| < 4$;
k) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$;
l) $|z - 2| - |z + 2| < 2$;
m) $|z + 1| < |1 - z|$.

40. Milline on järgmiste suuruste geomeetriline tähendus kompleksarvu z korral:

a) $|z|$; b) $|\operatorname{Re} z|$; c) $|\operatorname{Im} z|$?

41. Tõestage, et mistahes kompleksarvude z_1 ja z_2 korral

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

42. Millistel tingimustel a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; b) $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$?

43. Avaldage kompleksarvu moodul ja argument tema kaaskompleksarvu mooduli ja argumendi kaudu.

44. Kirjeldage võrratuste abil järgmised komplekstasandi punktide hulgad:

a) imaginaarteljest paremal pool asuv pooltasand;
b) esimene veerand;
c) punktid, mille kaugus imaginaarteljest on väiksem kui 1;
d) poolring (ilma ringjooneta) raadiusega 1, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ning mis asub imaginaarteljest vasakul pool.

45. Arvutage:

a) $3(\cos 50^\circ + \mathrm{i}\sin 50^\circ)\cdot 4(\cos 70^\circ + \mathrm{i}\sin 70^\circ)$;
b) $2\left(\cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{7}\right)$;
c) $\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 7\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$;
d) $(1 + \mathrm{i})^{25}$;
e) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \mathrm{i}}\right)^{20}$;
f) $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^n$;
g) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{200}$.

46. Tõestage, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(1 + \mathrm{i})^{8n} = 2^{4n}$.

47. Arvutage:

a) $\dfrac{\cos 140^\circ + \mathrm{i}\sin 140^\circ}{\cos 50^\circ + \mathrm{i}\sin 50^\circ}$;
b) $\dfrac{\cos 130^\circ - \mathrm{i}\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + \mathrm{i}\sin 40^\circ}$;
c) $\dfrac{5(\cos 109^\circ + \mathrm{i}\sin 109^\circ)}{3(\cos 49^\circ + \mathrm{i}\sin 49^\circ)}$;
d) $\dfrac{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$.

48. Leidke juure kõik väärtused ja kujutage nad komplekstasandi punktidena:

a) $\sqrt{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$;
b) $\sqrt{2\mathrm{i}}$;
c) $\sqrt[4]{-1}$;
d) $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$;
e) $\sqrt[3]{(1+\mathrm{i})^3}$;
f) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$;
g) $\sqrt[3]{\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$;
h) $\sqrt[4]{\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}}$.

49. Leidke kõik 2., 3., 4., 5., 6., 8., 12., 16. ja 24. astme ühejuured ja kujutage nad komplekstasandi punktidena.

50. Leidke 2., 3., 4., 5., 6., 8., 12., 16. ja 24. astme algjuured.

51. Tõestage, et
a) n-nda astme ühejuure ja m-nda astme ühejuure korrutis on nm-nda astme ühejuur;
b) kui n ja m suurim ühistegur on 1, siis iga nm-nda astme ühejuur on esitatav n-nda astme ühejuure ja m-nda astme ühejuure korrutisena;
c) kui n ja m suurim ühistegur on 1, siis n-nda astme algjuure ja m-nda astme algjuure korrutis on nm-nda astme algjuur ning vastupidi.

52. Olgu z n-nda astme ühejuur. Arvutage $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k$. (NB! Vaadelge nii $z \neq 1$ kui ka $z = 1$.)

53. Leidke kõigi n-nda astme ühejuurte summa.

54. Avaldage $\sin n\varphi$ ja $\cos n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) $\sin\varphi$ ja $\cos\varphi$ kaudu.

55. Tõestage, et
a) $1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
b) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \dfrac{n\pi}{4}$;
c) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

56. Lahendage võrrandid:

a) $|z| - 2z = -3 + 6\mathrm{i}$;
b) $z^8 = 1 + i$;
c) $\overline{z} = z^3$;
d) $\overline{z}^2 = z^{n-1}$, $n > 1$;
e) $z^2 - 4z + 5 = 0$;
f) $2z^2 - 4z + 3 = 0$;
g) $z^2 - 2z + 1 - 2\mathrm{i} = 0$;
h) $z^2 - (3+2\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i} = 0$.
i) $z^4 - 1 = 0$;
j) $z^2 - 1 - \mathrm{i} = 0$;
k) $z^2 - i = 0$;
l) $z^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = 0$;
m) $z^2 + 2\left(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right) = 0$;
n) $z^3 + \mathrm{i} = 0$;
o) $z^3 + 27 = 0$;
p) $z^4 - \mathrm{i} = 0$;
q) $z^4 - \sqrt{3} - \mathrm{i} = 0$.
r) $z^7 - 2\mathrm{i}z^4 - \mathrm{i}z^3 - 2 = 0$;
s) $z^6 + \mathrm{i}z^3 + \mathrm{i} - 1 = 0$.

57. Kas arvud $2+3i$ ja $1-i$ võivad olla reaalarvuliste kordajatega ruutvõrrandi lahendeiks?

58*. Olgu $z \neq -1$ kompleksarv, mille moodul on 1. Tõestage, et ta on esitatav kujul $z = \frac{1+ti}{1-ti}$, kus t on teatud reaalarv.

59*. Olgu p ja q kompleksarvud, kusjuures $q \neq 0$. Tõestage, et kui ruutvõrrandi $x^2+px+q^2=0$ lahendite moodulid on võrdsed, siis $\frac{p}{q}$ on reaalarv.

60*. Olgu z n-nda astme ühejuur. Arvutage $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 z^{k-1}$.
(NB! Vaadelge nii $z \neq 1$ kui ka $z = 1$.)
Näpunäide: Arvutage kõigepealt $\sum\limits_{k=1}^{n} kz^{k-1}$, uurides avaldist $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} kz^{k-1}\right)\cdot(1-z)$.

61*. Kirjutage programm, mis leiab kõik n-nda astme juured kompleksarvust ja kujutab neid komplekstasandil. Joonistamiseks võib kasutada programmeerimiskeele lisateeki.

5. Alamstruktuurid ja isomorfismid.

Olgu $\emptyset \neq B \subseteq A$. Olgu hulk A mingi algebraline struktuur (st. temal olgu määratud mõned algebralised tehted).

B on A *alamstruktuur* $\overset{\text{„def“}}{\Longleftrightarrow}$ B on A tehete suhtes sama tüüpi algebraline struktuur nagu A (arvestades ka varjatud tehteid, nagu näiteks ühikelemendi näitamine ja pöördelemendi leidmine).

Alamstruktuuri nõuete kirjapanekul pole liigseid tingimusi vaja märkida. Näiteks: olgu (A, f) rühm ja $\emptyset \neq B \subseteq A$, siis

$$(B, f|_{B\times B}) \text{ on rühma } (A, f) \textit{ alamrühm} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall x, y \in B \quad f(x, y) \in B, \\ \forall x \in B \quad \exists y \in B \quad : \quad f(x, y) = f(y, x) = 1_A. \end{cases}$$

Analoogiliselt püstitatakse nõuded alamringi juures: nullelement, assotsiatiivsus ja distributiivsus järelduvad automaatselt ja neid pole vaja märkida.

Olgu antud algebralised struktuurid (A, f, g) ja (B, s, t). Olgu antud kujutus $\varphi\colon A \to B$.

φ on *homomorfism* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ teostades operatsioonid hulgas A ja rakendades kujutust φ, saame sama tulemuse, mis siis, kui rakendame kujutust φ ja teostame seejärel operatsioonid hulgas B.

$$\varphi \text{ on } \textit{isomorfism} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \varphi \text{ on homomorfism,} \\ \varphi \text{ on bijektsioon.} \end{cases}$$

Homomorfismide ja isomorfismide nõuete kirjapanekul pole liigseid tingimusi vaja märkida. Näiteks: olgu (A, f) ja (B, g) rühmad ning $\varphi\colon A \to B$, siis

$$\varphi \text{ on } \textit{rühmade homomorfism} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x, y \in A \quad \varphi(f(x, y)) = g(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Analoogiliselt püstitatakse nõuded ringide homorfismide juures: nullelemendi ja vastandelementide üleviimine järelduvad automaatselt ja neid pole vaja märkida.

62. Olgu antud rühmoid $A = \{a, b, c, d\}$ oma Cayley tabeliga

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	c	b	d
c	b	b	c	a
d	b	c	a	d

Tehke kindlaks, millised alamhulkadest $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ on rühmoidi $(A, \cdot)$ alamrühmoidid.

63. Tooge näiteid rühma a) $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), +)$, b) $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ alamrühmadest. (Siin $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ on kõigi teist järku pööratavate maatriksite rühm.)

64. Leidke rühma $(\mathbb{Z}_n, +)$ kõik alamrühmad.

65. Tõestage, et rühma alamrühmade ühisosa on samuti alamrühm.

66. Miks pole vaja rühma G alamrühma H definitsioonis nõuda, et $1 \in H$?

67. Tehke kindlaks, kas hulk

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

on ringi $R = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ alamring.

68. Olgu X ja Y mittetühjad hulgad, $Y \subseteq X$. Tõestage, et hulk $\mathscr{P}(Y)$ on ringi $(\mathscr{P}(X), \triangle, \cap)$ alamring.

69. Leidke ringi $\mathbb{R}$ vähim alamring, mis sisaldab arvu $\sqrt{5}$.

70. Leidke ringi $\mathbb{Z}_{12}$ kõik alamringid.

71. Kas ring, mis ei ole korpus, võib sisaldada alamringi, mis on ühtlasi korpus?

72. Leidke korpuse $\mathbb{R}$ vähim alamring ja alamkorpus, mis sisaldavad arvu
a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt[3]{2}$.

73. Leidke korpuse $\mathbb{C}$ vähim alamring ja alamkorpus, mis sisaldavad arvu
a) i; b) $1 + \mathrm{i}$; c) $2\mathrm{i}$.

74. Tõestage, et monoidid $(\mathscr{P}(X), \cap)$ ja $(\mathscr{P}(X), \cup)$ on isomorfsed.

75. Tehke kindlaks, kas rühmad $(\mathbb{Z}_6, +)$ ja $(U(\mathbb{Z}_7), \cdot)$ on isomorfsed.

76. Tehke kindlaks, kas rühmad $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ ja $(\mathbb{Z}_4, +)$ on isomorfsed.

77. Miks pole vaja rühmade G_1 ja G_2 homomorfismi $f\colon G_1 \to G_2$ definitsioonis nõuda, et $f(1) = 1$ ja iga $x \in G_1$ korral $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$?

78. Miks pole vaja monoidide A_1 ja A_2 isomorfismi $f\colon A_1 \to A_2$ definitsioonis nõuda, et $f(1) = 1$?

79. Tõestage, et ei leidu ühtegi sürjektiivset homomorfismi rühmast $(\mathbb{Q}, +)$ rühma $(\mathbb{Z}, +)$.

80. Kas rühmad $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(2\mathbb{Z}, +)$ on isomorfsed?

81. Tehke kindlaks, kas rühmad $(\mathbb{R}, +)$ ja $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ on isomorfsed. Tehke kindlaks, kas $(\mathbb{Q}, +)$ ja $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ on isomorfsed.

82. Tõestage, et järgmised rühmad on isomorfsed:

a) n. astme kompleksarvuliste ühejuurte hulk $\left\{\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}\colon k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\}$ korrutamise suhtes ja hulk $\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\right\}$ liitmise suhtes;

b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ kujutuste korrutamise suhtes ja reaalarvude järjestatud paaride (a, b) hulk, kus $a \neq 0$, tehte suhtes, mis on defineeritud võrdusega

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1);$$

c) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0\right\}$ ja $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (korrutamise suhtes);

d) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\right\}$ ja $G = \{a + b\sqrt{3}\colon a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$ (korrutamise suhtes);

e) $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\right\}$ ja $G = \{a + bi\sqrt{3}\colon a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$ (korrutamise suhtes);

f) $\left\{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R}\right\}$ ja $G = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ (korrutamise suhtes);

g) selliste n. järku ruutmaatriksite hulk, mille igas reas ja igas veerus on üks üks ja ülejäänud elemendid on nullid ja S_n (korrutamise suhtes).

83. Olgu G ratsionaalarvude aditiivne rühm ja $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Tõestage, et kujutus $\varphi\colon G \to G$, $\varphi(a) = qa$, on rühma G automorfism.

84. Miks pole vaja ringide R_1 ja R_2 isomorfismi $\varphi\colon R_1 \to R_2$ definitsioonis nõuda, et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ ja iga $x \in R_1$ korral $\varphi(-a) = -\varphi(a)$?

85. Olgu R ring ühikelemendiga e. Tõestage, et kujutus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R$, mis on defineeritud võrdusega $\varphi(n) = ne$, on ringide homomorfism. Leidke ringi $\mathbb{Z}$ kujutis $\varphi(\mathbb{Z})$ selle homomorfismi korral.

86. Tõestage, et maatriksid kujul $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$, moodustavad korpuse, mis on isomorfne korpusega, mis koosneb reaalarvudest kujul $a + b\sqrt{3}$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$.

87. Tõestage, et maatriksid kujul $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$, moodustavad korpuse, mis on isomorfne korpusega, mis koosneb reaalarvudest kujul $a + b\sqrt{2}$, kus $a, b \in \mathbb{Q}$.

88. Tõestage, et maatriksid kujul $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, moodustavad korpuse, mis on isomorfne korpusega $\mathbb{C}$.

89. Kas korpused $\left\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ ja $\left\{a + b\sqrt{5} \colon a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ on isomorfsed?

90. Tõestage, et kui K ja K' on isomorfsed korpused ühikelementidega 1 ja $1'$ ning nullelementidega 0 ja $0'$, siis iga naturaalarvu n korral $n1 = 0$ siis ja ainult siis, kui $n1' = 0'$.

91. Tõestage, et kui $\varphi \colon R \to S$ on ringide isomorfism ja R on korpus, siis ka S on korpus.

92*. Olgu $A = (A, +)$ Abeli rühm ning $u, v \colon A \to A$ homomorfismid. Defineerime kujutused $f, g \colon A \to A$ seostega

$$f(a) = a - v(u(a)), \quad g(a) = a - u(v(a)) \qquad \forall a \in A.$$

Tõestage, et

a) f ja g on homomorfismid;
b) hulgad $\operatorname{Ker} f := \{a \in A \colon f(a) = 0\}$ ja $\operatorname{Ker} g := \{a \in A \colon g(a) = 0\}$ on A alamrühmad;
c) Abeli rühmad $\operatorname{Ker} f$ ja $\operatorname{Ker} g$ on isomorfsed.

Näpunäide: Näidake, et $u|_{\operatorname{Ker} f} \colon \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g$ ja $u|_{\operatorname{Ker} f}$ on Abeli rühmade isomorfism.

93*. Olgu $A = (A, +)$ Abeli rühm ning $u, v \colon A \to A$ homomorfismid. Defineerime kujutused $f, g \colon A \to A$ seostega

$$f(a) = a - v(u(a)), \quad g(a) = a - u(v(a)) \qquad \forall a \in A.$$

Tõestage, et

a) kui g on pealekujutus, siis f on pealekujutus;
b) kui g on üksühene ja u on üksühene, siis f on üksühene;
c) kui g on üksühene ja v on pealekujutus, siis f on üksühene.

Näpunäide: Ülesande 92 kõiki väiteid võib tõestuseta kasutada. Näitamaks, et f on pealekujutus (väide a)), valige $y \in A$ suvaliselt, leidke z nii, et $u(y) = g(z)$ ning tähistage $x := y + v(z)$, siis $f(x) = y$. Väidete b) ja c) tõestamisel pange tähele, et Abeli rühmade mistahes homomorfismi h üksühesus on samaväärne tingimusega, et iga x korral $h(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. (Veenduge ka, et see tähelepanek on õige!)

94*. Tõestage, et pole muid reaalarvude korpuse automorfisme peale ühikteisenduse.

6. Determinant. Pöördmaatriks.

Olgu K korpus.

$$\mathrm{Mat}_{m,n}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} : a_{11}, \ldots, a_{m,n} \in K \right\}.$$

$\mathrm{Mat}_n(K) := \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$.

Lühem tähistusviis: $\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ või $\left(a_{i,j}\right)$.

Olgu $\left(a_{i,j}\right), \left(b_{i,j}\right) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, olgu $\lambda \in K$.

$\left(a_{i,j}\right) + \left(b_{i,j}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$,

$\lambda \left(a_{i,j}\right) = \left(\lambda a_{i,j}\right) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

Olgu $\left(a_{i,k}\right) \in \mathrm{Mat}_{m,p}(K)$ ja $\left(b_{k,j}\right) \in \mathrm{Mat}_{p,n}(K)$.

$$\left(a_{i,k}\right)_{i,k=1}^{m,p} \cdot \left(b_{k,j}\right)_{k,j=1}^{p,n} = \left(\sum_{s=1}^{p} a_{i,k} \cdot b_{k,j}\right)_{i,j=1}^{m,n} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K).$$

Lause. $(\mathrm{Mat}_n(K), +, \cdot)$ on ring.

Maatriksit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ tähistatakse sageli E_n või E ja nimetatakse *ühikmaatriksiks.*

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

σ on *substitutsioon* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ σ on bijektsioon.

$\mathscr{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma\colon \sigma$ on substitutsioon hulgal $\{1, \ldots, n\}\}$.

Olgu σ substitutsioon.

σ *inversioonide arv* $\stackrel{\text{def}}{=} \left|\left\{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 : i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)\right\}\right|$.

$$\operatorname{sign} \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{kui } \sigma \text{ inversioonide arv on paarisarv,} \\ -1, & \text{kui } \sigma \text{ inversioonide arv on paaritu arv.} \end{cases}$$

$\det A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} (\operatorname{sign} \sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$ (maatriksi A *determinant*).

Determinanti $\det A$ tähistatakse ka $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix}$.

A on *regulaarne* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\det A \neq 0$,

A on *singulaarne* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\det A = 0$.

Teoreem. $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K) \Rightarrow \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Olgu $k \in \{1, \ldots, n\}$. Kustutame maatriksis A mingid $n-k$ rida ja $n-k$ veergu. Saadud k-järku maatriksit nimetatakse maatriksi A *alammaatriksiks* ja tema determinanti maatriksi A *miinoriks.*

Teoreem (Laplace)**.** Olgu $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Siis
$\det A = \sum_{J:=\{j_1,\ldots,j_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{I,J} M'_{I,J}$,
kus $M_{I,J}$ on k-elemendilistele rea- ja veeruindeksite hulkadele I ja J vastav miinor ning $M'_{I,J}$ on $(n-k)$-järku miinor, mis vastab rea- ja veeruindeksite hulkadele $\{1, \ldots, n\} \setminus I$ ja $\{1, \ldots, n\} \setminus J$.
Arvu $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M'_{I,J}$ nimetatakse ka miinorile $M_{I,J}$ vastavaks *algebraliseks täiendiks.*
Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

$B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on maatriksi A *pöördmaatriks* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \cdot B = B \cdot A = E$.
Tähis: A^{-1}.

Lause. $\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdot & A_{m,n} \end{pmatrix}^T$, kus $A_{i,j}$ on elemendile $a_{i,j}$ vastav algebraline täiend, st. märgiga $(-1)^{i+j}$ varustatud miinorist, mis on saadud, kui maatriksis A kõrvaldada i. rida ja j. veerg.

Maatriksi A pöördmaatriksi leidmiseks saab kasutada ülaltoodud lauset või järgmist algoritmi.

Samm 1. Moodustage $(n \times 2n)$-maatriks $(A|E)$, kus E on ühikmaatriks.
Samm 2. Kasutades ridade lineaarteisendusi, viige maatriks $(A|E)$ kujule $(E|B)$.
Samm 3. Kirjutage välja pöördmaatriks: $A^{-1} = B$.

95. Leidke inversioonide arv permutatsioonis

a) 3, 5, 4, 1, 2;

b) 2, 4, 8, 3, 7, 5, 6, 1;

c) 5, 10, 7, 1, 3, 2, 8, 6, 9, 4;

d) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

96. Arvutage determinant, kasutades determinandi üldist definitsiooni

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

97. Tuletage üldvalemid 2×2- ja 3×3-maatriksite determinantide arvutamiseks.

98. Tõestage, et $n \times n$-kolmnurkmaatriksi determinant võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.

99. Olgu A $n \times n$-maatriks. Tõestage järgmised determinandi omadused.

a) $\det A = \det A^T$;

b) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$, kus $\lambda \in K$;

c) mingi rea korrutamisel elemendiga $\lambda \in K$ korrutub determinant λ-ga;

d) kui determinandis on kaks võrdset rida (või veergu), siis determinant võrdub nulliga,

e) kahe rea vahetamisel muudab determinant märki,

f) kahe veeru vahetamisel muudab determinant märki,

g) mingile reale λ-ga korrutatud teise rea liitmine determinanti ei muuda ($\lambda \in K$).

100. Kas suvaliste $(n \times n)$-maatriksite A ja B korral kehtib võrdus

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)?$$

101. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $\det B$, kui $\det A = -3$.

102. Leidke α väärtus nii, et $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

103. Tähistagu E ühikmaatriksit. Millised alljärgnevatest väidetest on tõesed suvaliste samade mõõtmetega ruutmaatriksite A ja B korral?

a) $\det(A-B) = \det A - \det B$;

b) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$;

c) $\det(AB) = \det(BA)$;

d) $\det(-B) = -\det(B)$;

e) $\det(A^2-E) = \det(A-E)\det(A+E)$;

f) kui $\det A = 1$, siis $\det(A^2-E) = 0$.

104. Tõestage, et kui kaldsümmeetrilise maatriksi järk on paaritu ja char $K \neq 2$, siis tema determinandi väärtus on 0.

105. Leidke maatriksi A determinant, kui $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

106. Arvutage determinant Gaussi elimineerimismeetodil

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ b & b & 1+b \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 49 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

i) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$;

k) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

107. Millised alljärgnevatest

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ c) $|a_{43}|$ d) $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$

on determinandi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

miinorid? Leidke nende täiendusmiinorid ja algebralised täiendid.

108. Arvutage determinant, kasutades determinandi arendamist rea või veeru järgi

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$;

i) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$.

109. Kasutades Laplace'i teoreemi leidke determinant

a) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{vmatrix}$.

110. Arvutage determinant antud korpuses K, valides ise arvutusmeetod (kui pole täpsustatud, siis $K = \mathbb{R}$).

a) $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $(K = \mathbb{C})$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ $\left(\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3},\ K = \mathbb{C}\right)$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ \mathrm{e}^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-t}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t & 0 \\ -\mathrm{e}^{-t}\cos t & \mathrm{e}^{-t}\sin t & 1 \\ \mathrm{e}^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

i) $\begin{vmatrix} i+2 & i & -i & 1-i \\ 3-2i & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3i & 1-4i & 5i \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} x^3+1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3+1 \end{vmatrix}$;

k) $\begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^{\pi} \\ 9999 & -e^{\pi} & 0 \end{vmatrix}$;

l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

m) $\begin{vmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{2} \\ \overline{6} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{6} & \overline{3} & \overline{9} & \overline{11} & \overline{6} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} \end{vmatrix}$ $(K = \mathbb{Z}_7)$;

n) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$;

o) $\begin{vmatrix} 15 & 0{,}2 & 0{,}1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

q) $\begin{vmatrix} 8 & 88 & 888 \\ 8888 & 88888 & 888888 \\ 8888888 & 88888888 & 888888888 \end{vmatrix}$.

111. Lähtudes pöördmaatriksi valemist leidke üldine valem (2×2)-maatriksi pöördmaatriksi leidmiseks.

112. Olgu $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$, kusjuures $AB = E$, kus E on n-järku ühikmaatriks. Tõestage, et $BA = E$.

113. Kas maatriks $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ on maatriksi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

114. Millise λ väärtuse korral maatriks $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$ ei ole regulaarne? Leidke A^{-1} eeldusel, et A on regulaarne.

115. Millised alljärgnevatest maatriksitest on pööratavad

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

116. Millise k korral ei ole maatriks pööratav:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

117. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ selline, et $\det\left(A^4\right) = 0$. Kas A on pööratav?

118. Leidke pöördmaatriks antud $\mathrm{Mat}_n(K)$ maatriksile:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$;

b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$;

d) $\begin{pmatrix} -1+2\mathrm{i} & 6 \\ 1+\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}^{-1}$ $(K = \mathbb{C})$;

e) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}^{-1}$ $(K = \mathbb{Z}_{11})$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$;

h) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$;

j) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} & -\overline{2} \\ \overline{4} & -\overline{1} & \overline{3} \\ -\overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix}^{-1}$ $(K = \mathbb{Z}_5)$;

k) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} \end{pmatrix}^{-1}$ $(K = \mathbb{Z}_3)$;

l) $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$.

119. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p}(K)$ ning $\lambda \in K$. Tõestage võrdused:

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

120. Olgu $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ pööratavad ning $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Tõestage võrdused:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \qquad (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}.$$

121. Leidke $(AB)^{-1}$, $(3A)^{-1}$ ja $(A^T)^{-1}$, kui

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

122. Leidke regulaarne maatriks A, kui $A^2 = AB + 2A$ ja

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

123. Olgu A $(n \times n)$-maatriks ja E $(n \times n)$-ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis

$$(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}?$$

124. Olgu A, B ja C pööratavad $(n \times n)$-maatriksid. Lihtsustage avaldis

$$(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}.$$

125. Leidke korrutise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks.

126. Olgu E ühikmaatriks ning A ja B sama järku ruutmaatriksid. Tõestage, et kui maatriks $E + AB$ on pööratav, siis on pööratav ka $E + BA$.
Näpunäide: Võib näidata, et kui maatriks C on maatriksi $E + AB$ pöördmaatriks, siis maatriks $E - BCA$ on maatriksi $E + BA$ pöördmaatriks.

127. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui

a) $A^2 - 4A + E = 0$;   b) $A^3 + 5A^2 - 3A - E = 0$;   c) $A^2 - A = 0$.

128. Tõestage, et iga regulaarse maatriksi A saab ainult ridade või ainult veergude elementaarteisendustega teisendada ühikmaatriksiks. Kui neidsamu teisendusi rakendada samas järjekorras ühikmaatriksile, siis tulemuseks on maatriksi A pöördmaatriks.

129. Kuidas muutub maatriks A^{-1}, kui antud maatriksis A

a) korrutada i. rida skalaariga $k \neq 0$;
b) liita i. reale k-kordne j. rida $(i \neq j)$;

c) vahetada i. ja j. rida?

130. Tõestage, et $(E-A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}$, kui $A^k = 0$.

131. Tõestage, et täisarvuliste elementidega maatriksi A pöördmaatriks on täisarvuliste elementidega parajasti siis, kui det $A = \pm 1$.

132. Olgu A, B ja C sellised maatriksid, et korrutised AB ja AC eksisteerivad. Kas võrdusest $AB = AC$ järeldub võrdus $B = C$?

133. Olgu A ja B regulaarsed ruutmaatriksid. Tõestage, et võrdused $AB = BA$, $AB^{-1} = B^{-1}A$ ja $A^{-1}B = BA^{-1}$ on samaväärsed.

134. Olgu J_n n-ndat järku ruutmaatriks, mille kõik elemendid võrduvad 1-ga. Tõestage, et $(E-J_n)^{-1} = E - \dfrac{1}{n-1}J_n$.

135*. Arvutage $(n \times n)$-maatriksi determinant:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

136*. On antud $n \times n$ maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & -1 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & -1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

kus peadiagonaal ja selle kõrval asuvad diagonaalid on ainsad, mis sisaldavad nullist erinevaid elemente. Leidke det A.

137*. Tõestage, et

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2014 & 2015 \\ 2^2 & 3^2 & \ldots & 2015^2 & 2016^2 \\ 3^3 & 4^3 & \ldots & 2016^3 & 2016^3 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 2015^{2015} & 2016^{2015} & \ldots & 2016^{2015} & 2016^{2015} \end{vmatrix} \neq 0.$$

138*. Tõestage, et kui n-järku determinandis D on kõik elemendid hulgast $\{-1, 1\}$, siis eeldusel $n \geqslant 3$ kehtib võrratus $\det D \leqslant (n-1)(n-1)!$.
Näpunäide. Matemaatiline induktsioon.

139*. Olgu A (4×2)-maatriks ja B (2×4)-maatriks, mille korral

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leidke maatriks BA.

140*. Olgu A ja B $(n \times n)$-maatriksid, mille korral $AB + A + B = 0$. Tõestage, et $AB = BA$.

141*. Leidke $(n \times n)$-maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks A^{-1}.

142*. Kirjutage programm, mis leiab täisarvuliste elementidega ruutmaatriksi determinandi täpse väärtuse, kasutades ainult tehteid täisarvudega.

7. Vektorruum. Vektorruumi alamruum.

Olgu V hulk ja (K, f, g) korpus. Olgu hulgal V defineeritud kahekohaline algebraline tehe $+$ ning iga $\lambda \in K$ jaoks ühekohaline algebraline tehe (tähistame sümboliga $\lambda \cdot$)

$$V \text{ on } \textit{vektorruum} \text{ üle } K \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} (V, +) \text{ on Abeli rühm}, \\ \forall x, y \in V \quad \forall \lambda \in K \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \\ \forall x \in V \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad (f(\lambda, \mu))x = \lambda x + \mu x, \\ \forall x \in V \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad \lambda(\mu x) = (g(\lambda, \mu))x, \\ \forall x \in V \quad 1x = x. \end{cases}$$

Vektorruumi elemente nimetatakse sageli *vektoriteks* ning vastava korpuse elemente *skalaarideks*. Ühe-elemendilist vektorruumi $\{0\}$ tähistatakse sageli 0.
Olgu V vektorruum üle korpuse (K, f, g). Olgu $\varnothing \neq U \subseteq V$.

$$U \text{ on vektorruumi } V \textit{ alamruum} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} \forall x, y \in U \quad x + y \in U, \\ \forall x \in U \quad \forall \lambda \in K \quad \lambda x \in U. \end{cases}$$

Vektorruumi V suvalise otseastme V^n (kus n on mingi naturaalarv) elementi nimetatakse *vektorsüsteemiks*. Tähiseid: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ või $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Rõhutame, et nüüd ja edaspidi pole keelatud looksulgudega hõlmata vektorruumi elementide komplekti, mille hulgas on korduvaid. Vektorsüsteemidega töötamisel on tähtis vajadusel identifitseerida süsteemi iga elementi; kui see toimub järjestamise abil, on süsteemi vektorite järjestus oluline! Üldiselt vaadeldakse ka vektorsüsteeme, mille elementide arv on lõpmatu, enamasti sellised juhtumid väljuvad käesoleva kursuse raamidest.

$\operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \colon \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K\}$
(vektorsüsteemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *lineaarkate*).
Lineaarkatet tähistatakse veel $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ või $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Olgu $X, Y \subseteq V$, $\lambda \in K$.
$X + Y \overset{\text{def}}{=} \{x + y \colon x \in X, y \in Y\}$,
$\lambda X \overset{\text{def}}{=} \{\lambda x \colon x \in X\}$.

143. Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ tavaliste tehete suhtes arvudega: a) $\mathbb{N}$, b) $\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $\mathbb{R}$, e) $\mathbb{C}$, f) $\mathbb{R}^+$?

144. Olgu a vektor ja α skalaar. Tõestage, et $\alpha a = 0$ parajasti siis, kui $\alpha = 0$ või $a = 0$.

145. Olgu a, b vektorid ja α, β skalaarid. Tõestage, et $\alpha a + \beta b = \beta a + \alpha b$ parajasti siis, kui $\alpha = \beta$ või $a = b$.

146. Olgu K korpus. Defineerime hulgal $K^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in K\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),\\ k(a_1, \ldots, a_n) &= (ka_1, \ldots, ka_n),\ k \in K.\end{aligned}$$

Tõestage, et selliste (*komponenthaaval* defineeritud) tehete suhtes on hulk K^n vektorruum üle K.

147. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulga $\mathbb{R}^4$ alamhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ komponenthaaval defineeritud liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes:

a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;
b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;
d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}$.

148. Kas järgmised vabavektorite hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$, kui vektorite liitmine ja reaalarvuga korrutamine on defineeritud vektoralgebra reeglite abil:
a) kõigi vektorite hulk V_1, mis on paralleelsed fikseeritud sirgega;
b) kõigi vektorite hulk V_2, mis on paralleelsed fikseeritud tasandiga;
c) kõigi vektorite hulk, mis ei ole paralleelsed fikseeritud sirgega.

149. Defineerime hulgal $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \colon a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ tehted võrdustega

$$k(a_1, a_2) = (ka_1, a_2), \qquad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

kus $a_1, a_2, b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$. Kas V on vektorruum üle $\mathbb{R}$?

150. Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ maatriksite tavalise liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes:

a) kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk;
b) kõigi n-ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk;
c) kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk;
d) $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$;
e) $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
f) $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$;
g) $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;
h) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;
i) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;
j) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

151. Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktiviisiliselt. Tehke kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$:
a) hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;
b) kõigi (täpselt) n. astme polünoomfunktsioonide hulk;
c) kõigi ülimalt n. astme polünoomfunktsioonide hulk;
d) kõigi polünoomfunktsioonide $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulk, mille korral
(i) $f(0) = 1$; (ii) $f(0) = 0$; (iii) $2f(0) - 3f(1) = 0$; (iv) $f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = 0$;
e) selliste n-muutuja funktsioonide $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hulk, mille korral $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$, kus $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

152. Kas reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on vektorruum üle $\mathbb{Z}_2$ hariliku liitmise suhtes, kui korrutamine skalaariga defineerida võrdustega $\overline{1}a = a$, $\overline{0}a = 0$?

153. Olgu X mittetühi hulk ja $\mathscr{P}(X)$ tema kõigi alamhulkade hulk. Defineerime hulga X alamhulga A korrutised korpuse $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ elementidega (skalaaridega) võrdustega $\overline{1}A = A$, $\overline{0}A = \emptyset$. Kas hulk $\mathscr{P}(X)$ on vektorruum üle $\mathbb{Z}_2$, kui liitmise osas vaadelda sümmeetrilist vahet $\triangle$?

154. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) alamruumid.
a) fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
b) fikseeritud tasandiga paralleelsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
c) fikseeritud sirgega ortogonaalsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
d) fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
e) $\{(a, b, a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^5$;
f) $\{(a, b, a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}, a + b = 2\}$, $V = \mathbb{R}^5$;
g) $\{(a, b, c, d, e) : a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a + e = b + d\}$, $V = \mathbb{R}^5$;
h) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
i) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
j) reaalarvuliste elementidega n-järku sümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$;
k) reaalarvuliste elementidega n-järku kaldsümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$;

l) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;

m) $\left\{\begin{pmatrix} a+bi & c \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;

n) $\{a + b\sin^2 x + c\cos^2 x\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;

o) $\{a + b\sin x + c\sin^2 x\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

155. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V (üle $\mathbb{C}$) alamruumid.

a) $\mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$;

b) $\{a(2-\mathrm{i})\colon a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$;

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$

d) $\left\{\begin{pmatrix} a & b+c\mathrm{i} \\ d\mathrm{i} & a\mathrm{i} \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;

e) $\{(a+b\mathrm{i}, 0, c+d\mathrm{i})\colon a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$; $V = \mathbb{C}^3$.

156. Olgu V vektorruum üle K ja $a_1, \ldots, a_n \in V$. Tõestage, et lineaarkate $\mathrm{span}(a_1, \ldots, a_n)$ on vektorruumi V alamruum.

157. Olgu $L_1 = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_s)$ ja $L_2 = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_t)$ vektorruumis V. Tõestage, et kehtib võrdus $L_1 + L_2 = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t)$.

158. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Kas vektorruumil V on nullist erinevaid lõplikke alamruume?

159*. Leidke hulgast $\{(0,0)\}$ ja tühihulgast erinevad **pärisalamhulgad** S_1, S_2 ja S_3 vektorruumis $\mathbb{R}^2$ nii, et

a) $S_1 + S_1 \subsetneq S_1$ (pole võrdne!),

b) $S_2 \subsetneq S_2 + S_2$ (pole võrdne!),

c) $S_3 + S_3 = S_3$.

160*. Olgu L_1, L_2 ja L_3 vektorruumi V nullist erinevad alamruumid, kusjuures $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = \{0\}$.
Tõestage või lükake ümber järgmine väide:

$$L_1 + L_2 = L_1 + L_3 \qquad \Longrightarrow \qquad L_2 = L_3.$$

8. Lineaarne sõltumatus ja sõltuvus.

Olgu V vektorruum üle korpuse K. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$.
Vektorsüsteem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on *lineaarselt sõltumatu* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$

Vektorsüsteem $x_1, x_2, \dots, x_n$ on *lineaarselt sõltuv* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\neg\big(x_1, x_2, \dots, x_n$ on lineaarselt sõltumatu$\big)$.

Lause. Vektorsüsteem $x_1, x_2, \dots, x_n$ on *lineaarselt sõltuv* $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K: \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \quad \wedge \quad \lambda_k \neq 0.$

Lause. Vektorsüsteem $x_1, x_2, \dots, x_n$ on *lineaarselt sõltuv* $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \exists \mu_1, \dots, \mu_{k-1} \in K: \quad x_k = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_{k-1} x_{k-1}.$

Lause. Vektorsüsteem $0, x_1, \dots, x_n$ on lineaarselt sõltuv.

Vektorsüsteem $x_1, x_1, x_2, \dots, x_n$ on lineaarselt sõltuv.

161. Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (k, 1, 0)$, $a_2 = (1, k, 1)$ ja $a_3 = (0, 1, k)$ oleks lineaarselt sõltuvad?

162. Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (1, k, k^2)$, $a_2 = (1, l, l^2)$ ja $a_3 = (1, m, m^2)$ oleks lineaarselt sõltuvad?

163. Olgu a, b, c vektorruumi V (üle korpuse K, mille karakteristika ei ole 2) vektorid. Kui vektorid a, b, c on lin-sõltumatud, kas siis ka vektorid $a + b$, $b + c$ ja $c + a$ on lin-sõltumatud?

164. Näidake, et vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga:

a) $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (5, 3, 1)$, $a_3 = (-15, -2, 21)$, $V = \mathbb{R}^3$;

b) $z_1 = 2 + 5\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$, $z_3 = 6 + 29\mathrm{i}$, $V = \mathbb{C}$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$;

d) $f_1(x) = (\sin x)^2$, $f_2(x) = (\cos x)^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 3$, $f_5(x) = \mathrm{e}^x$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

165. Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V (üle $\mathbb{R}$) on lin-sõltumatud:

a) $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 4, 2)$, $V = \mathbb{R}^3$;

b) $a_1 = (x, y, 3)$, $a_2 = (2, x - y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 6$, $y \neq \dfrac{9}{2}$, $V = \mathbb{R}^3$;

c) $z_1 = 2 + 5\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$, $V = \mathbb{C}$;

d) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ x - 1, & \text{kui } 1 < x, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ 0, & \text{kui } 1 < x, \end{cases} \quad V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$

166. Olgu vektorite süsteem $a_1, \dots, a_m$ lineaarselt sõltumatu ja süsteem $a_1, \dots, a_m, x$ lineaarselt sõltuv. Tõestage, et vektor x avaldub üheselt vektorite $a_1, \dots, a_m$ lineaarkombinatsioonina.

167. Uurige, kas vektorite süsteemid (vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) on lin-sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga:

a) $x+2$, $x-2$;
b) $6x+9$, $8x+12$;
c) 1, $(x-1)^2$, $x-1$;
d) e^x, e^{2x}, e^{3x};
e) x, e^x, xe^x;
f) $\sin x$, $\cos x$;
g) 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$;
h) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$;
i) $\sin x$, $\sin(x+2)$, $\cos(x-5)$.

168. Vaatleme funktsioonide hulka $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3} = \{f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3 \mid f \text{ on funktsioon}\}$. On teada, et $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ on vektorruum üle $\mathbb{Z}_3$, kui tehted on defineeritud punktiviisi: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ja $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Nullelement on θ, kus $\theta(x) = \overline{0}$ iga $x \in \mathbb{Z}_3$ korral.
Olgu $e_0(x) = \overline{1}$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x^3$. Tehke kindlaks, kas vektorruumi $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ vektorsüsteem e_0, e_1, e_2, e_3 on lineaarselt sõltumatu.

169. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Milliste λ väärtuste korral järeldub vektorite süsteemi a_1, a_2 lineaarsest sõltumatusest vektorite süsteemi $\lambda a_1 + a_2$, $a_1 + \lambda a_2$ lineaarne sõltumatus?

170*. Vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorid f_1 ja f_2 on sellised, et iga $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ korral funktsioon $c_1 f_1 + c_2 f_2$ säilitab märki, st.

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R}\ \ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \geqslant 0 \quad \vee \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \leqslant 0\big)\,.$$

Tõestage, et vektorite süsteem f_1, f_2 on lineaarselt sõltuv.

171*. Vaatleme vektorruumi $\mathbb{R}$ üle korpuse $\mathbb{Q}$. Tehke kindlaks, kas vektorsüsteem

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{2}$$

on lineaarselt sõltumatu.

9. Baas.

Olgu V vektorruum üle korpuse K. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ on V *moodustajate süsteem* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $V = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} U \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ on lineaarselt sõltumatu} \end{array}\right\} \implies U \text{ on lineaarselt sõltumatu,}$$

$$\left.\begin{array}{r} \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ on } V \text{ moodustajate süsteem} \end{array}\right\} \implies U \text{ on } V \text{ moodustajate süsteem.}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on } V \textit{ baas} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on lineaarselt sõltumatu,} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on } V \text{ moodustajate süsteem.} \end{cases}$$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} x_1, x_2, \ldots, x_m \text{ on } V \text{ baas,} \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ on } V \text{ baas} \end{array}\right\} \implies m = n.$$

$\dim V = n$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists x_1, \ldots, x_n \in V \quad : \quad x_1, \ldots, x_n$ on V baas.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} \dim V = n, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on lineaarselt sõltumatu} \end{array}\right\} \implies x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on } V \text{ baas,}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dim V = n, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on } V \text{ moodustajate süsteem} \end{array}\right\} \implies x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ on } V \text{ baas.}$$

172. Iga vektorruumi jaoks ül-st 143d), 143e), 148a), 148b), 150d), 150e), 150f), 150g), 150h), 150j), 151c), 151e) leidke mingi baas ja mõõde.

173. Tooge näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$ a) baasist, b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas, c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas, d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem.

174. Leidke vektorruumi $\mathbb{C}$ (üle $\mathbb{R}$) vektori $-5+4\mathrm{i}$ koordinaadid baasi $-1+2\mathrm{i}$, $2-\mathrm{i}$ suhtes.

175. Leidke vektorruumi $V = \{a + b\sin^2 x + c\sin 2x\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorite

a) $f(x) = \dfrac{5}{2} + 3(\sin x)^2 + \dfrac{3}{2}\cos 2x$, b) $f(x) = 5 + \sin 2x$

koordinaadid baasi 1, $(\sin x)^2$, $\sin 2x$ suhtes.

176. Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baasid ning leidke vektori $b = (3, 7, 13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:
a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$;
b) $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$;
c) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_3 = (1, 4, 9)$.

177. Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorite $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suhtes.

178. On antud vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ ja $e_3 = (1, -1, 1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $a = (6, 2, -7)$ koordinaadid sellel baasil.

179. Olgu e_1, e_2, e_3 3-mõõtmelise vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) baas. Tõestage, et ka vektorite süsteem $e'_1 = 5e_1 - e_2 - 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2$, $e'_3 = -2e_1 + e_2 + e_3$ on selle vektorruumi baas ning leidke vektori $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ koordinaadid selle baasi suhtes.

180. Olgu V kahemõõtmeline vektorruum üle korpuse K. Tehke kindlaks, kas hulk $V^2 = \{(v_1, v_2)\colon v_1, v_2 \in V\}$ on vektorruum üle korpuse K tehete suhtes, mis on defineeritud võrdustega

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2), \qquad k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2).$$

Kui on, siis leidke selle vektorruumi mingi baas.

181. Iga alamruumi jaoks ül-st 154a), 154b), 154c), 154d), 154e), 154g), 154h), 154j), 154k), 154l), 154m), 154n), 154o), 155e) leidke mingi baas ja mõõde.

182*. Olgu V n-mõõtmeline vektorruum üle korpuse K. Olgu antud r-mõõtmeline alamruum $W \subseteq V$, kusjuures $r < n$. Tõestage, et $W = Y$, kus

$$Y = \bigcap \{U\colon U \text{ on } V \text{ alamruum, } \dim U = n-1,\ W \subseteq U\}\,.$$

Näpunäide: Sisalduvuse $W \supseteq Y$ tõestamisel näidake, et elemendi $v \in Y \setminus W$ olemasolu viib vastuoluni.

183*. Olgu antud lin-sõltumatud vektorid $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ (lõigul $[a,b]$ määratud funktsioonide vektorruum üle $\mathbb{R}$). Tõestage, et leiduvad punktid $a_1, \dots, a_n \in [a,b]$ nii, et $\det\left(\left(f_i(a_j)\right)_{i,j=1}^n\right) \neq 0$. *Näpunäide:* Matemaatiline induktsioon.

184*. Tooge näide pidevast funktsioonist $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, mis rahuldab järgmist tingimust: suvalise kolme erineva reaalarvu t_1, t_2, t_3 korral on vektorsüsteem $v(t_1), v(t_2), v(t_3)$ ruumi $\mathbb{R}^3$ baas.

10. Astak.

Olgu V vektorruum üle K. Olgu $e \subseteq V$ vektorsüsteem.

$\operatorname{rank} e \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{span} e$ (vektorsüsteemi *astak*).

Lause. $\operatorname{rank} e = \max\{k\colon e' \text{ on } k\text{-elemendiline alamsüsteem } e\text{-s, } e' \text{ on lin-sõltumatu}\}$.

Olgu $A = (a_{i,j}) \in \operatorname{Mat}_{m,n}(K)$.

$\operatorname{rank} A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}\left((a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, (a_{m,1}, \dots, a_{m,n})\right)$ (vektorruumis K^n üle K).

Teoreem. $\operatorname{rank} A = \max\{k\colon M \text{ on } A\ k\text{-järku miinor, } M \neq 0\}$.

Olgu M ja M' maatriksi A r- ja $(r+1)$-järku miinorid.

M' ääristab M $\overset{\text{def}}{\iff}$ M' on saadud M-st ühe rea ja ühe veeru lisamisel.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} M \text{ on } A\ r\text{-järku miinor,} \\ M \neq 0, \\ \operatorname{rank} A > r \end{array}\right\} \implies \exists M'\colon \left\{\begin{array}{l} M' \text{ on } A\ (r+1)\text{-järku miinor,} \\ M' \text{ ääristab miinorit } M, \\ M' \neq 0 \end{array}\right.$$

185. Tõestage, et ekvivalentsete vektorite süsteemide astakud on võrdsed. Kas kehtib ka vastupidine väide?

186. Tõestage, et kui vektorid $a_1, \dots, a_k$ avalduvad lineaarselt vektorite $b_1, \dots, b_l$ kaudu, siis esimese süsteemi astak ei ole suurem kui teise süsteemi astak.

187. Tõestage, et vektorsüsteemi elementaarteisendused ei muuta selle süsteemi lineaarkatet (seega ei muuda ka astakut).

188. Tõestage, et n-elemendilise vektorsüsteemi astak on r (kus $r < n$) parajasti siis, kui vektorsüsteemis leidub r vektorist koosnev lineaarselt sõltumatu alamsüsteem ning iga $r+1$ vektoriline alamsüsteem on lineaarselt sõltuv. Pange tähele, et n-elemendilise vektorsüsteemi astak on n parajasti siis, kui see vektorsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

189. Tõestage, et vektor b avaldub vektorite süsteemi $a_1, \dots, a_n$ lineaarkombinatsioonina siis ja ainult siis, kui selle vektorite süsteemi astak ei muutu vektori b lisamisel.

190. Leidke maatriksi astak:

a) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 35 & 104 & 55 & 61 \end{pmatrix}$.

191. Leidke maatriksi astak sõltuvalt parameetrite reaalarvulistest väärtustest:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & -1+2b & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & a+2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2 & -4 & 5 \\ a & a & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

192. Kuidas võib muutuda maatriksi astak, kui muuta selle maatriksi ühte elementi?

193. Kuidas võib muutuda maatriksi astak, kui muuta selle maatriksi a) ühe rea; b) k rea elemente?

194. Tõestage, et kahe maatriksi summa astak ei ole suurem kui nende maatriksite astakute summa.

195. Olgu $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Millised alljärgnevatest väidetest on õiged?

a) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\left(A^T\right)$;

b) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(cA)$, kus $c \in K$;

c) $\mathrm{rank}(A+B) \geqslant \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$;

d) juhul $m = n$ $\mathrm{rank}(AB) \leqslant \mathrm{rank}(B)$.

196. Leidke kõik t väärtused, mille korral vektor b avaldub vektorite a_1, a_2, a_3 lin-kombinatsioonina (vektor b ja vektorid a_1, a_2, a_3 on antud koordinaatidega mingi baasi suhtes):

a) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, -2, t)$;

b) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$, $b = (5, 9, t)$;

c) $a_1 = (3, 2, 5)$, $a_2 = (2, 4, 7)$, $a_3 = (5, 6, t)$, $b = (1, 3, 5)$;

d) $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$, $b = (t, 2, 5)$.

197. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}^4$ kaks erinevat baasi, mis mõlemad sisaldavad vektoreid $a_1 = (1,1,0,0)$ ja $a_2 = (0,0,1,1)$.

198. Leidke vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) vektorite süsteemi astak ja lin-katte mingi baas:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;

b) $z_1 = 1+2\mathrm{i}$, $z_2 = 2-3\mathrm{i}$, $z_3 = 4+\mathrm{i}$, $V = \mathbb{C}$;

c) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1,-1)$, $a_3 = (3,1,3,1)$, $a_4 = (2,0,2,0)$, $V = \mathbb{R}^4$.

199. Leidke vektorite süsteemi lineaarse katte baas ja mõõde, kui vektorid on antud koordinaatidega mingi baasi suhtes:

a) $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$;

b) $a_1 = (1,1,1,1,0)$, $a_2 = (1,1,-1,-1,-1)$, $a_3 = (2,2,0,0,-1)$, $a_4 = (1,1,5,5,2)$, $a_5 = (1,-1,-1,0,0)$;

c) $a_1 = (1,2,1,2)$, $a_2 = (2,1,2,1)$, $a_3 = (0,3,0,3)$, $a_4 = (1,1,1,1)$.

200. Leidke vektorruumi V vektorite süsteemi lineaarse katte baas ja mõõde:

a) $f_1 = x^6 + x^4$, $f_2 = x^6 + 3x^4 - x$, $f_3 = x^6 - 2x^4 + x$, $f_4 = x^6 - 4x^4 + 2x$, $V = \mathbb{R}_6[X]$;

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$;

c) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,0,1,1)$, $a_3 = (4,2,3,5)$, $a_4 = (0,2,1,3)$, $V = \mathbb{R}^4$.

201*. Olgu $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, kusjuures X olgu pööratav ja tema veeruvektorid olgu $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Olgu Y maatriks, mille veeruvektorid on $X_2, X_3, \ldots, X_n, 0$. Tähistame $A = YX^{-1}$ ja $B = X^{-1}Y$. Leidke rank A ja rank B.
Näpunäide: Leidke mingi maatriks J nii, et $Y = XJ$.

202*. Olgu A $m \times n$ maatriks ja B $n \times m$ maatriks, kusjuures $n < m$. Tõestage, et maatriks AB ei ole pööratav. Kas maatriks BA võib olla pööratav? (Andke vastus kõigi m ja n võimaluste jaoks.)

11. Lineaarvõrrandisüsteemid.

Olgu $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ja $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Paari (A, b) nimetatakse *lineaarvõrrandisüsteemiks*. Seda pannakse sageli kirja kujul $Ax = b$, kus $x \in \mathrm{Mat}_{n,1}(K)$ on tundmatute veerg.
A – süsteemi maatriks,
b – vabaliikmete veerg,
A' – süsteemi laiendatud maatriks.
$\alpha \in \mathrm{Mat}_{n,1}(K)$ on süsteemi $Ax = b$ *lahend* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A\alpha = b$.
Arvestades vektorruumide $\mathrm{Mat}_{n,1}(K)$ ja K^n isomorfsust, kirjutame sageli $\alpha \in \mathrm{Mat}_{n,1}(K)$ asemel $\alpha \in K^n$.

Süsteem $Ax = b$ on *vasturääkiv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ süsteemil $Ax = b$ puudub lahend.
Süsteem $Ax = b$ on *kooskõlaline* $\overset{\text{def}}{\iff}$ süsteemil $Ax = b$ leidub lahend.

Teoreem.
$$\left.\begin{array}{r} A' \text{ on } Ax = b \text{ laiend. maatriks,} \\ \tilde{A}' \text{ on } \tilde{A}x = \tilde{b} \text{ laiend. maatriks,} \\ \tilde{A}' \text{ on } A'\text{-st saadud ridade elem. teisenduste abil} \end{array}\right\} \implies \forall \alpha \in \mathrm{Mat}_{n,1}(K) \quad (A\alpha = b \Leftrightarrow \tilde{A}\alpha = \tilde{b}).$$

Gaussi meetod: ridade elementaarteisendustega (vajadusel ka veerge vahetades, see tähendab muutujate ümbernummerdamist) viiakse süsteemi laiendatud maatriks kujule, kus vasakul üleval on diagonaalmaatriks ning sellele järgnevad read on kõik sellised, kus tundmatute kordajad on nullid.
Teoreem (Kronecker–Capelli)**.** Süsteem $Ax = b$ on kooskõlaline $\iff$ rank $A =$ rank A'.
Süsteem $Ax = b$ on *Crameri peajuhul* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} m = n, \\ \det A \neq 0. \end{cases}$
Crameri peajuhul lineaarvõrrandisüsteeme saab lahendada *Crameri valemite* abil.
Süsteem $Ax = b$ on *homogeenne* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $b = 0$.
Lause. Olgu $m = n$ ja $b = 0$. Siis
$\det A \neq 0 \iff \forall \alpha \in K^n (A\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.
Teoreem. $\{\alpha \in K^n : A\alpha = 0\} =: V$ on alamruum vektorruumis K^n, kusjuures $\dim V + \operatorname{rank} A = n$.
Alamruumi V baasi nimetatakse süsteemi $Ax = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks.*
Teoreem. Olgu α_1 süsteemi $Ax = b$ lahend (*erilahend*). Siis
$\{\alpha \in K^n : A\alpha = b\} = \{\alpha_1 + \beta : A\beta = 0\}$.

203. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem Crameri valemite abil:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

204. Lahendage võrrandisüsteem, kasutades pöördmaatriksi leidmise võtet

a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

205. Kasutades Gaussi meetodit leidke lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja üks erilahend:

a) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

206. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem Gaussi meetodil:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2z_1 - (1+\mathrm{i})z_2 - 3\mathrm{i}z_3 = b_1 \\ -2z_1 + (1+\mathrm{i})z_2 + (1+3\mathrm{i})z_3 = b_2 \\ z_3 = b_3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$

207. Leidke kõik muutujate komplektid, mida võib valida vabadeks muutujateks:

a) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+\mathrm{i})x_1 + \mathrm{i}x_2 + 7x_3 = 7, \\ -2\mathrm{i}x_1 + (1-\mathrm{i})x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ $(K = \mathbb{C})$.

208. Milliste parameetrite reaalarvuliste väärtuste korral on lineaarvõrrandisüsteemil

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + a_4^2x_4 = 0 \\ a_1^3x_1 + a_2^3x_2 + a_3^3x_3 + a_4^3x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2+a)x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3+a)x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

nullist erinevaid lahendeid?

209. Uurige lineaarvõrrandisüsteemi kooskõlalisust ja leidke lahendite hulk:

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 6x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 6x_1 - x_3 - 2x_5 = 3 \\ 4x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$

210. Uurige süsteemi lahenduvust ja leidke üldlahend sõltuvalt parameetri väärtustest:

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + ax_4 = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (a+1)x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ ax_2 - ax_3 + \quad = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 = b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = a^2+3a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a^3+3a^2 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^4+3a^3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = -a \\ ax_1 + (a-1)x_2 + x_3 = 2a \\ (4a+3)x_1 + (2a-1)x_2 + (a+4)x_3 = 2a+3 \end{cases}$

211. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} \overline{3}x + y + \overline{2}z = \overline{1} \\ x + \overline{2}y + \overline{3}z = \overline{1} \\ \overline{4}x + \overline{3}y + \overline{2}z = \overline{1} \end{cases}$$

a) üle korpuse $\mathbb{Z}_5$; b) üle korpuse $\mathbb{Z}_7$.

212. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} \overline{2}x + y - z = \overline{1} \\ x + \overline{2}y + z = \overline{2} \\ x + y - z = \overline{-1} \end{cases}$$

üle korpuse $\mathbb{Z}_5$.

213. Leidke homogeense lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja lahendite fundamentaalsüsteem:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\mathrm{i}+1)x_1 + \mathrm{i}x_2 - x_3 + (2\mathrm{i}+3)x_4 = 0 \\ 2\mathrm{i}x_1 + (1-\mathrm{i})x_2 - (3\mathrm{i}+2)x_3 + 13\mathrm{i}x_4 = 0 \\ (1-3\mathrm{i})x_1 + (\mathrm{i}-4)x_2 + (7\mathrm{i}+1)x_3 + (11-23\mathrm{i})x_4 = 0 \\ 2\mathrm{i}x_1 + (3\mathrm{i}+1)x_2 + (1-2\mathrm{i})x_3 + (4\mathrm{i}-7)x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases}$;

214. Lahendage võrrandisüsteem korpuses $\mathbb{Z}_5$ ning avaldage lahend ühe erilahendi ja vastava homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi kaudu:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -3, \\ -2x + y - 3z = 1, \\ x - 3y - z = 2. \end{cases}$$

215. Kasutades Gaussi meetodit leidke lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja üks erilahend, ning avaldage lahend ühe erilahendi ja vastava homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi kaudu:

a) $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} -6x_1 + (\mathrm{i}+9)x_2 + (3-2\mathrm{i})x_3 + 2\mathrm{i}x_4 = 4-\mathrm{i}, \\ (6\mathrm{i}-6)x_1 + (10-8\mathrm{i})x_2 + (1-5\mathrm{i})x_3 + (2\mathrm{i}+2)x_4 = 3-5\mathrm{i}, \\ (24\mathrm{i}-6)x_1 + (13-35\mathrm{i})x_2 - (14\mathrm{i}+5)x_3 + (2\mathrm{i}+8)x_4 = -17\mathrm{i}. \end{cases}$$

216. Lahendage maatriksvõrrand X suhtes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

217. Tõestage, et kui reaalarvuliste kordajatega homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil on olemas nullist erinev kompleksarvuline lahend, siis on tal ka nullist erinev reaalarvuline lahend.

218. Leidke a) ühest võrrandist, b) kahest võrrandist, c) kolmest võrrandist koosnev homogeenne lineaarvõrrandisüsteem, millele vektorite süsteem

$$c_1 = (1, 4, -2, 2, -1), \quad c_2 = (3, 13, -1, 2, 1), \quad c_3 = (2, 7, -8, 4, -5)$$

on lahendite fundamentaalsüsteemiks.

219. Leidke reaalarvuliste kordajatega kuuppolünoom $f(x)$, kui

$$f(-2)=1,\ f(-1)=3,\ f(1)=13,\ f(2)=33.$$

220*. Olgu arvud a_{ij} mingid täisarvud, $i, j = 1, \ldots, n$. Tõestage, et võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & = & a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}x_n & = & a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n \end{cases}$$

lahendiks on ainult null-lahend.

Näpunäide: Süsteem on homogeenne. Näidake, et kui süsteemi determinant oleks 0, saaksime vastuolu.

221*. On antud täisarvuliste kordajatega lineaarvõrrandisüsteem oma laiendatud maatriksiga. Kirjutage programm, mis, kasutades ainult elementaarteisendusi ja tehteid täisarvudega teeb kindlaks, kas süsteemil on null, üks või rohkem kui üks lahend. Kui lahendeid on rohkem kui üks, siis programm väljastagu ühe võimaliku vabade tundmatute komplekti.

12. Jaguvus. Jäägiga jagamine. Polünoomid.

Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Olgu $a, b \in R$.

$a \mid b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists c \in R \quad : \quad ac = b.$

Olgu $d, m \in R$.

$d = \text{SÜT}(a, b) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} d \mid a, \quad d \mid b, \\ \forall c \in R \quad (c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid d). \end{cases}$

$m = \text{VÜK}(a, b) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a \mid m, \quad b \mid m, \\ \forall c \in R \quad (a \mid c \wedge b \mid c \Rightarrow m \mid c). \end{cases}$

NB! Suurim ühistegur ja vähim ühiskordne pole üldjuhul üheselt määratud! (Vt. ül. 224.d).) Seega tuleb võrdusi kujul $\text{SÜT}(a, b) = \text{SÜT}(x, y)$ mõista nii:

elementide a, b iga suurim ühistegur on ka elementide x, y suurim ühistegur, ja vastupidi.

a ja b on assotsieeritud $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \mid b \wedge b \mid a.$

Tähis: $a \sim b$.

Lause. Olgu $a, b \neq 0$. Siis $\quad a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists u, v \in R : \begin{cases} uv = 1, \\ a = bu. \end{cases}$

$a \in R \setminus U(R)$ on *taandumatu* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall b, c \in R \quad a = bc \Rightarrow b \in U(R) \vee c \in U(R).$

Ring $(R, +, \cdot)$ on *faktoriaalne* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \forall x \in R \setminus (U(R) \cup \{0\}) \quad \exists a_1, \ldots, a_m \in R \quad : \begin{cases} x = a_1 \cdot \ldots \cdot a_m, \\ \text{elemendid } a_1, \ldots, a_m \text{ on taandumatud,} \end{cases} \\ \forall \text{ taandumatute } a_1, \ldots, a_m, b_1 \ldots, b_n \in R \setminus U(R) \quad a_1 \cdot \ldots \cdot a_m = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n \quad \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \quad \exists \sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\} \quad : \begin{cases} \sigma \text{ on bijektsioon (seega ka } m = n), \\ \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad a_k \sim b_{\sigma(k)}. \end{cases} \end{cases}$$

Teoreem. Kehtigu

$$\forall x \in R \setminus (U(R) \cup \{0\}) \quad \exists a_1, \ldots, a_m \in R \quad : \quad \begin{cases} x = a_1 \cdot \ldots \cdot a_m, \\ \text{elemendid } a_1, \ldots, a_m \text{ on taandumatud.} \end{cases}$$

Siis

$$R \text{ on faktoriaalne} \iff \forall a, b, p \in R \quad \left. \begin{array}{r} p \text{ on taandumatu,} \\ p \mid ab \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b.$$

Olgu $(R, +, \cdot)$ kommutatiivne ring. Olgu $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$R[X] \overset{\text{def}}{=} \{(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) \colon \exists n \in \mathbb{N}_0 \colon \forall k \geqslant n \ a_k = 0\} \subseteq R^{\mathbb{N}_0}$.

Olgu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

$(a_n) + (b_n) \overset{\text{def}}{=} (a_n + b_n)$,

$(a_n) \cdot (b_n) \overset{\text{def}}{=} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$.

Lause. $(R[X], +, \cdot)$ on kommutatiivne ring, kusjuures nullelemendiks on (0), elemendi (a_n) vastandelemendiks on $(-a_n)$ ning ühikelemendiks on $(1, 0, 0, \ldots)$.

Ringi $(R[X], +, \cdot)$ nimetatakse *polünoomide ringiks üle* R.

$\deg(a_0, a_1, \ldots) := n$, kus $\begin{cases} a_n \neq 0, \\ \forall k \geqslant n \ a_k = 0. \end{cases}$ (polünoomi *aste*)

$\deg 0 := -\infty$.

Lause. $\{(a, 0, 0, \ldots) \colon a \in R\}$ on ringi $R[X]$ alamring, kusjuures ta on isomorfne ringiga R.

Tähistame $X := (0, 1, 0, 0, \ldots)$ ning iga $a \in R$ korral $a := (a, 0, 0, \ldots)$.

Lause. $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = a_n \cdot X^n + \ldots + a_1 \cdot X + a_0$.

Lause. $\forall f, g \in R[X] \quad \deg(fg) \leqslant \deg f + \deg g$.

R on nulliteguriteta $\implies \forall f, g \in R[X] \quad \deg(fg) = \deg f + \deg g$.

Lause. $\forall f, g \in R[X]$ g pealiikme kordaja on R-s pööratav $\Rightarrow \exists! q, r \in R[X] \colon \begin{cases} f = g \cdot q + r, \\ \deg r < \deg g \end{cases}$

222. Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Tõestage, et mistahes $a, b, c \in R$ korral

a) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$; b) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$; c) $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$.

223. Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Olgu $a, b \in R \setminus \{0\}$. Tõestage, et $a \sim b$ parajasti siis, kui leidub pööratav element $u \in R$ nii, et $a = bu$.

224. Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Tõestage, et mistahes $a, b, c, u \in R$ korral

a) $\text{SÜT}(a, b) = a \Leftrightarrow a \mid b$;
b) $\text{SÜT}(a + bc, b) = \text{SÜT}(a, b)$;
c) $a' \sim a \quad \Rightarrow \quad \text{SÜT}(a', b) = \text{SÜT}(a, b)$;
d) $\left. \begin{array}{r} d = \text{SÜT}(a, b), \\ c \sim d \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad c = \text{SÜT}(a, b)$.

225. Olgu R korpus. Olgu $a, b, u \in R \setminus \{0\}$. Tõestage, et $a \mid b$, $u = \text{SÜT}(a, b)$, $u = \text{VÜK}(a, b)$.

226. Leidke arvude 975 ja 645 suurim ühistegur ja vähim ühiskordne
a) ringis $\mathbb{Z}$, b) ringis $\mathbb{Q}$.

227. Tõestage, et ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] = \left\{a + b\sqrt{-5} \colon a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{C}$ ei ole faktoriaalne.

228. Kas ring $\mathbb{Z}_8[X]$ on faktoriaalne? Põhjendage!

229. Tehke kindlaks, kas elementidel a, b ringist $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ on olemas suurim ühistegur ja vähim ühiskordne, kui

a) $a = 3$, $b = 1+\sqrt{-5}$; b) $a = 6$, $b = 3+3\sqrt{-5}$; c) $a = 5$, $b = 1+\sqrt{-5}$.

230. Tõestage, et kui K on korpus, $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$ ja $f, g \in K[X]$, siis
$$\text{SÜT}(f, g) = \text{SÜT}(\alpha f, \beta g).$$

231. Ringis $\mathbb{R}[X]$ leidke jagatis q ja jääk r, mis tekib polünoomi f jagamisel polünoomiga g, kui

a) $f = X^4 - 4X^3 + 5X^2 + X - 1$, $g = X^2 - 2X - 3$;
b) $f = 5X^4 - X^2 + 6$, $g = X^2 + 3X + 2$;
c) $f = 2X^2 - 3X + 1$, $g = X^3 + 4$;
d) $f = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, $g = X^2 - 3X + 1$.

232. Ringides $\mathbb{Z}_3[X]$, $\mathbb{Z}_5[X]$ ja $\mathbb{Q}[X]$ leidke jagatis q ja jääk r, mis tekib polünoomi f jagamisel polünoomiga g, kui

a) $f = X^5 + X^2 - X - 1$, $g = X^3 - 2X + 1$;
b) $f = 2X^4 + X^2 + 2X$, $g = X^2 - 2$.

233*. Kirjutage programm, mis, kasutades ainult tehteid täisarvudega, jagab ringi $\mathbb{Z}[X]$ ühe polünoomi jäägiga teisega. (Jagaja pealiikme kordaja peab olema 1 või -1.)

234*. Olgu m ja n mittenegatiivsed täisarvud. Tõestage, et
$$n \mid m \quad \Leftrightarrow \quad 2^n - 1 \mid 2^m - 1.$$

13. Eukleidese ringid. Polünoomid.

R on *Eukleidese ring* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists \delta\colon R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\} \quad : \quad \begin{cases} \forall a, b \in R\setminus\{0\}\ \delta(ab) \geqslant \delta(a), \\ \forall a \in R\ \forall b \in R\setminus\{0\}\ \exists q, r \in R\colon \begin{cases} a = bq + r, \\ r = 0 \vee \delta(r) < \delta(b). \end{cases} \end{cases}$$

Lause. $\mathbb{Z}$ on Eukleidese ring, kui valida $\delta(x) = |x|$.
Teoreem. Olgu K korpus. Siis $K[X]$ on Eukleidese ring, kui valida $\delta(f) = \deg f$.
Teoreem. Eukleidese ringis saab suurima ühisteguri leida Eukleidese algoritmiga.
Teoreem. Eukleidese ring on faktoriaalne ring.

235. Milliste a, b ja c väärtuste korral jagub polünoom $X^4 + aX^2 + b$ polünoomiga $X^2 + cX + 1$ ringis $\mathbb{Q}[X]$?

236. Milliste a ja b väärtuste korral jagub polünoom $X^4 + a$ polünoomiga $X^2 + bX + 1$ ringis $\mathbb{Q}[X]$?

237. Kas polünoom $2X+1$ on pööratav a) ringis $\mathbb{Z}_4[X]$, b) ringis $\mathbb{Z}_5[X]$, c) ringis $\mathbb{Z}[X]$?

238. Leidke kõik ülimalt teise astme taandumatud polünoomid üle korpuse $\mathbb{Z}_3$.

239. Tooge näiteid polünoomidest, mille ühine tegur on $X+1$.

240. Kasutades Eukleidese algoritmi leidke polünoomide f ja g jaoks ringis $\mathbb{Q}[X]$ sellised polünoomid u ja v, et $\text{SÜT}(f,g) = u\cdot f + v\cdot g$, kui

a) $f = X^4+2X^3-X^2-4X-2$, $g = X^4+X^3-X^2-2X-2$;
b) $f = X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$, $g = X^4+2X^3+X+2$;
c) $f = 4X^4-2X^3-16X^2+5X+9$, $g = 2X^3-X^2-5X+4$;
d) $f = 3X^3-2X^2+X+2$, $g = X^2-X+1$;
e) $f = X^4-X^3-4X^2+4X+1$, $g = X^2-X-1$;
f) $f = X^5-5X^4-2X^3+12X^2-2X+12$, $g = X^3-5X^2-3X+17$.

241. Uurige Eukleidese algoritmi käitumist ringis R, kui igal sammul algoritmis osalevad suurused x asendada assotsieeritud suurustega x':

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1,\\
b' &= r_1' q_2 + r_2,\\
r_1'' &= r_2' q_3 + r_3,\\
&\dots\\
r_{k-2}'' &= r_{k-1}' q_k + r_k,\\
r_{k-1}'' &= r_k' q_{k+1}.
\end{aligned}$$

Kas algoritm üldse lõpetab töö? Kas r_k (või r_k') on $\text{SÜT}(a,b)$? Kas algoritmis tagurpidi liikudes saab leida u ja v? Kas need on samad, mis algoritmi klassikalises versioonis?

242. Olgu R Eukleidese ring ning $f, g, d \in R[X]$, kusjuures $\deg f = n$, $\deg g = m$ ja $\deg d = k$ ning $n > k$ ja $m > k$. Olgu $d = \text{SÜT}(f,g)$. Tõestage, et leiduvad polünoomid $u, v \in R[X]$ nii, et $\deg u \leqslant m-k-1$, $\deg v \leqslant n-k-1$ ja $u\cdot f + v\cdot g = d$.

243. Määramata kordajate meetodil leidke polünoomide f ja g jaoks ringis $\mathbb{Q}[X]$ sellised polünoomid u ja v, et $u\cdot f + v\cdot g = 1$, kui

a) $f = X^3$, $g = (1-x)^2$;
b) $f = X^4$, $g = X^3-3X^2+4$;
c) $f = X^3+3X+3$, $g = X^2-X-2$;
d) $f = X^4-4X^3+1$, $g = X^3-3X^2+1$.

244. Ringides $\mathbb{Z}_3[X]$, $\mathbb{Z}_5[X]$ ja $\mathbb{Q}[X]$ leidke polünoomide f ja g suurim ühistegur ja vähim ühiskordne, kui

a) $f = X^3+X^2+2X+2$, $g = X^2+X+1$;
b) $f = X^4+X^3-X^2+1$, $g = 2X^3-4X-2$;
c) $f = X^4-2X^2+2X-2$, $g = X^3-X^2+1$.

245*. Tõestage, et

a) *Gaussi täisarvude ring* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i}\colon\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ on Eukleidese ring;

b) ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ ei ole Eukleidese ring;

c) ring $\left\{\dfrac{a+b\sqrt{-3}}{2}\colon\ a, b \in \mathbb{Z} \text{ on sama paarsusega}\right\}$ on Eukleidese ring.

14. Polünoomide juured.

Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Olgu $f \in R[X]$, kus $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, ja $c \in R$.
$f(c) := a_n c^n + \ldots + a_1 c + a_0$.

Teoreem (Bezout)**.** $\forall q \in R[X]\ \forall r \in R[X]$ $\left.\begin{array}{r} f = q \cdot (X - c) + r, \\ \deg r < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow r = f(c)$.

c on f *juur* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(c) = 0$.
Lause. c on f juur $\iff$ $X - c \mid f$.
Olgu $p \in R[X]$ taandumatu polünoom, $k \in \mathbb{N}$.

p on f *k-kordne tegur* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} p^k \mid f, \\ p^{k+1} \nmid f. \end{cases}$

c on f k-kordne juur $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(X - c)$ on f k-kordne tegur.
Lause. Olgu f juurte koguarv (arvestades ka kordsusi) m. Siis $m \leqslant \deg f$.
Olgu K korpus, char $K = 0$. Tähistame vajadusel $n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ liidetavat}} \in K$, kus 1 on K ühikelement.

$f' := n a_n X^{n-1} + \ldots + 2a_2 X + a_1$.
Teoreem. Olgu $f \in K[X]$ ja olgu $p \in K[X]$ taandumatu.
p on f k-kordne tegur $\Longrightarrow$ p on f' $(k-1)$-kordne tegur.
Lause. Olgu $f \in K[X]$ ja $c \in K$.

c on f k-kordne juur $\iff$ $\begin{cases} f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0, \\ f^{(k)}(c) \neq 0. \end{cases}$

Teoreem (Viète'i valemid)**.** Olgu $f \in R[X]$, kus $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ (*taandatud* polünoom).

$$f \text{ juured on } c_1, \ldots, c_n \Longrightarrow \begin{cases} \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n &=& -a_{n-1}, \\ c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n &=& a_{n-2}, \\ \ldots && \\ c_1c_2 \cdot \ldots \cdot c_n &=& (-1)^n a_0. \end{array} \end{cases}$$

246. Leidke polünoomi $f \in \mathbb{Q}[X]$ kordajate summa, kui

a) $f = (2 - 5X + X^3)^{211}(3 - 7X + 9X^2 - 5X^3)^{135}$;

b) $f = (7 - 3X - 3X^5)^{100}(5 - X^2 - 5X^7)^{1000}$.

247. Leidke kolmanda astme polünoom, millel on ühekordne juur 2 ja kahekordne juur -1.

248. Leidke ringis $\mathbb{C}[X]$ jagatis q ja jääk r, mis tekib polünoomi f jagamisel polünoomiga g, kui

a) $f = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 8$, $g = X - 1$;

b) $f = 2X^5 - 5X^3 - 8X$, $g = X + 3$;
c) $f = 4X^3 + X^2$, $g = X + 1 + \mathrm{i}$;
d) $f = X^3 - X^2 - X$, $g = X - 1 + 2\mathrm{i}$.

249. Kasutades Horneri skeemi arvutage $f(c)$, kui
a) $f = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 10X + 16$, $c = 4$;
b) $f = 5X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 3X + 7$, $c = 3$;
c) $f = 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 5$, $c = -\frac{1}{2}$;
d) $f = 2X^5 + (1+2\mathrm{i})X^4 - (1+3\mathrm{i})X^2 + 7$, $c = -2 - \mathrm{i}$;
e) $f = 2X^5 + (1-2\mathrm{i})X^4 - (3+\mathrm{i})X^2 + 7$, $c = -1 + 2\mathrm{i}$.

250. Kasutades Horneri skeemi arendage polünoom f polünoomi $X - c$ astmete järgi, kui
a) $f = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 1$, $c = -1$;
b) $f = X^5$, $c = 1$;
c) $f = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 50X + 90$, $c = 2$;
d) $f = X^4 + 2\mathrm{i}X^3 - (1+\mathrm{i})X^2 - 3X + (7+\mathrm{i})$, $c = -\mathrm{i}$;
e) $f = X^4 + (3-8\mathrm{i})X^3 - (21+18\mathrm{i})X^2 - (33-20\mathrm{i})X + (7+18\mathrm{i})$, $c = -1 + 2\mathrm{i}$.

251. Kasutades Horneri skeemi leidke polünoomi f juure c kordsus, kui
a) $f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$, $c = 2$;
b) $f = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$, $c = -2$;
c) $f = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 6X + 9$, $c = 3$.

252. Polünoomi f jagamisel polünoomidega $X - 1$ ja $X - 2$ tekivad vastavalt jäägid -3 ja 4. Leidke jääk, mis tekib f jagamisel polünoomiga $(X-1)(X-2)$.

253. Leidke a, kui -1 on polünoomi $X^5 - aX^2 - aX + 1$ vähemalt kahekordne juur.

254. Milliste p, q ja r korral jagub polünoom f polünoomiga $(X-2)^3$ ringis $\mathbb{R}[X]$, kui

a) $f = X^3 + pX^2 + qX + r$
b) $f = X^4 + pX^3 + qX^2 + r$
c) $f = pX^4 + qX^2 + rX + 1$

255. Milliste a väärtuste korral omab polünoom f kordset juurt -2 ning milline on selle juure kordsus, kui

a) $f = X^3 + 3X^2 + aX - 4$
b) $f = X^4 + 4X^3 + aX^2 + 4X + 4$
c) $f = 2X^4 + 7X^3 + aX^2 - 44X - 40$

256. Tõestage, et polünoomil $f = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$ ei ole kordseid juuri.

257. Leidke a nii, et
a) polünoomi $3X^3 - 63X + a \in \mathbb{C}[X]$ üks juur oleks võrdne kahekordse teisega;

b) polünoomi $X^3 + 12X^2 + a \in \mathbb{C}[X]$ kahe juure summa oleks võrdne kolmanda juurega;
c) polünoomi $4X^3 - 80X + a \in \mathbb{C}[X]$ kahe juure korrutis oleks võrdne kolmanda juurega.

258. Leidke polünoomi $X^4 - 16X^3 + 86X^2 - 176X + 105 \in \mathbb{R}[X]$ kõik juured teades, et nad moodustavad aritmeetilise jada.

259*. Tõestage, et kui polünoomi $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^6 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ juured on kõik reaalsed, siis $a = b = c = d = 0$.
Näpunäide: Viète'i valemid.

260*. Olgu c_1 ja c_2 täisarvuliste kordajatega polünoomi $g = X^2 + aX + b$ juured ja f suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõestage, et $f(c_1) + f(c_2)$ on täisarv.

261*. Kirjutage programm, mis leiab täisarvuliste kordajatega polünoomi f ja täisarvu c järgi polünoomi f Taylori rea, s.t. esitab f polünoomina $X - c$ suhtes.

262*. Kas leidub polünoom $p \in \mathbb{Z}[X]$ nii, et $p(7) = 11$, $p(11) = 13$?

15. Polünoomide juured. Ratsionaalmurrud.

Teoreem (Lagrange'i interpolatsioonipolünoom)**.** Olgu $c_0, \ldots, c_n \in K$, kusjuures $\forall i, j\ i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j$. Olgu $b_0, \ldots, b_n \in K$. Siis

$$\exists! f \in K[X] \quad : \quad \begin{cases} \deg f \leqslant n, \\ \forall j \in \{0, \ldots, n\}\ f(c_j) = b_j. \end{cases}$$

Sealjuures $f = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j \cdot \dfrac{(X - c_0) \cdot \ldots \cdot (X - c_{j-1}) \cdot (X - c_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (X - c_n)}{(c_j - c_0) \cdot \ldots \cdot (c_j - c_{j-1}) \cdot (c_j - c_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (c_j - c_n)}$.

Lause. Olgu $f \in \mathbb{Q}[X]$, kus $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, kusjuures $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Olgu $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ polünoomi f juur, SÜT$(p, q) = 1$. Siis $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

Olgu K korpus.
$Q(K[X]) := \{(f, g) \colon f, g \in K[X],\ g \neq 0\}$ (*ratsionaalmurdude* hulk).
Olgu $(f, g), (f_1, g_1) \in Q(K[X])$.

$(f, g) = (f_1, g_1) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f g_1 = f_1 g$,

$(f, g) + (f_1, g_1) \overset{\text{def}}{=} (f g_1 + f_1 g, g g_1)$,

$(f, g) \cdot (f_1, g_1) \overset{\text{def}}{=} (f f_1, g g_1)$.

Lause. Tehted + ja $\cdot$ hulgas $Q(K[X])$ on korrektselt defineeritud. $(Q(K[X]), +, \cdot)$ on kommutatiivne korpus. Ring $K[X]$ on isomorfne alamringiga $\{(f, 1) \colon f \in K[X]\} \subseteq Q(K[X])$.

Edaspidi tähistame: $\dfrac{f}{g} := (f, g)$.

$\deg \dfrac{f}{g} \overset{\text{def}}{=} \deg f - \deg g$ (ratsionaalmurru *aste*, NB! def. korrektsus!)

$\dfrac{f}{g}$ on *lihtmurd* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \deg \dfrac{f}{g} < 0$

$\dfrac{f}{g}$ on *algmurd* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists p \in K[X] \colon \begin{cases} \deg f < \deg p, \\ p \text{ on taandumatu}, \\ g = p^n. \end{cases}$

Teoreem. $\forall \frac{f}{g} \in Q(K[X])\ \exists! q \in K[X]\ \exists! \frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_m}{g_m} \in Q(K[X]) : \begin{cases} \frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_m}{g_m} \text{ on algmurrud,} \\ \frac{f}{g} = q + \frac{f_1}{g_1} + \ldots + \frac{f_m}{g_m}. \end{cases}$

Ratsionaalmurru esitamisel polünoomi ja algmurdude summana on põhiraskus algmurdude lugejate määramisel. Selleks kasutatakse *määramata kordajate meetodit*: jäetakse lugejas olevad kordajad esialgu määramata ning seejärel viiakse kõik ühisele nimetajale (ehk korrutatakse algse ratsionaalmurru nimetajaga läbi). Nüüd võib lugejas asuva polünoomi kordajad leida kas polünoomide võrdlemise kaudu või polünoomi väärtustamise kaudu. Kui char $K = 0$, võib kasutada ka tuletise võtmist.

263. Leidke $\mathbb{C}[X]$ polünoomide kõik juured:

a) $X^3 - 7X^2 + 13X - 3$;
b) $X^4 + 3X^3 - 6X - 4$;
c) $X^4 - 3X^3 - X^2 + 9X - 6$;
d) $X^4 + X^3 - 15X^2 + 7X + 6$;
e) $X^4 - 3X^3 - 14X^2 + 48X - 32$;
f) $4X^3 - 12X^2 + 13X - 6$.

264. Kasutades Lagrange'i interpolatsioonivalemit konstrueerige polünoom järgmiste väärtuste tabelite põhjal:

a)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3

b)

x	1	i	−1	−i
$f(x)$	1	2	3	4

c)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	−1	−3	1

d)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	13	1	1	1	13

265. Leidke polünoom g, millel on samad taandumatud tegurid, kui polünoomil f, kuid kordsusega 1 (s.t. eraldage polünoomi f kordsed tegurid), ning lahutage polünoom f lineaartegurite korrutiseks üle $\mathbb{C}$, kui

a) $f = X^6 - 4X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 7X^2 - 4X + 1$;
b) $f = X^5 - 8X^4 + 25X^3 - 38X^2 + 28X - 8$.
c) $f = X^6 - 15X^5 + 72X^4 - 95X^3 - 72X^2 - 15X - 1$;
d) $f = X^6 - 15X^5 + 81X^4 - 185X^3 + 162X^2 - 60X + 8$.

266. Esitage ratsionaalmurrud hulgast $Q(\mathbb{R}[X])$ polünoomi ja algmurdude summana.

a) $\frac{2X+3}{(X-2)(X+5)}$;
b) $\frac{X^3+3X}{(X+1)(2X+1)}$;
c) $\frac{X^3+2}{X^2+X-2}$;
d) $\frac{(X+2)^2}{(X-1)^2X}$;
e) $\frac{X^3+1}{X^3-X^2}$;
f) $\frac{X^4+2}{X^2(X+1)^2}$;
g) $\frac{1}{X(X^2+1)}$;
h) $\frac{1}{(X+1)(X^2+1)}$;
i) $\frac{2}{X(X^2+2X+2)}$;
j) $\frac{X^3}{X^2+4X+8}$;
k) $\frac{1}{f}$, kus $\deg f = n$ ja polünoomil f on n erinevat reaalset juurt.

267. Esitage ratsionaalmurrud hulgast $Q(\mathbb{C}[X])$ polünoomi ja algmurdude summana.

a) $\dfrac{X^2}{X^4-1}$;

b) $\dfrac{1}{X^4+4}$;

c) $\dfrac{3+X}{(X-1)(X^2+1)}$;

d) $\dfrac{1}{X^3-1}$;

e) $\dfrac{2}{X(X^2+2X+2)}$;

f) $\dfrac{X^3}{X^2+4X+8}$;

g) $\dfrac{1}{X^n-1}$;

268*. Olgu p algarv. Esitage $\dfrac{1}{X^p-X} \in Q(\mathbb{Z}_p[X])$ algmurdude summana.
Näpunäide: Fermat' väike teoreem, Wilsoni teoreem.

269*. Esitage ratsionaalmurd $\dfrac{1}{(X^n-1)^2} \in Q(\mathbb{C}[X])$ polünoomi ja algmurdude summana.

16. Lineaarteisenduse maatriks. Sarnased maatriksid.

Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle ühe ja sama korpuse K. Olgu $\varphi\colon V_1 \to V_2$.

$$\varphi \text{ on } \textit{lineaarkujutus} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in V_1\ \varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2), \\ \forall x \in V_1\ \forall \lambda \in K\ \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x). \end{cases}$$

Tähis: $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ (kõigi lineaarkujutuste hulk $V_1 \to V_2$).
Kui $V_1 = V_2$, öeldakse lineaarkujutuse kohta *lineaarteisendus*. Hulga tähis: $\mathrm{Hom}(V, V) =: \mathrm{End}(V)$.
Lause. φ on lineaarkujutus $\iff$ $\forall x_1, x_2 \in V_1\ \forall \lambda \in K\ \varphi(x_1+\lambda x_2)=\varphi(x_1)+\lambda\varphi(x_2)$.
Lause. $\mathrm{End}(V)$ on ring, kui tehetena vaadelda punktiviisilist liitmist ja kompositsiooni. $\mathrm{End}(V)$ on vektorruum, kui tehetena vaadelda punktiviisilist liitmist ja skalaariga korrutamist.

Olgu $V_1 = V_2 = V$. Olgu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ vektorruumi V baas. Olgu $\varphi(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

$A^e_\varphi := \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ (*lineaarteisenduse f maatriks baasi e suhtes*)
Teoreem. Olgu e vektorruumi V baas. Olgu $\Phi\colon\ \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Mat}_n(K)$, kus iga $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ korral $\Phi(\varphi) = A^e_\varphi$. Siis Φ on ringide isomorfism. Samuti on Φ vektorruumide isomorfism.
Olgu $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

$$A \sim B \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists T \in \mathrm{Mat}_n(K)\colon \begin{cases} T \text{ on regulaarne}, \\ B = T^{-1}AT \end{cases} \qquad (\text{maatriksid } A \text{ ja } B \text{ on } \textit{sarnased}).$$

Teoreem. Olgu $\dim V = n$. Siis

$$A \sim B \iff \exists \varphi \in \mathrm{End}\, V\ \exists e, e' \subseteq V\colon \begin{cases} e \text{ ja } e' \text{ on } V \text{ baasid}, \\ A = A^e_\varphi, \\ B = A^{e'}_\varphi. \end{cases}$$

270. Olgu tasandil fikseeritud ühikristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tehke kindlaks, kas tasandi pööre nurga α võrra ümber koordinaatide alguspunkti O on tasandi vabavektorite vektorruumi $\mathbb{E}_2$ lineaarteisendus. Kui on, siis leidke selle teisenduse maatriks baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ suhtes.

271. Tehke kindlaks, millised alljärgnevatest teisendustest $\varphi\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$, kus $\mathbb{E}_3$ on ruumi vabavektorite vektorruum, on lineaarteisendused. Leidke lineaarteisenduste maatriksid ühikristbaasi $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ (parema käe kolmik) suhtes. (Kui pole teisiti öeldud, siis $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ruumi $\mathbb{E}_3$ fikseeritud vektorid.) Iga $\vec{x} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k} \in \mathbb{E}_3$ korral

a) $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$;
b) $\varphi(\vec{x}) = \vec{a}$;
c) $\varphi(\vec{x}) = 2\vec{x}$;
d) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{\imath}$;
e) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$;
f) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\, \vec{x}$;
g) $\varphi(\vec{x}) = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \vec{x}$;
h) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\, \vec{b}$;
i) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}$, kus $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$;
j) $\varphi(\vec{x}) = 2x_1\vec{\imath} - (x_1 + x_2)\vec{\jmath} - x_3\vec{k}$;
k) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k}$;
l) $\varphi(\vec{x}) = x_1\vec{\imath}$;
m) $\varphi(\vec{x}) = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}$.

Milline on teisenduste l) ja m) geomeetriline tähendus?

272. Tehke kindlaks, kas järgmised kujutused φ on vektorruumi $\mathbb{R}_n[X] = \{a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 \colon a_i \in \mathbb{R}\}$ lineaarteisendused ning leidke lineaarteisenduste maatriksid baasi $1, X, X^2, \ldots, X^n$ suhtes, kui iga $f \in \mathbb{R}_n[X]$ korral

a) $\big(\varphi\left(f\right)\big)(x) = f(-x)$;
b) $\big(\varphi\left(f\right)\big)(x) = f(x+1)$;
c) $\big(\varphi\left(f\right)\big)(x) = f(ax+b)$, kus $a \neq 0$ ja b on fikseeritud reaalarvud;
d) $\big(\varphi\left(f\right)\big)(x) = f(x+1) - f(x)$;
e) $\big(D\left(f\right)\big)(x) = f'(x)$, seda teisendust nimetame *diferentseerimisteisenduseks*;
f) $\big(\varphi\left(f\right)\big)(x) = xf(x)$;
g) $\big(\varphi\left(f\right)\big)(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

273. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ diferentseerimisteisenduse maatriks
a) baasi $X^n, \ldots, X^2, X, 1$ suhtes;
b) baasi $1, X-1, \dfrac{(X-1)^2}{2}, \ldots, \dfrac{(X-1)^n}{n!}$ suhtes.

274. Konstrueerige vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ kaks erinevat lineaarteisendust, mis alamruumil $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ langevad kokku diferentseerimisteisendusega.

275. Leidke vektorruumi $\mathbb{E}_3$ x_1x_3-koordinaattasandiga paralleelselt x_2-teljele projekteerimise teisenduse maatriks ristbaasi $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ suhtes.

276. Leidke vektorruumi $\{k \sin x + l \cos x \colon k, l \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ diferentseerimisteisenduse maatriks baasi $\sin x, \cos x$ suhtes.

277. Kas lineaarteisendus viib alati lin-sõltuva süsteemi lin-sõltuvaks süsteemiks?

278. Kas lineaarteisendus viib alati lin-sõltumatu süsteemi lin-sõltumatuks süsteemiks?

279. Olgu vektorite süsteemid $a_1, \ldots, a_m$ ja $b_1, \ldots, b_n$ ekvivalentsed. Kas iga lineaarteisenduse φ korral on ka süsteemid $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ ja $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ ekvivalentsed?

280. Olgu $\varphi : V_1 \to V_2$ lineaarkujutus ja L_1, L_2 vektorruumi V_1 alamruumid. Kas kehtivad võrdused a) $\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_1) + \varphi(L_2)$; b) $\varphi(L_1 \cap L_2) = \varphi(L_1) \cap \varphi(L_2)$?

281. Tehke kindlaks, millised vektorruumi $\mathbb{R}^3$ teisendused φ on lineaarteisendused, kui iga $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ korral

a) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;
b) $\varphi(x) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;
c) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$.

282. Vaatleme vektorruumis $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ baasi $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Olgu $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ja $B = \left(\begin{smallmatrix} e & f \\ g & h \end{smallmatrix}\right)$.
Leidke selle baasi suhtes järgmiste vektorruumi $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ lineaarteisenduste maatriksid:
a) transponeerimisteisendus, s.t. teisendus $X \longmapsto X^T$;
b) teisendus φ_A, mis on defineeritud võrdusega $\varphi_A(X) = AX$;
c) teisendus $\chi_{A,B}$, mis on defineeritud võrdusega $\chi_{A,B}(X) = AXB$;
d) teisendus $\kappa_{A,B}$, mis on defineeritud võrdusega $\kappa_{A,B}(X) = AX + XB$.

283. Vektorruumi $\mathbb{R}_2[X]$ lineaarteisenduse φ maatriks baasi $1, X, X^2$ suhtes on $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Leidke selle teisenduse maatriks baasi

a) $X - X^2, 1 + 2X + X^2, 1 + 3X + X^2$;
b) $3X^2 + 2X, 5X^2 + 3X + 1, 7X^2 + 5X + 3$;
c) $3X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 2, 2X^2 + X + 3$

suhtes.

284. Kui maatriksid A ja B on sarnased, siis leidub selline maatriks C, et $B = C^{-1}AC$. Kas see maatriks C on üheselt määratud?

285. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Tõestage, et hulk $\{C \in \mathrm{GL}_n(K) \colon A = C^{-1}AC\}$ on rühm maatriksite korrutamise suhtes.

286. Tõestage, et kui vähemalt üks maatrikseist A ja B on regulaarne, siis maatriksid AB ja BA on sarnased. Tooge näide kahest mitteregulaarsest maatriksist A ja B, mille korral AB ja BA ei ole sarnased.

287. Leidke kõik maatriksid, mis on sarnased ainult iseendaga.

288. Tõestage, et kui maatriksid $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on sarnased, siis on sarnased ka maatriksid a) A^2 ja B^2; b) A^k ja B^k, $k \in \mathbb{N}$; c) $f(A)$ ja $f(B)$, kus $f \in K[X]$.

289*. Vaatleme polünoomide vektorruumi $\mathbb{R}[X]$ (üle $\mathbb{R}$), kus liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud, nagu ikka, komponenthaaval. Olgu T lineaarteisendus vektorruumis $\mathbb{R}[X]$, kus iga $f \in \mathbb{R}[X]$ korral $Tf = f + f'$ (siin f' tähistab f tuletist). Tõestage, et T on pööratav.

17. Lineaarteisenduse tuum ja kujutis.

Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle ühe ja sama korpuse K. Olgu $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.
$\operatorname{Ker}\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in V_1 : \varphi(x) = 0\}$, $\quad \operatorname{Im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\varphi(x) \colon x \in V_1\}$.

Teoreem (teoreem tuumast ja kujutisest). Olgu V_1 lõplikumõõtmeline. Siis $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V_1$.

290. Tõestage, et lineaarkujutuse $\varphi\colon V_1 \to V_2$ korral $\operatorname{Ker} \varphi$ ja $\operatorname{Im} \varphi$ on alamruumid vektorruumides V_1 ja V_2.

291. Leidke lineaarkujutuse $\varphi\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ ($\vec{a} \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud vektor), tuum ja kujutis.

292. Leidke lineaarteisenduse $\varphi\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$, $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}$ ($\vec{a} \in \mathbb{E}_3 \setminus \{\vec{0}\}$ on fikseeritud vektor), tuum ja kujutis.

293. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ diferentseerimisteisenduse tuum ja kujutis.

294. Leidke lineaarteisenduse $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tuuma ja kujutise baas, kui iga $x = (x_1, x_2, x_3)$ korral

a) $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;
b) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

295. Leidke lin-teisenduse φ tuuma ja kujutise baas, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

296. Kas vektorruumi V_1 iga alamruum on mingi lineaarkujutuse $\varphi\colon V_1 \to V_2$ tuum?

297. Olgu φ vektorruumi V pööratav lineaarteisendus. Tõestage, et φ pöördteisendus on ka lineaarne.

298. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus. Tõestage, et $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ parajasti siis, kui φ on injektiivne. Tõestage, et kui V on lõplikumõõtmeline, siis $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ parajasti siis, kui φ on sürjektiivne.

299. Leidke lineaarteisenduse φ maatriksi üldkuju sellise baasi suhtes, mille k esimest vektorit moodustavad a) φ tuuma baasi; b) φ kujutise baasi.

300. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus, L vektorruumi V alamruum ja $L \cap \operatorname{Ker} \varphi = 0$. Tõestage, et φ viib L iga lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi lineaarselt sõltumatuks vektorite süsteemiks.

301. Olgu φ vektorruumi V pööratav lineaarteisendus. Tõestage, et φ viib lineaarselt sõltumatu süsteemi lineaarselt sõltumatuks süsteemiks.

302. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus ja L vektorruumi V alamruum. Tõestage, et

a) kujutis $\varphi(L)$ ja originaal $\varphi^{-1}(L)$ on vektorruumi V alamruumid;
b) kui φ on pööratav ja V on lõplikumõõtmeline, siis $\dim \varphi(L) = \dim \varphi^{-1}(L) = \dim L$.

303*. Olgu ruumi vabavektorite vektorruumis $\mathbb{E}_3$ fikseeritud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Olgu kujutus $\varphi\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ defineeritud seosega $\varphi\,(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b})$. Tõestage, et φ on lineaarkujutus, leidke φ maatriks ühikristbaasi $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ suhtes, leidke φ tuum ja kujutis.

304*. Olgu fikseeritud reaalarv $h \neq 0$. Vaatleme vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ vaheteisendust $\varphi_h\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, mis on antud võrdusega $\big(\varphi_h(f)\big)(x) = \dfrac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big)$. Leidke φ_h tuum ja kujutis.

305*. Olgu X, Y ja Z vektorruumid üle ühe ja sama korpuse. Olgu lineaarkujutus $\varphi\colon X \to Y$ üksühene ja lineaarkujutus $\psi\colon Y \to Z$ pealekujutus. Kehtigu $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Kirjeldatud olukorra kohta öeldakse, et ruumid X, Y ja Z moodustavad *lühikese täpse jada* ning tähistatakse $0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$.
Tõestage järgmine samaväärsus: leidub lineaarkujutus $U\colon Z \to Y$ omadusega $\psi \circ U = I_Z$ parajasti siis, kui leidub lineaarkujutus $V\colon Y \to X$ omadusega $V \circ \varphi = I_X$.

306*. Tähistame iga $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ korral

$$G_M := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda M \sim M\},$$

kus $\sim$ tähistab maatriksite sarnasust.

a) Leidke hulk G_M, kui
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}).$$

b) Kas leidub maatriks $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, mille korral G_M on lõplik hulk?

18. Lineaarteisenduse omaväärtused ja omavektorid.

Olgu V vektorruum üle K, olgu $\varphi \in \operatorname{End} V$.

$\lambda \in K$ on φ *omaväärtus* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists x \in V \setminus \{0\}\colon \varphi(x) = \lambda x$.

$x \in V \setminus \{0\}$ on φ *omavektor* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \lambda \in K\colon \varphi(x) = \lambda x$.

Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Maatriksi A *karakteristlik polünoom*: $\det(A - XE)$.

$\lambda \in K$ on A *karakteristlik juur* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\det(A - \lambda E) = 0$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} e, e' \text{ on } V \text{ baasid,} \\ p \text{ ja } p' \text{ on } A_\varphi^e \text{ ja } A_\varphi^{e'} \text{ kar. pol.-d} \end{array}\right\} \implies p = p'.$$

Olgu e vektorruumi V baas.

Lause. $\lambda \in K$ on φ omaväärtus $\iff$ λ on A^e_φ karakteristlik juur.
Olgu $\lambda \in K$ teisenduse φ omaväärtus.
λ *algebraline kordsus* on k $\overset{\text{def}}{\iff}$ λ on A^e_φ kar. pol. k-kordne juur.
λ *geomeetriline kordsus* on k $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\dim\{x \in V : \varphi(x) = \lambda x\} = k$.

307. Olgu maatriksil $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ n omaväärtust korpuses K. Tõestage, et maatriksi A omaväärtuste summa ja korrutis on vastavalt võrdsed A jälje ja determinandiga.

308. Tõestage, et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisendus on pööratav parajasti siis, kui 0 ei ole tema omaväärtus.

309. Tõestage, et lineaarteisenduse tuum koosneb omaväärtusele 0 vastavaist omavektoreist ja nullvektorist.

310. Tõestage, et lineaarteisenduse nullist erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid kuuluvad selle lineaarteisenduse kujutisse.

311. Tõestage, et lineaarteisendusel $\varphi - kI_V$, kus $k \in K$, on samad omavektorid kui vektorruumi V (üle K) lineaarteisendusel φ. Leidke seos nende lineaarteisenduste omaväärtuste vahel.

312. Olgu φ vektorruumi V (üle K) lineaarteisendus. Tõestage, et kui a on φ omavektor, mis vastab omaväärtusele λ, siis a on omavektor ka lineaarteisendustele

a) φ^2; b) φ^k, $k \in \mathbb{N}$; c) $f(\varphi)$, kus $f \in K[X]$.

Leidke vastavad omaväärtused. (Siinkohal mõtleme $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$, ning kui $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, siis $f(\varphi) = a_n \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ tegurit}} + \ldots + a_1\varphi + a_0I_V$.)

313. Tõestage, et kui φ on lõplikumõõtmelise vektorruumi pööratav lineaarteisendus, siis teisendustel φ ja φ^{-1} on samad omavektorid. Leidke seos nende teisenduste omaväärtuste vahel.

314. Tõestage, et kui λ^2 on vektorruumi V (üle K) lineaarteisenduse φ^2 omaväärtus, siis üks korpuse K elementidest λ ja $-\lambda$ on teisenduse φ omaväärtus. (Siinkohal mõtleme $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$.)

315. Leidke vektorruumi $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ lineaarteisenduse $X \mapsto X^T$ omaväärtused ja omavektorid.

316. Tõestage, et lineaarteisenduse omavektorid, mis vastavad paarikaupa erinevatele omaväärtustele, on lineaarselt sõltumatud.

317. Leidke vektorruumi V (üle korpuse $\mathbb{R}$) lineaarteisenduse φ omaväärtused ja omavektorid, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

318. Leidke vektorruumi V, üle korpuse $\mathbb{Z}_p$, lineaarteisenduse omaväärtused ja omavektorid, kui tema maatriks mingi baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p = 2, 3$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $p = 3, 5$.

319. Tõestage, et lineaarteisenduse maatriks mingi baasi suhtes on diagonaalmaatriks siis ja ainult siis, kui see baas koosneb selle lineaarteisenduse omavektoreist.

320. Olgu λ_0 lineaarteisenduse φ omaväärtus. Tõestage, et omaväärtusele λ_0 vastavate lineaarselt sõltumatute omavektorite arv (ehk λ_0 *geomeetriline kordsus*) ei ületa λ_0 kui φ karakteristliku polünoomi juure kordsust (ehk λ_0 *algebralist kordsust*).

321. Tehke kindlaks, millised vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) lineaarteisenduse maatriksid saab viia diagonaalkujule uuele baasile ülemineku teel. Leidke selline baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

322. Kas maatriksid

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on sarnased diagonaalmaatriksiga?

323*. Olgu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ reaalsete positiivsete elementidega maatriks. Tõestage, et maatriksil A leidub omavektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nii, et x ja y on positiivsed.

324*. Olgu antud lõpmatumõõtmeline kompleksete jadade vektorruum
$$V = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Nihketeisendus $S\colon V \to V$ on defineeritud seosega
$$S((a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_2, a_3, a_4, \ldots), \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in V.$$
Leidke teisenduse S omaväärtused ja igale omaväärtusele vastavad omavektorid.

19. Eukleidiline ruum.

Olgu E vektorruum üle $\mathbb{R}$. Olgu defineeritud kujutus $\gamma\colon E \times E \to \mathbb{R}$.

E on *eukleidiline ruum* $\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall x, y \in E \quad \gamma(x, y) = \gamma(y, x), \\ \forall x, y, z \in E \quad \gamma(x + y, z) = \gamma(x, z) + \gamma(y, z), \\ \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \gamma(\lambda x, y) = \lambda \cdot \gamma(x, y), \\ \forall x \in E \setminus \{0\} \quad \gamma(x, x) > 0. \end{cases}$

Kujutust γ nimetatakse *skalaarkorrutamiseks.* Elementide $x, y \in E$ skalaarkorrutist tähistatakse sageli $\langle x, y\rangle$, (x, y) või xy. Arvu $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ nimetatatakse elemendi x *pikkuseks* ehk *normiks* ning tähistatakse $|x|$ või $\|x\|$.

NB! Skalaarkorrutise tähist $\langle x, y\rangle$ ei tohi segi ajada lineaarkatte $\operatorname{span}(x, y)$ tähisega $\langle x, y\rangle$!

Lause. E on eukleidiline ruum $\implies \begin{cases} \forall x, y, z \in E \quad \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \\ \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle. \end{cases}$

Olgu E eukleidiline ruum.

Vektorid $x, y \in E$ on *ortogonaalsed* $\overset{\text{def}}{\iff} \langle x, y\rangle = 0.$
Tähis: $x \perp y$.

Vektorsüsteem $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq E$ on *ortonormeeritud* (ON) $\overset{\text{def}}{\iff}$
$\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \langle x_k, x_k\rangle = 1, \\ \forall k, l \in \{1, \ldots, n\} \quad k \neq l \Rightarrow \langle x_k, x_l\rangle = 0. \end{cases}$

Teoreem.
$\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq E$ on lin-sõltumatu $\implies$
$\implies \exists y_1, \ldots, y_n \in E \quad : \begin{cases} y_1, \ldots, y_n \text{ on ortonormeeritud}, \\ \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$

Süsteemi $x_1, \ldots, x_n$ põhjal ON süsteemi $y_1, \ldots, y_n$ leidmiseks saab kasutada *Grami–Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi*:

- kõigepealt valitakse $y_1 = x_1$;
- induktiivselt eeldades $\operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k) = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_k)$, valitakse y_{k+1} nii, et $y_{k+1} \perp y_i$ iga $i \in \{1, \ldots, k\}$ korral, kusjuures $\operatorname{span}(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_{k+1})$.
- Lõpuks normeeritakse vektorid, jagades nad läbi oma normiga.

Gram–Schmidti protsessi võib rakendada ka lineaarselt sõltuvale süsteemile. Siis nende vektorite kohal, mis astakut ei suurenda, annab protsess välja nullvektori. Jättes nullvektorid kõrvale, saadakse sellisel viisil algse süsteemi lineaarkatte ON baas.

Teoreem (Cauchy–Bunjakovski–Schwarz)**.** $\forall x, y \in E \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Olgu $x, y \in E \setminus \{0\}$.

$\angle(x, y) \overset{\text{def}}{=} \arccos \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$ (*vektorite x ja y vaheline nurk*).

325. Olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ vektorruumi $\mathbb{R}^2$ suvalised vektorid. Näidake, et sellel vektorruumil võib skalaarkorrutamise defineerida võrdusega

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$; b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Arvutage mõlemal juhul vektorite $x = (1, 1)$ ja $y = (-3, 2)$ skalaarkorrutis.

326. Defineerige ülimalt n-nda astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumil $\mathbb{R}_n[X]$ skalaarkorrutamine nii, et baas $1, X, \dfrac{X^2}{2!}, \ldots, \dfrac{X^n}{n!}$ oleks ortonormeeritud.

327. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi vektor on ortogonaalne vektoritega $a_1, \ldots, a_m$, siis on ta ortogonaalne ka kõigi lineaarkombinatsioonidega $k_1a_1 + \ldots + k_ma_m$.

328. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi nullist erinevad vektorid x ja y on ortogonaalsed, siis vektorsüsteem x, y on lin-sõltumatu.

329. Olgu E eukleidiline ruum ortonormeeritud baasiga $e_1, \ldots, e_n$. Tõestage, et iga $x \in E$ korral

$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle x, e_n\rangle e_n.$$

330. Tõestage, et lõigus $[-\pi, \pi]$ pidevate funktsioonide vektorruumis trigonomeetrilise süsteemi $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ suvalised kaks erinevat vektorit on ortogonaalsed skalaarkorrutamise $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ suhtes.

331. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi vektorite süsteem $a_1, \ldots, a_m$ on ortogonaalne, siis $\|a_1 + \ldots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \ldots + \|a_m\|^2$ (*üldistatud Pythagorase teoreem*).

332. Leidke kolmnurga ABC külgede pikkused ja sisenurgad eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^5$, kui külgede kohavektorid OA, OB, OC on

$$OA = (2, 4, 2, 4, 2), \quad OB = (6, 4, 4, 4, 6), \quad OC = (5, 7, 5, 7, 2).$$

333. Tõestage järgmised normi omadused:
$\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

334. Veenduge, et vektorid $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ on ortogonaalsed ning täiendage süsteem a_1, a_2 ortogonaalseks baasiks:

a) $a_1 = (1, -2, 2, -3)$, $a_2 = (2, -3, 2, 4)$; b) $a_1 = (1, 1, 1, 2)$, $a_2 = (1, 2, 3, -3)$.

335. Täiendage vektorite süsteem a_1, a_2 ortonormeeritud baasiks:

a) $a_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; b) $a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

336. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, leidke ortonormeeritud baas ülimalt teise astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumis $\mathbb{R}_2[X]$ võttes esialgseks baasiks $1, x, X^2$ ja kasutades skalaarkorrutamist, mis on defineeritud võrdusega

a) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$;

b) $\langle f, g\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, kui $f = a_2X^2 + a_1X + a_0$, $g = b_2X^2 + b_1X + b_0$.

337. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, konstrueerige vektorite $a_1, \dots, a_m$ lineaarse katte ortogonaalne baas:

a) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$;

b) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (5, 8, -2, -3)$, $a_3 = (3, 9, 3, 8)$;

c) $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (7, 4, 3, -3)$, $a_3 = (1, 1, -6, 0)$, $a_4 = (6, 7, 7, 8)$.

338. Olgu vektorruumil $\mathbb{R}^4$ skalaarkorrutamine defineeritud võrdusega

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + 2x_4y_4$$

mistahes $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ korral. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, leidke vektorruumi $\mathbb{R}^4$ ortonormeeritud baas lähtudes baasist

a) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$;

b) $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, -1)$, $a_4 = (1, 0, 0, 1)$.

339*. Otsustage, kas ruumil $\mathbb{R}^2$ leidub selline skalaarkorrutis, et $\langle (x, y), (x, y)\rangle = (|x| + |y|)^2$ iga $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ korral.
Näpunäide: Eukleidilise ruumi E skalaarkorrutis rahuldab rööpküliku võrdust: $2\langle u, u\rangle + 2\langle v, v\rangle = \langle u + v, u + v\rangle + \langle u - v, u - v\rangle$ iga $u, v \in E$ korral.

340*. Olgu $e = (a, b, c)$ ühikvektor eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$. Olgu T ruumi $\mathbb{R}^3$ lineaarteisendus, mis teostab vektori e suhtes 180-kraadise pöörde. See tähendab, kui O on koordinaatide alguspunkt, on vektori $x = \overrightarrow{OX}$ otspunkt X ja vektori $T(x) = \overrightarrow{OX'}$ otspunkt X' üksteise peegeldused sirge OE suhtes (kus $e = \overrightarrow{OE}$).
Leidke lineaarteisenduse R maatriks ühikristbaasi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ suhtes.

20. Ortogonaalne täiend. Ortogonaalsed teisendused.

Olgu E eukleidiline ruum ja L tema alamruum.
$L^\perp \overset{\text{def}}{=} \{x \in E\colon \forall y \in L\ x \perp y\}$ (alamruumi L *ortogonaalne täiend*).

Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.
A on *ortogonaalne* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A^T = A^{-1}$.
Olgu E eukleidiline ruum, olgu $\varphi \in \operatorname{End} E$.

φ on *ortogonaalteisendus* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x \in E\ \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle x, x\rangle$.

Lause. φ on ortogonaalteisendus $\iff$ $\forall x, y \in E\ \langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Teoreem. φ on ortogonaalteisendus $\implies$ iga ON baasi e korral A_φ^e on ortogonaalne.

$\left(\exists \text{ ON baas } e\colon A_\varphi^e \text{ on ortogonaalne}\right) \implies \varphi$ on ortogonaalteisendus.

341. Olgu L, L_1 ja L_2 eukleidilise ruumi E alamruumid. Tõestage, et

a) $L^\perp$ on E alamruum;
b) $(L^\perp)^\perp = L$;
c) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;
d) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;
e) $E^\perp = \{0\}$;
f) $\{0\}^\perp = E$.

342. Leidke ortogonaalse täiendi $L^\perp$ ortogonaalne baas, kui $L = \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3)$ ja

a) $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -2, 1)$;
b) $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (3, 7, -1, 2)$, $a_3 = (2, 4, -1, 0)$;
c) $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$

343. Olgu L eukleidilise ruumi E alamruum. Tõestage, et iga vektor $a \in E$ esitub üheselt summana $a = b + c$, kus $b \in L$ ja $c \in L^\perp$. Vektorit b nimetatakse vektori a *ortogonaalseks projektsiooniks* alamruumile L ja vektorit c nimetatakse vektori a *ortogonaalseks täiendiks* alamruumi L suhtes.

344. Leidke vektori a ortogonaalne projektsioon ja ortogonaalne täiend, kui

a) $a = (4, -1, -3, 4)$ ja L on vektorite $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$ lineaarne kate;
b) $a = (5, 2, -2, 2)$ ja L on vektorite $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$ lineaarne kate.

345. Veenduge, et tegu on ortogonaalse maatriksiga ja kirjutage välja pöördmaatriks:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

346. Leidke järgmiste maatriksite hulgast ortogonaalsed ja arvutage nende determinandid:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

347. Tõestage, et ortogonaalmaatriksi determinant on 1 või -1. Kas kehtib vastupidine väide?

348. Olgu antud maatriks $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nii, et $AA^T = E_n$. Tõestage, et A on ortogonaalmaatriks.

349. Olgu e ja e' ortonormeeritud baasid. Tõestage, et üleminekumaatriks $C^{e,e'}$ on ortogonaalmaatriks.

350. Tõestage, et ortogonaalmaatriksi pöördmaatriks on ka ortogonaalmaatriks.

351. Millisel tingimusel on diagonaalmaatriks ortogonaalne?

352*. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suvalised reaalarvud. Tõestage, et kehtib võrratus

$$n(n+1)\left(\frac{x_1^2}{n} + \frac{x_2^2}{n-1} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{2} + x_n^2\right) \geqslant 2\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2\,.$$

Näpunäide: Cauchy võrratus.

21. Ortogonaalsed ja sümmeetrilised teisendused.

Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

A on *sümmeetriline* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A = A^T$.

Olgu E eukleidiline ruum, olgu $\varphi \in \mathrm{End}\, E$.

φ on *sümmeetriline* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x, y \in E\ \langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Teoreem. φ on sümmeetriline $\implies$ iga ON baasi e korral A_φ^e on sümmeetriline.

$\left(\exists \text{ ON baas } e\colon\ A_\varphi^e \text{ on sümmeetriline}\right) \implies \varphi$ on sümmeetriline.

Teoreem.

$$\left.\begin{array}{r}\varphi \text{ on sümmeetriline,}\\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ on } f \text{ karakteristlik juur}\end{array}\right\} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teoreem. Olgu $\dim E = n$. Siis

$$\varphi \text{ on sümmeetriline} \iff \exists e\colon \begin{cases} e \text{ on } E \text{ ON baas,}\\ \text{kõik } e \text{ vektorid on } \varphi \text{ omavektorid.}\end{cases}$$

353. Tõestage, et eukleidilise ruumi ortogonaalsete teisenduste hulk on rühm teisenduste korrutamise suhtes.

354. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi kaks vektorit a ja b on sama pikkusega, siis leidub ortogonaalne teisendus φ, mis viib vektori a vektoriks b.

355. Tehke kindlaks, kas vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ lineaarteisendused

a) $\big(\varphi(f)\big)(x) = f(-x)$;

b) $\big(\varphi(f)\big)(x) = x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

on ortogonaalteisendused, kui skalaarkorrutamine on defineeritud valemiga

$$\langle f, g\rangle = a_n b_n + \ldots + a_1 b_1 + a_0 b_0,$$

kus $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ ja $g = b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_0$.

356. Tõestage, et

a) regulaarse sümmeetrilise maatriksi pöördmaatriks on sümmeetriline;
b) iga maatriksi B korral on maatriks $A = BB^T$ sümmeetriline;
c) sümm. maatriksite A ja B korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui $AB = BA$.

357. Maatriksit A nimetatakse *kaldsümmeetriliseks*, kui $A^T = -A$. Tõestage, et

a) regulaarse kaldsümmeetrilise maatriksi pöördmaatriks on kaldsümmeetriline;
b) kaldsümm. maatriksite A ja B korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui $AB = BA$;
c) kaldsümm. maatriksite A ja B korrutis on kaldsümmeetriline parajasti siis, kui $AB = -BA$.

358. Tõestage, et kahe sümmeetrilise teisenduse summa on sümmeetriline. Kas sama omadus kehtib ortogonaalteisenduste kohta?

359. Tõestage, et sümmeetriliste teisenduste reaalarvuliste kordajatega lineaarkombinatsioon on sümmeetriline.

360. Olgu φ **suvaline** lineaarteisendus eukleidilisel ruumil E. Olgu $e_1, \dots, e_n$ ruumi E ON baas. Milline on φ maatriks selle baasi suhtes?

361. Olgu φ ja ψ **suvalised** lineaarteisendused eukleidilisel ruumil E. Tõestage, et $\varphi = \psi$ parajasti siis, kui $\langle \varphi(x), y\rangle = \langle \psi(x), y\rangle$ iga $x, y \in E$ korral.

362. Tõestage, et kahe sümmeetrilise teisenduse φ ja ψ korrutis $\varphi\psi$ on sümmeetriline siis ja ainult siis, kui φ ja ψ kommuteeruvad.

363. Tõestage, et kui φ ja ψ on sümmeetrilised teisendused, siis $\varphi\psi + \psi\varphi$ on sümmeetriline teisendus.

364. Olgu φ sümmeetriline teisendus ning x ja y tema omavektorid, mis vastavad **erinevatele** omaväärtustele. Tõestage, et $x \perp y$.

365. Leidke lineaarteisenduse omavektoreist koosnev ortonormeeritud baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes, kui teisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

366*. Olgu ψ lõplikumõõtmelise eukleidilise ruumi E ortogonaalteisendus. Ruumi E alamruumi L nimetatakse ψ*-invariantseks*, kui $\psi(x) \in L$ iga $x \in L$ korral. Tõestage, et ψ-invariantse alamruumi L ortogonaalne täiend on ka ψ-invariantne.

Vastused ja lahendused

1. a) On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, leidub ühikelement, pööratavate elementide hulk on $\{1\}$.
b) On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
c) On algebraline tehe, ei ole kommutatiivne, ei ole assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
d) On algebraline tehe, kommutatiivne, ei ole assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
e) Olgu $a, b \in \mathbb{N}$. Me kirjutame $a \mid b$, kui leidub $k \in \mathbb{N}$ nii, et $ak = b$. (Analoogilise jaguvuse definitsiooni saab kirja panna ka olukorras, kus $\mathbb{N}$ asemel on $\mathbb{Z}$.)
Arv $c = \text{SÜT}(a, b)$ on defineeritud järgmiselt:
i) $c \mid a$, $c \mid b$;
ii) kui mingi d korral $d \mid a$ ja $d \mid b$, siis $d \mid c$.
Kahe arvu $a, b \in \mathbb{N}$ korral on $\text{SÜT}(a, b)$ alati olemas ja naturaalarv, selle leidmiseks saab näiteks kasutada Eukleidese algoritmi (õpikus lk 205) või avaldist astendajate kaudu (lk 204).
On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
f) Arv $c = \text{VÜK}(a, b)$ on defineeritud järgmiselt:
i) $a \mid c$, $b \mid c$;
ii) kui on naturaalarv d omadusega $a \mid d$, $b \mid d$, siis $c \mid d$.
Leidmiseks võib kasutada avaldist astendajate kaudu (lk 204).
On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, leidub ühikelement, pööratavate elementide hulk on $\{1\}$.
g) Pole algebraline tehe.
h) On algebraline tehe, ei ole kommutatiivne, on assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
2. a) On algebraline tehe, kommutatiivne, pole assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
b) Sama nagu a).
c) On algebraline tehe, ülejäänu sama nagu ül. 1.c).
d) On algebraline tehe, pole kommutatiivne, pole assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
e) On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
3. a) On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, leidub ühikelement, pööratavate elementide hulk on $\{\emptyset\}$.
b) On algebraline tehe, pole kommutatiivne, pole assotsiatiivne, ühikelementi ei leidu.
c) On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, leidub ühikelement, pööratavate elementide hulk on $\{X\}$.
d) On algebraline tehe, kommutatiivne, assotsiatiivne, leidub ühikelement, kõik elemendid on pööratavad.
4. Igatahes ei tohi tehe olla assotsiatiivne, vastasel korral oleks igal elemendil ülimalt üks pöördelement.
a) Olgu $A = \{e, a, b\}$. Anname ühe sobiva tehte järgmise tabeliga:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	?

Siin a pöördelemendid on a ja b ning tabelisse võib ? kohale kirjutada mida tahes (kasvõi näiteks e).
b) Lahendusidee on analoogiline punktiga a).

5. a) (i) on,
(ii) ei ole (pööratavate elementide hulk on $\{-1, 1\}$),
(iii) ei ole (pole kommutatiivne ega assotsiatiivne),
b) on,
c) ei ole (pole algebraline tehe),
d) on,
e) on,
f) on,
g) on,
h) kui X on vähemalt kolme-elemendiline, siis ei ole (pole kommutatiivne),
i) ei ole (pole kommutatiivne),
j) on,
k) on,
l) (i) ei ole (pole algebraline tehe),
(ii) ei ole (pole kommutatiivne),
m) ei ole (pole kommutatiivne).

9. a) mittekommutatiivne rühm,
b) Abeli rühm,
c) ei ole algebraline struktuur,
d) mittekommutatiivne rühm,
e) Abeli rühm.

10. Tähistame teisendused: samasusteisendus ε; pöörded 120° ja 240° võrra π_1 ja π_2; pöörded 90°, 180° ja 270° võrra π_3, π_4 ja π_5 ning peegeldused σ_1, σ_2, σ_3 (kolmnurga telgede sihis), σ_4, σ_5 (ristküliku telgede sihis), σ_6, σ_7 (rombi telgede sihis). Saame järgmised tabelid.

a)

$\circ$	ε	π_1	π_2	σ_1	σ_2	σ_3
ε	ε	π_1	π_2	σ_1	σ_2	σ_3
π_1	π_1	π_2	ε	σ_3	σ_1	σ_2
π_2	π_2	ε	π_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ε	π_1	π_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	π_2	ε	π_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	π_1	π_2	ε

b)

$\circ$	ε	π_3	π_4	π_5	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
ε	ε	π_3	π_4	π_5	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
π_3	π_3	π_4	π_5	ε	σ_6	σ_7	σ_5	σ_4
π_4	π_4	π_5	ε	π_3	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6
π_5	π_5	ε	π_3	π_4	σ_7	σ_6	σ_4	σ_5
σ_4	σ_4	σ_7	σ_5	σ_6	ε	π_4	π_5	π_3
σ_5	σ_5	σ_6	σ_4	σ_7	π_4	ε	π_3	π_5
σ_6	σ_6	σ_4	σ_7	σ_5	π_3	π_5	ε	π_4
σ_7	σ_7	σ_5	σ_6	σ_4	π_5	π_3	π_4	ε

c)

$\circ$	ε	π_4	σ_6	σ_7
ε	ε	π_4	σ_6	σ_7
π_4	π_4	ε	σ_7	σ_6
σ_6	σ_6	σ_7	ε	π_4
σ_7	σ_7	σ_6	π_4	ε

d)

$\circ$	ε	π_4	σ_4	σ_5
ε	ε	π_4	σ_4	σ_5
π_4	π_4	ε	σ_5	σ_4
σ_4	σ_4	σ_5	ε	π_4
σ_5	σ_5	σ_4	π_4	ε

11. Olgu G rühm. Kui mõnes reas oleks ühte elementi topelt, nt. $x*y=x*z$, siis kasutame ära elemendi x^{-1} leidumise. Kõik elemendid kindlasti esinevad, sest võrrandi $x*z=y$ lahendame x^{-1} abil. Vastupidine väide ei kehti. Vt. näiteks

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

Ühikelementi ei leidu.

12. Vahetu kontroll; ühikelement on $(1,0)$ ja elemendi (a,b) pöördelement on $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$.

13. Valige tingimuses $\forall a \in A\ aa=1$ elemendi a rolli x, y, xy, yx vmt.

14. a) kommutatiivne ring, ei ole korpus, pööratavate elementide hulk $U(\mathbb{Z})=\{-1,1\}$;

b) ei ole ring (puudub ühikelement);

c) korpused;

d) kommutatiivne ring, ei ole korpus, pööratavate elementide hulk $\{a+b\sqrt{2}\colon\ a^2-2b^2 \mid a,\ a^2-2b^2 \mid b\}$;

e) korpus;

f) ei ole ring (puudub ühikelement);

g) kommutatiivne ring, ei ole korpus, pööratavate elementide hulk $\{\frac{a}{b}\colon\ a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}, p\nmid a,\ p\nmid b\}$;

h) mittekommutatiivne ring, ei ole korpus, $U(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q}))=\{A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})\colon\ \det A\neq 0\}$;

i) juhul $m=1$ vt. ül. a), juhul $m>1$ ei ole ring (puudub ühikelement);

j) korpus;

k) ei ole ring (distributiivsus ei kehti).

17. a) kommutatiivne ring, ei ole korpus, pööratavate elementide hulk $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2 \mid a,\ a^2-3b^2 \mid b\right\}$, nullitegurid puuduvad;

b) korpus;

c) ei ole ring (puudub ühikelement), nullitegurid puuduvad;

d) kommutatiivne ring, ei ole korpus, pööratavate elementide hulk $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : (a,b)\in Z\right\}$, kus $Z = \{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\colon\ a\neq 0,\ a^2-b^2 \mid a,\ a^2-b^2 \mid b\}\cup\{(0,1),(0,-1)\}$, kõik nullitegurid on kujul $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$, kus $a\neq 0$;

e) kommutatiivne ring, ei ole korpus, pööratavate elementide hulk $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : |a|=1\right\}$, kõik nullitegurid on kujul $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, kus $|b|+|c|>0$;

f) korpus;

g) korpus.

18. Ühikelemendi olemasolu tähendab, et H on pööratav.

19. a)–d) pööratavuse tingimus on $f(x) \neq 0\ \forall x \in [-1, 1]$, leidub nullitegureid.

20. Vastavalt jäägiga jagamise lausele on jääk jagamisel naturaalarvuga n üheselt määratud ja hulgast $\{0, \ldots, n-1\}$. Olgu $a = q_1 n + r_1$ ja $b = q_2 n + r_2$. Kehtigu $a \equiv b \pmod n$, siis $n \mid a-b = n(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$, millest $n \mid r_1 - r_2$, järelikult $r_1 = r_2$. Vastupidi, kui $r_1 = r_2$, siis $a - b = n(q_1 - q_2)$ jagub n-ga.

Kongruentsuse seose refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiivsuse kontroll on vahetu.

Tuleb veenduda, et jäägiklasside liitmine ja korrutamine on korrektselt defineeritud, see tähendab, ei sõltu esindajate valikust. Olgu $\overline{a} = \overline{c}$ ja $\overline{b} = \overline{d}$. Näitame, et $\overline{a+b} = \overline{c+d}$ ja $\overline{a \cdot b} = \overline{c \cdot d}$. Selleks paneme tähele, et $a \in \overline{a} = \overline{c}$, mistõttu $n \mid c - a$ ja $n \mid a - c$, analoogiliselt $n \mid b - d$ ja $n \mid d - b$. Nüüd $x \in \overline{a+b} \Leftrightarrow n \mid a+b-x \Leftrightarrow n \mid a+b+(c-a)+(d-b) = c+d-x \Leftrightarrow x \in \overline{c+d}$. Samuti $x \in \overline{a \cdot b} \Leftrightarrow n \mid ab - x \Leftrightarrow n \mid ab + b(c-a) + c(d-b) - x = cd - x \Leftrightarrow x \in \overline{c \cdot d}$.

Edasine ringi aksioomide kontroll on juba vahetu.

21.

$(\mathbb{Z}_5, +)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$(\mathbb{Z}_5, \cdot)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$(\mathbb{Z}_6, +)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$(\mathbb{Z}_6, \cdot)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Ring $\mathbb{Z}_5$ on korpus. Ring $\mathbb{Z}_6$ pole korpus.

22. a) Olgu n kordarv, siis leiduvad a ja b, kus $1 < a, b < n$, nii, et $n = ab$. Nüüd $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{n} = \overline{0}$ ning oleme leidnud nulliteguri $\overline{a}$.

b) Olgu $\overline{a}$ pööratav, see tähendab, leidub $\overline{b}$ nii, et $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$. See tähendab, et $\overline{a \cdot b} = \overline{1}$ ehk et leidub $k \in \mathbb{Z}$ nii, et $ab - 1 = kn$. Ilmselt $1 \mid a$ ja $1 \mid n$. Kehtigu $d \mid a$ ja $d \mid n$, siis $d \mid ab - kn = 1$. Olemegi näidanud, et $d \mid 1$, mis annab, et $1 = \text{SÜT}(a, n)$.

Teiselt poolt, kehtigu $\text{SÜT}(a, n) = 1$. Siis Eukleidese algoritmi põhjal leiduvad $u, v \in \mathbb{Z}$ selliselt, et $1 = au + nv$. Seega $\overline{1} = \overline{a} \cdot \overline{u} + \overline{n} \cdot \overline{v} = \overline{a} \cdot \overline{u} + \overline{0} \cdot \overline{v} = \overline{a} \cdot \overline{u}$. Niisiis on $\overline{a}$ pöördelemendiks $\overline{u}$.

c) Olgu $\mathbb{Z}_n$ korpus. Siis on tema kõik nullist erinevad elemendid pööratavad, mis osa 2) põhjal tähendab, et $\text{SÜT}(a, n) = 1$ iga $a = 1, 2, \ldots, n-1$ korral. Vaja on näidata, et n on algarv. Oletame väitevastaselt, et mingi k hulgast $\{2, \ldots, n-1\}$ on arvu n jagaja. Siis $k \mid \text{SÜT}(k, n)$, sest $k \mid k$, $k \mid n$. Kuna $\text{SÜT}(k, n) = 1$, siis $k \mid 1$, mis on vastuolus nõudega, et $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Saadud vastuolu näitab, et n on algarv.

Teiselt poolt, olgu n algarv. Olgu $a \in \{2, \ldots, n-1\}$. Ilmselt $1 \mid a$ ja $1 \mid n$. Olgu ka $d \mid a$ ja $d \mid n$. Kuna $d \mid n$, siis $d = 1$ või $d = n$. Viimane juhtum on võimatu, sest $d \mid a$. Seega $d = 1$ ja järelikult $d \mid 1$. Oleme saanud, et $\text{SÜT}(a, n) = 1$, mis tähendab, et $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ on pööratav. Järelikult $\mathbb{Z}_n$ kõik nullist erinevad elemendid on pööratavad, mis tähendab, et $\mathbb{Z}_n$ on korpus.

23. Ülesande 22b) osa põhjal $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$, $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ ja $U(\mathbb{Z}_7) = \mathbb{Z}_7 \setminus \{\overline{0}\}$ (kuna osa 22c) ütleb, et $\mathbb{Z}_7$ on korpus).

24.

$+$	O	E	S	T
O	O	E	S	T
E	E	O	T	S
S	S	T	O	E
T	T	S	E	O

$\cdot$	O	E	S	T
O	O	O	O	O
E	O	E	S	T
S	O	S	T	E
T	O	T	E	S

25. Ühikelement on X.
29. a) $(x, y) = (0, -1)$; b) $(x, y) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$.
30. a) $-17-7\mathrm{i}$; b) $(2+\sqrt{6})+(\sqrt{3}-2\sqrt{2})\mathrm{i}$; c) $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$; d) $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$; e) $\frac{4}{5}-\frac{8}{5}\mathrm{i}$; f) $\frac{9}{17}-\frac{2}{17}\mathrm{i}$.
31. *Lahendus 1.* Kontrollime, et $(2+\mathrm{i})(17-9\mathrm{i}) = (3-\mathrm{i})(13+4\mathrm{i})$.
Lahendus 2. Veendume, et $\frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2} = \frac{13+4\mathrm{i}}{17-9\mathrm{i}}$.
32. jah.
33. juhul $|a| = |b| \neq 0$.
34. a) 5; b) $-2\mathrm{i}$; c) $2-3\mathrm{i}$.
35. Kasutades tähiseid $z = a+b\mathrm{i}$, $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\overline{z} = a-b\mathrm{i}$, saab vahetult kontrollida kõigi võrduste kehtivust. Võrduste f)–h) jaoks on mugavam kasutada trigonomeetrilist kuju.
36. a) i; b) $\begin{cases} 1, & \text{kui } n \bmod 4 = 0, \\ \mathrm{i}, & \text{kui } n \bmod 4 = 1, \\ -1, & \text{kui } n \bmod 4 = 2, \\ -\mathrm{i}, & \text{kui } n \bmod 4 = 3; \end{cases}$ c) 1; d) $\begin{cases} 0, & \text{kui } n \bmod 4 = 0, \\ \mathrm{i}, & \text{kui } n \bmod 4 = 1, \\ \mathrm{i}-1, & \text{kui } n \bmod 4 = 2, \\ -1, & \text{kui } n \bmod 4 = 3; \end{cases}$ e) $-\mathrm{i}$.
37. a) $\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$; b) $\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}$; c) $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; d) $2\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; e) $5\cdot\left(\cos\left(-\arctan\frac{3}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\arctan\frac{3}{4}\right)\right)$; f) $\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$; g) $\cos\frac{6\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{7}$; h) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; i) $2\cdot(\cos 350^\circ+\mathrm{i}\sin 350^\circ)$; j) $4\cdot(\cos 195^\circ+\mathrm{i}\sin 195^\circ)$.
39. h) rõngas kahe ringjoone vahel, ringjoonte keskpunkt on $1-2\mathrm{i}$ ja raadiused 1 ning 3; j) fookustega $-\mathrm{i}$ ja i ellipsi sisepiirkond; k) kõik, mis jääb väljapoole ringi keskpunktiga 1 ja raadiusega 1; l) vt. hüperbool fookustega 2 ja -2, nõutav punktihulk jääb parempoolsest harust vasakule; m) punktid, mis on 1-le lähemal kui -1-le.
41. vahetu kontroll.
42. a) $z_2 = \lambda z_1$, kus $\lambda \geqslant 0$, või vastupidi; b) $z_2 = \lambda z_1$, kus $\lambda \leqslant 0$, või vastupidi.
44. a) $\operatorname{Re} z > 0$; b) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$; c) $\operatorname{Im} z < 1$; d) $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$.
45. a) $12(\cos 120^\circ+\mathrm{i}\sin 120^\circ)$; b) -12; c) 35; d) $2^{12}(1+\mathrm{i})$; e) $2^9\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$; f) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{6}\right)$; g) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
46. $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$.
47. a) i; b) $-\mathrm{i}$; c) $\frac{5}{3}(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)$; d) $\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}\right)$.
48. a) $\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}\right)$, $\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}\right)$; b) $\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}\right)$; c) $\exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}\right)$; d) $\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{17\pi}{12}\mathrm{i}\right)$; e) $\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\sqrt{2}\exp\left(\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}\right)$ $\sqrt{2}\exp\left(\frac{19\pi}{12}\mathrm{i}\right)$; f) $\exp\left(\frac{\pi}{6}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{9\pi}{6}\mathrm{i}\right)$; g) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\exp\left(\frac{\pi}{36}\mathrm{i}\right)$, $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\exp\left(\frac{25\pi}{36}\mathrm{i}\right)$, $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\exp\left(\frac{49\pi}{36}\mathrm{i}\right)$; h) $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\exp\left(-\frac{11\pi}{48}\mathrm{i}\right)$, $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\exp\left(\frac{13\pi}{48}\mathrm{i}\right)$, $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\exp\left(\frac{37\pi}{48}\mathrm{i}\right)$, $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\exp\left(\frac{61\pi}{48}\mathrm{i}\right)$.
50. a) -1; b) $\exp\left(\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}\right)$; c) $\exp\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}\right)$; d) $\exp\left(\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{6\pi}{5}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}\right)$; e) $\exp\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}\right)$; f) $\exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}\right)$; g) $\exp\left(\frac{\pi}{6}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}\right)$,

$\exp\left(\frac{11\pi}{6}\mathrm{i}\right)$; h) $\exp\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{7\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{9\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{11\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{13\pi}{8}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{15\pi}{8}\mathrm{i}\right)$; i) $\exp\left(\frac{\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{13\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{17\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{19\pi}{12}\mathrm{i}\right)$, $\exp\left(\frac{23\pi}{12}\mathrm{i}\right)$.

51. a) Olgu $\alpha^n = 1$, $\beta^m = 1$, siis $(\alpha\beta)^{nm} = 1$.

b) Olgu SÜT$(n, m) = 1$ ja $\alpha^{nm} = 1$, siis $1 = un + vm$ mingite täisarvude u ja v korral, tähistame $\beta = \alpha^{un}$ ja $\gamma = \alpha^{vm}$, siis $\beta^m = 1$ ja $\gamma^n = 1$ ning $\beta\gamma = \alpha$.

c) Olgu SÜT$(n, m) = 1$ ning olgu $\alpha = \exp\left(\frac{k}{n}2\pi\mathrm{i}\right)$ n-nda astme algjuur (st. SÜT$(k, n) = 1$) ja $\beta = \exp\left(\frac{l}{m}2\pi\mathrm{i}\right)$ m-nda astme algjuur (st. SÜT$(l, m) = 1$). Siis $\alpha\beta = \exp\left(\frac{km+ln}{nm}2\pi\mathrm{i}\right)$, kusjuures SÜT$(km + ln, nm) = 1$. Tõepoolest, olgu selline algarv p, et $p \mid km + ln$ ja $p \mid mn$. Vaatame juhtu, kus $p \mid m$, siis $p \mid ln$. Et SÜT$(l, m) = 1$, siis $p \mid n$, mis on vastuolus võrdusega SÜT$(m, n) = 1$. Juhtu $p \mid n$ vaadeldakse analoogiliselt.

Olgu nüüd $\alpha = \exp\left(\frac{k}{n}2\pi\mathrm{i}\right)$ n-nda astme ühejuur ja $\beta = \exp\left(\frac{l}{m}2\pi\mathrm{i}\right)$ m-nda astme ühejuur ning oletame, et $\alpha\beta = \exp\left(\frac{km+ln}{nm}2\pi\mathrm{i}\right)$ on selline, et SÜT$(km+ln, nm) = 1$. Näitame, et α ja β on vastavalt n-nda ja m-nda astme algjuured. Oletame, et α ei ole n-nda astme algjuur, see tähendab, leidub algarv p nii, et $p \mid k$ ja $p \mid n$. Nüüd $p \mid km + ln$ ja $p \mid nm$, mis on vastuolus võrdusega SÜT$(km + ln, nm) = 1$. Analoogiliselt tuleneb vastuolu sellest, et β ei ole m-nda astme algjuur.

52. $\begin{cases} 0, & \text{kui } z \neq 1, \\ n, & \text{kui } z = 1. \end{cases}$

53. 0.

54. $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$, $(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi - \mathrm{i}\sin n\varphi$, seega $\cos n\varphi = \frac{(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n+(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)^n}{2}$ ja $\sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n-(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)^n}{2\mathrm{i}}$.

55. $(1+1)^n$, $(1+i)^n$.

56. a) $z = 4 - 3\mathrm{i}$; b) $z \in \left\{\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{1+8k}{32}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+8k}{32}\pi\right) : k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\right\}$; c) $z \in \{0, \pm 1, \pm\mathrm{i}\}$; d) kui $n = 3$, siis $z \in \left\{r\left(\cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}\right) : r \geqslant 0, k \in \{0, 1, 2, 3\}\right\}$; muul juhul $z = 0$ või $z \in \left\{\cos\frac{2k\pi}{n+1} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; e) $z = 2 \pm \mathrm{i}$; f) $z = 1 \pm \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$; g) $z = 1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}$; h) $z \in \{1 - \mathrm{i}, 2 + 3\mathrm{i}\}$; i) $z \in \{\pm 1, \pm\mathrm{i}\}$; j) $z \in \left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{1+8k}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+8k}{8}\pi\right) : k \in \{0, 1\}\right\}$; k) $z \in \left\{\cos\frac{1+4k}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+4k}{4}\pi : k \in \{0, 1\}\right\}$; l) $z \in \left\{\cos\frac{1+8k}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+8k}{8}\pi : k \in \{0, 1\}\right\}$; m) $z \in \left\{2\left(\cos\frac{8+6k}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{8+6k}{6}\pi\right) : k \in \{0, 1\}\right\}$; n) $z \in \left\{\cos\frac{9+4k}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{9+4k}{6}\pi : k \in \{0, 1, 2\}\right\}$; o) $z \in \left\{3\left(\cos\frac{1+2k}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+2k}{3}\pi\right) : k \in \{0, 1, 2\}\right\}$; p) $z \in \left\{\cos\frac{1+4k}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+4k}{8}\pi : k \in \{0, 1, 2, 3\}\right\}$; q) $z \in \left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{1+3k}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+3k}{6}\pi\right) : k \in \{0, 1, 2, 3\}\right\}$; r) $z \in \left\{\cos\frac{1+4k}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+4k}{8}\pi : k \in \{0, 1, 2, 3\}\right\} \cup \left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{1+4k}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+4k}{6}\pi\right) : k \in \{0, 1, 2\}\right\}$; s) $z \in \left\{\cos\frac{1+2k}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+2k}{3}\pi : k \in \{0, 1, 2\}\right\} \cup \left\{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9+4k}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{9+4k}{6}\pi\right) : k \in \{0, 1, 2\}\right\}$.

57. ei. (Viète'i valemid.)

62. alamrühmoidid on $\{a\}$ ja $\{b, c\}$.

63. a) skalaarmaatriksid, $\mathbb{C}$; b) nullist erinevad skalaarmaatriksid, maatriksid determinandiga 1.

64. Kui $n = pq$, kus $p, q \in \mathbb{N}$, siis hulk $\{\overline{0}, \overline{q}, \overline{2q}, \ldots, \overline{(p-1)q}\}$ on $\mathbb{Z}_n$ alamrühm. Kõik $\mathbb{Z}_n$ alamrühmad on sellisel kujul: olgu $\mathbb{Z}_n$ mingi alamrühm A, siis $\overline{0} \in A$ ja A lõplikkuse tõttu leidub $q := \min\{u \in \mathbb{N} : \overline{u} \in A\}$. Sealjuures $q \mid n$, vastasel korral jagaksime n jäägiga q-ga ja tekiks $n = aq + r$, kus $r \in \{1, \ldots, q-1\}$, mistõttu $\overline{0} = a\overline{q} + \overline{r}$, järelikult $\overline{r} \in A$, vastuolu q minimaalsusega.

Ilmselt $\overline{q}, \overline{2q}, \ldots, \overline{(n-1)q} \in A$. Kui oleks mingi $\overline{b} \in A$ omadusega $kq < b < (k+1)q$, siis ka $\overline{b - kq} = \overline{b} - k\overline{q} \in A$, kusjuures $0 < b - kq < q$, vastuolu q minimaalsusega. Niisiis $A = \{\overline{0}, \overline{q}, \overline{2q}, \ldots, \overline{(p-1)q}\}$.

65. vahetu kontroll.
66. Kuna alamrühm H on mittetühi, siis mingi $x \in H$, mistõttu $1 = x \cdot x^{-1} \in H$.
67. a) jah; b) jah.
68. vahetu kontroll.
69. $\{a + b\sqrt{5}\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.
70. Kuna iga alamring peab sisaldama $\overline{1}$, on ainus alamring $\mathbb{Z}_{12}$.
71. jah, näiteks $K \subseteq \mathrm{Mat}_n(K)$, $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, samuti $K \subseteq K[X]$ (polünoomide ring), kus K on korpus.
72. a) alamring $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} := \{a + b\sqrt{2}\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$, alamkorpus $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$;
b) alamring $\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$, alamkorpus $\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q}$;
c) alamring $\mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z} + \sqrt[3]{4}\mathbb{Z}$, alamkorpus $\mathbb{Q} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Q} + \sqrt[3]{4}\mathbb{Q}$.
73. a) alamring $\mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z} := \{a + b\mathrm{i}\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$, alamkorpus $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$;
b) alamring $\mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}$, alamkorpus $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$;
c) alamring $\mathbb{Z} + 2\mathrm{i}\mathbb{Z}$, alamkorpus $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$.
(Kui loobuda ühikelemendi olemasolu nõudest, siis osas b) tuleb vähim alamring $\{a + b\mathrm{i}\colon a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \mid a + b\}$ ja osas c) tuleb vähim alamring $4\mathbb{Z} + 2\mathrm{i}\mathbb{Z}$.)
74. $f(A) = X \setminus A$.
75. Jah. $f(\overline{0}) = \overline{1}$, edasi paneme tähele, et rühmas $\mathbb{Z}_6$ võrdust $x + x = \overline{0}$ rahuldavad ainult $\overline{0}$ ja $\overline{3}$, seega $f(\overline{3}) = \overline{6}$. Rühmas $\mathbb{Z}_6$ võrdusi $x+x = y$ ja $y+y = x$ rahuldavad ainult $(x, y) = (\overline{2}, \overline{4})$ ja $(x, y) = (\overline{4}, \overline{2})$; samad lahendid on ka võrranditel $x \cdot x = y$ ja $y \cdot y = x$ rühmas $U(\mathbb{Z}_7)$. Vaatleme juhtu $f(\overline{2}) = \overline{2}$ ja $f(\overline{4}) = \overline{4}$; kuna $\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$, peab kehtima $f(\overline{1}) \cdot \overline{2} = \overline{6}$, mistõttu $f(\overline{1}) = \overline{3}$ ja $f(\overline{5}) = \overline{5}$. Kontroll näitab, et f on isomorfism. Juhul $f(\overline{2}) = \overline{4}$ ja $f(\overline{4}) = \overline{2}$ saame $f(\overline{1}) = \overline{5}$ ja $f(\overline{5}) = \overline{3}$ ning ka selline f on isomorfism.
76. Ei. Ilmselt $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nullelement on $(\overline{0}, \overline{0})$. Lisaks nullile nii $(\overline{1}, \overline{0})$ kui $(\overline{0}, \overline{1})$ rahuldavad võrdust $x+x = 0$, ent rühmas $\mathbb{Z}_4$ on sellist võrdust rahuldavaid nullist erinevaid elemente ainult üks $(\overline{2})$.
77. Saame, et $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$, millest $f(1)^{-1}$-ga korrutamisel järeldub, et $f(1) = 1$. Saame, et $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = 1$.
78. Kuna f on sürjektiivne, siis leidub $a \in A_1$ nii, et $f(a) = 1$. Nüüd $1 = f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1) = 1 \cdot f(1) = f(1)$.
79. Olgu $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ sürjektiivne ja omadusega $f(a+b) = f(a)+f(b)$. Siis leidub $x \in \mathbb{Q}$ selliselt, et $f(x) = 1$. Nüüd $1 = f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$. Ent ei leidu täisarvu y, mille korral $2y = 1$.
80. jah, $f(x) = 2x$.
81. jah ($f(x) = 2^x$), ei (kui $f(x) = 2$, siis $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$, mistõttu $f\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2$, mis on võimatu).
82. a) $f\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2k\pi}{n}\right) = \overline{k}$;
b) $F(f) = (a, b)$;
g) S_n elemendid on hulga $\{1, \ldots, n\}$ üksühesed pealekujutused. Defineerime isomorfismi F järgmiselt: igale bijektsioonile $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ seame vastavusse $n \times n$ maatriksi, mille i. reas on kõik elemendid nullid, välja arvatud $f(i)$. veerus asub 1.
83. $\varphi(a + b) = q(a + b) = qa + qb = \varphi(a) + \varphi(b)$; kui $\varphi(a) = \varphi(b)$, siis $qa = qb$, millest $a = b$; kui $x \in G$, siis $\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = q \cdot \frac{x}{q} = x$.
84. Vt. 77 ja 78.
85. $\varphi(\mathbb{Z}) = \{ne\colon n \in \mathbb{Z}\}$.
89. ei. Tõepoolest, olgu f isomorfism, siis $f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{5}$ mingite $a, b \in \mathbb{Q}$ korral. Samas $f(1) = 1$, mis annab $f(x) = x$ iga $x \in \mathbb{Q}$ korral. Nüüd $2 = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = (a + b\sqrt{5})^2 = a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5}$, millest $ab = 0$, seega $a = 0$ või $b = 0$. Kui $b = 0$, siis $a^2 = 2$, mis on võimatu. Kui $a = 0$, siis $2 = 5b^2$, mis on samuti võimatu.

91. Tähistame $\psi = \varphi^{-1}$. Lihtne kontroll näitab, et $\psi\colon S \to R$ on samuti ringide isomorfism. (Näiteks $\varphi(\psi(a)+\psi(b)) = \varphi(\psi(a)) + \varphi(\psi(b)) = a+b = \varphi(\psi(a+b))$, millest $\psi(a)+\psi(b) = \psi(a+b)$. Analoogiliselt korrutamisega.) Olgu $z \in S \setminus \{0\}$. Veendume, et $\varphi(\psi(z))\cdot z = 1$. Saame, et $\varphi(\psi(z)^{-1})\cdot z = \varphi(\psi(z)^{-1})\cdot \varphi(\psi(z)) = \varphi(\psi(z)^{-1}\cdot\psi(z)) = \varphi(1) = 1$. (Analoogiliselt teistpidine korrutamine.)
95. a) 7; b) 14; c) 22; d) 36.
96. a) -12; b) 15.
97. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_1 1 a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.
98. Vaatleme olukorda, kus peadiagonaali kohale jäävad elemendid on kõik nullid. Tegur $a_{k,\sigma(k)}$ on nullist erinev vaid juhul, kui $\sigma(k) \leqslant k$. Valides järjest $k = 1, 2, \ldots, n$, leiame tänu σ injektiivsusele, et kõik liidetavad peale selle, mis vastab samasusteisendusele, on nullid.
Kui peadiagonaali alla jäävad elemendid on kõik nullid, arutleme analoogiliselt; sel juhul on $a_{k,\sigma(k)}$ nullist erinev vaid juhul, kui $\sigma(k) \geqslant k$; valida tuleb järjest $k = n, n-1, \ldots, 1$.
99. a) Olgu $B = A^T$, siis $b_{ij} = a_{ji}$ ning $b_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot b_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$. Sealjuures substitutsioonil endal ja tema pöördkujutusel on sama paarsus, kuna pöördkujutuse võtmisel vahetatakse substitutsioonitabeli read.
b) λ-ga on korrutatud kõiki n rida;
c) liidetavad on kujul $\lambda a_{1,\sigma(1)}\cdot a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}$, distributiivsust kasutades toome λ sulgude ette;
d) Olgu $a_{sj} = a_{tj}$. Determinandi arendises koos iga liidetavaga, mis sisaldab $a_{s,\sigma(s)}\cdot a_{t,\sigma(t)}$, on ka liidetav muudetud kujul $a_{s,\sigma(t)}\cdot a_{t,\sigma(s)}$ (muud tegurid on samad), kusjuures substitsiooni paarsus muutub. Iga sellise liidetavate paari summa on 0.
e) Olgu s ja t antud reaindeksid. Olgu B maatriks, kus $b_{sj} = a_{tj}$ ja $a_{tj} = b_{sj}$ ning muud read on samad mis maatriksis A. Siis B determinant on mõjutatud asjaolust, et $b_{s,\sigma(s)}\cdot b_{t,\sigma(t)} = a_{t,\sigma(s)}\cdot a_{s,\sigma(t)}$, täpsemalt, maatriksi B liidetavale vastab maatriksis A liidetav, kus σ on asendatud substitutsiooniga σ' nii, et $\sigma'(s) = \sigma(t)$ ja $\sigma'(t) = \sigma(s)$. Seega sign $\sigma' = -$ sign σ, mistõttu det $B = -$ det A.
f) Kasutage a) ja e).
g) Olgu maatriks B saadud maatriksist A nii, et tema s-nes rida on $a_{sj} + \lambda a_{tj}$. det B sisaldab liidetavana $a_{s,\sigma(s)} + \lambda a_{t,\sigma(s)}$, sulgude avamisel saame kaks summat: esimene vastab arvule det A ja teine vastab sellise maatriksi (λ-ga korrutatud) determinandile, kus s-nes ja t-nes rida on võrdsed.
100. Ei. (Näiteks A olgu n-järku ühikmaatriks ja B olgu maatriks, kus üks peadiagonaali element on 1, mujal kogu maatriksis 0.)
101. $|B| = -6$.
102. $\alpha = 2$.
103. a) väär; b) tõene; c) tõene; d) tõene juhul, kui ridade (veergude) arv on paaritu; e) tõene; f) väär.
104. Saame, et $\det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, teiselt poolt $\det(-A) = \det(A^T) = \det A$. Kokkuvõttes $2 \det A = 0$, millest $\det A = 0$.
105. 12. (Mõistlik on kasutada teoreemi maatriksite korrutise determinandist.)
106. a) 1; b) 18; c) $(b-a)(c-a)(c-b)$; d) $1+a+2b$; e) -8; f) -2; g) -1010; h) 1; i) 1; j) 1; k) $9\sqrt{30} - 18\sqrt{5}$.
107. a) ei ole miinor; b) on miinor, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$, alg. täiend sama;
c) on miinor, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$, alg. täiend selle vastandarv; d) ei ole miinor.

108. a) 9; b) 4; c) 27; d) 18; e) 90; f) 17; g) −34; h) $-\frac{1}{2}$; i) 1.

109. a) 120; b) 3.

110. a) −2; b) 1; c) 0; d) −3; e) −30; f) $-\mathrm{e}^t \sin t$; g) $\mathrm{e}^{-2t} + \cos t$; h) −83; i) 51 − 16i; j) $x^6(x^3+3)$; k) 0; l) 3; m) $\overline{6}$; n) 4; o) 0; p) 0; q) 0.

111. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

112 $AB = E \Rightarrow (\det A)\cdot(\det B) = \det(A\cdot B) = \det E = 1$. Seega $\det A \neq 0$ ja A on pööratav, mistõttu leidub mingi C nii, et $AC = CA = E$. Nüüd $B = CAB = C$, millest järeldub, et $BA = E$.

113. jah.

114. $\lambda = 4$; $\lambda = -1$; $A^{-1} = \frac{1}{\lambda^2-3\lambda-4}\begin{pmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}$.

115. a) on; b) on; c) ei ole; d) on.

116. a) $k = -9$; b) $k \in \{-1, 0, 1\}$.

117. Ei. (Kasutage teoreemi maatriksite korrutise determinandist ning asjaolu, et korpuses puuduvad nullitegurid.)

118. a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2\mathrm{i}+1 & 3-3\mathrm{i} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{4} & \overline{5} \\ -\overline{1} & -\overline{4} & -\overline{5} \\ -\overline{1} & -\overline{2} & -\overline{2} \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \\ 5 & -7 & 18 \end{pmatrix}$; i) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; j) pole pööratav; k) $\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}$; l) pole pööratav.

119. Maatriksi AB i. rea j. veeru element on $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, seega transponeeritud maatriksi i. rea j. veeru element on $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$. Maatriksi $B^T A^T$ i. rea j. veeru elemendi üldkuju on $\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}$. Analoogiliselt, vaadeldes elementide üldkuju vasakul ja paremal, tõestatakse teine võrdus.

120. Kontrollida tuleb, et $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$, $(A^{-1})^T A^T = E$ ja $(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = E$. Teise võrduse tõestamisel on otstarbekas kasutada ül. 119, kolmanda võrduse tõestamiseks kasutage valemit $A(kB) = k(AB)$.

121. $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 35 & 1 \\ 14 & 35 & 34 \\ 23 & 12 & 70 \end{pmatrix}$; $(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

122. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

123. E.

124. E.

125. $\begin{pmatrix} 30 & -22 & 5 \\ -22 & 17 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
126. Teame, et $(E+AB)C = C(E+AB) = E$ ehk $C+ABC = C+CAB = E$. Saame, et $(E-BCA)(E+BA) = E+BA-BCA-BCABA = E+BA-BCA-B(E-C)A = E$.
127. a) $A^{-1} = 4E-A$;
b) $A^{-1} = A^2+5A-3E$;
c) $A^{-1} = E$.
128. Ridade elementaarteisendused tähendavad vasakult korrutamist elementaarmaatriksitega. Teisendused saame lõpuni viia, sest nullidest koosnevat rida ei teki (kuna elementaarteisendused ei muuda maatriksi astakut). Kui leiame elementaarmaatriksite korrutise X nii, et $XA = E$, siis $A = X^{-1}E = X^{-1}$, millest $A^{-1} = X = XE$.
129. a) $E_i(k)^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$, seega $(E_i(k)A)^{-1} = A^{-1}E_i(k)^{-1} = A^{-1}E_i(\frac{1}{k})$, niisiis esialgne A^{-1} i-nes veerg korrutub arvuga $\frac{1}{k}$.
b) $(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$, seega $(E_{ij}(k)A)^{-1} = A^{-1}E_{ij}(-k)$, niisiis esialgse A^{-1} i. veerule liitub $-k$-ga korrutatud j. veerg.
c) Vahetamine vastab vasakult maatriksiga $E_{ij}(1)E_{ji}(-1)E_{ij}(1)$ korrutamisele.
Kuna $(E_{ij}(1)E_{ji}(-1)E_{ij}(1))^{-1} = E_{ij}(-1)E_{ji}(1)E_{ij}(-1)$ ning see rakendub paremalt, siis vahetuvad i. ja j. veerg, kusjuures uus i. veerg on nüüd miinusmärgiga.
130. Vaja leida $(E+A+\ldots+A^{k-1})(E-A)$ ja $(E-A)(E+A+\ldots+A^{k-1})$.
131. Ilmselt kui $\det A = \pm 1$, siis, kasutades A^{-1} kuju adjungeeritud maatriksi kaudu, tulevad A^{-1} elemendid kõik täisarvud.
Olgu A^{-1} elemendid täisarvud. Siis $\det A$, $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$, kuna nad avalduvad summana vastavalt A ja A^{-1} elementide korrutistest. Saame, et $1 = \det E_n = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}$. Kahe täisarvu korrutis on 1 parajasti juhul, kui mõlemad täisarvud 1 ja 1 või -1 ja -1. Seega $\det A \in \{1, -1\}$.
132. ei. (Aga järeldub, kui A on regulaarne ruutmaatriks.)
133. Kehtigu $AB = BA$. Siis $(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$, millest $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Seega $AB^{-1}A^{-1} = B^{-1}$, millest $AB^{-1} = B^{-1}A$. Kõik sammud on pööratavad, mis annab samaväärsuse.
Analoogilise võttega $AB = BA \Leftrightarrow A^{-1}B = BA^{-1}$.
134. Vaja korrutada kokku ja veenduda, et tuleb ühik.
143. a) ei, b) ei, c) ei, d) jah, e) jah, f) ei.
144. Kehtigu $\alpha a = 0$. Kui $\alpha = 0$, on implikatsioon tõestatud. Kui $\alpha \neq 0$, siis leidub α^{-1}. Korrutame võrduse $\alpha a = 0$ skalaariga α^{-1}, siis saame, et $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}0$, millest $(\alpha^{-1}\alpha)a = 0$, seega $1a = 0$, mis annab $a = 0$.
Vastupidi, kui $\alpha = 0$, siis kasutame asjaolu, et $0a = (0+0)a = 0a+0a$, millest standardsel viisil järeldame, et $0a = 0$. Analoogiliselt käitume olukorras, kui $a = 0$.
145. Võrdus $\alpha a + \beta b = \beta a + \alpha b$ on samaväärne võrdusega $(\alpha-\beta)(a-b) = 0$. Nüüd kasutame ülesannet 144.
146. Kontrollida on vaja: et tegemist on algebraliste tehetega, et liitmine on assotsiatiivne, kommutatiivne, et liitmise suhtes leidub nullelement, et igal elemendil on vastandelement, et liitmine ja skalaariga korrutamine on seotud distributiivsuse seadustega, et skalaaridega vektori korrutamine on assotsiatiivne, et ühikskalaariga korrutamine ei muuda vektorit.
147. a) jah; b) ei; c) jah; d) jah.
148. a) jah, b) jah, c) ei.
149. ei.

150. a) Ei (liitmine pole alati defineeritud); b) ei (maatriksi ja tema vastandmaatriksi summa pole regulaarne); c) ei (saab koostada singulaarsed maatriksid, mille summa on regulaarne); d) jah; e) jah; f) jah; g) jah; h) jah; i) ei (elementide liitmisel tuleb üles vasakule $2 \neq 1$, seega liitmine pole algebraline tehe antud hulgal); j) jah.
151. a) jah, b) ei, c) jah,
d) (i) ei, (ii) jah, (iii) jah, (iv) jah,
e) jah.
152. ei (nõue $(\overline{1}+\overline{1})a = \overline{1}a + \overline{1}a$ annab vastuolu, kui $a \neq 0$).
153. jah.
154. a) on, b) on, c) on, d) on, e) on, f) ei ole, g) on, h) on, i) ei ole, j) on, k) on, l) on, m) on, n) on, o) on.
155. a) ei ole, b) ei ole, c) ei ole, d) ei ole, e) on.
156. Lineaarkatte $\mathrm{span}(a_1,\ldots,a_n)$ elemendi üldkuju on $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$, kus $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$. Tarvis on näidata, et sellisel kujul elementide summa ja korrutis skalaariga on samuti sellisel kujul.
157. Olgu $x \in L_1 + L_2$, siis $x = y + z$, kus $y \in L_1$, $z \in L_2$. Seega $y = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s$ ja $z = \mu_1 b_1 + \ldots \mu t b_t$, millest $x = y + z = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s + \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_t b_t \in \langle a_1,\ldots,a_s, b_1,\ldots,b_t\rangle$.
Vastupidi, olgu $x \in \langle a_1,\ldots,a_s, b_1,\ldots,b_t\rangle$, siis $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s + \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_t b_t$. Tähistame $y = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s$ ja $z = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_t b_t$, siis $y \in L_1$ ja $z \in L_2$ ning $x = y + z \in L_1 + L_2$.
158. Olgu E vektorruumi V nullist erinev lõplik alamruum, siis leidub element $x \in E$ nii, et $x \neq 0$. Nüüd iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral $\lambda x \in E$. Kuna reaalarvude hulk on lõpmatu (koguni mitteloenduv), siis peavad leiduma erinevad $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ nii, et $\lambda_1 x = \lambda_2 x$. Nüüd $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, millest ül. 144 tõttu $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Seega $\lambda_1 = \lambda_2$, vastuolu. Niisiis sellist alamruumi E ei leidu.
161. $k \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.
162. $k = l$ või $k = m$ või $l = m$.
163. char $K \neq 2$ tähendab, et $1 + 1 \neq 0$; jah.
164. a) $-5a_1 + 4a_2 + a_3$,
b) $-5z_1 + 4z_2 + z_3$,
c) $-5A_1 + 4A_2 + A_3$,
d) $3f_1 + 3f_2 - f_4$.

165. a) $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

b) $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ y\lambda_1 + (x-y)\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

c) $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

d) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) = 0 \\ \lambda_1 f_1(2) + \lambda_2 f_2(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 \cdot (-1) = 0 \\ \lambda_1 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

166. Kuna süsteem $a_1,\ldots,a_m, x$ on lin-sõltuv, siis leiduvad skalaarid $\lambda_1,\ldots,\lambda_m, \lambda$ selliselt, et nad kõik pole nullid ning $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m + \lambda x = 0$. Muuseas $\lambda \neq 0$, vastasel korral kehtiks $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$, millest süsteemi $a_1,\ldots,a_m$ lin-sõltumatuse tõttu $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Niisiis $x = -\lambda^{-1}\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda^{-1}\lambda_m a_m \in \langle a_1,\ldots,a_m\rangle$.
Näitame, et vektori x esitus süsteemi $a_1,\ldots,a_m$ kaudu on ühene. Kehtigu $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_m a_m$. Siis $(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \ldots + (\lambda_m - \mu_m)a_m = 0$, millest $a_1,\ldots,a_m$ lin-sõltumatuse tõttu

$\lambda_k - \mu_k = 0$ ehk $\lambda_k = \mu_k$ iga $k = 1, \dots, m$ jaoks.
167. a) $f_1(x) = x+2$, $f_2(x) = x-2$. Niisiis $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = 0(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \lambda_1(x+2) + \lambda_2(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Süsteem f_1, f_2 on lineaarselt sõltumatu. b) lin-sõltuv, $4f_1 - 3f_2$,
c) lin-sõltumatu, d) lin-sõltumatu, e) lin-sõltumatu, f) lin-sõltumatu, g) lin-sõltuv, $f_1 - f_2 - f_3$,
h) lin-sõltumatu, i) lin-sõltuv, $(\cos 7) f_1 - (\cos 5) f_2 + (\sin 2) f_3$.
168. Kuna $e_1 = e_3$, siis on lineaarselt sõltuv.
169. $\lambda \neq \pm 1$.
172. 143d) 1, $\dim \mathbb{R} = 1$; 143e) 1, i, $\dim \mathbb{C} = 2$; 148a) sirge sihivektor, $\dim V = 1$; 148b) tasandi rihivektorid, $\dim V = 2$; 150d) selliste maatriksite süsteem, kus ühel kohal on 1 ja mujal 0, $\dim \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$; e) sama sorti baas, $\dim \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) = 4$; f) sama sorti baas, $\dim \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$; g) baasiks sobib maatriksite süsteem, kus ühel kohal on 1 või i ja mujal 0, $\dim \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = 8$; h) baasiks sobib $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mõõde on 3; j) baasiks sobib $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mõõde on 2; 151c) $1, x, \dots, x^n$, mõõde on $n+1$ (Vandermonde); 151e) $x_1, \dots, x_n, 1$, mõõde on $n+1$.
173. Olgu $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.
a) e_1, e_2, e_3, e_4; b) e_1; c) $e_1, e_2, e_3, e_4, 0$; d) 0.
174. 1, −2.
175. a) 4, 0, 0,
b) 5, 0, 1.
176. a) on baas, $a = 3a_1 + 7a_2 + 13a_3$,
b) on baas, $a = -4a_1 - 6a_2 + 13a_3$,
c) on baas, $a = a_1 + a_2 + a_3$.
177. $A = (3, 4, -2)$, $B = (2, 5, 0)$.
178. $(-3x_1 - 8x_2 - 5x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_2, x_1 + x_2 + x_3)$, $(1, 1, 1)$.
179. Näitame, et e'_1, e'_2, e'_3 on lineaarselt sõltumatu. $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(5e_1 - e_2 - 2e_3) + \lambda_2(2e_1 + 3e_2) + \lambda_3(-2e_1 + e_2 + e_3) = 0 \Leftrightarrow (5\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3)e_1 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + (-2\lambda_1 + \lambda_3)e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$
Näitame, et e'_1, e'_2, e'_3 on moodustajate süsteem. Valime suvalise vektori $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. Võrdus $a = \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \mu_3 e'_3$ on samaväärne võrdusega $(5\mu_1 + 2\mu_2 - 2\mu_3 - a_1)e_1 + (-\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 - a_2)e_2 + (-2\mu_1 + \mu_3 - a_3)e_3 = 0$, millest $\begin{cases} 5\mu_1 + 2\mu_2 - 2\mu_3 = a_1, \\ -\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 = a_2, \\ -2\mu_1 + \mu_3 = a_3 \end{cases}$ järelikult $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (3a_1 - 2a_2 + 8a_3, -a_1 + a_2 - 3a_3, 6a_1 - 4a_2 + 17a_3)$. Konkreetsel juhul, kui $(a_1, a_2, a_3) = (1, 4, -1)$, saame, et $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (-13, 6, -27)$.
180. V^2 on vektorruum üle K; olgu V baas e_1, e_2, siis V^2 baas on näiteks $(e_1, 0), (e_2, 0), (0, e_1), (0, e_2)$.
181. 154a) tasandi normaalvektor, mõõde on 1; 154b) tasandi riht, mõõde on 2; 154c) suvalised kaks sirgega ristuvat mittekollineaarset vektorit, mõõde on 2; 154d) sirge sihivektor, mõõde on 1; 154e) $(1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0)$, mõõde on 2; 154g) $(1,0,0,0,-1), (0,1,0,0,1), (0,0,1,0,1), (0,0,0,1,1)$, mõõde on 4; 154h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mõõde on 2; 154j) mõõde on $\frac{n(n+1)}{2}$; 154k) mõõde on $\frac{n(n-1)}{2}$; 154l) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$, mõõde on 6; 154m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

mõõde on 3; 154n) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\sin^2 x$, mõõde on 2; 154o) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\sin x$, $f_3(x)=\sin^2 x$, mõõde on 3; 155e) (1, 0, 0), (0, 0, 1), mõõde on 2.

185. Saame, et $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_k)=\operatorname{span}(b_1,\dots,b_l)$, seega ka $\dim\operatorname{span}(a_1,\dots,a_k)=\dim\operatorname{span}(b_1,\dots,b_l)$. Vastupidine väide ei kehti, näiteks ruumis $\mathbb{R}^2$ vaatleme vektoreid $e_1=(1,0)$ ja $e_2=(0,1)$, siis süsteemide e_1 ja e_2 astakud on 1, aga $e_1 \notin \langle e_2\rangle$ (ega mitte ka vastupidi).

186. Meil kehtib $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_k)\subseteq\operatorname{span}(b_1,\dots,b_l)$. Seega ka $\dim\operatorname{span}(a_1,\dots,a_k)\leqslant\dim\operatorname{span}(b_1,\dots,b_l)$.

187. Kui vektoritest a, b saavad vektorid $a+\lambda b$, b, siis $\lambda_1 a+\lambda_2 b=\lambda_1(a+\lambda b)+(\lambda_2-\lambda_1\lambda)b$ ning vastupidi, $\mu_1(a+\lambda b)+\mu_2 b=\mu_1 a+(\mu_1\lambda+\mu_2)b$.

Kui vektorist a saab vektor λa (kus $\lambda\neq 0$), siis $\lambda_1 a=\lambda_1\lambda^{-1}(\lambda a)$ ja vastupidi, $\mu(\lambda a)=(\mu\lambda)a$.

Vektoritest a, b saab vektorid b, a teha järgmiste elementaarteisendustega: $a, b\to a+b, b\to a+b, -a\to b, -a\to b, a$.

188. Olgu $r=\dim\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$. Viskame süsteemist $a_1,\dots,a_n$ nii kaua välja vektoreid, kuni enam ükski vektor ei avaldu teiste kaudu. Saadud süsteem on lin-sõltumatu ja moodustajate süsteem. Seega on ta $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$ baas ja järelikult on seal r vektorit. Valime mingi $(r+1)$-elemendilise alamsüsteemi $a_{i_1},\dots,a_{i_{r+1}}$ ning oletame, et ta on sõltumatu. Siis $\operatorname{span}(a_{i_1},\dots,a_{i_{r+1}})\subseteq\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$, mistõttu ka mõõtmed on samapidi järjestatud: $r+1\leqslant r$. Vastuolu.

Leidugu süsteemil $a_1,\dots,a_n$ r-elemendiline sõltumatu alamsüsteem (üldisust kitsendamata olgu see $a_1,\dots,a_r$) ja iga $(r+1)$-elemendiline alamsüsteem olgu sõltuv. Lisades sinna ükskõik millise vektori $a_{r+1},\dots,a_n$, saame sõltuva süsteemi. Seega sealt miski avaldub eelmiste kaudu, see peab olema lisatud vektor (muidu saaksime vastuolu a_1, ..., a_r sõltumatusega). Niisiis $a_{r+1},\dots,a_n$ avalduvad $a_1,\dots,a_r$ kaudu, aga siis ka kõik $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$ elemendid avalduvad $a_1,\dots,a_r$ kaudu, mistõttu ta on $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$ moodustajate süsteem. Seega ta on $\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$ baas ja $\dim\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)=r$.

189. Kehtigu $b=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n$. Siis süsteemid $a_1,\dots,a_n$ ja $a_1,\dots,a_n,b$ on ekvivalentsed, seega nende astakud on võrdsed (ül. 185).

Vastupidi, olgu $a_1,\dots,a_n$ ja $a_1,\dots,a_n,b$ astakud võrdsed. Olgu $a_1,\dots,a_r$ süsteemi $a_1,\dots,a_n$ maksimaalne lin-sõltumatu süsteem. Siis $a_1,\dots,a_r,b$ on lin-sõltuv. Siit leiame, et $b\in\operatorname{span}(a_1,\dots,a_r)$.

190. a) $|\operatorname{sgn} a_1|+|\operatorname{sgn} a_2|+|\operatorname{sgn} a_3|+|\operatorname{sgn} a_4|$; b) 5; c) 3; d) 2; e) 3; f) 3.

191. a) kui $a=1$ ja $b=\frac{1}{2}$, siis 2, muidu 3;

b) kui $a=\pm 3$, siis 3, muidu 4;

c) kui $b=1$ või $a=0$ ja $b=5$, siis 2, muidu 3;

d) 4;

e) kui $a=-2$, siis 1, kui $a=2$, siis 2, muidu 3;

f) kui $a=\pm 3$, siis 3, muidu 4.

192. võib muutuda hulgas $\{-1, 0, +1\}$.

193. a) võib muutuda hulgas $\{-1, 0, +1\}$;

b) võib muutuda hulgas $\{-k, -k+1, \dots, k, k+1\}$.

194. Olgu antud maatriksid A ja B oma veeruvektoritega $A_1,\dots,A_n$ ja $B_1,\dots,B_n$. Vektorsüsteemi $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n$ astak on ülimalt $\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B$. (Kui oleks suurem, siis sisaldaks ta $\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B+1$ vektorist koosnevat lin-sõltumatut alamsüsteemi, mis sel juhul sisaldaks vähemalt $\operatorname{rank} A+1$ vektorit $A_1,\dots,A_n$ seast või vähemalt $\operatorname{rank} B+1$ vektorit $B_1,\dots,B_n$ seast, vastuolu.)

Vektorsüsteemi $A_1+B_1,\dots,A_n+B_n$ iga vektor avaldub süsteemi $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n$ vektorite kaudu. Seega ül. 186 põhjal $\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)\leqslant\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B$.

195. a) õige (miinorite võrdumine või mittevõrdumine nulliga ei muutu transponeerimisel); b) vale, kui

$c = 0$, muidu õige (elementaarteisendused ei muuda astakut); c) vale (vt. näiteks regulaarne ruutmaatriks ja tema vastandmaatriks); d) õige (maatriksi AB iga rida on maatriksi B ridade lineaarkombinatsioon).

196. a) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3) = 2$, näiteks süsteem a_1, a_2 on lin-sõltumatu. Meid huvitab t väärtus, mille korral $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3, b) = 2$. Kuna a_3 avaldub a_1, a_2 kaudu, siis $\mathrm{rank}(a_1, a_2, b) = \mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3, b)$. Selleks, et $\mathrm{rank}(a_1, a_2, b) = 2$, on tarvilik ja piisav, et determinant ridadega a_1, a_2, b oleks 0. See on samaväärne nõudega $t = 15$.

b) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3) = 3$, seega sobib iga t (süsteem a_1, a_2, a_3 on $\mathbb{R}^3$ baas).

c) Juhul $t \neq 12$ on $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3) = 3$, mistõttu b avaldub a_1, a_2, a_3 kaudu. Juhul $t = 12$ on $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3) = 2$, lin-sõltumatu süsteem on näiteks a_1, a_2. Kuna $\mathrm{rank}(a_1, a_2, b) = 3$, siis sel juhul b ei avaldu a_1, a_2, aga seega ka a_1, a_2, a_3 kaudu.

d) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3) = 2$, näiteks a_1, a_2 on lin-sõltumatu. Arutledes nagu a)-osas leiame, et sobib iga t.

Alternatiiv: selgitame avaldumise võimalikkust lineaarkattesse kuulumise kaudu.

a) $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ on samaväärne võrrandisüsteemiga $\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 7, \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 6\lambda_3 = -2, \\ 5\lambda_1 + 8\lambda_2 + \lambda_3 = t. \end{cases}$ Kas Kronecker–Capelli teoreemi (süsteem on kooskõlaline parajasti siis, kui maatriksi astak = laiendatud maatriksi astak) põhjal või vahetul lahendamisel selgub, et süsteemi kooskõlalisus on samaväärne tingimusega $t = 15$.

197. Olgu $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Ilmselt $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$ on $\mathbb{R}^4$ moodustajate süsteem ja ei ole tema baas. Baasi saamiseks peame eemaldama kaks vektorit. Saame näiteks baasid a_1, a_2, e_1, e_3 ja a_1, a_2, e_2, e_3.

Lineaarkatte baasi leidmiseks kas

- otsime süsteemi vektorite seast maksimaalse sõltumatu komplekti (vajadusel kasutades teoreemi maatriksi astakust),
- lisame sõltumatule süsteemile nii kaua vektoreid, kuni saame moodustajate süsteemi,
- eemaldame süsteemi vektorite seast vektoreid nii kaua, kuni saame sõltumatu süsteemi,
- või teostame elementaarteisendusi vektoritega nii kaua, kuni on lihtne baas välja valida (elementaarteisendused ei muuda lineaarkatet).

198. a) $A_1 + A_2 - A_3 = 0$, seega $\mathrm{rank}(A_1, A_2, A_3) < 3$. Kuna näiteks A_1, A_2 on lin-sõltumatu, siis $\mathrm{rank}(A_1, A_2, A_3) = 2$ ja A_1, A_2 sobib $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ baasiks.

b) $2z_1 + z_2 - z_3 = 0$, seega $\mathrm{rank}(z_1, z_2, z_3) < 3$. Kuna näiteks z_1, z_2 on lin-sõltumatu, siis $\mathrm{rank}(z_1, z_2, z_3) = 2$ ja z_1, z_2 sobib $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ baasiks.

c) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$ ja $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ baasiks sobib a_1, a_2.

Alternatiiv: kuna elementaarteisendused ei muuda lineaarkatet, teostame vektoritega elementaarteisendused. Leiame lineaarkatte baasid.

a) $A_1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) 1, i.

c) (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1).

199. a) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 3$, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ baasiks sobib näiteks a_1, a_2, a_4.

b) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 3$, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ baasiks sobib näiteks a_1, a_2, a_5.

c) $\mathrm{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ baasiks sobib näiteks a_1, a_2.

Alternatiiv: kuna elementaarteisendused ei muuda lineaarkatet, teostame vektoritega (kui maatriksi ridadega) elementaarteisendused. Leiame lineaarkatte baasid.
a) $e_1 = (1, 0, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 2)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$.
b) $e_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $e_2 = (0, 4, 2, 0, -1)$, $e_3 = (0, 0, 2, 2, 1)$.
c) $e_1 = (1, 2, 1, 2)$, $e_2 = (0, 1, 0, 1)$.
200. a) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 = 0$, kusjuures näiteks f_1, f_2, f_3 on lin-sõltumatu. Seega ta sobib baasiks ja mõõde on 3.
b) $\operatorname{rank}(A_1, A_2, A_3, A_4) = 2$ ja baasiks sobib näiteks A_1, A_2;
c) $\operatorname{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$ ja baasiks sobib näiteks a_1, a_2, a_3.
203. a) (0,-3,6); b) (3,2,1).
204. a) $x_1 = -\frac{14}{11},\ x_2 = \frac{32}{11},\ x_3 = \frac{27}{11}$; b) $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$.
205. a) $(2 - c_1 - 9c_2, -5c_1 - c_2, 4c_1, 4c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $(2, 0, 0, 0)$;
b) $\left(\frac{16c_1+c_2-1}{3}, 8c_1, -11c_2, 8c_2\right)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $(16, 24, -11, 8)$.
206. a) $(-2c_1 + c_2 + 1, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
b) $\left(\frac{b_1+b_2-b_3}{4}, \frac{-b_1+b_2-7b_3}{4} + \frac{b_1-b_2-5b_3}{4}\mathrm{i}, b_3\right)$;
c) $(1, 0, -1, 2)$.
207. a) (x_3, x_4), (x_2, x_4), (x_2, x_3);
b) x_2, x_1.
208. a) $a = -2$ või $a = 1$;
b) kui a_1, a_2, a_3, a_4 seas on võrdseid (Vandermonde'i determinant);
c) $a = -1$ või $a = 0$ või $a = 1$.
209. a) $\left\{\frac{1}{31}(107, -27, -53, -39)\right\}$;
b) $\emptyset$;
c) $\{(-c_1 + 2c_2, -2c_1 + 4c_2 - 1, -6c_1 + 10c_2 - 3, c_1, c_2) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.
210. a) kui $a = 1$, siis on üldlahend $(1 - c_1 - c_2, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
kui $a = -2$, siis on süsteem vasturääkiv,
muudel juhtudel on üldlahend $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$;
b) kui $(a, b) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, siis on üldlahend $(2 - c, 2, c)$, $c \in \mathbb{R}$,
kui $(a-1)b \neq 0$, siis on üldlahend $\left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, \frac{1}{b}, \frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}\right)$,
muudel juhtudel on vasturääkiv;
c) üldlahend on $(-3c + 2, 2c, -1, 0)$, $c \in \mathbb{R}$;
d) kui $a = 1$, siis on üldlahend $(-c - 4, 2, 3, c)$, $c \in \mathbb{R}$,
kui $a = 0$, siis on süsteem vasturääkiv,
muul juhul on üldlahend $\left(0, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}, \frac{a-5}{a}\right)$;
e) kui $a = -3$ või $a = 0$, siis on vasturääkiv,
muudel juhtudel on üldlahend $\left(\frac{2-a^2}{a(a+3)}, \frac{2a-1}{a(a+3)}, \frac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)}\right)$;
f) kui $a = b = -2$, siis on üldlahend $\left(c, -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}, c\right)$, $c \in \mathbb{R}$,
kui $a = b = 1$, siis on üldlahend $(1 - c_1 - c_2, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
kui $b(a-1)(a+2) \neq 0$, siis on üldlahend $\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{(a+1)b-2}{(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$,
muudel juhtudel on vasturääkiv;
g) kui $a = -3$, siis on üldlahend (c, c, c), $c \in \mathbb{R}$,
kui $a = 0$, siis on üldlahend $(-c_1 - c_2, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
muudel juhtudel on üldlahend $(2 - a^2, 2a - 1, a^3 + 2a^2 - a - 1)$;

h) kui $a=0$ või $a=1$, siis on vasturääkiv,
muudel juhtudel on üldlahend $\left(\frac{a^3+3a^2-15a+9}{a^2(a-1)}, \frac{a^3+12a-9}{a^2(a-1)}, \frac{(3-4a)(a^2-3)}{a^2(a-1)}\right)$.
211. a) vasturääkiv;
b) $(\overline{2}, \overline{6}, \overline{5})$.
212. $(\overline{2}, \overline{4}, \overline{2})$.
213. a) üldlahend on (c, c), $c \in \mathbb{R}$, LFS baasivektor on $e = (1, 1)$ ning üldlahend on λe, $\lambda \in \mathbb{R}$;
b) üldlahend on $(25c_1, (9\mathrm{i}-13)c_1, (16+12\mathrm{i})c_1 + (75+50\mathrm{i})c_2, 25c_2)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, LFS baasivektorid on $e_1 = (25, 9\mathrm{i}-13, 16+12\mathrm{i}, 0)$, $e_2 = (0, 0, 3+2\mathrm{i}, 1)$ ning üldlahend on $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$;
c) kui $n = 3k$ või $n = 3k+1$, siis üldlahend on $(0, 0, \dots, 0)$ ning LFS puudub, kui $n = 3k+2$, siis üldlahend on $(-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots, -1, 1)$, LFS baasivektor on $e = (-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots, -1, 1)$ ning üldlahend on λe, $\lambda \in \mathbb{R}$;
d) üldlahend on $(c_1 - c_2 + c_3, c_1, c_1 + c_3, c_1 + c_3, c_2, c_3)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, LFS baasivektorid on $e_1 = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$ ning üldlahend on $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$;
e) $\{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$, ei leidu;
f) $\{(c_1 - c_2, c_1 - c_3, c_1, c_1, c_2, c_3) : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$, $(1, 1, 1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 0, 0, 1)$.
214. $L = \{(2, 3c, c) \colon c \in \mathbb{Z}_5\} = \{(2, 0, 0), (2, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 4, 3), (2, 2, 4)\} = \{(2, 0, 0) + c(0, 3, 1) \colon c \in \mathbb{Z}_5\} = \{(2, 0, 0)\} + L(\{(0, 3, 1)\})$.
215. a) $\left\{\left(c_1, c_2, \frac{c_1-9c_2-2}{11}, \frac{-5c_1+c_2+10}{11}\right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$, $(2, 0, 0, 0)$, $\{(2, 0, 0, 0) + c_1(11, 0, 1, -5) + c_2(0, 11, -9, 1) \colon c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$;
b) $\{(c_1, c_2, -33c_1 + 22c_2 - 11, 24c_1 - 16c_2 + 8) \colon c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $(-1, -1, 0, 0)$, $\{(-1, -1, 0, 0) + c_1(1, 0, -33, 24) + c_2(0, 1, 22, -16) \colon c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\{(0, 0, 1, 1) + c_1(1, 0, -4, 0) + c_2(0, 1, -3, 0) \colon c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$;
e) $\left\{\left(\frac{(9+\mathrm{i})c_1+(3-2\mathrm{i})c_2+2\mathrm{i}c_3+(\mathrm{i}-4)}{6}, c_1, c_2, c_3\right) : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\right\}$, $\left(\frac{\mathrm{i}-4}{6}, 0, 0, 0\right)$, $\left\{\left(\frac{\mathrm{i}-4}{6}, 0, 0, 0\right) + c_1(9\mathrm{i} - 1, 6\mathrm{i}, 0, 0) + c_2(3-2\mathrm{i}, 0, 6, 0) + c_3(1, 0, 0, -3\mathrm{i}) \colon c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\right\}$.
216. $\left\{\begin{pmatrix} 2+b-2c+2d & b \\ c & d \end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$.
217. Olgu $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}$ võrrandisüsteemi $Ax = 0$ lahend. Seega $A\mathbf{x} + \mathrm{i}A\mathbf{y} = 0$, millest $A\mathbf{x} = 0$ ja $A\mathbf{y} = 0$. Järelikult $\mathbf{x}$ (ja $\mathbf{y}$) on samuti süsteemi $Ax = 0$ lahendid.
218. Ilmselt tundmatuid on 5. Olgu süsteemi mingiks võrrandiks $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$. Et c_1, c_2, c_3 on võrrandi lahendid, tekib kordajate a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 määramiseks võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 - 2a_3 + 2a_4 - a_5 = 0, \\ 3a_1 + 13a_2 - a_3 + 2a_4 + a_5 = 0, \\ 2a_1 + 7a_2 - 8a_3 + 4a_4 - 5a_5 = 0. \end{cases}$$

Selle süsteemi üldlahend on $(70c_1 - 5c_2, -16c_1 + c_2, 4c_1 - c_2, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
a) On teada, et kui süsteemi üldlahendis on k vaba tundmatut, siis sisaldab LFS k vektorit. Seega praegu peab süsteemi üldlahendis olema 3 vaba tundmatut. Ühe võrrandi puhul on süsteemi maatriksi astak 0 (kui võrrand on kujul $0 = 0$) või 1. Seega vabu tundmatuid jääb kas $5 - 0 = 5$ või $5 - 1 = 4$, aga mitte 3. Järelikult nõutavat süsteemi ei leidu.
b) $\begin{cases} 70x_1 - 16x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$
c) saame punktist b), kui lisame kolmandaks võrrandiks ülejäänud kahe võrrandi lineaarkombinatsiooni (näiteks kordame mõnd võrrandit vms).

219. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.
222. a) leidugu b', $c' \in R$ nii, et $ab' = b$ ja $bc' = c$, siis $a(b'c') = c$;
b) leidugu b', $c' \in R$ nii, et $ab' = b$ ja $ac' = c$, siis $a(b' \pm c') = b \pm c$;
c) leidugu $b' \in R$ nii, et $ab' = b$, siis $a(b'c) = bc$.
223. Kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $au = b$ ja $bv = a$ mingite $u, v \in R$ korral. Seega $auv = a$ ehk $a(uv - 1) = 0$. Et R on nulliteguriteta ja $a \neq 0$, siis $uv = 1$.
Vastupidi, kui $a = bu$, kus e on pööratav, siis $b = au^{-1}$. Oleme leidnud, et $a \mid b$ ja $b \mid a$.
224. a) Kehtigu $a = \text{SÜT}(a, b)$, siis $a \mid b$. Vastupidi, kui $a \mid b$, siis seetõttu, et $a \mid a$, kehtib $a = \text{SÜT}(a, b)$.
b) Olgu $d = \text{SÜT}(a, b)$, siis $d \mid a$, $d \mid b$, mistõttu $d \mid bc$ ja $d \mid a + bc$.
Kui $p \mid a + bc$ ja $p \mid b$, siis $p \mid bc$, mistõttu $p \mid a$. Järelikult $p \mid d$. Kokkuvõttes $d = \text{SÜT}(a + bc, b)$.
c) Olgu $u \in R$ pööratav ning $d = \text{SÜT}(a, b)$. Siis $d \mid au$.
Kui $p \mid au$ ja $p \mid b$, siis leidub p' nii, et $pp' = au$, millest $p(p'u^{-1}) = a$, seega $p \mid a$. Järelikult $p \mid d$. Kokkuvõttes $d = \text{SÜT}(au, b)$.
d) Olgu u pööratav ja $d = \text{SÜT}(a, b)$. Siis $d \mid a$, millest $da' = a$, seega $du(u^{-1}a') = a$. Järelikult $du \mid a$. Analoogiliselt näitame, et $du \mid b$.
Kui $p \mid a$ ja $p \mid b$, siis $p \mid d$, millest $pd' = d$, seega $p(d'u) = du$. Järelikult $p \mid du$. Kokkuvõttes $du = \text{SÜT}(a, b)$.
225. Saame, et $a \cdot (a^{-1}b) = b$. Kui $x \mid a$, siis $x \neq 0$, seega $x \mid u$. Jaguvus $u \mid x$ kehtib niikuinii (ka juhul, kui $x = 0$).
226. a) SÜT(975, 645) = 15, VÜK(975, 645) = 41925; b) SÜT(975, 645) = 1, VÜK(975, 645) = 1.
227. Tähistame $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$. Lihtne kontroll näitab, et iga $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ korral $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$ ning $z_1 \mid z_2 \Rightarrow N(z_1) \mid N(z_2)$. (Vasakul on jaguvus ringis $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, paremal ringis $\mathbb{Z}$.)
Paneme tähele, et pööratavad elemendid $U\left(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\right) = \{1, -1\}$. Tõepoolest, oletame, et $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ on pööratav, siis $z \mid 1$, seega $N(z) \mid 1$, millest $N(z) = 1$. Seega $z = 1$ või $z = -1$. Siit järeldub ka, et $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kõik assotsieeritud elemendid on võrdsed või erinevad märgi poolest.
Paneme tähele, et $\left(2 - \sqrt{-5}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{-5}\right) = 9 = 3 \cdot 3$. Ilmselt tegurid ei ole assotsieeritud. Näitame, et nad on taandumatud. Oletame, et $z \in \{3, 2 \pm \sqrt{-5}\}$ ja $z = z_1 \cdot z_2$, kus $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Siis $9 = N(z) = N(z_1) \cdot N(z_2)$. Kuna $a^2 + 5b^2 \neq 3$ iga $a, b \in \mathbb{Z}$ korral, siis kas $N(z_1) = 1$ või $N(z_2) = 1$. Siit järeldub, et z_1 või z_2 on pööratav.
228. Ei ole, sest ringis $\mathbb{Z}_8[X]$ leiduvad nullitegurid, aga faktoriaalne ring on defineeritud eeldusel, et nullitegurid puuduvad.
229. a) Näitame, et $\text{SÜT}\left(3, 1 + \sqrt{-5}\right) = 1$. Kehtigu $p \mid 3$, $p \mid 1 + \sqrt{-5}$. Siis $N(p) \mid 9$ ja $N(p) \mid 6$. Seega $N(p) \mid 3 = \text{SÜT}(9, 6)$. Järelikult $N(p) = 1$ või $N(p) = 3$. Kuna $N(p) = 3$ on võimatu, siis $p \in \{\pm 1\}$, millest järeldub, et $p \mid 1$.
Olgu nüüd $t = \text{VÜK}\left(3, 1 + \sqrt{-5}\right)$. Siis $3 \mid t$ ja $1 + \sqrt{-5} \mid t$, seega $9 \mid N(t)$, $6 \mid N(t)$, mistõttu $18 = \text{VÜK}(9, 6) \mid N(t)$.
Samas $3 \mid 3 + 3\sqrt{-5}$ ning $1 + \sqrt{-5} \mid 3 + 3\sqrt{-5}$, millest järeldub, et $t \mid 3 + 3\sqrt{-5}$, seega $N(t) \mid 54$. Analoogiliselt $3 \mid 6$ ja $1 + \sqrt{-5} \mid 6$, mistõttu $t \mid 6$ ja järelikult $N(t) \mid 36$. Saadud tulemused annavad, et $N(t) \mid \text{SÜT}(54, 36) = 18$.
Kokkuvõttes $N(t) = 18$. Ent see on võimatu, kuna ei leidu täisarvusid a ja b omadusega $a^2 + 5b^2 = 18$. Seega $\text{VÜK}\left(3, 1 + \sqrt{-5}\right)$ ei eksisteeri.
b) Olgu $d = \text{SÜT}\left(6, 3 + 3\sqrt{-5}\right)$. Kuna $d \mid 6$, $d \mid 3 + 3\sqrt{-5}$, siis $N(d) \mid 36$ ja $N(d) \mid 54$, mistõttu $N(d) \mid 18$. Samas $1 + \sqrt{-5} \mid 6$ ja $1 + \sqrt{-5} \mid 3 + 3\sqrt{-5}$, mistõttu $1 + \sqrt{-5} \mid d$, seega $6 \mid N(d)$. Analoogiliselt $3 \mid 6$ ja $3 \mid 3 + 3\sqrt{-5}$, millest $3 \mid d$, järelikult $9 \mid N(d)$. Kokkuvõttes $18 \mid N(d)$.
Ent $N(d) = 18$ on võimatu, järelikult $\text{SÜT}\left(6, 3 + 3\sqrt{-5}\right)$ ei eksisteeri.

Olgu $t = \text{VÜK}\left(6, 3+3\sqrt{-5}\right)$, siis $6 \mid t$ ja $3+3\sqrt{-5} \mid t$. Järelikult $36 \mid N(t)$ ja $54 \mid N(t)$, millest $108 \mid N(t)$. Teiselt poolt, $6 \mid 18$ ja $3+3\sqrt{-5} \mid 18$, mistõttu $t \mid 18$, seega $N(t) \mid 324$. Analoogiliselt, $6 \mid 6+6\sqrt{-5}$ ja $3+3\sqrt{-5} \mid 6+6\sqrt{-5}$, mistõttu $t \mid 6+6\sqrt{-5}$ ja järelikult $N(t) \mid 216$. Kokkuvõttes $N(t) \mid \text{VÜK}(324, 216) = 108$. Niisiis $N(t) = 108$. Juhtum $a^2+5b^2 = 108$ on aga võimatu (vt modulo 5, siis vasakul on 0, 1 või 4, paremal aga 3). Seega $\text{VÜK}\left(6, 3+3\sqrt{-5}\right)$ ei eksisteeri.
c) Olgu $p \mid 5$, $p \mid 1+\sqrt{-5}$, siis $N(p) \mid 25$ ja $N(p) \mid 6$, millest $N(p) \mid 1 = \text{SÜT}(6, 25)$. Seega $p = \pm 1$. Kokkuvõttes $\text{SÜT}\left(5, 1+\sqrt{-5}\right) = 1$.
Olgu $m = m_1 + m_2\sqrt{-5}$. Kui $5 \mid m$, $1+\sqrt{-5} \mid m$, siis leiduvad $p = p_1 + p_2\sqrt{-5}$ ja $q = q_1 + q_2\sqrt{-5}$ selliselt, et $5p_1 + 5p_2\sqrt{-5} = m_1 + m_2\sqrt{-5} = q_1 - 5q_2 + (q_1+q_2)\sqrt{-5}$. Seostest $5p_1 = q_1 - 5q_2$ ja $5p_2 = q_1 + q_2$ saame, et $5 \mid q_1$, $5 \mid q_2$. Niisiis $5(1+\sqrt{-5}) \mid q\left(1+\sqrt{-5}\right) = m$.
Kuna $5\left(1+\sqrt{-5}\right)$ on ka arvude 5 ja $1+\sqrt{-5}$ kordne, siis $\text{VÜK}\left(5, 1+\sqrt{-5}\right) = 5\left(1+\sqrt{-5}\right)$.
230. Olgu $h = \text{SÜT}(f, g)$. Näitame, et $h = \text{SÜT}(\alpha f, \beta g)$.
Kuna leiduvad $f_1, g_1 \in K[X]$ omadusega $f_1 h = f$ ja $g_1 h = g$, siis $\alpha f_1 h = \alpha f$ ja $\beta g_1 h = \beta g$. Niisiis $h \mid \alpha f$, $h \mid \beta g$.
Olgu nüüd polünoom $p \in K[X]$ omadusega $p \mid \alpha f$, $p \mid \beta g$, st. leiduvad $f_2, g_2 \in K[X]$ omadusega $f_2 p = \alpha f$ ja $g_2 p = \beta g$, siis $\alpha^{-1} f_2 p = f$ ja $\beta^{-1} g_2 p = g$. Järelikult $p \mid f$ ja $p \mid g$, mistõttu $p \mid h$.
231. a) $q = X^2 - 2X + 4$, $r = 3X + 11$;
b) $q = 5X^2 - 15X + 34$, $r = -72X - 62$;
c) $q = 0$, $r = 2X^2 - 3X + 1$;
d) $q = 2X^2 + 3X + 11$, $r = 25X - 5$.
232. Ringis $\mathbb{Z}_3[X]$:
a) $q = X^2 + \overline{2}$, $r = \overline{0}$;
b) $q = \overline{2}X^2 + \overline{2}$, $r = \overline{2}X + \overline{1}$.
Ringis $\mathbb{Z}_5[X]$:
a) $q = X^2 + \overline{2}$, $r = \overline{3}X + \overline{2}$;
b) $q = \overline{2}X^2$, $r = \overline{2}X$.
Ringis $\mathbb{Q}[X]$:
a) $q = X^2 + 2$, $r = 3X - 3$;
b) $q = 2X^2 + 5$, $r = 2X + 10$.
235. $(a, b, c) = (\lambda+1, \lambda, 0)$, kus $\lambda \in \mathbb{Q}$, või $(a, b, c) = (2-\lambda^2, 1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.
236. $(a, b) = (-1, 0)$.
237. a) jah, b) ei, c) ei.
238. X, $X+\overline{1}$, $X+\overline{2}$, $\overline{2}X$, $\overline{2}X+\overline{1}$, $\overline{2}X+\overline{2}$, $X^2+\overline{1}$, $X^2+X+\overline{2}$, $X^2+\overline{2}X+\overline{2}$, $\overline{2}X^2+\overline{2}$, $\overline{2}X^2+X+\overline{1}$, $\overline{2}X^2+\overline{2}X+\overline{1}$.
240. a) $u = -X-1$, $v = X+2$;
b) $u = 1$, $v = -X-1$;
c) $u = \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$, $v = -\frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}X + 1$;
d) $u = X$, $v = -3X^2 - X + 1$;
e) $u = -X-1$, $v = X^3 + X^2 - 3X - 2$;
f) $u = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}$, $v = \frac{1}{2}X^4 - X^2 - 1$.
241. Algoritm lõpetab töö, sest pööratava e ja nullist erineva r korral $\delta(er) = \delta(r)$. Tõepoolest, $\delta(er) \geqslant \delta(r) = \delta(e^{-1}er) \geqslant \delta(er)$.
Asjaolu, et $r_k = \text{SÜT}(a, b)$, näidatakse analoogiliselt sellega, et standardne Eukleidese algoritm tagastab suurima ühisteguri. (Pööratava elemendiga korrutamine ei mõjuta jaguvust.)
Eesmärk on esitada $r_k = au + bv$. Saame, et $r_1 = a - bq_1$, millest $e_1 r_1 = e_1 a - e_1 q_1 b$. Teisest reast $r_2 = b - e_1 r_1 q_2 = b - (e_1 a - e_1 q_1 b) q_2$. Seega $e_2 r_2 = e_2 b - e_2(e_1 a - e_1 q_1 b) q_2$. Nüüd kolmandast reast $r_3 =$

$e_1r_1 - e_2r_2q_3$ jne. Näeme, et u ja v avaldis sisaldab antud pööratavaid tegureid $e_1, \ldots, e_k$.
242. Eukleidese algoritm garanteerib mingid $u, v \in R[X]$ nii, et $d = u' \cdot f + v' \cdot g$. Kui $\deg u' < m-k$ ja $\deg v' < n-k$, siis on lahendamine lõppenud.
Oletame näiteks, et $\deg u' \geqslant m-k$. Kuna $d = \text{SÜT}(f, g)$, siis leiduvad $f_1, g_1 \in R[X]$ omadustega $f = d \cdot f_1$ ja $g = d \cdot g_1$. Sealjuures $d \cdot (u'f_1 + v'g_1) = d$, millest järeldub, et $\deg(u'f_1 + v'g_1) = 0$. Jagame u' jäägiga g_1-ga, nii leiame $q, r \in R[X]$ nii, et $u' = g_1 \cdot q + r$.
Jäägi r kohta on kaks võimalust.
1) Kui $r = 0$, siis $\deg(u'f_1 + v'g_1) = 0$ tõttu saame $\deg g_1 + \deg(qf_1 + v') = 0$. Juhul $qf_1 + v' \neq 0$ kehtib $\deg g_1 = 0$, mis on vastuolus nõudega $\deg g > \deg d$. Juhul $v' = -q \cdot f_1$ saame $\deg((g_1 \cdot q) \cdot f_1 - (q \cdot f_1) \cdot g_1) = 0$, mis on võimatu.
2) Seega $0 \leqslant \deg r < \deg g_1 = m-k$. Tähistades $u := r$ ja $v := f_1 \cdot q + v'$, kehtib $d = u' \cdot f + v' \cdot g = u \cdot f + v \cdot g$. Ilmselt $\deg u \leqslant m-k-1$. Saame, et $m + \deg v = \deg(v \cdot g) = \deg(d - u \cdot f) = \deg(u \cdot f) = n + \deg u \leqslant n + m - k - 1$. Seega $\deg v \leqslant n - k - 1$.
243. a) $u = -3X + 4$, $v = 3X^2 + 2X + 1$;
b) $u = \frac{1}{16}X^2 - \frac{3}{8}X + \frac{9}{16}$, $v = -\frac{1}{16}X^3 + \frac{3}{16}X^2 + \frac{1}{4}$;
c) $u = \frac{6}{17}X - \frac{11}{17}$, $v = -\frac{6}{17}X^2 + \frac{5}{17}X - \frac{25}{17}$;
d) $u = -\frac{16}{3}X^2 + \frac{37}{3}X + \frac{26}{3}$, $v = \frac{16}{3}X^3 - \frac{53}{3}X^2 - \frac{37}{3}X - \frac{23}{3}$.
244. Ringis $\mathbb{Z}_3$:
a) $\text{SÜT}(f, g) = X + \overline{2}$, $\text{VÜK}(f, g) = X^4 + X^2 + \overline{1}$;
b) $\text{SÜT}(f, g) = X + \overline{1}$, $\text{VÜK}(f, g) = X^6 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{2}$;
c) $\text{SÜT}(f, g) = \overline{1}$, $\text{VÜK}(f, g) = X^7 + \overline{2}X^6 + X^5 + \overline{2}X^4 + \overline{2}X^3 + \overline{2}X + \overline{1}$.
Ringis $\mathbb{Z}_5$:
a) $\text{SÜT}(f, g) = \overline{1}$, $\text{VÜK}(f, g) = X^5 + \overline{2}X^4 + \overline{4}X^3 + \overline{4}X + \overline{2}$;
b) $\text{SÜT}(f, g) = X^2 + \overline{3}X + \overline{2}$, $\text{VÜK}(f, g) = X^5 + \overline{3}X^4 + X^3 + \overline{3}X^2 + X + \overline{2}$;
c) $\text{SÜT}(f, g) = X + \overline{3}$, $\text{VÜK}(f, g) = X^6 + X^5 + X^2 + \overline{2}X + \overline{1}$.
Ringis $\mathbb{Q}$:
a) $\text{SÜT}(f, g) = 1$, $\text{VÜK}(f, g) = X^5 + 2X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 2$;
b) $\text{SÜT}(f, g) = X + 1$, $\text{VÜK}(f, g) = X^6 - 3X^4 + 2X^2 - X - 1$;
c) $\text{SÜT}(f, g) = 1$, $\text{VÜK}(f, g) = X^7 - X^6 - 2X^5 + 5X^4 - 4X^3 + 2X - 2$.
246. a) 0; b) 1.
247. $(X-2)(X+1)^2$.
248. a) $q = X^3 - X^2 + 3X - 3$, $r = 5$;
b) $q = 2X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 39X + 109$, $r = -327$;
c) $q = 4X^2 - (4\mathrm{i} + 3)X + (7\mathrm{i} - 1)$, $r = 8 - 6\mathrm{i}$;
d) $q = X^2 - 2\mathrm{i}X - (2\mathrm{i} + 5)$, $r = 8\mathrm{i} - 9$.
249. a) 136; b) 286; c) $\frac{151}{16}$; d) $37 - 85\mathrm{i}$; e) $-23\mathrm{i} - 29$.
250. a) $f = (X+1)^4 - 2(X+1)^3 - 3(X+1)^2 + 4(X+1) + 1$;
b) $f = (X-1)^5 + 5(X-1)^4 + 10(X-1)^3 + 10(X-1)^2 + 5(X-1) + 1$;
c) $f = (X-2)^4 - 18(X-2) + 38$;
d) $f = (X+\mathrm{i})^4 - 2\mathrm{i}(X+\mathrm{i})^3 - (1+\mathrm{i})(X+\mathrm{i})^2 - 5(X+\mathrm{i}) + (7+5\mathrm{i})$;
e) $f = (X-2\mathrm{i}+1)^4 - (X-2\mathrm{i}+1)^3 + 2(X-2\mathrm{i}+1) + 1$.
251. a) 3; b) 4; c) 2.
252. $7X - 10$.
253. $a = -5$.

254. a) $p=-6$, $q=12$, $r=-8$;
b) $p=-\frac{16}{3}$, $q=8$, $r=-\frac{16}{3}$;
c) $p=-\frac{1}{48}$, $q=\frac{1}{2}$, $r=-\frac{4}{3}$.
255. a) $a=0$, kordsus 2;
b) $a=5$, kordsus 2;
c) $a=-6$, kordsus 3.
256. Oletame, et c on polünoomi f kahekordne juur, siis $1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{6}+\ldots+\frac{c^n}{n!}=0$ ning $1+c+\frac{c^2}{2}+\ldots+\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}=0$. Võrduste lahutamisel selgub, et $c^n=0$, mis on võimatu ($c=0$ ei ole polünoomi f juur).
257. a) $a=\pm 54\sqrt{3}$;
b) $a=-216$;
c) $a\in\{-100,-64\}$.
258. Olgu $x_k=a+kd$, kus $k=1,2,3,4$ ning a ja d on mingid fikseeritud arvud. Juurte summa avaldisest leiame, et $4a+10d=16$, mistõttu $2a+5d=8$. Kuna $(x-(a+d))(x-(a+2d))(x-(a+3d))(x-(a+4d))=(x^2-(2a+5d)x+(a+d)(a+4d))\cdot(x^2-(2a+5d)x+(a+2d)(a+3d))$, siis on meil polünoom uue muutuja x^2-8x suhtes. Tegurdame antud polünoomi liikme x^2-8x suhtes: $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+105$. Polünoomi $t^2+22t+105$ juured on -15 ja -7, millest leiame x väärtused: $x^2-8x+15=0$ annab, et $x=3$, $x=5$, ning $x^2-8x+7=0$ annab, et $x=7$, $x=1$.
263. a) $3,\ 2\pm\sqrt{3}$;
b) $-2,\ -1,\ \pm\sqrt{2}$;
c) $1,\ 2,\ \pm\sqrt{3}$;
d) $1,\ 3,\ \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$;
e) $1,\ 2,\ \pm 4$;
f) $\frac{3}{2},\ \frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$.
264. a) $f=-\frac{4}{3}X^3+10X^2-\frac{65}{3}X+15$;
b) $f=-\frac{i+1}{2}X^3-\frac{1}{2}X^2+\frac{i-1}{2}X+\frac{5}{2}$;
c) $f=X^3-3X^2+1$;
d) $f=X^4-X^2+1$.
265. a) $g=X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)$, $f=(X-1)^4(X-i)(X+i)$;
b) $g=X^2-3X+2=(X-2)(X-1)$, $f=(X-2)^3(X-1)^2$;
c) $g=X^2-5X-1=\left(X-\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\left(X-\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$, $f=g^3$;
d) $g=X^2-5X+2=\left(X-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(X-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$, $f=g^3$.
266. a) $\frac{1}{X+5}+\frac{1}{X-2}$; b) $\left(\frac{1}{2}X-\frac{3}{4}\right)-\frac{\frac{13}{4}}{2X+1}+\frac{4}{X+1}$; c) $(X-1)+\frac{2}{X+2}+\frac{1}{X-1}$; d) $\frac{4}{X}-\frac{3}{X-1}+\frac{9}{(X-1)^2}$; e) $1+\frac{2}{X-1}-\frac{1}{X}-\frac{1}{X^2}$; f) $1-\frac{4}{X}+\frac{2}{X^2}+\frac{2}{X+1}+\frac{3}{(X+1)^2}$; g) $\frac{1}{X}-\frac{X}{X^2+1}$; h) $\frac{\frac{1}{2}}{X+1}-\frac{X-1}{2(X^2+1)}$; i) $\frac{1}{X}-\frac{X+2}{X^2+2X+2}$; j) $X-4+\frac{8X+32}{X^2+4X+8}$;
k) $\frac{1}{(X-c_1)f'(c_1)}+\ldots+\frac{1}{(X-c_n)f'(c_n)}$, kus $c_1,\ldots,c_n$ on polünoomi f juured.
267. a) $\frac{1}{4(X-1)}-\frac{1}{4(X+1)}+\frac{i}{4(X+i)}-\frac{i}{4(X-i)}$; b) $\frac{\frac{1}{8i-8}}{X-(i+1)}+\frac{\frac{1}{8i+8}}{X-(i-1)}-\frac{\frac{1}{8i-8}}{X+(i+1)}-\frac{\frac{1}{8i+8}}{X+(i-1)}$; c) $\frac{2}{X-1}-\frac{\frac{2-i}{2}}{X-i}-\frac{\frac{2+i}{2}}{X+i}$;
d) $\frac{1}{3(X-1)}-\frac{2}{(3\sqrt{3}i+3)\cdot\left(X-\frac{\sqrt{3}i-1}{2}\right)}+\frac{2}{(3\sqrt{3}i-3)\cdot\left(X+\frac{\sqrt{3}i+1}{2}\right)}$; e) $\frac{1}{X}-\frac{1}{(i+1)(X-i+1)}+\frac{1}{(i-1)(X+i+1)}$; f) $X-4-\frac{4i-4}{X-2i+2}+\frac{4i+4}{X+2i+2}$; g) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\exp\frac{-2k(n-1)\pi}{n}}{n\left(X-\exp\frac{2k\pi}{n}\right)}$;
270. on lineaarteisendus, $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

271. a) nullmaatriks;
b) pole lineaarteisendus, välja arvatud juhul, kui $\vec{a} = \vec{0}$;
c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
d) pole lineaarteisendus;
e) pole lineaarteisendus, välja arvatud juhul, kui $\vec{a} = \vec{0}$;
f) pole lineaarteisendus, välja arvatud juhul, kui $\vec{a} = \vec{0}$;
g) $\begin{pmatrix} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{pmatrix}$;
h) $\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$;
i) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;
j) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
k) pole lineaarteisendus;
l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

272. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^n \end{pmatrix}$;
b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & a & 2ab & \dots & nab^{n-1} \\ 0 & 0 & a^2 & \dots & \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

f) pole kujutus $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$; g) pole kujutus $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.

273. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

274. Üks teisendus olgu D ise, teise maatriksiks (baasi $1, x, x^2, \dots, x^n$ suhtes) sobib näiteks
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

275. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

276. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

277. jah.

278. ei. (vt. nullkujutust)

279. jah.

280. a) jah; b) ei. (vt. nt. $L_1 = \mathrm{span}(e_1, e_2)$ ja $L_2 = \mathrm{span}(e_2, e_3)$ ning $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = e_2$, $\varphi(e_2) = 0$)
281. a) jah; b) ei; c) ei.
282. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
b) $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} ae & ag & be & bg \\ af & ah & bf & bh \\ ce & cg & de & dg \\ cf & ch & df & dh \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} a+e & g & b & 0 \\ f & a+h & 0 & b \\ c & 0 & d+e & g \\ 0 & c & f & d+h \end{pmatrix}$.
283. Olgu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, seega $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
b) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, seega $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{4} & -4 & -5 \\ \frac{9}{4} & 3 & 4 \end{pmatrix}$;
c) $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, seega $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
284. Ei. Kui näiteks $A = \Theta$ (nullmaatriks), siis võib C olla üldse suvaline (regulaarne).
285. vahetu kontroll.
286. A regulaarne, siis $A^{-1}ABA = BA$. Sarnaste maatriksite astakud on võrdsed, seega sobivad $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
287. Maatriksid, mis kommuteeruvad kõigi regulaarsete maatriksitega. Kui A on selline, siis $B = C^{-1}AC$ annab, et $C^{-1}CA = B$, millest $A = B$. Vastupidi, kuna $A \sim C^{-1}AC$ mistahes pööratava maatriksi C korral, siis juhul, kui $A = C^{-1}AC$ iga pööratava maatriksi C korral, saame $CA = AC$.
288. vahetu kontroll.
290. Olgu $x, y \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\lambda \in K$, siis $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) = 0$, seega $x + \lambda y \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.
Olgu $\varphi(u), \varphi(v) \in \mathrm{Im}\,\varphi$, $\lambda \in K$, siis $\varphi(u) + \lambda\varphi(v) = \varphi(u + \lambda v) \in \mathrm{Im}\,\varphi$.
291. $\varphi(\vec{x}) = 0$ tähendab, et $\vec{x} \perp \vec{a}$. Seega $\mathrm{Ker}\,\varphi$ on tasand, mille normaal on $\vec{a}$. Kujutis $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}$, sest iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral $\varphi(\frac{\lambda}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}) = \lambda$.
292. $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ tähendab, et $\vec{x} \parallel \vec{a}$. Seega $\mathrm{Ker}\,\varphi = \langle\vec{a}\rangle$. $\mathrm{Im}\,\varphi$ on tasand, mis on risti vektoriga $\vec{a}$.

293. $\operatorname{Ker} D = \operatorname{span} 1$, $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
294. a) $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{span}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$, $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{span}(1, 1, 1)$;
b) $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{span}(1, 1, 1)$, $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{span}((2, 1, 1), (-1, -2, 1))$.
295. a) Kuna A on pööratav, siis $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ ning $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$. (Lihtne kontroll.)
b) $\operatorname{Ker} \varphi$ baasiks sobib näiteks $(2, -1)$ ning $\operatorname{Im} \varphi$ baasiks sobib $(1, 3)$.
c) $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^3$.
d) $\operatorname{Ker} \varphi$ baasiks sobib näiteks $(4, 0, -5, -3)$, $(0, 4, 3, 1)$ ning
$\operatorname{Im} \varphi$ baasiks sobib näiteks $(2, -1, 2, 1)$, $(-1, 1, 1, 0)$.
e) $\operatorname{Ker} \varphi$ baasiks sobib näiteks $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ ning $\operatorname{Im} \varphi$ baasiks sobib näiteks $(1, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1)$.
296. Parajasti siis, kui alamruumi $V_1' \subseteq V_1$ korral $\dim V_1 - \dim V_1' \leqslant \dim V_2$. Võtame alamruumi $V_1' \subseteq V_1$ ning V_1' baasi $a_1, \ldots, a_k$. Siis saame ta täiendada kogu ruumi baasiks $a_1, \ldots, a_n$. Valime V_2-s lin-sõltumatud vektorid $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ning defineerime $\varphi(a_1) = \ldots = \varphi(a_k) = 0$, $\varphi(a_i) = b_i$, $i = k+1, \ldots, n$. Siis $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_k) = V_1'$, kuna $\varphi\left(\sum_i \lambda_i a_i\right) = 0$ annab, et $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i b_i = 0$, mistõttu $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, ehk $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in V_1'$.
Kui $\dim V_1 - \dim V_1' > \dim V_2$, siis peab süsteem $\varphi(a_{k+1}), \ldots, \varphi(a_n)$ olema l-sõltuv, mistõttu leidub φ tuuma kuuluv $a_{k+1}, \ldots, a_n$ kaudu esituv nullist erinev vektor. Järelikult $\operatorname{Ker} \varphi \supsetneq \langle a_1, \ldots, a_k\rangle = V_1'$.
297. Olgu φ pöördteisendus ψ. Et φ on bijektiivne, siis iga $x, y \in V$ korral leiduvad $u, v \in V$ nii, et $\varphi(u) = x$, $\varphi(v) = y$. Nüüd $\psi(x + \lambda y) = \psi(\varphi(u) + \lambda\varphi(v)) = \psi(\varphi(u + \lambda v)) = u + \lambda v = \psi(x) + \lambda\psi(y)$.
298. Kui φ on injektiivne, siis $\varphi(x) = 0 = \varphi(0)$ annab, et $x = 0$. Kui $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, siis olukorras $\varphi(x) = \varphi(y)$ saame, et $\varphi(x - y) = 0$, seega $x - y \in \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, mistõttu $x = y$.
Olgu $\dim V = n$. Vastavalt valemile $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \varphi(V) = n$ on $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ samaväärne sellega, et $\dim \varphi(V) = n$. See on samaväärne asjaoluga, et $\varphi(V) = V$ ehk φ on sürjektiivne.
299. a) k esimest veergu on nullveerud, ülejäänud $n - k$ veergu on sõltumatud;
b) k esimest rida on sõltumatud ja ülejäänud $n - k$ rida on nullread.
300. Kui $e_1, \ldots, e_k$ on L lin-sõltumatu süsteem, siis $\lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_k\varphi(e_k) = 0$ annab, et $\varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k) = 0$, millest $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = 0$, seega $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
301. Erijuht eelmisest: $L = V$ ja $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, kuna φ on üksühene.
302. a) Kui $x, y \in \operatorname{Im} \varphi$, siis $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$, mistõttu $\varphi(a + \lambda b) = x + \lambda y$. Kui $x, y \in \varphi^{-1}(L)$, siis $\varphi(x), \varphi(y) \in L$, mistõttu $\varphi(x + \lambda y) \in L$.
b) pööratav lineaarteisendus viib baasi baasiks. Olgu $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)$ vektorruumi $\varphi(L)$ baas, siis $e_1, \ldots, e_k$ on lin-sõltumatu süsteem alamruumis L. Tegemist on ka L moodustajate süsteemiga: oletame, et leidub vektor $e_0 \notin \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$, $e_0 \in L$, siis $e_0, \ldots, e_k$ on lin-sõltumatu, mistõttu $\varphi(e_0), \ldots, \varphi(e_k)$ on lin-sõltumatu $\varphi(L)$-s, vastuolu.
Olgu $e_1, \ldots, e_k$ vektorruumi $\varphi^{-1}(L)$ baas, siis $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)$ on vektorruumis L lin-sõltumatu. Tegemist on ka L moodustajate süsteemiga. Nimelt, kui oleks mingi $a_0 \in L$ omadusega, et $a_0 \notin \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$, siis φ pööratavuse tõttu saaksime tähistada e_0 nii, et $\varphi(e_0) = a_0$. Nüüd on $\varphi(e_0), \ldots, \varphi(e_k)$ lin-sõltumatu, mis on võimatu.
307. Maatriksi $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ omaväärtused $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on parajasti polünoomi $\det(A - \lambda E)$ juured. Sealjuures arendades seda polünoomi, näeme, et ta on kujul $(-1)^n\lambda^n - (-1)^n(a_{11} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + \det A$. Viète'i valemite põhjal järelduvad siit ülesande väited.
308. Element 0 on φ omaväärtus parajasti siis, kui $\operatorname{Ker} \varphi \neq 0$.
Olgu φ pööratav, siis φ on injektiivne ja seetõttu $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, mistõttu 0 ei ole φ omaväärtus.

Vastupidi, kui $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, siis $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim V$ tõttu on $\operatorname{Im}\varphi$ mõõde võrdne kogu ruumi mõõtmega. Seega langeb $\operatorname{Im}\varphi$ kogu ruumiga kokku (st. φ on sürjektiivne) ning $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ tõttu on φ injektiivne. Järelikult on φ pööratav.
309. vahetu kontroll.
310. Kui $x \neq 0$ on φ omavektor, siis $\varphi(x) = \lambda x$, kus $\lambda \neq 0$. Niisiis $x = \varphi(\lambda^{-1}x) \in \operatorname{Im}\varphi$.
311. Tähistame $\psi = \varphi - k1_V$. Olgu x lineaarteisenduse φ omavektor, siis mingi λ korral $\varphi(x) = \lambda x$. Saame, et $\psi(x) = (\lambda - k)x$, mistõttu x on ka ψ omavektor, mis vastab omaväärtusele $\lambda - k$.
Vastupidi (et ψ iga omavektor on φ omavektor) on analoogiline.
312. Olgu $\varphi(a) = \lambda a$, siis $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(\lambda a) = \lambda^2 a$. Analoogiliselt ülejäänud osad.
313. Olgu φ pööratav, $\varphi(a) = \lambda a$. Ülesande 308 põhjal $\lambda \neq 0$. Saame, et $\varphi(\lambda^{-1}a) = a$. Seega $\varphi^{-1}(a) = \lambda^{-1}a$.
Teiselt poolt, kui $\varphi^{-1}(a) = \mu a$, siis $a = \mu\varphi(a)$, millest $\varphi(a) = \mu^{-1}a$.
314. Olgu $\varphi(\varphi(a)) = \lambda^2 a$. Oletame, et λ ei ole φ omaväärtus. Siis kehtib iga x korral implikatsioon $\varphi(x) = \lambda x \Rightarrow x = 0$. Paneme tähele, et $\varphi(\varphi(a) + \lambda a) = \lambda(\varphi(a) + \lambda a)$, millest järeldub, et $\varphi(a) = -\lambda a$.
315. Olgu φ transponeerimisteisendus vektorruumil $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Olgu X selline, et $\varphi(X) = \lambda X$ mingi λ korral. Siis $X = \varphi(\varphi(X)) = \lambda^2 X$, millest järeldub, et kas $X = 0$ või $1 = \lambda^2$. Seega $\lambda = 1$ või $\lambda = -1$. Esimesel juhul sobivad omaväärtusteks kõik sümmeetrilised, teisel juhul aga kaldsümmeetrilised maatriksid.
316. Induktsioon vektorite arvu järgi. Omavektor pole nullvektor, seega juhul $n = 1$ väide kehtib. Olgu $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ sellised nullist erinevad vektorid, et $\varphi(x_i) = \lambda_i x_i$, $i = 1, \ldots, k+1$, kus skalaarid $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ on kõik erinevad. Teame, et $x_1, \ldots, x_k$ on sõltumatud. Näitame, et $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ on sõltumatu süsteem. Olgu $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0$, siis φ rakendamisel $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \alpha_i x_i = 0$ ning λ_{k+1}-ga korrutamisel $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{k+1} \alpha_i x_i = 0$. Lahutame need kaks võrdust, siis saame, et $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1})\alpha_i x_i = 0$, seega $(\lambda_i - \lambda_{k+1})\alpha_i = 0$, mistõttu $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Nüüd muidugi ka $\alpha_{k+1} = 0$, sest $x_{k+1} \neq 0$.
317. a) $\lambda_{1,2,3} = -1$ (algebraline kordsus 3), vastav omavektor $c(1, 1, -1)$ (geomeetriline kordsus 1, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
b) $\lambda_{1,2,3} = 2$ (algebraline kordsus 3), vastav omavektor $c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 0, 1)$ (geomeetriline kordsus 2, $|c_1| + |c_2| > 0$);
c) $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$, omaväärtusele 0 vastav omavektor on $c_1(1, 2, 3)$ ning omaväärtusele 1 vastav omavektor on $c_2(1, 1, 1)$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
d) $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$, omaväärtusele 1 vastav omavektor on $c_1(1, 0, -1) + c_2(0, 1, 2)$ (kus $|c_1| + |c_2| > 0$), omaväärtusele -1 vastav omavektor on $c(3, 5, 6)$ (kus $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
e) $\lambda_1 = 1$ (algebraline kordsus 1), vastav omavektor $c(1, 2, 1)$, kus $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
f) $\lambda_{1,2,3,4} = 2$, vastav omavektor on $c_1(1, 1, 1, 0) + c_2(0, 0, 1, 1)$, kus $|c_1| + |c_2| > 0$.
318. a) juhul $p = 2$ on omaväärtus 0 ning omavektor $(1, 1)$; juhul $p = 3$ on omaväärtused 0 ja 2, omaväärtusele 0 vastavad omavektorid $(1, 2)$ ja $(2, 1)$ ning omaväärtusele 2 vastavad omavektorid $(1, 1)$ ja $(2, 2)$;
b) juhul $p = 3$ omaväärtused puuduvad; juhul $p = 5$ on omaväärtused 0 ja 2, omaväärtusele 0 vastavad omavektorid on $c(3, 1)$, kus $c \in \{1, 2, 3, 4\}$ ning omaväärtusele 2 vastavad omavektorid on $c(2, 1)$, kus $c \in \{1, 2, 3, 4\}$.
319. vahetu kontroll.
320. Olgu λ_0 geomeetriline kordsus d ning olgu φ maatriks mingi baasi suhtes A. Näitame, et $(x - \lambda_0)^d \mid \det(A - xE)$. Olgu $e_1, \ldots, e_d$ lin-sõltumatud omavektorid, mis vastavad omaväärtusele λ_0. Jätkates $e_1, \ldots, e_d$ kogu vektorruumi baasiks e, on φ maatriks e suhtes selline, et esimesed d diagonaali elementi on λ_0 ning selles veerus mujal on 0. Sealjuures on A ja B sarnased, sest nad on sama lineaar-

teisenduse maatriksid eri baaside suhtes. Kuna sarnastel maatriksitel on samad karakteristlikud polünoomid, siis $\det(A - xE) = \det(B - xE)$. Arendades $\det(B - xE)$ esimese d veeru järgi, saame, et $(x-\lambda_0)^d \mid \det(B-xE)$, mida oligi tarvis.

321. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) kahekordsele omaväärtusele 3 vastab ainult üks sõltumatu omavektor $(1, 1)$, seega maatriksit diagonaalkujule viia ei saa;

c) kahekordsele omaväärtusele 0 vastab ainult üks sõltumatu omavektor $(1, 2)$, seega maatriksit diagonaalkujule viia ei saa;

d) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

f) on ainult üks ühekordne reaalne omaväärtus 1, seega maatriksit diagonaalkujule viia ei saa.

322. a) ei (1 geom. kordsus liiga väike);

b) jah;

c) jah.

325. skalaarkorrutise aksioomide kontroll on mõlemal juhul vahetu;

a) $\langle x, y\rangle = -1$;

b) $\langle x, y\rangle = 0$.

326. $\langle f, g\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + (2!)^2a_2b_2 + (3!)^2a_3b_3 + \ldots + (n!)^2a_nb_n$, kui $f = a_nX^n + \ldots + a_0$, $g = b_nX^n + \ldots + b_0$.

327. $\langle a, k_1a_1 + \ldots + k_ma_m\rangle = k_1\langle a, a_1\rangle + \ldots + k_m\langle a, a_m\rangle = 0$.

328. Olgu $\lambda x + \mu y = 0$, korrutame seda võrdust skalaarselt x ja y-ga. Saame, et $\lambda\langle x, x\rangle = 0$ ja $\mu\langle y, y\rangle = 0$. Siit $\lambda = \mu = 0$.

329. Korrutage võrdust $x = \lambda_1e_1 + \ldots + \lambda_ne_n$ skalaarselt järjest kõigi vektoritega $e_1, \ldots, e_n$. Selgub, et $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$.

331. $\langle a_1 + \ldots + a_m, a_1 + \ldots + a_m\rangle = \langle a_1, a_1\rangle + \ldots + \langle a_m, a_m\rangle$.

332. $AB = (4, 0, 2, 0, 4)$, $BC = (-1, 3, 1, 3, -4)$, $CA = (-3, -3, -3, -3, 0)$, $|AB| = |BC| = |CA| = 6$, kõigi sisenurkade koosinused on $\frac{1}{2}$ ja nurgad on $60°$.

333. Esimene omadus järeldub asjaolust, et $\|x\| > 0$, kui $x \neq 0$. Teine järeldub sellest, et $\alpha \in \mathbb{R}$ korral $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$. Kolmnurga võrratuse saame nii, et tõestame $\langle x+y, x+y\rangle \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$, kasutades Cauchy võrratust $2\langle x, y\rangle \leqslant 2\|x\|\|y\|$.

334. a) $\langle a_1, a_2\rangle = 2 + 6 + 4 - 12 = 0$, nõuame ülejäänud baasivektoritelt $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ omadust $\langle a, a_1\rangle = 0$, $\langle a, a_2\rangle = 0$, mis annab võrrandisüsteemi LFS-ga $(2, 2, 1, 0)$, $(-17, -10, 0, 1)$. Võtame $a_3 = (2, 2, 1, 0)$ ning olgu $a_4 = (-17, -10, 0, 1) + ka_1 + la_2 + ma_3$, kusjuures nõuame, et a_4 oleks ortogonaalne a_1, a_2 ja a_3-ga. Tarvis on saada ainult ortogonaalsus a_3-ga: $-34 - 20 + m(4 + 4 + 1) = 0$, millest $m = 6$; valime $a_4 = (-5, 2, 6, 1)$.

b) $\langle a_1, a_2\rangle = 0$, $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ määramiseks tekkiva võrrandisüsteemi LFS on $(1, -2, 1, 0)$, $(-7, 5, 0, 1)$, siit $a_3 = (1, -2, 1, 0)$ ja $a_4 = (-7, 5, 0, 1) + m(1, -2, 1, 0)$, millest tingimuse $\langle a_4, a_3\rangle = 0$ abil $m = \frac{17}{6}$, seega $a_4 = \frac{1}{6}(-25, -4, 17, 6)$.

335. a) $a_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

b) $a_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $a_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

336. a) $e_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (sest peab olema ka normeeritud),
normeerimata $e_2'(x) = x + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, kus k määrame seosest $\int_{-1}^{1} \left(x + k \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 0$, seega $k = 0$ ja $e_2'(x) = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,
normeerimata $e_3'(x) = x^2 + k \cdot \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, kus k määrame seostest $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + k \cdot x + l \cdot \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 0$ ja $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + k \cdot x + l \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot x\,\mathrm{d}x = 0$, seega $k = 0$ ja $l = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, millest $e_3'(x) = \frac{3x^2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.
b) $e_1'(x) = 1$,
normeerimata $e_2'(x) = x + k$, kus $k = 0$, seega $e_2'(x) = x$,
normeerimata $e_3'(x) = x^2 + kx + l$, kus $l = 0$ ja $k = 0$, seega $e_3'(x) = x^2$.

337. a) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (2, 3, -3, 2)$, $a_3 = (2, -1, -1, -2)$;
b) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (2, 5, 1, 3)$;
c) $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (3, 2, -3, -1)$, $a_3 = (463, 1589, 342, 3541)$.

338. Tegemist on tõesti skalaarkorrutamisega, kuna $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2 = 0$ parajasti juhul, kui $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$.
a) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 0)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$;
b) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -1, 0, 0)$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(4, 1, -5, 0)$, $a_3 = \frac{1}{\sqrt{105}}(5, 3, -1, -7)$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{30}}(10, 9, 7, 4)$.

341. $L^\perp = \{x \in E\colon \forall y \in L\ x \perp y\}$.
a) Vahetu kontroll skalaarkorrutamise omaduste abil.
b) Valime L ortogonaalse baasi $e_1, \ldots, e_k$ ning jätkame selle E ortogonaalseks baasiks $e_1, \ldots, e_n$. Vahetu kontroll näitab, et iga $x \in \operatorname{span}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ korral on x ortogonaalne kõigi vektoritega alamruumist L. Vastupidi, kui $x \perp y$ iga $y \in L$ korral, siis esitades $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, osutub, et $x \in \operatorname{span}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Seega $L^\perp = \operatorname{span}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Rakendades sarnast arutelu alamruumi $L^\perp$ jaoks leiame, et $(L^\perp)^\perp = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_k) = L$.
c) Olgu $x \in (L_1 + L_2)^\perp$, see tähendab, et iga $y \in L_1$, $z \in L_2$ korral $x \perp y + z$. Muuhulgas, võttes $z = 0$ saame, et $x \perp y$, võttes $y = 0$ saame, et $x \perp z$. Seega $x \in L_1^\perp$ ja $x \in L_2^\perp$.
Vastupidi, kui $x \in L_1^\perp$ ja $x \in L_2^\perp$, siis iga $y \in L_1$, $z \in L_2$ korral $x \perp y$ ja $x \perp z$, millest $x \perp y + z$, seega $x \in (L_1 + L_2)^\perp$.
d) $L_1^\perp + L_2^\perp = ((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = ((L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$.
e) Olgu $x \in E^\perp$, siis $\langle x, x\rangle = 0$ (sest $x \in E$), seega $x = 0$.
f) $\{0\}^\perp = (E^\perp)^\perp = E$.

342. a) LFS on $(-2, 2, 1, 0)$, $(-1, -1, 0, 1)$. Need vektorid on juba ortogonaalsed.
b) LFS on $(4, -2, 0, 1)$, $(0, 2, 8, -3)$, ortogonaliseerimisel saame näiteks $(4, -2, 0, 1)$, $(1, 1, 6, -2)$.
c) LFS on $(2, -5, 1, 0)$, $(1, -1, 0, 1)$, ortogonaliseerimisel saame näiteks $(2, -5, 1, 0)$, $(16, 5, -7, 30)$

343. Esitumine on lahendatud juba ül. 341b). Oletame, et $a = b + c = b_1 + c_1$, kus $b, b_1 \in L$ ja $c, c_1 \in L^\perp$. Siis $b - b_1 = c_1 - c$. Oleme saanud, et $b - b_1 \in L \cap L^\perp$, millest järeldub baasi esituse kaudu, et $b - b_1 = 0$. Seega $b = b_1$ ja $c = c_1$.

344. a) näeme, et baas alamruumile $L := \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3)$ on $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 2, -1)$. Valides $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + c$ leiame, et $b = (1, -1, -1, 5)$ ja $c = (3, 0, -2, -1)$.
Alternatiiv: valime alamruumile L ortogonaalse baasi $\frac{1}{2}e_1$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2)$. Nüüd projektsioon on $\langle a, \frac{1}{2}e_1\rangle \frac{1}{2}e_1 + \langle a, \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2)\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) = 2 \cdot \frac{1}{2}e_1 - 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) = (1, -1, -1, 5)$.

b) baas alamruumile $L := \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3)$ on $e_1 = (2, 1, 1, -1)$, $e_2 = (1, 1, 3, 0)$. Valides $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + c$ leiame, et $b = (3, 1, -1, -2)$ ja $c = (2, 1, -1, 4)$.

345. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

346. ortogonaalsed on: B, D, F;
$\det A = 5$, $\det B = 1$, $\det C = -8$, $\det D = 1$, $\det F = 1$.

347. $(\det A)^2 = (\det A) \cdot (\det A^T) = (\det A) \cdot (\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det E = 1$;
vastupidine väide ei kehti, näiteks $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, aga $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

348. Kui $AA^T = E_n$, siis A on regulaarne (teoreem maatriksite korrutise determinandist), seega leidub A^{-1}. Korrutades võrdust $AA^T = E_n$ vasakult A^{-1}-ga, leiame, et $A^T = A^{-1}$.

349. Olgu $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$. Kuna $e'_i = c_{1i}e_1 + \ldots + c_{n,i}e_n$ ning $\delta_{i,j} = \langle e'_i, e'_j \rangle = c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \ldots + c_{n,i}c_{n,j}$, siis maatriksi $C^T \cdot C$ elemendid on $\delta_{i,j}$ ehk $C^T \cdot C = E$. Seega C on ortogonaalmaatriks.

350. Tõestus tugineb tuntud omadusele $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

351. Diagonaalmaatriksi diagonaalil olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, pöördmaatriksi diagonaalil on $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ (seega need peavad eksisteerima, st. $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \neq 0$). Nõutav on, et diagonaalmaatriks transponeerituna (st. tema ise) langeks kokku pöördmaatriksiga, seega $\lambda_1 = \lambda_1^{-1}$ jne. Niisiis on diagonaalmaatriks ortogonaalne parajasti siis, kui diagonaalil seisavad ainult arvud 1 või -1.

353. Olgu φ ja ψ ortogonaalsed teisendused, siis $\langle(\varphi\psi)(x), (\varphi\psi)(x)\rangle = \langle\varphi(\psi(x)), \varphi(\psi(x))\rangle = \langle\psi(x), \psi(x)\rangle = \langle x, x\rangle$, niisiis on tegemist alamrühmaga kõigi teisenduste rühmas.

354. Kui $a = b$, siis sobib näiteks samasusteisendus I. Kui $a = -b$, siis sobib $-I$. Muul juhul on $\operatorname{rank}(a, b) = 2$. Vaatleme ruumi E alamruumi $\operatorname{span}(a, b)$ baasi a, b, teeme temast ON baasi ja jätkame selle ruumi E ON baasiks. Tarvis on nüüd vektorite a ja b poolt määratud tasandil pöörata vektor a vektoriks b (aga tasandiga ortogonaalsed vektorid jätta paigale). Olgu $\cos\varphi = \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\|b\|}$, siis sellise teisenduse maatriks on $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Lihtne kontroll näitab ka, et tegemist on ortogonaalmaatriksiga, seetõttu on vastav teisendus ortogonaalteisendus.

355. a) $(\varphi(f))(x) = a_n(-1)^n x^n + \ldots + a_0$, seega $\langle\varphi(f), \varphi(g)\rangle = a_n b_n (-1)^{2n} + \ldots a_0 b_0 = \langle f, g\rangle$;
b) $(\varphi(f))(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$, seega $\langle\varphi(f), \varphi(g)\rangle = a_0 b_0 + \ldots + a_n b_n$.

356. a) kuna $E = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ ja ka teistpidi, siis on $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, seega $(A^{-t})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ eeldusel, et $A^T = A$;
b) $(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$;
c) kui $(AB)^T = AB$, siis $B^T A^T = AB$, millest $BA = AB$; kui $BA = AB$, siis $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$.

357. analoogiline eelmise ülesandega.

358. $\langle(\varphi + \psi)(x), y\rangle = \langle\varphi(x), y\rangle + \langle\psi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle + \langle x, \psi(y)\rangle = \langle x, (\varphi + \psi)(y)\rangle$.

Ortogonaalteisenduste jaoks väide ei kehti. Tõepoolest, kui vaadata ortogonaalteisenduse maatriksit ON baasi suhtes, peaks determinandiga 1 maatriksite summa olema determinandiga 1 maatriks, mis üldiselt ei kehti.

359. eelmise ülesande idee peale (vaja on skalaarkorrutamise aditiivsust ja homogeensust).

360. Ül. 329 põhjal vektori x koordinaadid baasil $e_1, \ldots, e_n$ on $\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle$.

361. Olgu $e_1, \ldots, e_n$ ON baas. Et φ ja ψ maatriksid sellel baasil on samad (vt. ül. 360), on iga x korral $\varphi(x)$ koordinaadid samad, mis $\psi(x)$ koordinaadid (vt y rolli järjest $e_1, \ldots, e_n$). Seega $\varphi(x) = \psi(x)$.

Alternatiiv: saame, et $\langle \varphi(x), \varphi(x) - \psi(x)\rangle = \langle \psi(x), \varphi(x) - \psi(x)\rangle$, millest $\langle \varphi(x) - \psi(x), \varphi(x) - \psi(x)\rangle = 0$, järelikult $\varphi(x) = \psi(x)$.

362. Olgu $\varphi\psi$ sümmeetriline. Eelmise ülesande valguses piisab näidata, et $\langle(\varphi\psi)(x), y\rangle = \langle(\psi\varphi)(x), y\rangle$ iga x ja y korral. Saame, et $\langle\varphi(\psi(x)), y\rangle = \langle x, \varphi(\psi(y))\rangle = \langle\varphi(x), \psi(y)\rangle = \langle\psi(\varphi(x)), y\rangle$.

Kommuteerugu φ ja ψ. Siis $\langle\varphi(\psi(x)), y\rangle = \langle\psi(\varphi(x)), y\rangle = \langle\varphi(x), \psi(y)\rangle = \langle x, \varphi(\psi(y))\rangle$.

Alternatiiv: olgu A ja B vastavalt φ ja ψ maatriksid mingi ON baasi suhtes. Siis $A^T = A$, $B^T = B$ ning ülesande väide on, et $(AB)^T = AB$ parajasti siis, kui $AB = BA$. Arvestades võrdust $(AB)^T = B^T A^T$, on nüüd väide ilmne.

363. $\langle(\varphi\psi+\psi\varphi)(x), y\rangle = \langle\varphi\psi(x), y\rangle+\langle\psi\varphi(x), y\rangle = \langle\psi(x), \varphi(y)\rangle+\langle\varphi(x), \psi(y)\rangle = \langle x, \psi\varphi(y)\rangle+\langle x, \varphi\psi(y)\rangle = \langle x, (\varphi\psi+\psi\varphi)(y)\rangle$.

Ka selle ülesande saab lahendada maatriksite keeles: $(AB + BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA$, kus A ja B on vastavalt φ ja ψ maatriksid mingi ON baasi suhtes.

364. Olgu $\varphi(x) = \lambda x$, $\varphi(y) = \mu y$, kus $\lambda \neq \mu$. Siis $\langle\lambda x, y\rangle = \langle x, \mu y\rangle$. Kui oleks $\langle x, y\rangle \neq 0$, saaksime $\lambda = \mu$, vastuolu.

365. Loeme algse ON baasi vektoriteks e_1, e_2 jne, ning uue baasi esitame selle suhtes.

a) $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $e_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $e_1' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $e_2' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$;

d) $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e_2' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $e_1' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_3' = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

f) $e_1' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_4' = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$,

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_4' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$